

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Программная инженерия

Том 14. № 11. 2023



Рисунок к статье Е. А. Басыни, Н. Карапетьянца, М. Карапетьянца
 «СИСТЕМА АНАЛИЗА ТРАНЗАКЦИЙ В СЕТИ BITCOIN»

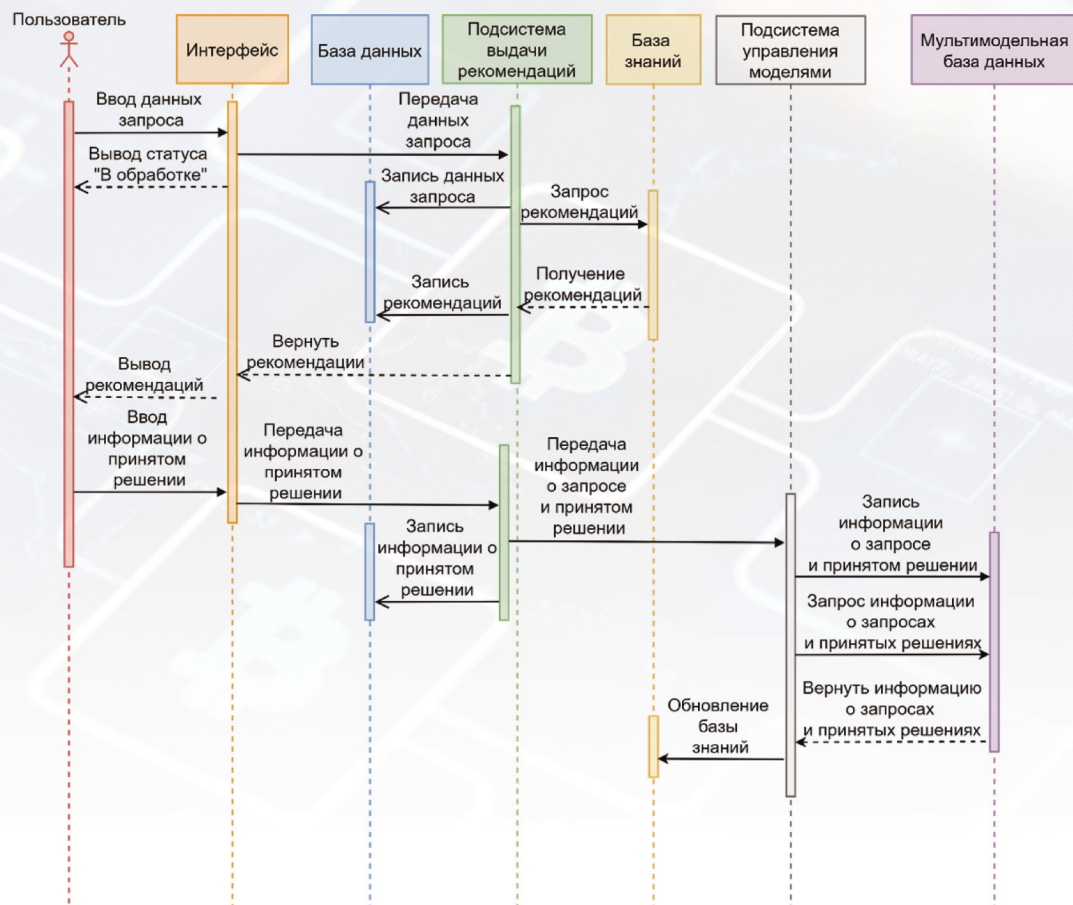


Рис. 6. UML-диаграмма последовательности системы поддержки принятия решений

Рисунок к статье С. В. Жукова, О. А. Ковалевой, С. В. Ковалева
 «АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПЕРЕКОМПОНОВКИ КОНТЕНТА
 НА СКОРОСТЬ ПОЛНОЙ ОТРИСОВКИ СТРАНИЦЫ»

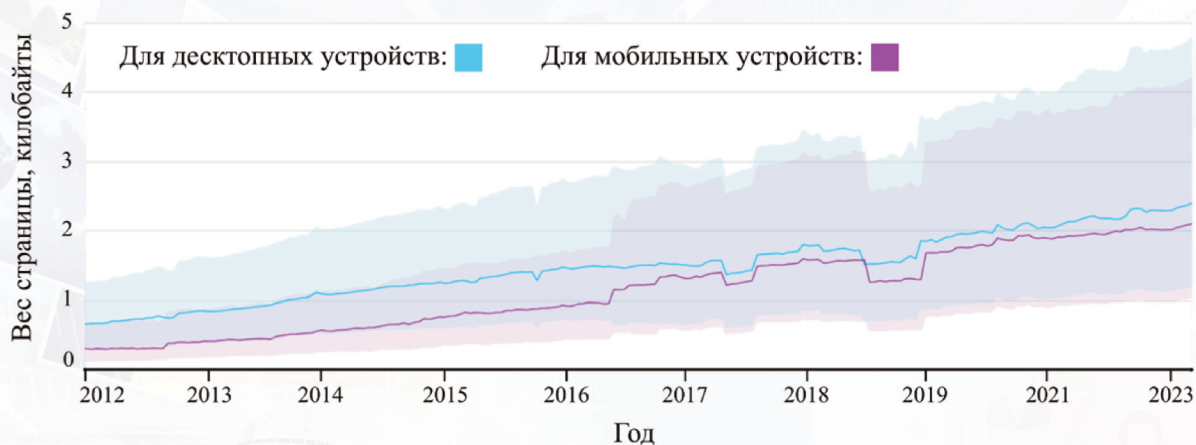


Рис. 2. Изменение среднего размера страниц с 2012 по 2023 г. (по данным HTTP Archive)

Программная инженерия

Пр
ИН
Том 14
№ 11
2023

Учредитель: Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

Издается с сентября 2010 г.

DOI 10.17587/issn.2220-3397

ISSN 2220-3397

Редакционный совет

Садовничий В.А., акад. РАН
(председатель)
Бетелин В.Б., акад. РАН
Васильев В.Н., чл.-корр. РАН
Макаров В.Л., акад. РАН
Панченко В.Я., акад. РАН
Стемпковский А.Л., акад. РАН
Ухлинов Л.М., д.т.н.
Федоров И.Б., акад. РАН
Четверушкин Б.Н., акад. РАН

Главный редактор

Васенин В.А., д.ф.-м.н., проф.

Редколлегия

Антонов Б.И.
Афонин С.А., к.ф.-м.н.
Бурдонов И.Б., д.ф.-м.н., проф.
Борзовс Ю., проф. (Латвия)
Гаврилов А.В., к.т.н.
Галатенко А.В., к.ф.-м.н.
Корнеев В.В., д.т.н., проф.
Костюхин К.А., к.ф.-м.н.
Махортов С.Д., д.ф.-м.н., доц.
Манцивода А.В., д.ф.-м.н., доц.
Назирова Р.Р., д.т.н., проф.
Нечаев В.В., д.т.н., проф.
Новиков Б.А., д.ф.-м.н., проф.
Павлов В.Л. (США)
Пальчунов Д.Е., д.ф.-м.н., доц.
Петренко А.К., д.ф.-м.н., проф.
Позднеев Б.М., д.т.н., проф.
Позин Б.А., д.т.н., проф.
Серебряков В.А., д.ф.-м.н., проф.
Сорокин А.В., к.т.н., доц.
Терехов А.Н., д.ф.-м.н., проф.
Филимонов Н.Б., д.т.н., проф.
Шапченко К.А., к.ф.-м.н.
Шундеев А.С., к.ф.-м.н.
Щур Л.Н., д.ф.-м.н., проф.
Язов Ю.К., д.т.н., проф.
Якобсон И., проф. (Швейцария)

Редакция

Чугунова А.В.

Журнал издается при поддержке Отделения математических наук РАН, Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ имени Н.Э. Баумана

СОДЕРЖАНИЕ

- Басыня Е. А., Карапетьянц Н., Карапетьянц М.** Система анализа транзакций в сети Bitcoin 523
- Godunov A. N.** Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double-Precision Using Extended Double-Precision Arithmetic 531
- Жуков С. В., Ковалева О. А., Ковалев С. В.** Анализ влияния автоматической перекомпоновки контента на скорость полной отрисовки страницы 550
- Ларченко А. Г.** Комплекс программных продуктов для удаленного контроля характеристик подвижного состава в режиме реального времени 563

Журнал зарегистрирован
в Федеральной службе
по надзору в сфере связи,
информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС77-38590 от 24 декабря 2009 г.

Журнал распространяется по подписке, которую можно оформить в подписных агентствах (индекс по Объединенному каталогу "Пресса России" — 22765) или непосредственно в редакции (для юридических лиц).

Тел.: (499) 270-16-52.

[Http://novtex.ru/prin/rus](http://novtex.ru/prin/rus) E-mail: prin@novtex.ru

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и Russian Science Citation Index (RSCI).

Журнал входит в Перечень научных журналов, в которых по рекомендации ВАК РФ должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

© Издательство "Новые технологии", "Программная инженерия", 2023

Editorial Council:

SADOVNICHY V. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS (*Head*)
BETELIN V. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Acad. RAS
VASIL'EV V. N., Dr. Sci. (Tech.), Cor.-Mem. RAS
MAKAROV V. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Acad.
RAS
PANCHENKO V. YA., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS
STEMPKOVSKY A. L., Dr. Sci. (Tech.), Acad. RAS
UKHLINOV L. M., Dr. Sci. (Tech.)
FEDOROV I. B., Dr. Sci. (Tech.), Acad. RAS
CHETVERTUSHKIN B. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS

Editor-in-Chief:

VASENIN V. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.)

Editorial Board:

ANTONOV B.I.
AFONIN S.A., Cand. Sci. (Phys.-Math)
BURDONOV I.B., Dr. Sci. (Phys.-Math)
BORZOV JURIS, Dr. Sci. (Comp. Sci), Latvia
GALATENKO A.V., Cand. Sci. (Phys.-Math)
GAVRILOV A.V., Cand. Sci. (Tech)
JACOBSON IVAR, Dr. Sci. (Philos., Comp. Sci.),
Switzerland
KORNEEV V.V., Dr. Sci. (Tech)
KOSTYUKHIN K.A., Cand. Sci. (Phys.-Math)
MAKHORTOV S.D., Dr. Sci. (Phys.-Math)
MANCIVODA A.V., Dr. Sci. (Phys.-Math)
NAZIROV R.R., Dr. Sci. (Tech)
NECHAEV V.V., Cand. Sci. (Tech)
NOVIKOV B.A., Dr. Sci. (Phys.-Math)
PAVLOV V.L., USA
PAL'CHUNOV D.E., Dr. Sci. (Phys.-Math)
PETRENKO A.K., Dr. Sci. (Phys.-Math)
POZDNEEV B.M., Dr. Sci. (Tech)
POZIN B.A., Dr. Sci. (Tech)
SEREBR'YAKOV V.A., Dr. Sci. (Phys.-Math)
SOROKIN A.V., Cand. Sci. (Tech)
TEREKHOV A.N., Dr. Sci. (Phys.-Math)
FILIMONOV N.B., Dr. Sci. (Tech)
SHAPCHENKO K.A., Cand. Sci. (Phys.-Math)
SHUNDEEV A.S., Cand. Sci. (Phys.-Math)
SHCHUR L.N., Dr. Sci. (Phys.-Math)
YAZOV Yu. K., Dr. Sci. (Tech)

Editors:

CHUGUNOVA A.V.

CONTENTS

Basynya E. A., Karapetyants N., Karapetyants M. Bitcoin Transaction Analysis System	523
Godunov A. N. Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double-Precision Using Extended Double-Precision Arithmetic	531
Zhukov S. V., Kovaleva O. A., Kovalev S. V. Analysis of the Impact of Automatic Content Reflow on the Speed of Full Page Rendering . . .	550
Larchenko A. G. A Set of Products for Remote Control of Rolling Stock Characteristics	563

Е. А. Басыня, канд. техн. наук, доц., вед. науч. сотр., eabasynya@mephi.ru,
Н. Карапетьянц, ассистент, nkarapetyants@mephi.ru,
М. Карапетьянц, инженер, mkarapetyants@mephi.ru,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва,

Система анализа транзакций в сети Bitcoin

Поступила в редакцию 14.06.2023

Принята к публикации 19.09.2023

Отсутствие системы идентификации пользователей и наличие разнообразных способов запуски транзакции в сети Bitcoin вызывают большой интерес у злоумышленников и могут использоваться ими для осуществления незаконной деятельности. Целью настоящей работы является разработка метода проверки транзакции в сети Bitcoin для повышения эффективности идентификации путей движения средств, полученных незаконным путем, а также их источников. В рамках работы решаются следующие задачи: разработка метода проверки транзакции в сети Bitcoin и разработка системы поддержки принятия решений, включающая предложенный метод. Результаты, представленные в настоящей работе, дают возможность разработать новые и улучшить существующие инструментальные средства анализа транзакций в рамках будущих исследований, что позволит эффективнее проводить идентификацию средств в сети Bitcoin, связанных с незаконной деятельностью.

Ключевые слова: блокчейн, Bitcoin, анализ транзакции, KYC, KYT, кластеризация, эвристика, СППР

Для цитирования:

Басыня Е. А., Карапетьянц Н., Карапетьянц М. Система анализа транзакций в сети Bitcoin // Программная инженерия. 2023. Том 14, № 11. С. 523—530. DOI: 10.17587/prin.14.523-530.

Введение

Несмотря на общий спад на рынке цифровых активов, доля криптовалюты Bitcoin, участвующей в незаконной деятельности, возрастает с каждым годом. По сравнению с 2021 г. использование данной криптовалюты выросло на 2,5 млрд долл. США и составило 20,6 млрд долл. США. Большой вклад в эти показатели вносят мошенничество, кража средств, спонсирование терроризма, отмывание денег и операции, проводимые в теневой части глобальной сети Интернет. В качестве примера можно привести область, связанную с отмыванием средств, где только за 2022 г. было проведено операций на общую сумму 2 млрд долл. США. Для сокрытия движения средств и обмена между участниками сети злоумышленники использовали несколько криптовалютных инструментальных средств: необслуживаемые кошельки, сервисы запуски средств, магазины теневой части сети TOR и специализированные протоколы. Большая часть средств была переведена с использованием протоколов DeFi для обмена на более ликвидные криптоактивы [1].

Регулирование криптовалют в общем случае имеет запретительный характер как в мире, так и в Российской Федерации. Это обусловлено высокими рисками, связанными с использованием криптовалюты в незаконной деятельности и ее влиянием на стабильность финансовой системы. Исключением является сфера, где криптовалюта используется в качестве инвестиционного инструментария. В таком случае нормативно-правовое регулирование направлено на защиту инвесторов от финансового мошенничества, предоставление дополнительного финансирования малым и средним предприятиям и обеспечение финансовой доступности. Реализация данных целей не может быть осуществлена без использования технических средств анализа, проверки транзакций и идентификации источников средств [2]. Процедуры проверки транзакции KYT (*Know Your Transaction*) и проверки клиентов KYC (*Know Your Customer/Client*) являются неотъемлемой частью общего процесса предотвращения незаконной деятельности, связанной с отмыванием денег или финансированием терроризма. Ключевой задачей первой процедуры

является отслеживание транзакций на предмет подозрительных действий. Она включает в себя анализ транзакций пользователей для выявления аномалий и закономерностей, которые могут указывать на незаконную деятельность. Процедура KYC, в свою очередь, осуществляет проверку личности и финансовых данных пользователя. В рамках проведения процедуры осуществляются сбор и анализ данных из разных источников, в том числе и данных, предоставленных самим пользователем.

В настоящее время наиболее распространенными инструментальными средствами анализа транзакций являются Crystal, Chainalysis и CipherTrace. Каждый поставщик в разработке алгоритмов для распутывания цепочек транзакций и идентификации участников сети применяет свой индивидуальный подход, который обладает уникальными особенностями. Это объясняет разнообразие подходов к расследованию финансовых инцидентов, описанных в годовых отчетах соответствующих компаний. Отсутствие информации о работе данных алгоритмов не позволяет точно определить надежность результатов их функционирования.

В предыдущей работе авторов [3] были проведены системные исследования анализа транзакций

в сети Bitcoin. Было выявлено, что эффективность процесса анализа и проверки транзакции в сети Bitcoin зависит от следующих факторов: объема и согласованности информации о транзакциях, качества набора данных, используемых для машинного обучения. Этот факт подтверждается в новых исследованиях [4–7] данной области. В рамках анализа предметной области был определен расширенный перечень эвристических правил анализа транзакций Bitcoin. Такой анализ позволит улучшить качество набора данных для решения задач кластеризации и классификации адресов и впоследствии повысить эффективность процесса анализа транзакций в сети Bitcoin. Соответственно, возрастает актуальность создания средств контроля транзакций в сети Bitcoin.

1. Постановка задачи

Целью данного исследования ставилась разработка метода проверки транзакции в сети Bitcoin для повышения эффективности идентификации путей движения средств, полученных незаконным путем, а также их источников.

В рамках системного анализа была выполнена декомпозиция общей цели с применением много-

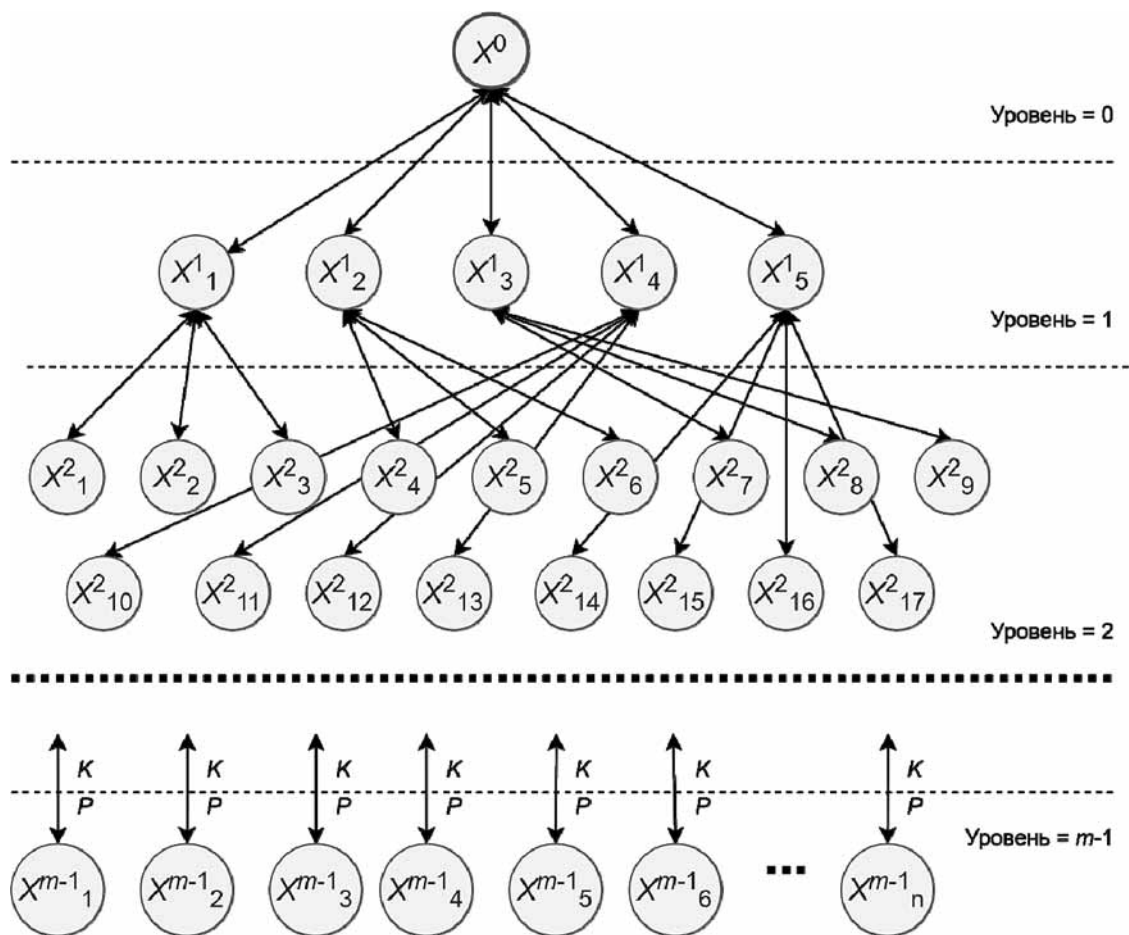


Рис. 1. Граф целей и задач

уровневого подхода, ее представление в виде графа проиллюстрировано на рис. 1.

На рис. 1 введены следующие обозначения:

X_g^j — вершина (узел), представляющая цель на верхних уровнях и задачи на нижних;

$j = \overline{0, (m-1)}$ — номер уровня;

$g = \overline{1, i}$ и $g = \overline{1, n}$ — индекс цели/задачи на соответствующем уровне;

$\downarrow \overset{K}{P}$ — множество ребер графа с типом связей «многие ко многим». Пояснение задач в графе представлено в таблице.

Поскольку решение каждой задачи X_g^j характеризует бинарный показатель ρ_g^j , то цель F для уровня $j + 1$ можно представить в виде:

$$F = \max \sum_{g=1}^n \rho_g^j,$$

$$\rho_g^j = \begin{cases} 0 & \text{— задача не выполнена;} \\ 1 & \text{— задача выполнена успешно.} \end{cases}$$

Цели и задачи

Узел графа	Наименование узла
Уровень = 0	
X^0	Разработка метода проверки транзакции в сети Bitcoin для повышения эффективности идентификации путей движения средств, полученных незаконным путем, а также их источников
Уровень = 1	
X_1^1	Исследование предметной области
X_2^1	Разработка метода проверки транзакции в сети Bitcoin
X_3^1	Разработка системы поддержки принятия решений при осуществлении платежей в сети Bitcoin
X_4^1	Программная реализация предложенного решения
X_5^1	Экспериментальное исследование системы в сравнительном анализе с существующими решениями
Уровень = 2	
X_1^2	Исследование алгоритмов и методов анализа транзакций в сети Bitcoin
X_2^2	Исследование инструментария и средств анализа транзакций в сети Bitcoin
X_3^2	Систематизация проблематики предметной области
X_4^2	Моделирование предметной области
X_5^2	Определение критериев оценки риска при работе с транзакцией
X_6^2	Формализация метода
X_7^2	Проектирование базы знаний и базы данных
X_8^2	Проектирование архитектуры системы
X_9^2	Моделирование системы
X_{10}^2	Моделирование решения
X_{11}^2	Проектирование информационной системы
X_{12}^2	Проектирование и реализация технологического конвейера по разработке ПО
X_{13}^2	Программная инженерия
X_{14}^2	Комплексное автоматизированное тестирование предложенного решения
X_{15}^2	Разработка программного стенда для проведения экспериментальных исследований
X_{16}^2	Экспериментальное исследование системы
Уровень = $m - 1$	
X_1^{m-1}	Развертывание кластера DockerSwarm
X_2^{m-1}	Запуск контейнера баз данных PostgreSQL
X_3^{m-1}	Запуск контейнера Bitcoin Core RPC
X_4^{m-1}	Инициализация кластера баз данных PostgreSQL
X_5^{m-1}	Запуск контейнера баз данных Neo4j
X_6^{m-1}	Настройка виртуальной машины для баз данных с помощью Ansible

2. Предлагаемое решение

В целях разрешения проблемных вопросов, связанных с хранением данных и кластеризацией адресов, был разработан метод проверки транзакции в сети Bitcoin для повышения эффективности идентификации путей движения средств, полученных незаконным путем, а также их источников. Блок-схемы и диаграммы предлагаемого метода представлены на рис. 2—6.

На первом этапе предлагаемого метода выполняется инициализация процесса сбора данных (рис. 2). Специфика заключается в получении большого количества данных в разнообразном представлении с нескольких источников, что вызывает необходимость использования мультимодельной системы управления базами данных (МСУБД). Данные системы позволяют осуществлять централизованное управление и хранение разных моделей данных и миграцию между ними. Такие базы данных могут поддерживать различные модели данных: реляционные, объектно-ориентированные, модели «ключ-значение», модели с широкими столбцами, модели документов и графов.

Необходимость в МСУБД обусловлена использованием алгоритмов машинного обучения и си-

стемы по поддержке принятия решений в процессе анализа транзакций, где от качества, объема и вида набора данных зависит конечный результат анализа транзакций и перечня выдаваемых рекомендаций.

Далее следует этап обработки и анализа данных, которые хранятся в мультимодельной базе данных. Одновременно с данными, которые вводит пользователь или эксперт, они поступают в подсистему выдачи рекомендаций и объяснений. Эта подсистема предоставляет пользователю соответствующую информацию о сути сети Bitcoin, рекомендации для принятия решения о проведении или переводе денежных средств (рис. 3). В целях оптимизации этого процесса возможно применение системы по поддержке принятия решений (СППР).

Основой любой СППР является база знаний [10]. Продукционную модель базы знаний можно определить как совокупность

$$P = (F, R, G, K, I),$$

где F — конечное множество фактов для решаемой проблемы в предметной области; G — множество целей или терминальных фактов СППР; I — интерпретатор правил, реализующий процесс вывода. Задача интерпретатора I — проверить истинность заданных целей на основании прямой или обратной цепочки вывода в определенной ситуации; R — множество правил (продукций) вида

$$r_m: \text{ЕСЛИ } f_i \text{ И } f_j \dots \text{ И } f_n \text{ ТО } f_k,$$

где r_m — имя правила; $r_m \in R$; $f_i, f_j \dots f_n$ — условия выполнения правила; f_k — следствие правила, $f_i, f_j \dots f_n, f_k \in F$.

В представленной на рис. 3 модели K является множеством разрешенных комбинаций фактов, в которое не входят комбинации, содержащие взаимоисключающие факты. Результатом продукции является установка одного из фактов множества F .

Продукционную модель базы знаний можно представить в виде направленного И/ИЛИ-графа (рис. 4). Вершины в графе соответствуют целям, фактам и правилам базы знаний СППР. Дуги определяют отношения между фактами.

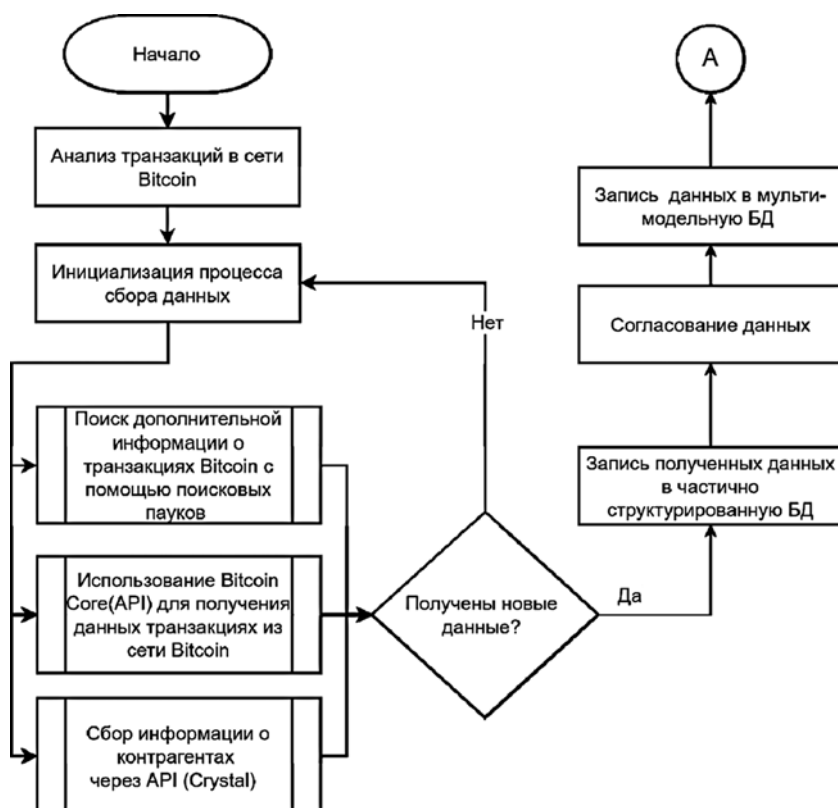


Рис. 2. Блок-схема процесса сборки, обработки и агрегации информации о транзакциях и субъектах сети Bitcoin

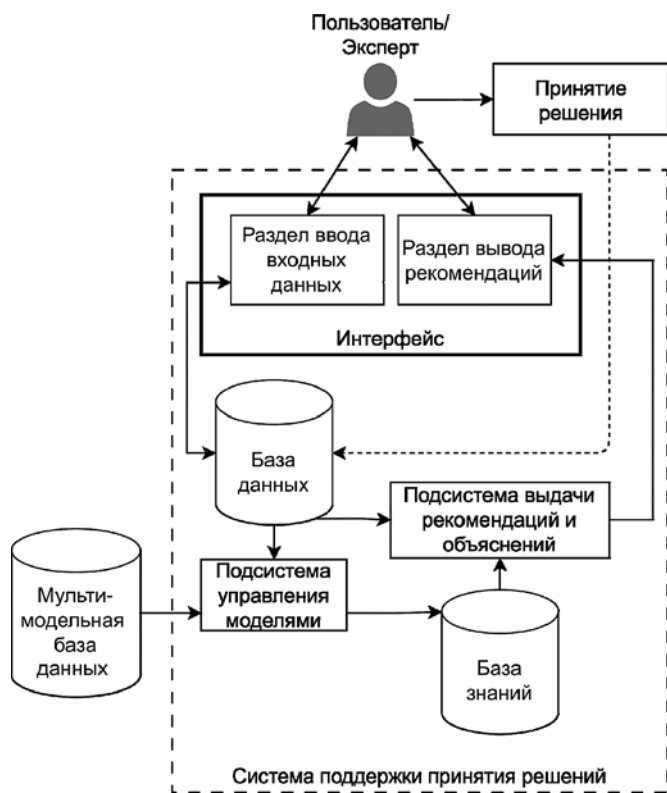


Рис. 3. UML-диаграмма компонентов системы поддержки принятия решений

В общем случае каждый факт, включая целевые факты из множества G , может устанавливаться несколькими правилами. На рис. 4 цель g_1 устанавливается либо правилом r_1 , либо правилом r_2 . Дуги, входящие в вершины и обозначенные r , оказываются связанными конъюнктивно, а дуги, входящие в вершины g или f , — дизъюнктивно.

Подсистема управления моделями осуществляет проведение экспериментов и запись в базу знаний на основе полученных результатов. При формировании новых знаний учитывается также информация о принятом пользователем решении. В перечень проводимых экспериментов подсистемой управления моделями входит кластеризация адресов сети Bitcoin.

Сеть Bitcoin может быть представлена в виде ориентированного графа, где вершины — это субъект сети, а ребра — число перечисленных средств. Для кластеризации такого графа используется алгоритм распространения меток, который обеспечивает высокую скорость работы, но об-



Рис. 4. Пример И/ИЛИ-графа продукционной базы знаний

ладает низкой точностью в сравнении с другими алгоритмами.

Кластеризация адресов предполагает выявление подмножества адресов, имеющих одного владельца, являющегося субъектом сети Bitcoin. Субъектами или сущностями сети являются участники, которые подключены к сети с помощью толстого или тонкого клиентов. Сущностями сети могут быть биржи, интернет-магазины, казино, майнеры (участники, которые осуществляют добычу криптовалюты, проверку транзакций и добавление блоков в цепочку), пользователи сети Интернет, сервисы анонимизации и др. (рис. 5).

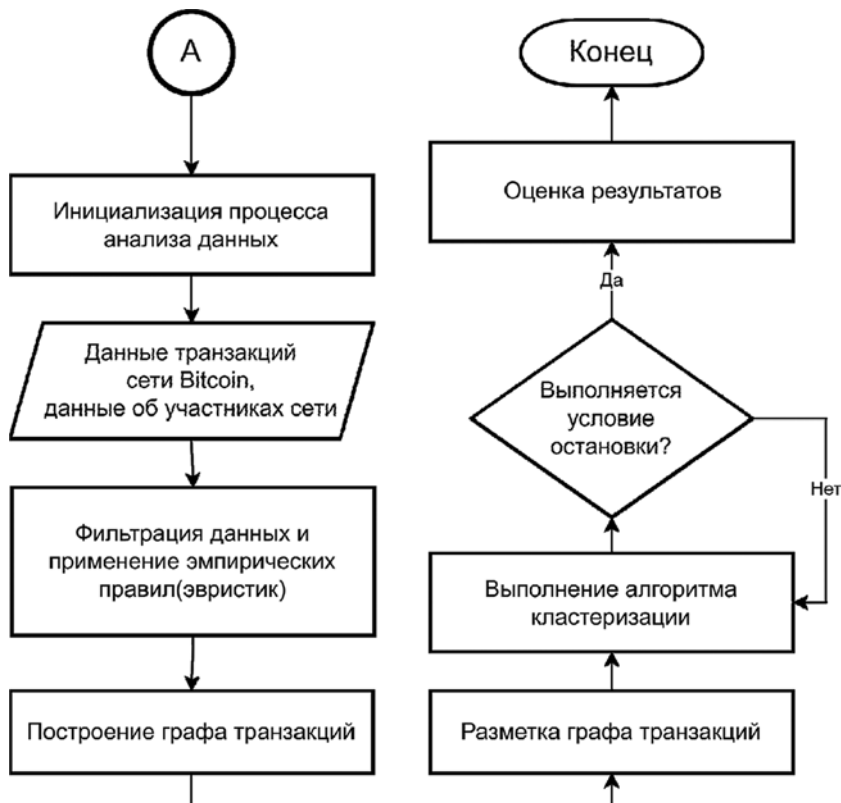


Рис. 5. Блок-схема процесса анализа, кластеризации адресов и оценки полученных результатов о транзакциях и субъектах сети Bitcoin (продолжение рис. 2)

Обычно для каждой новой транзакции субъект сети генерирует новый адрес для повышения сложности отслеживания истории переводов. Для анализа истории транзакции и принадлежности адресов к той или иной сущности в сети Bitcoin используются эмпирические правила, называемые эвристиками [8, 9]. Применение эвристики при анализе транзакций не подразумевает получения точного результата. Каждая из эвристик дает неточные и неоднозначные результаты в некоторых случаях, однако в совокупности и в сочетании с внешними данными из различных источников точность анализа транзакции значительно повышается.

Существенную роль в кластеризации адресов сети Bitcoin играют эвристики, которые позволяют распутать цепочку транзакций и определить адреса отправителя и адреса получателя. Некоторые эвристики основываются на особенностях функционирования сети, другие — на отличительных признаках самих транзакций. Используя комбинацию следующих правил: «Эвристика общей траты», «Эвристика сдачи (смены адреса)», «Эвристика Coinbase транзакции (майнинг)», «Консолидация UTXO» и Лувенского метода, можно достичь увеличения точности кластеризации адресов [10, 11]. Как следствие, появляется возможность добиться повышения эффективности последующей оценки полученных результатов, а точнее — идентификации пользователей в сети Bitcoin.

Разработанный метод предоставляет возможность эффективного использования комбинации эмпирических правил, что позволит проводить более точную кластеризацию адресов и обеспечит повышение достоверности идентификации участников сети Bitcoin.

Следует отметить, что эвристики занимают ключевое место в работе рассматриваемой системы. Каждый этап ее работы базируется на исключительных и эффективных эвристических алгоритмах, что помогает системе добиться максимальной точности и скорости при анализе транзакций и адресов.

Подробное описание сценария использования СППР представлено на рис. 6, см. вторую сторону обложки. На диаграмме [12] в качестве участника представлен пользователь, который осуществляет взаимодействие с системой через интерфейс. После ввода данных запроса, которые содержат информацию о транзакциях и владельце адреса сети Bitcoin, они передаются в подсистему выдачи рекомендаций, а пользователю выводится статус «В обработке». Далее подсистема выдачи реко-

мендаций записывает данные запроса в базу данных. После этого на основе полученных данных осуществляется запрос рекомендаций и объяснений из базы знаний и их запись в базу данных, где хранится информации о запросе пользователя. На следующем шаге рекомендации передаются в интерфейс, который предоставляет их пользователю. Впоследствии пользователь вводит информацию о принятом решении. Далее эта информация передается в подсистему выдачи рекомендации и вместе с информацией о запросе пользователя и выданных рекомендациях передается в подсистему управления моделями. Затем осуществляется запись полученных данных в мультимодельную базу данных для поддержания актуальности информации обо всех пользовательских запросах, выданных рекомендациях и объяснениях. Далее, используя полученную информацию и соответствующую модель, подсистема управления моделями добавляет новую информацию в базу знаний. Таким образом, улучшение СППР обеспечивается путем использования информации о принятых пользователями решениях.

За счет расширенного сбора информации о транзакциях и участниках сети, а также использования эвристик в СППР повышается эффективность идентификации путей движения средств, полученных незаконным путем, а также их источников. В отличие от существующих методов предполагаемый подход позволяет повысить достоверность идентификации субъектов блокчейн Bitcoin за счет использования интеллектуальных методов анализа данных.

Заключение

В рамках исследования был разработан метод проверки транзакции в сети Bitcoin, нивелирующий недостатки существующих методов и средств. Научная новизна предлагаемого решения заключается в повышении эффективности идентификации путей движения средств, полученных незаконным путем, а также их источников посредством комплексного анализа транзакций, включающего расширенный сбор информации и ее последующую агрегацию в мультимодельной базе данных СППР. Достоверность идентификации субъектов сети Bitcoin повышается за счет использования интеллектуальных методов анализа.

Предложенный метод включает в себя улучшения по трем аспектам: сбор, хранение и анализ информации о транзакциях в сети Bitcoin. Этап сбора

информации о транзакциях сети Bitcoin включает в себя получение информации из трех источников: Bitcoin Core, глобальная вычислительная сеть Интернет и поставщик данных о владельцах сети. В целях обеспечения высокой согласованности и минимальной избыточности данных предлагается использовать мультимодельную базу данных. Для повышения точности определения владельцев адресов совместно с традиционными алгоритмами кластеризации адресов предлагается использовать расширенный перечень эвристик, приведенный в статье. Данный подход позволит существенно увеличить точность кластеризации адресов.

В ходе работы была выявлена необходимость создания репрезентативного и актуального набора данных для проверки точности алгоритмов кластеризации адресов с оптимизацией быстрой работы. Сравнительного анализа требуют также улучшенные версии данных алгоритмов, которые были представлены в недавних исследованиях.

Результаты работы могут способствовать совершенствованию существующих или разработке новых систем анализа сети Bitcoin, что позволит с высокой точностью проводить идентификацию средств, полученных незаконным путем, и их источников.

В рамках дальнейших исследований планируется экспериментально проверить изложенные в статье гипотезы и сравнить их с существующими решениями, а также представить программную реализацию полученного в ходе данной работы метода.

Данная работа выполнена при поддержке Министерства Науки и Высшего образования (проект государственного задания № FSWU-2023-0031).

Список литературы

1. **The Chainalysis** 2023 Crypto Crime Report: офиц. сайт. URL: <https://go.chainalysis.com/2023-crypto-crime-report.html> (дата обращения 01.06.2023).
2. **Mezquita Y., Plaza-Hernández M., Abbasi M., Prieto J.** Cryptocurrencies, Systematic Literature Review on Their Current Context and Challenges // International Congress on Blockchain and Applications. 2023. Vol. 595. P. 162–172. DOI: 10.1007/978-3-031-21229-1_16.
3. **Басыня Е. А., Карапетьянц Н., Карапетьянц М.** Исследование существующих подходов к анализу транзакций в сети Bitcoin // Программная инженерия. 2023. Том 14, № 10. С. 493–501. DOI: 10.17587/prin.14.493-501.
4. **Tironsakkul T., Maarek M., Eross A., Just M.** Context matters: Methods for Bitcoin tracking // Forensic Science International: Digital Investigation. 2022. Vol. 42–43. Id 301475. DOI: 10.1016/j.fsidi.2022.301475.
5. **Lin C-Y., Liao H-K., Tsai F-C.** A Systematic Review of Detecting Illicit Bitcoin Transactions // Procedia Computer Science. 2022. Vol. 207. P. 3217–3225. DOI: 10.1016/j.procs.2022.09.379.
6. **He X., He K., Lin S.** et al. Bitcoin address clustering method based on multiple heuristic conditions // IET Blockchain. 2022. Vol. 2, No. 2. P. 44–56. DOI: 10.1049/blc2.12014.
7. **Mun H., Lee Y.** BitSQL: A SQL-based Bitcoin Analysis System // 2022 IEEE International Conference on Blockchain and Cryptocurrency (ICBC). IEEE. 2022. P. 1–8. DOI: 10.1109/ICBC54727.2022.9805551.
8. **Zhang Y., Wang J., Luo J.** Heuristic-Based Address Clustering in Bitcoin // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 210582–210591. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3039570.
9. **Gong Y., Chow K.-P., Ting H-F., Yiu S.-M.** Analyzing the error rates of bitcoin clustering heuristics // Advances in Digital Forensics XVIII: 18th IFIP WG 11.9 International Conference, Virtual Event, January 3–4, 2022, Revised Selected Papers. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 187–205. DOI: 10.1007/978-3-031-10078-9_11.
10. **Zheng B., Zhu L., Shen M.** et al. Identifying the vulnerabilities of bitcoin anonymous mechanism based on address clustering // Science China Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number: 132101. DOI: 10.1007/s11432-019-9900-9.
11. **Jeyasheela Rakkini M. J., Geetha K.** Detection of Bitcoin Miners by Clustering Crypto Address with Google BigQuery Open Dataset // Soft Computing: Theories and Applications: Proceedings of SoCTA 2021. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. P. 25–32. DOI: 10.1007/978-981-19-0707-4_3.
12. **Kulkarni R. N., Srinivasa C. K.** Abstraction of Activity Diagram from Sequence Diagram // Data Engineering and Intelligent Computing: Proceedings of 5th ICICC 2021, Vol. 1. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. Vol. 446. P. 145–156. DOI: 10.1007/978-981-19-1559-8_15.

Bitcoin Transaction Analysis System

E. A. Basinya, Associate Professor, Leading Researcher, eabasynya@mephi.ru,
N. Karapetyants, Assistant of Department, nkarapetyants@mephi.ru,
M. Karapetyants, IICS Engineer, mkarapetyants@mephi.ru,
National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, 115409, Russian Federation

Corresponding author:

Evgeniy A. Basynya, Associate Professor, Leading Researcher,
National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, 115409, Russian Federation
E-mail: eabasynya@mephi.ru

*Received on June 14, 2023
Accepted on September 19, 2023*

The lack of a user identification system and the existence of a variety of ways to obfuscate a transaction on the Bitcoin network is of great interest to attackers and can be used by them to conduct illegal activities. There is a need to develop new methods of cash identification in the Bitcoin network. The purpose of this work is to develop a method of transaction verification in the Bitcoin network to improve the efficiency of the process of identification of illegally obtained funds and their sources. The work solves the following tasks: the development of a method for transaction verification in the Bitcoin network and the development of a decision support system, which includes the proposed method. The article describes each of the stages of the method: collection, aggregation, processing and analysis of information. The information analysis stage proposes a clustering method that takes into account an extended set of empirical rules (heuristics) of transaction analysis, as well as information about Bitcoin network address owners. The scientific novelty lies in increasing the efficiency of the identification process of illegally obtained funds and their sources through a comprehensive analysis of transactions, including the extended collection of information and its subsequent aggregation in the multi-model database of the decision support system. In contrast to existing methods, the reliability of the identification of Bitcoin network subjects is increased through the use of intelligent methods of data analysis. The results of this work will provide an opportunity to develop new and improve existing transaction analysis tools in future research, which will allow more effective identification of funds in the Bitcoin network associated with illegal activities.

Keywords: blockchain, Bitcoin, KYC, KYT, transaction analysis, clusterization, heuristic, DSS

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state task project No. FSWU-2023-0031).

For citation:

Basynya E. A., Karapetyants N., Karapetyants M. Bitcoin Transaction Analysis System, *Programmnyaya Ingeneria*, 2023, vol. 14, no. 11, pp. 523—530. DOI: 10.17587/prin.14.523-530.

References

1. **Chainalysis** — The 2023 Crypto Crime Report, Chainalysis, available at: <https://go.chainalysis.com/2023-crypto-crime-report.html> (date of access 01.06.2023).
2. **Mezquita Y., Plaza-Hernández M., Abbasi M., Prieto J.** Cryptocurrencies, Systematic Literature Review on Their Current Context and Challenges. *International Congress on Blockchain and Applications*, 2023, vol. 595, pp. 162—172. DOI: 10.1007/978-3-031-21229-1_16.
3. **Basynya E. A., Karapetyants N., Karapetyants M.** A Study of Existing Approaches to Transaction Analysis in the Bitcoin Network, *Programmnyaya Ingeneria*, 2023, vol. 14, no. 10, pp. 493—501. DOI: 10.17587/prin.14.493-501.
4. **Tironsakkul T., Maarek M., Eross A., Just M.** Context matters: Methods for Bitcoin tracking. *Forensic Science International: Digital Investigation*, 2022, vol. 42—43, id. 301475. DOI: 10.1016/j.fsidi.2022.301475.
5. **Lin C-Y, Liao H-K, Tsai F-C.** A Systematic Review of Detecting Illicit Bitcoin Transactions, *Procedia Computer Science*, 2022, vol. 207, pp. 3217—3225. DOI: 10.1016/j.procs.2022.09.379.
6. **He X., He K., Lin S.** et al. Bitcoin address clustering method based on multiple heuristic conditions, *IET Blockchain*, 2022, vol. 2, no. 2, pp. 44—56. DOI: 10.1049/blc2.12014.
7. **Mun H., Lee Y.** BitSQL: A SQL-based Bitcoin Analysis System, *2022 IEEE International Conference on Blockchain and Cryptocurrency (ICBC)*, Shanghai, China, 2022, pp. 1—8. DOI: 10.1109/ICBC54727.2022.9805551.
8. **Zhang Y., Wang J., Luo J.** Heuristic-Based Address Clustering in Bitcoin, *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 210582—210591. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3039570.
9. **Gong Y., Chow K-P, Ting H-F** et al. Analyzing the error rates of bitcoin clustering heuristics, *Advances in Digital Forensics XVIII: 18th IFIP WG 11.9 International Conference, Virtual Event*, January 3—4, 2022, Revised Selected Papers, 2022, vol. 653, pp. 187—205. DOI: 10.1007/978-3-031-10078-9_11.
10. **Zheng B., Zhu L., Shen M.** et al. Identifying the vulnerabilities of bitcoin anonymous mechanism based on address clustering, *Science China Information Sciences*, 2020, vol. 63, article number 132101. DOI: 10.1007/s11432-019-9900-9.
11. **Jeyasheela Rakkini M. J., Geetha K.** Detection of Bitcoin Miners by Clustering Crypto Address with Google BigQuery Open Dataset, *Soft Computing: Theories and Applications: Proceedings of SoCTA 2021*, Singapore: Springer Nature Singapore, 2022, vol. 465, pp. 25—32. DOI: 10.1007/978-981-19-0707-4_3.
12. **Kulkarni R. N., Srinivasa C. K.** Abstraction of Activity Diagram from Sequence Diagram, *Data Engineering and Intelligent Computing: Proceedings of 5th ICICC 2021*, volume 1, Singapore: Springer Nature Singapore, 2022, vol. 446, pp. 145—156. DOI: 10.1007/978-981-19-1559-8_15.

Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double-Precision Using Extended Double-Precision Arithmetic

A. N. Godunov, PhD, Head of Department, nkag@niisi.ras.ru,
Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences” (SRISA), Moscow, 117218, Russian Federation

Corresponding author:

Aleksandr N. Godunov, PhD, Head of Department,
Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences” (SRISA), Moscow, 117218, Russian Federation
E-mail: nkag@niisi.ras.ru

Received on July 07, 2023

Accepted on August 28, 2023

The article presents an effective algorithm for calculating the correctly rounded exponent for any of the rounding modes specified by the IEEE 754 standard. The argument and the function value are double-precision numbers, but the algorithm itself uses extended double-precision arithmetic for calculations. At the argument reduction stage, we approximate the argument with numbers whose exponent value has a short mantissa, which makes calculations faster. The article gives a formal description of the algorithm and a proof of its correctness. The function has the shortest maximum execution time among the considered functions calculating correctly rounded exponent. The execution time slightly depends on the value of the argument, which may be important for critical applications.

Keywords: algorithm, exponent, correct rounding, double-precision

For citation:

Godunov A. N. Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double-Precision Using Extended Double-Precision Arithmetic, *Programmная Ingeneria*, 2023, vol. 14, no. 11, pp. 531–549. DOI: 10.17587/prin.14.531-549.

УДК 004.054

DOI: 10.17587/prin.14.531-549

А. Н. Годунов, канд. физ.-мат. наук, зав. отделом, nkag@niisi.ras.ru,
Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), Москва

Вычисление корректно округленного значения экспоненты с двойной точностью с использованием арифметики расширенной двойной точности

Поступила в редакцию 07.07.2023

Принята к публикации 28.08.2023

Представлен эффективный алгоритм вычисления корректно округленного значения экспоненты для любого из режимов округления, предусмотренных стандартом IEEE 754. Аргумент

и значение функции представляют собой числа двойной точности, но сам алгоритм использует для вычислений расширенную арифметику двойной точности. На этапе сокращения аргумент аппроксимируется числами, значение экспоненты которых имеет короткую мантиссу, что ускоряет процесс его вычисления. Дано формальное описание алгоритма и доказательство его корректности. Функция имеет наименьшее максимальное время выполнения среди рассматриваемых функций, вычисляющих корректно округленную экспоненту. Время выполнения не сильно зависит от значения аргумента, что может быть существенным для критически важных приложений.

Ключевые слова: алгоритм, экспонента, корректное округление, двойная точность

Для цитирования:

Godunov A. N. Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double-Precision Using Extended Double-Precision Arithmetic // Программная инженерия. 2023. Том 14, № 11. С. 531–549. DOI: 10.17587/prin.14.531-549.

Introduction

The correctly rounded exponent is the result of rounding the exact value of the exponent. The functions calculating the correctly rounded exponent provide the best approximation and ensure portability across platforms. The IEEE 754 [1] standard recommends implementing the exponential function that calculates the correctly rounded value. Computing the correctly rounded exponent requires high accuracy and, as a result, significant computation time. Because of this, functions that return the correctly rounded exponent value are not widely used.

To reduce the time for calculating the correctly rounded exponent, we suggest using extended double-precision arithmetic and approximating the exponent values by numbers with short mantissas at the argument reduction stage. Using extended double precision arithmetic helps make the algorithm more efficient. However, there are new problems when using extended double-precision arithmetic. This is because rounding when using extended double-precision arithmetic is different from rounding when using double-precision arithmetic, and subnormal numbers in double-precision arithmetic are not subnormal in extended double-precision arithmetic.

In this paper, we propose the algorithm for calculating the correctly rounded value of the exponential function. The function's argument and value are double-precision numbers, but calculations use extended double-precision arithmetic. A brief description of the algorithm without proof of its correctness is given in [2]. Here we present a detailed description of the algorithm and prove its correctness.

The implementation of the proposed algorithm written in C is compared in [2] with other functions that compute the correctly rounded exponent.

1. Preliminaries

This section provides basic notation, definitions, and results used below (see [2, 3]). One uses so-called floating numbers to represent numbers in computers. The IEEE 754 [1] standard specifies several sets of floating numbers defined by the following parameters:

b — the radix (2 or 10);

p — precision (the number of digits in the mantissa (significant));

E_{\max} — the maximum exponent (the integer power to which the radix is raised).

The parameter E_{\min} is also used, which is $1 - E_{\max}$. Each set of floating numbers consists of normal numbers:

$$x = \pm b^E \cdot (1 + b_1 \cdot b^{-1} + \dots + b_{p-1} \cdot b^{-p+1}),$$

where $E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$, b_i is an integer digit $0 \leq b_i \leq b - 1$, subnormal (denormalized) numbers:

$$x = \pm b^{E_{\min}} \cdot (0 + b_1 \cdot b^{-1} + \dots + b_{p-1} \cdot b^{-p+1}),$$

$+\infty$, $-\infty$, and NaN (not a number). Here we consider double-precision numbers (type `double` in C language): $b = 2$, $p = 53$, and $E_{\max} = 1023$, and extended double-precision numbers (type `long double`): $b = 2$, $p = 64$, and $E_{\max} = 16\,383$.

The IEEE 754 standard defines the following rounding modes: rounding to the nearest, towards plus infinity, towards minus infinity, and towards zero. There are two types of rounding modes to the nearest: with *roundTiesToAway* (to the one with a larger magnitude) and with *roundTiesToEven* (to the one with an even least significant digit).

Definition 1. Let X be an arithmetic expression, x be the exact value of X , and x^* be the computed value of X .

Then $\Delta(x) = x^* - x$ is called the absolute error of the computations.

The error of the computations is due to rounding errors.

If x is a real number, we denote by $\langle x \rangle$ the value of x rounded to the nearest extended double-precision number with *roundTiesToEven*. We denote the error of this rounding by $\Delta_r(x) = \langle x \rangle - x$.

Theorem 1. Let x be a real number, and $\langle x \rangle$ be a normal extended double-precision number such that $|x| < 2^{q+1}$, where q is an integer. Then the inequality holds

$$|\Delta_r(x)| \leq 2^{q-64}.$$

The proof is trivial.

Theorem 2. Let X and Y be arithmetic expressions, x and y be the exact values of X and Y , respectively, x^* and y^* be the computed values of X and Y , respectively. Then the following inequalities hold:

$$|\Delta(x + y)| \leq |\Delta(x)| + |\Delta(y)| + |\Delta_r(x^* + y^*)|,$$

$$\begin{aligned} |\Delta(x \cdot y)| &\leq |x \cdot \Delta(y)| + |y \cdot \Delta(x)| + \\ &+ |\Delta(x) \cdot \Delta(y)| + |\Delta_r(x^* \cdot y^*)|. \end{aligned}$$

Proof: Let us first consider the error in calculating the sum. We obtain

$$\begin{aligned} |\Delta(x + y)| &= |\langle x^* + y^* \rangle - (x + y)| = \\ &= |(x^* - x) + (y^* - y) + (\langle x^* + y^* \rangle - (x^* + y^*))| \leq \\ &\leq |\Delta(x)| + |\Delta(y)| + |\Delta_r(x^* + y^*)|. \end{aligned}$$

Now let us consider the error in calculating the product.

$$\begin{aligned} |\Delta(x \cdot y)| &= |\langle x^* \cdot y^* \rangle - x \cdot y| = \\ &= |\langle x^* \cdot y^* \rangle - x^* \cdot y^* + x^* \cdot y^* - x \cdot y^* + x \cdot y^* - x \cdot y| \leq \\ &\leq |x \cdot \Delta(y)| + |y \cdot \Delta(x)| + |\Delta(x) \cdot \Delta(y)| + |\Delta_r(x^* \cdot y^*)|. \end{aligned}$$

Definition 2. Let p and q be integers such that $p \geq q$. We define the sets $B_{p,q}^+$, $B_{p,q}^-$, and $B_{p,q}$ as follows:

- $B_{p,q}^+$ is the set of all numbers of the form

$$x = b_p \cdot 2^p + b_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \dots + b_q \cdot 2^q,$$

where each of the numbers b_p, b_{p-1}, \dots, b_q is equal to 0 or 1;

- $B_{p,q}^- = \{x | -x \in B_{p,q}^+\};$
- $B_{p,q} = B_{p,q}^+ \cup B_{p,q}^-.$

Definition 3. Let n be an integer, and x be a real number. Then $R_n(x)$ is the number of the form $m \cdot 2^n$ nearest to x , where m is an integer. In the case of ambiguity, we choose the even m .

If n is an integer, and x is a real number, then $|R_n(x) - x| \leq 2^{n-1}$.

If n is an integer, x is an extended double-precision number such that $|x| \leq 2^{n+62}$, and the computation of $x + 3 \cdot 2^{n+62}$ does not lead to overflow, then

$$R_n(x) = \langle x + 3 \cdot 2^{n+62} \rangle - 3 \cdot 2^{n+62}.$$

Theorem 3 (algorithm Fast2Sum [4]). Let x and y be machine numbers such that $|x| \geq |y|$. Assuming that their addition does not cause overflow, there are machine numbers z and zz such that $z = \langle x + y \rangle$ and $x + y = z + zz$. These numbers can be obtained as follows:

$$z := \langle x + y \rangle;$$

$$w := \langle z - x \rangle;$$

$$zz := \langle y - w \rangle.$$

The Fast2Sum algorithm was introduced by Dekker. Below, we use the following notation for Fast2Sum:

$$(z, zz) \leftarrow \text{Fast2Sum}(x, y).$$

V. Lefèvre and J.-M. Muller introduced the following definition and theorem (see [4, 5]).

Definition 4. Let a and b be nonzero real numbers having the same sign and q be an integer such that $2^q \leq |a|$, $|b| < 2^{q+1}$. We call the mantissa distance between

a and b the distance $\frac{a-b}{2^q}$.

Theorem 4. Let y be the exponent of a double-precision number x . Let y^* be an approximation to y such that the mantissa distance between y and y^* is bounded by ϵ . Then, in the cases where

- $|x| \geq 2^{-30}$ and $\epsilon \leq 2^{-53-59-1} = 2^{-113}$,
- $2^{-54} \leq |x| < 2^{-30}$ and $\epsilon \leq 2^{-53-104-1} = 2^{-158}$,

the rounding of y^* is equivalent to the rounding of y for any rounding mode considered above.

There are some modifications of Theorem 4, e. g., Theorem 1 in [6]. We present here two more modifications. The first one concerns all considered rounding modes.

Theorem 5. Let y be the exponent of a double-precision number x . Let y^* be an approximation to y such that the mantissa distance between y and y^* is bounded by ϵ . Then, in the cases where

- $|x| \geq 2^{-37}$ and $\epsilon \leq 2^{-113}$,

- $2^{-44} \leq |x| < 2^{-37}$ and $\epsilon \leq 1.33 \cdot 2^{-134}$,
- $2^{-49} \leq |x| < 2^{-44}$ and $\epsilon \leq 1.33 \cdot 2^{-149}$,
- $2^{-54} \leq |x| < 2^{-49}$ and $\epsilon \leq 1.33 \cdot 2^{-158}$,

the rounding of y^* is equivalent to the rounding of y for any rounding mode considered above.

Proof: Appendix A of [3] presents for each rounding mode under consideration and for each interval $[2^{q-1}, 2^q]$, where $q = -27, -28, \dots, -53$, and for each interval $[-2^q, 2^{q-1}]$, where $q = -28, -29, \dots, -53$, the values of x for which the distance from e^x to the nearest discontinuity point of the corresponding rounding function is minimal. These data and Theorem 4 imply the statements of the theorem.

The second modification relates to the round-to-nearest modes (see [3, Theorem 6.1]) and is based on the results of V. Lefèvre [7].

Theorem 6. *Let x be a double-precision number such that $|x| \geq 2^{-54}$, and y be its exponent. Let y^* be an approximation to y such that the distance between the mantissas y and y^* is bounded by $1.67 \cdot 2^{-112}$. Then, for the rounding to nearest modes, rounding y^* is equivalent to rounding y .*

2. Special Cases

We put (see also [2, 3])

$$x_{ovr} = 0x1.62e42fefa39efp + 9 \approx 709.78,$$

$$x_{dnrm} = -0x1.6232bdd7abcd2p + 9 \approx -708.40,$$

$$x_{zero1} = -0x1.74385446d71c3p + 9 \approx -744.44,$$

$$x_{zero2} = -0x1.74910d52d3051p + 9 \approx -745.13.$$

If x is a double-precision number such that $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$, then the correctly rounded value of e^x is a normal double-precision number for any considered rounding mode.

If x is a double-precision number such that $x > x_{ovr}$, then the correctly rounded value of e^x is equal to $+\infty$ for rounding to the nearest and towards $+\infty$ and is equal to $(2 - 2^{-52}) \cdot 2^{1023}$ for rounding towards $-\infty$.

If x is a double-precision number such that $x < x_{dnrm}$, then the correctly rounded value of e^x is a subnormal number or 0 for all considered rounding modes.

If x is a double-precision number such that $x < x_{zero1}$, then the correctly rounded value of e^x is equal to 0 for rounding towards $-\infty$ mode and is equal to 2^{-1074} for rounding towards $+\infty$ mode.

If x is a double-precision number such that $x < x_{zero2}$, then for rounding to the nearest, the correctly rounded value of e^x is equal to 0. If x is a double-precision number such that $x_{zero2} \leq x < x_{zero1}$, then for rounding to the nearest, the correctly rounded value of e^x is equal to 2^{-1074} .

3. Algorithm

The proposed algorithm calculates the correctly rounded e^x for all rounding modes, but the computations use only rounding to the nearest with *roundTiesToEven*. Since e^x is always positive, rounding towards 0 is equivalent to rounding towards minus infinity. Because of this, we do not consider rounding towards 0. If x is an algebraic number not equal to 0, then e^x is a transcendental number (Lindemann theorem [11]). Therefore, if x is a double-precision number, then for e^x , both rounding to the nearest with *roundTiesToEven* and with *roundTiesToAway* are equivalent.

First, we discuss the basic ideas. A detailed description of the algorithms and proofs of their correctness follow. We assume that non-numeric (NaN), too large, and too small argument values are filtered out and processed separately. The reader can find a detailed description of this step in [8]. Therefore, we suppose that the argument belongs to the interval $[x_{zero2}, x_{ovr}]$. As usual, the algorithm contains the stages of argument reduction, approximation, and reconstruction. The argument reduction stage consists of four steps. In the first step of the argument reduction (Algorithm 1), we use the equality

$$e^x = 2^{m_0} \cdot e^{x - m_0 \cdot \ln 2}.$$

We choose the value of m_0 so that the value of $x - m_0 \cdot \ln 2$ is as small as possible. Roughly speaking, we use formula

$$m_0 = R_0 \left(\frac{x}{\ln 2} \right).$$

Recall that the function R_0 rounds the argument to the nearest integer. As a result of this step, we obtain an integer m_0 and extended double-precision numbers $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, and $x_{0,3}$ such that

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + \delta_0,$$

where $\delta_0 < 1.998 \cdot 2^{-127}$,

$$|x_{0,1}| < 0.501 \cdot \ln 2, |x_{0,2}| < 1.595 \cdot 2^{-33}, |x_{0,3}| < 1.946 \cdot 2^{-69}.$$

The sum $x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3}$ approximates $x - m_0 \cdot \ln 2$. The error of this approximation is δ_0 . The numbers $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, and $x_{0,3}$ are computed exactly (no rounding errors).

The next three steps of the argument reduction use the equality

$$e^x = (1 + v) \cdot e^{x - \ln(1+v)}.$$

We choose the value of v so that the value of $x - \ln(1 + v)$, is small, and the mantissa of v is short.

In the second step, the Algorithm 2 approximates $x_{0,1}$ by the number of the form $\ln(1 + v_1)$, where v_1 has a short mantissa. It uses a precalculated table to find v_1 and approximate $\ln(1 + v_1)$. As result of this step, we obtain the double-precision number $M_1 = 1 + v_1$ with a short mantissa and the extended double-precision numbers $x_{1,1}$ and $x_{1,2}$ such that

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_1) + x_{1,1} + x_{1,2} + x_{0,2} + x_{0,3} + (\delta_0 + \delta_1),$$

where $M_1 \in B_{0,-8}$, $|x_{1,1}| < 1.175 \cdot 2^{-8}$, $|x_{1,2}| < 2^{-65}$, $|\delta_1| < 2^{-129}$.

The sum $x_{1,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + x_{1,2}$ approximates $x - m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_1)$. The error of this approximation is equal to $\delta_0 + \delta_1$. The numbers $x_{1,1}$ and $x_{1,2}$ are computed exactly (no rounding errors). The number M_1 has a very short mantissa: all low-order mantissa bits of M_1 starting with the bit corresponding to 2^{-9} are equal to 0.

The third step (Algorithm 3) is very similar to the second one. The algorithm approximates $x_{1,1}$ by the number of the form $\ln(1 + v_2)$, where v_2 has a short mantissa. We obtain double-precision numbers v_2 , $x_{2,1}$ and extended double-precision number $x_{2,2}$ such that

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_2) + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{1,2} + x_{0,2} + x_{0,3} + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2),$$

where $M_2 = M_1 \cdot (1 + v_2)$, $M_2 \in B_{0,-22}$,

$$|x_{2,1}| < 0.675 \cdot 2^{-14}, \quad |x_{2,2}| < 2^{-65}, \quad |\delta_2| < 2^{-129}.$$

The numbers $1 + v_1$ and $1 + v_2$ have short mantissas ($1 + v_2 \in B_{0,-14}$), therefore $M_2 = M_1 \cdot (1 + v_2)$ is computed exactly and has a short mantissa. All low-order mantissa bits of M_2 starting with the bit corresponding to 2^{-23} are equal to 0.

Algorithm 4 (the fourth step) does not use any tables but calculates the values of v_3 and $\ln(1 + v_3)$. It computes v_3 as follows

$$x_2 = x_{2,1} + x_{0,2}, \quad v_3 = 3 \cdot R_{-30} \left(\frac{1}{3} \cdot x_2 \right),$$

where $|x_2| < 0.676 \cdot 2^{-14}$, $x_2 \in B_{-15,-77}$, $|v_3| < 0.677 \cdot 2^{-14}$, $v_3 \in B_{-15,-30}$.

The value of v_3 has a short mantissa and is exactly divisible by 3. Moreover, $x_2 \approx v_3 \approx \ln(1 + v_3)$. To compute $\ln(1 + x)$, we use the following approximation

$$\ln(1 + x) \approx x - 0.5 \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + x^4 \cdot P_3(x).$$

The third-degree polynomial $P_3(v)$ was found using Sollya [9]. As a result of this step, we obtain the extended double-precision numbers M_3 , $x_{3,1}$, and $x_{3,2}$ such that

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_3) + x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a,$$

where $|\delta_a| < 1.436 \cdot 2^{-122}$,

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + v_3), \quad 0.703 < M_3 < 1.421, \\ M_3 \in B_{0,-52}, \quad |x_{3,1}| < 1.210 \cdot 2^{-29}, \quad |x_{3,2}| < 1.821 \cdot 2^{-61}. \quad (1)$$

The values of M_3 and $x_{3,1}$ are computed exactly; the error in computing the value of $x_{3,2}$ is less than $1.219 \cdot 2^{-123}$. Consequently,

$$e^x = 2^{m_0} \cdot M_3 \cdot e^{x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a}. \quad (2)$$

As a result of four steps, we managed to reduce the argument to a value less than $1.210 \cdot 2^{-29}$.

Further, in the case of $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$, we use Algorithm 5, and in the case of $x_{zero2} \leq x < x_{dnrm}$, we use Algorithm 6. In the first case, the result is a normal double-precision number; in the second case, it is a subnormal double-precision number or 0.

Let us consider properties common to both Algorithms 5 and 6. First, we represent M_3 as the sum of two numbers with short mantissas:

$$M_3 = M_{3,1} + M_{3,2},$$

where $M_{3,1} = R_{-30}(M_3) \in B_{0,-30}$, $M_{3,2} = M_3 - M_{3,1} \in B_{-31,-52}$.

Next, we obtain an approximation to $e^{x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a}$ and also represent it as a sum:

$$e^{x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a} \approx 1 + (x_{3,1} + x_{3,2}) + 0.5 \cdot x_3^2 + \frac{1}{3!} \cdot x_3^3 = 1 + S_1 + S_2,$$

where $x_3 = x_{3,1} + x_{3,2}$, $S_1 = R_{-62}(x_{3,1})$, $|S_1| < 1.210 \cdot 2^{-29}$, $S_1 \in B_{-29,-62}$,

$$S_2 = (x_{3,1} - S_1) + x_{3,2} + x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3 \right), \\ |S_2| < 1.985 \cdot 2^{-59}.$$

Further, we get

$$e^x \cdot 2^{-m_0} = M_3 \cdot (1 + S_1 + S_2) - \delta_b = M_3 + M_{3,1} \cdot S_1 + M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2 - \delta_b, \quad (3)$$

where $|\delta_b| < 1.276 \cdot 2^{-119}$.

The numbers $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, and S_1 are computed exactly and have short mantissas; therefore, the products $M_{3,1} \cdot S_1$ and $M_{3,2} \cdot S_1$ are also computed exactly.

Now let us consider the case $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$ (Algorithm 5). The mantissa of extended double-precision numbers is 11 bits longer than the mantissa of double-

precision numbers. Therefore, we first compute the correctly rounded value of $e^x \cdot 2^{-m_0} + (2^{11} - 1)$ in the extended double-precision environment and then subtract $2^{11} - 1$ to obtain the rounded value in the double-precision environment.

The numbers $(2^{11} - 1) + M_3$ and $M_{3,1} \cdot S_1$ are computed exactly. Applying the *Fast2Sum* algorithm to them, we obtain the extended double-precision numbers Y and Y_1 such that (see (1)):

$$Y + Y_1 = ((2^{11} - 1) + M_3) + M_{3,1} \cdot S_1,$$

where $2^{11} - 0.298 < Y < 2^{11} + 0.422$,

$Y \in B_{11,-52}$, $|Y_1| \leq 2^{-53}$, if $Y \geq 2^{11}$,

$Y \in B_{10,-53}$, $|Y_1| \leq 2^{-54}$, if $Y < 2^{11}$.

Therefore, $Y - (2^{11} - 1)$ is a double-precision number. From (3) and (4), it follows

$$e^x \cdot 2^{-m_0} + (2^{11} - 1) = Y + Y_1 + M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2 - \delta_b.$$

Denote by Y_2 the result of computing $Y_1 + (M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2)$ and by δ_c the computation error due to rounding errors. We obtain

$$e^x \cdot 2^{-m_0} = Y - (2^{11} - 1) + Y_2 - \delta_b - \delta_c, \quad (4)$$

where $|Y_2| < 1.054 \cdot 2^{-53}$, $|\delta_c| < 1.235 \cdot 2^{-117}$.

Below, we prove that the rounded values of $2^{m_0} \cdot ((Y - (2^{11} - 1)) + Y_2)$ and e^x are equal to each other for all considered rounding modes.

Let us consider the case $x_{zero2} \leq x < x_{dnrm}$ (Algorithm 6). We cannot use Algorithm 5 to compute the correctly rounded exponent if the result is a subnormal number, since the mantissa of subnormal numbers may be shorter than that of normal ones. We first compute the rounded value of $2^{-1011} + e^x$ in the extended double-precision environment, and then by subtracting 2^{-1011} , we get the rounded value of e^x in the double-precision environment (in both cases, the least bit of the mantissa corresponds to 2^{-1074}).

By direct calculations, we obtain $-1075 \leq m_0 \leq -1022$. By definition, put

$$M'_3 = 2^{m_0} \cdot M_3, \quad M'_{3,1} = 2^{m_0} \cdot M_{3,1}, \quad M'_{3,2} = 2^{m_0} \cdot M_{3,2}.$$

From (3), we obtain (ignoring rounding errors)

$$\begin{aligned} 2^{-1011} + e^x &= 2^{-1011} + M'_3 \cdot (1 + S_1 + S_2) - \delta'_b = \\ &= 2^{-1011} + M'_3 + M'_{3,1} \cdot S_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b. \end{aligned} \quad (5)$$

where $\delta'_b = 2^{m_0} \cdot \delta_b$, $|\delta'_b| < 1.276 \cdot 2^{m_0-119}$.

The values t_0 and t_1 are the result of applying the *Fast2Sum* algorithm to M'_3 and $M'_{3,1} \cdot S_1$; the values Y and t_2 are the result of applying this algorithm to the values 2^{-1011} and t_0 . We get

$$e^x + 2^{-1011} = Y + (t_2 + t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b),$$

where $|t_1| \leq 2^{m_0-64}$, $|t_2| \leq 2^{-1075}$,

$$|t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)| < 1.730 \cdot 2^{m_0-58},$$

$$|t_2 + t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b| < 1.055 \cdot 2^{-1075},$$

$$Y - 2^{-1011} \in B_{-1022,-1074}.$$

Hence, the difference $Y - 2^{-1011}$ is calculated exactly and is a double-precision number.

Let us consider rounding to plus and minus infinity. Let us denote by Y_1 the result of the computation

$$t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)),$$

and by δ'_c the computation error. We obtain

$$e^x = (Y - 2^{-1011}) + (Y_1 - \delta'_b - \delta'_c),$$

where $|\delta'_b| < 1.276 \cdot 2^{m_0-119}$, $|\delta'_c| < 1.266 \cdot 2^{-1075-64}$.

Below, we prove that rounding e^x is equivalent to rounding $(Y - 2^{-1011}) + Y_1$.

Let us consider the round-to-nearest mode. Recall that the last mantissa bit of the subnormal double-precision numbers corresponds to 2^{-1074} . Let Y_2 be the result of computing the expression

$$(t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2));$$

let Y_3 be the result of computing the expression

$$(t_2 + 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)).$$

We claim that for $Y_2 > 0$, the rounded value of e^x is equal to $(Y + 2^{-1011}) + 2^{-1074}$, for $Y_3 < 0$, the rounded value of e^x is equal to $(Y - 2^{-1011}) - 2^{-1074}$, and for $Y_2 \leq 0$ and $Y_3 \geq 0$, it is equal to $Y - 2^{-1011}$. The full proof of this statement is given below. Here we only mention the main idea of the proof. If t_2 is close to 2^{-1075} or -2^{-1075} , then the error in computing of Y_2 or Y_3 is sufficiently small, and we can apply Theorem 4. Otherwise, the rounding of e^x does not depend on the value of $t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)$, and the rounded value of e^x is equal to $Y - 2^{-1011}$.

We now turn to a detailed consideration of the algorithm.

3.1. Argument reduction

To reduce the argument, we use Algorithms 1, 2, 3, and 4. Algorithm 1 uses the equality

$$e^x = 2^n \cdot e^{x-n \ln 2}.$$

We approximate $\ln 2$ by the numbers $l_1 \in B_{-1,-40}$, $l_2 \in B_{-41,-77}$, $l_3 \in B_{-78,-130}$. By direct calculations, we obtain

$$|l_1| < 0.694, |l_2| < 1.517 \cdot 2^{-43}, |l_3| < 1.851 \cdot 2^{-79}, \quad (6)$$

$$|\ln 2 - (l_1 + l_2 + l_3)| < 1.901 \cdot 2^{-137}.$$

The extended double-precision number \tilde{l} approximates the constant $1/\ln 2$:

$$\left| \frac{1}{\ln 2} - \tilde{l} \right| \leq 2^{-64}. \quad (7)$$

Algorithm 1. Argument reduction. Step 1

- 1: $m_0 \leftarrow R_0(x \cdot \tilde{l})$
 - 2: $x_{0,1} \leftarrow x - m_0 \cdot l_1 \quad \triangleright x_{0,1}$ is computed exactly
 - 3: $x_{0,2} \leftarrow -m_0 \cdot l_2 \quad \triangleright x_{0,2}$ is computed exactly
 - 4: $x_{0,3} \leftarrow -m_0 \cdot l_3 \quad \triangleright x_{0,3}$ is computed exactly
-

Theorem 7. Suppose x is a double-precision number such that $x_{zero2} \leq x \leq x_{ovr}$. In addition, suppose that the numbers m_0 , $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, and $x_{0,3}$ are obtained by Algorithm 1. Then the extended double-precision numbers $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, $x_{0,3}$ are computed exactly, and the following equality and inequalities hold:

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + \delta_0,$$

where $|m_0| < 1.051 \cdot 2^{10}$, $|\delta_0| < 1.998 \cdot 2^{-127}$,
 $|x_{0,1}| < 0.5 \cdot \ln 2 + 1.596 \cdot 2^{-33}$, $|x_{0,2}| \leq 1.595 \cdot 2^{-33}$,
 $x_{0,2} \in B_{-33,-77}$, $|x_{0,3}| < 1.946 \cdot 2^{-69}$, $x_{0,3} \in B_{-69,-130}$.

Proof: By direct computation, we obtain $|\tilde{l}| < 1.443$. Taking into account that $x_{zero2} \leq x \leq x_{ovr}$, we see that

$$|x \cdot \tilde{l}| < 1.051 \cdot 2^{10}, |m_0| < 1.051 \cdot 2^{10}. \quad (8)$$

Combing this with (6), we obtain

$$|m_0 \cdot l_1| < 1.459 \cdot 2^9, \quad m_0 \cdot l_1 \in B_{9,-40}, \quad |x_{0,2}| \leq 1.595 \cdot 2^{-33},$$

$$x_{0,2} \in B_{-33,-77}, \quad |x_{0,3}| < 1.946 \cdot 2^{-69}, \quad x_{0,3} \in B_{-69,-130}.$$

Consequently, the extended double-precision numbers $m_0 \cdot l_1$, $x_{0,2}$, and $x_{0,3}$ are calculated exactly.

From (8), it follows that the rounding error in the computation of $x \cdot \tilde{l}$ is not greater than 2^{-54} in absolute value. Combining this with (7), we obtain

$$\left| \langle x \cdot \tilde{l} \rangle - \frac{x}{\ln 2} \right| \leq \left| x \cdot \left(\tilde{l} - \frac{1}{\ln 2} \right) \right| + 2^{-54} < 1.728 \cdot 2^{-54}. \quad (9)$$

From line 1 of Algorithm 1, it follows

$$\left| \langle x \cdot \tilde{l} \rangle - m_0 \right| \leq 0.5.$$

Combining this with (9), we get

$$|x - m_0 \cdot \ln 2| <$$

$$< |x - \langle x \cdot \tilde{l} \rangle \cdot \ln 2| + \left| (\langle x \cdot \tilde{l} \rangle - m_0) \cdot \ln 2 \right| < \quad (10)$$

$$< (1.728 \cdot 2^{-54} + 0.5) \cdot \ln 2 \leq 0.5 \cdot \ln 2 + 1.198 \cdot 2^{-54}.$$

Let us prove that the algorithm calculates $x_{0,1}$ without rounding errors. Taking into account (6), (8), and (10), we obtain

$$|x_{0,1}| = |x - m_0 \cdot l_1| < |x - m_0 \cdot \ln 2| +$$

$$+ |m_0 \cdot \ln 2 - m_0 \cdot l_1| < 0.5 \cdot \ln 2 + 1.596 \cdot 2^{-33} < 0.5. \quad (11)$$

Suppose $|x| \geq 0.25$. Since x is a double-precision number, we see that all low-order mantissa bits of x starting with the bit corresponding to 2^{-55} are equal to 0. Taking into account (11), we see that $x_{0,1} \in B_{-2,-54}$.

If $|x| < 0.25$, then $m_0 = 0$, $x_{0,1} = x$, and $x_{0,2} = x_{0,3} = 0$. Therefore, in both cases, the double-precision number $x_{0,1}$ is computed exactly.

From (6) and (8), it follows that

$$m_0 \cdot \ln 2 + (x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3}) =$$

$$= x - m_0 \cdot ((l_1 + l_2 + l_3) - \ln 2) = x - \delta_0,$$

where $|\delta_0| < 1.998 \cdot 2^{-127}$.

For the further argument reduction, we use the equality

$$e^x = (1 + v) e^{x - \ln(1+v)}.$$

We try to find v with a short mantissa so that $x - \ln(1 + v)$ is small. In the second and third steps, we use tables to find v and $\ln(1 + v)$; in the fourth step, we calculate them. In the second step, we use a table (array) W_1 containing elements with numbers from -89 to 89 . Item number n contains the double-precision number $W_1[n].w_0$ and the pair of extended double-precision numbers $W_1[n].w_1 \in B_{-2,-64}$, $W_1[n].w_2 \in B_{-65,-128}$, which are precalculated as follows. We find the number of the form $\ln(1 + m \cdot 2^{-8})$ closest to $n \cdot 2^{-8}$, where m is an integer; then, we calculate

$$W_1[n].w_0 = 1 + m \cdot 2^{-8} = 1 + v,$$

where $v = m \cdot 2^{-8}$.

The pair of numbers $(W_1[n].w_1, W_1[n].w_2)$ approximates $\ln(W_1[n].w_0)$ with an error not greater than 2^{-129} . Note that the number $W_1[n].w_0$ has a short mantissa.

In the second step, we apply Algorithm 2 to the number $x_{0,1}$ obtained by Algorithm 1.

Algorithm 2. Argument reduction. Step 2

- 1: $n_1 \leftarrow R_0(x_{0,1} \cdot 2^{-8})$
 - 2: $M_1 \leftarrow W_1[n_1].w_0$
 - 3: $x_{1,1} \leftarrow x_{0,1} - W_1[n_1].w_1$ \triangleright is computed exactly
 - 4: $x_{1,2} \leftarrow -W_1[n_1].w_2$
-

Theorem 8. Suppose x is a double-precision number such that $x_{zero2} \leq x \leq x_{ovr}$. In addition, suppose that the numbers $m_0, x_{0,1}, x_{0,2}$, and $x_{0,3}$ are obtained using Algorithm 1, and the numbers $M_1, x_{1,1}$, and $x_{1,2}$ are obtained by Algorithm 2. Then the extended double-precision numbers $x_{1,1}$ and $x_{1,2}$ are computed exactly and the following equalities and inequalities hold:

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_1) + x_{1,1} + x_{1,2} + x_{0,2} + x_{0,3} + \delta_0 + \delta_1,$$

where $|\delta_0| < 1.998 \cdot 2^{-127}$, $|\delta_1| < 2^{-129}$, $M_1 = 1 + v_1$, $v_1 = m_1 \cdot 2^{-8}$, $-75 \leq m_1 \leq 106$, $|x_{1,1}| < 1.175 \cdot 2^{-8}$, $x_{1,1} \in B_{-8,-64}$ if $x \geq 2^{-12}$, $|x_{1,2}| \leq 2^{-65}$, $x_{1,2} \in B_{-65,-128}$.

Proof: It is clear that

$$|x_{0,1} - n_1 \cdot 2^{-8}| \leq 2^{-9}, \quad |x_{1,2}| \leq 2^{-65}, \quad x_{1,2} \in B_{-65,-128}.$$

From Theorem 7, it follows that $|x_{0,1}| < 0.501 \cdot \ln 2$, therefore, $-89 \leq n_1 \leq 89$. By direct calculations, we obtain

$$\max_{-89 \leq n \leq 89} \left(\min_m |n \cdot 2^{-8} - \ln(1 + m \cdot 2^{-8})| \right) < 0.673 \cdot 2^{-8}.$$

We also obtain $-75 \leq m_1 \leq 106$ if $-89 \leq n_1 \leq 89$. Consequently,

$$M_1 = 1 + m_1 \cdot 2^{-8},$$

where $-75 \leq m_1 \leq 106$.

Taking into account

$$|\ln(1 + m_1 \cdot 2^{-8}) - (W_1[n_1].w_1 + W_1[n_1].w_2)| < 2^{-129},$$

we obtain

$$\begin{aligned} |x_{1,1} + x_{1,2}| &= |x_{0,1} - W_1[n_1].w_1 - W_1[n_1].w_2| < \\ &< |x_{0,1} - n_1 \cdot 2^{-8}| + |n_1 \cdot 2^{-8} - \ln(1 + m_1 \cdot 2^{-8})| + \\ &+ |\ln(1 + m_1 \cdot 2^{-8}) - (W_1[n_1].w_1 + W_1[n_1].w_2)| < \\ &< 1.174 \cdot 2^{-8}. \end{aligned}$$

Since $|x_{1,2}| \leq 2^{-65}$, we see that $|x_{1,1}| < 1.175 \cdot 2^{-8}$. If $x \geq 2^{-12}$, then all low-order mantissa bits of x and $x_{0,1}$ starting with the bit corresponding to 2^{-65} are equal to 0. Taking into account that $W_1[n_1].w_1 \in B_{-2,-64}$, we obtain $x_{1,1} \in B_{-8,-64}$. If $x < 2^{-12}$, then $n_1 = 0$ and $x_{1,1} = x$. Therefore, in both cases, $x_{1,1}$ is an extended double-precision number and is computed exactly.

Since $W_1[n_1].w_1 + W_1[n_1].w_2$ approximates $\ln(1 + v_1)$ with an error not greater than 2^{-129} , we see that

$$\begin{aligned} x_{0,1} &= \ln(1 + v_1) + x_{0,1} - W_1[n_1].w_1 - W_1[n_1].w_2 - \\ &- (\ln(1 + v_1) - (W_1[n_1].w_1 + W_1[n_1].w_2)) = \\ &= \ln(1 + v_1) + x_{1,1} + x_{1,2} + \delta_1, \end{aligned}$$

where $|\delta_1| \leq 2^{-129}$.

Using Theorem 7, we obtain

$$\begin{aligned} x &= m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_1) + x_{1,1} + x_{1,2} + \\ &+ x_{0,2} + x_{0,3} + \delta_0 + \delta_1, \end{aligned}$$

where $|\delta_1| \leq 2^{-129}$.

The third step uses the table W_2 containing items with numbers from -75 to 75 . Item number n contains the double-precision number $W_2[n].w_0$ and the pair of extended double-precision numbers $W_2[n].w_1 \in B_{-8,-64}$, $W_2[n].w_2 \in B_{-65,-128}$, which are calculated as follows. We find the number of the form $\ln(1 + m \cdot 2^{-14})$ closest to $n \cdot 2^{-14}$ and calculate $W_2[n].w_0 = 1 + m \cdot 2^{-14} = 1 + v$, where $v = m \cdot 2^{-14}$.

The pair of numbers $(W_2[n].w_1, W_2[n].w_2)$ approximates $\ln(W_2[n].w_0)$ with an error not greater than 2^{-129} .

In the third step, we use Algorithm 3, which we apply to the number $x_{1,1}$ obtained by Algorithm 2.

Algorithm 3. Argument reduction. Step 3

- 1: $n_2 \leftarrow R_0(x_{1,1} \cdot 2^{-14})$
 - 2: $M_2 \leftarrow M_1 \cdot W_2[n_2].w_0$
 - 3: $x_{2,1} \leftarrow x_{1,1} - W_2[n_2].w_1$ \triangleright is computed exactly
 - 4: $x_{2,2} \leftarrow -W_2[n_2].w_2$
-

Theorem 9. Suppose x is a double-precision number such that $x_{zero2} \leq x \leq x_{ovr}$. In addition, suppose that numbers $m_0, x_{0,1}, x_{0,2}$, and $x_{0,3}$ are obtained using Algorithm 1, the numbers $M_1, x_{1,1}$, and $x_{1,2}$ are obtained by Algorithm 2, and the numbers $M_2, x_{2,1}$, and $x_{2,2}$ are obtained by Algorithm 3. Then the extended double-precision numbers $x_{2,1}$ and $x_{2,2}$ are computed exactly, and the following equalities and inequalities hold:

$$\begin{aligned} x &= m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_2) + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{1,2} + \\ &+ x_{0,2} + x_{0,3} + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2), \end{aligned}$$

where $M_2 = M_1 \cdot (1 + v_2)$, $v_2 = m_2 \cdot 2^{-14}$, $-75 \leq m_2 \leq 75$, $0.703 < M_2 < 1.421$, $M_2 \in B_{0,-22}$, $|x_{2,1}| < 0.675 \cdot 2^{-14}$, $x_{2,1} \in B_{-15,-67}$ if $x \geq 2^{-15}$,

$$|x_{2,2}| \leq 2^{-65}, x_{2,2} \in B_{-65,-128}, |\delta_2| \leq 2^{-129}.$$

Proof: It is clear that

$$|x_{1,1} - n_2 \cdot 2^{-14}| \leq 2^{-15}, |x_{2,2}| \leq 2^{-65}, x_{2,2} \in B_{-65,-128}.$$

Since $|x_{1,1}| < 1.175 \cdot 2^{-8}$, we see that $-75 \leq n_2 \leq 75$. By direct calculations, we obtain

$$\max_{-75 \leq n \leq 75} \left(\min_m |n \cdot 2^{-14} - \ln(1 + m \cdot 2^{-14})| \right) < 0.173 \cdot 2^{-14}.$$

If $-75 \leq n_2 \leq 75$, then $-75 \leq m_2 \leq 75$. Consequently,

$$\begin{aligned} |x_{2,1} + x_{2,2}| &= |(x_{1,1} - W_2[n_2].w_1) - W_2[n_2].w_2| < \\ &< |x_{1,1} - n_2 \cdot 2^{-14}| + |n_2 \cdot 2^{-14} - \ln(1 + m_2 \cdot 2^{-14})| + \\ &+ |\ln(1 + m_2 \cdot 2^{-14}) - (W_2[n_2].w_1 + W_2[n_2].w_2)| < \\ &< 2^{-15} + 0.173 \cdot 2^{-14} + 2^{-129} < 0.674 \cdot 2^{-14}. \end{aligned}$$

Taking into account that $|x_{2,2}| \leq 2^{-65}$, we obtain $|x_{2,1}| < 0.675 \cdot 2^{-14}$.

Recall that x is a double-precision number. If $x \geq 2^{-15}$, then all low-order mantissa bits of x , $x_{0,1}$, $x_{1,1}$, and $x_{2,1}$ starting with the bit corresponding to 2^{-68} are equal to 0. Consequently, $x_{2,1} \in B_{-15,-67}$. If $x < 2^{-15}$, then $n_2 = 0$ and $x_{2,1} = x_{1,1} = x_{0,1} = x$. Thus, in both cases, the double-precision number $x_{2,1}$ is computed exactly.

Since $W_2[n_2].w_1 + W_2[n_2].w_2$ approximates $\ln(1 + v_2)$ with an error not greater than 2^{-129} , we see that

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= \ln(1 + v_2) + x_{1,1} - W_2[n_2].w_1 - W_2[n_2].w_2 - \\ &- (\ln(1 + v_2) - (W_2[n_2].w_1 + W_2[n_2].w_2)) = \\ &= \ln(1 + v_2) + x_{2,1} + x_{2,2} + \delta_2, \end{aligned}$$

where $|\delta_2| < 2^{-129}$.

Combining this with Theorem 8, we obtain

$$\begin{aligned} x &= m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_2) + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{1,2} + \\ &+ x_{0,2} + x_{0,3} + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2), \end{aligned}$$

where $M_2 = M_1 \cdot (1 + v_2)$, $|\delta_2| < 2^{-129}$.

From

$$M_2 = (1 + m_1 \cdot 2^{-8}) \cdot (1 + m_2 \cdot 2^{-14}),$$

where $-75 \leq m_1 \leq 106$, $-75 \leq m_2 \leq 75$, it follows that $0.703 < M_2 < 1.421$, $M_2 \in B_{0,-22}$.

The total size of all tables is about 16 KB.

In the fourth step, we do not use any tables but compute v and $\ln(1 + v)$ using polynomials. To find a polynomial approximating the function $\ln(1 + v)$ on the interval

$$I_1 = [-0.677 \cdot 2^{-14}, 0.677 \cdot 2^{-14}],$$

we consider the function

$$f(v) = \frac{\ln(1 + v) - v + 0.5 \cdot v^2 - \frac{v^3}{3}}{v^4}.$$

Using Taylor's theorem with the Lagrange form of the remainder term [12] for the function $\ln(1 + v)$ we obtain

$$|f(v) - P(v)| < 1.517 \cdot 2^{-106},$$

where $v \in I_1$, $P(v) = -\frac{1}{4} + \frac{v}{5} - \frac{v^2}{6} + \frac{v^3}{7} - \frac{v^4}{8} + \frac{v^5}{9} - \frac{v^6}{10}$.

Further, using Sollya [9], we find a third-degree polynomial $P_3(v)$ that approximates $P(v)$ on the interval $I_2 = [-87 \cdot 2^{-21}; 87 \cdot 2^{-21}] \supset I_1$:

$$\begin{aligned} P_3(v) &= a_0 + v \cdot (a_1 + v \cdot (a_2 + v \cdot a_3)), \\ a_0 &= -0xf.fffffffffffffffffdp-6, \\ a_1 &= 0xc.aaaaaaaaaaaaaaaa1p-6, \\ a_2 &= -0xa.aaaaaae49a3c83p-6, \\ a_3 &= 0x9.249249728e270fdp-6. \end{aligned} \quad (12)$$

Sollya provides the following bound on the approximation error

$$|P(v) - P_3(v)| < 1.779 \cdot 2^{-65}$$

on the interval I_2 . As a consequence, we obtain

$$\begin{aligned} \left| \ln(1 + v) - v + 0.5 \cdot v^2 - \frac{v^3}{3} - v^4 \cdot P_3(v) \right| &< \\ &< 1.780 \cdot 2^{-65} \cdot v^4 < 1.496 \cdot 2^{-123}, \end{aligned} \quad (13)$$

where $v \in I_1$.

In the fourth step, we use Algorithm 4.

Algorithm 4. Argument reduction. Step 4

1: $x_2 \leftarrow x_{2,1} + x_{0,2}$

▷ is computed exactly

2: $v'_3 \leftarrow R_{-30} \left(\frac{1}{3} \cdot x_2 \right)$

$$3: v_3 \leftarrow 3 \cdot v'_3$$

$$4: x_{3,1} \leftarrow (x_2 - v_3) + 0,5 \cdot v_3^2 - v_3^2 \cdot v'_3$$

$$5: x_{3,2} \leftarrow ((x_{0,3} + x_{1,2}) + x_{2,2}) - v_3^4 \cdot P_3(v_3)$$

$$6: M_3 \leftarrow M_2(1 + v_3)$$

$$\triangleright |v_3| < 0,677 \cdot 2^{-14}, v_3 \in B_{-15,-30}$$

$$\triangleright x_{3,1} \text{ is computed exactly, } |x_{3,1}| < 1,210 \cdot 2^{-29}$$

$$\triangleright |x_{3,2}| < 1,821 \cdot 2^{-61}, \Delta(x_{3,2}) < 1,219 \cdot 2^{-123}$$

$$\triangleright 0,703 < M_3 < 1,421, M_3 \in B_{0,-52}$$

Theorem 10. Suppose x is a double-precision number such that $x_{\text{zero2}} \leq x \leq x_{\text{ovr}}$, the extended double-precision numbers M_3 , $x_{3,1}$, and $x_{3,2}$ are obtained by successive application of Algorithms 1, 2, 3, and 4. Then the extended double-precision number $x_{3,1}$ is computed exactly, and the following equality and inequalities hold:

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_3) + x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a, \quad (14)$$

where $0,703 < M_3 < 1,421$, $M_3 \in B_{0,-52}$,

$$|\delta_a| < 1,436 \cdot 2^{-122}, |x_{3,1}| < 1,210 \cdot 2^{-29}, |x_{3,2}| < 1,821 \cdot 2^{-61}.$$

Proof: If $|x| \geq 2^{-15}$, then it follows from Theorems 7 and 9 that

$$\begin{aligned} |x_{0,2}| &\leq 1,595 \cdot 2^{-33}, x_{0,2} \in B_{-33,-77}, \\ |x_{2,1}| &< 0,675 \cdot 2^{-14}, x_{2,1} \in B_{-15,-67}, \\ |x_2| &< 0,676 \cdot 2^{-14}, x_2 \in B_{-15,-77}. \end{aligned} \quad (15)$$

Consequently, the extended double-precision number x_2 is computed exactly. If $|x| < 2^{-15}$, then $x_{0,2} = 0$, $x_2 = x_{2,1} = x$. Thus, in both cases, x_2 is calculated exactly.

It follows from (15) and lines 2 and 3 of Algorithm 4 that (taking into account the error in the computation of $\frac{1}{3} \cdot x_2$)

$$\begin{aligned} |v_3 - x_2| &< 1,501 \cdot 2^{-30}, \\ |v_3| &< 0,677 \cdot 2^{-14}, v_3 \in B_{-15,-30}. \end{aligned} \quad (16)$$

By direct calculations, we obtain

$$0,703 < M_3 < 1,421, M_3 \in B_{0,-52}.$$

It follows from (15) and (16) that

$$\begin{aligned} |v_3^2| &< 1,834 \cdot 2^{-30}, v_3^2 \in B_{-30,-60}, \\ |v_3^2 \cdot v'_3| &< 1,655 \cdot 2^{-46}, v_3^2 \cdot v_3 \in B_{-46,-90}, \\ |x_{3,1}| &= |(x_2 - v_3) + 0,5 \cdot v_3^2 - v_3^2 \cdot v'_3| < 1,210 \cdot 2^{-29}. \end{aligned} \quad (17)$$

Thus, v_3^2 and $v_3^2 \cdot v'_3$ are computed exactly. We claim that $x_{3,1}$ is computed exactly. If $|x| \geq 2^{-30}$ then $x_{3,1} \in B_{-29,-90}$ (recall that x is a double-precision number).

If $|x| < 2^{-30}$ then $x_{0,2} = 0$, $x_2 = x_{2,1} = x$. Furthermore, $v'_3 = 0$ and $x_{3,1} = x_2 = x$. Thus, we see that in all

cases, the extended double-precision number $x_{3,1}$ is computed exactly.

It follows from (12) and (16) that $|v_3^4 \cdot P_3(v_3)| < 1,688 \cdot 2^{-61}$. Theorems 7, 8, and 9 imply

$$\begin{aligned} |x_{3,2}| &= |((x_{0,3} + x_{1,2}) + x_{2,2}) - v_3^4 \cdot P_3(v_3)| < \\ &< |x_{0,3}| + |x_{1,2}| + |x_{2,2}| + |v_3^4 \cdot P_3(v_3)| < 1,821 \cdot 2^{-61}. \end{aligned} \quad (18)$$

From (13) and Theorem 9, we obtain (ignoring the computation errors)

$$\begin{aligned} x &= m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_3) - \\ &- (\ln(1 + v_3) - v_3 + 0,5 \cdot v_3^2 - v_3^2 \cdot v'_3 - v_3^4 \cdot P_3(v_3)) + \\ &+ x_2 - v_3 + 0,5 \cdot v_3^2 - v_3^2 \cdot v'_3 + x_{0,3} + x_{1,2} + x_{2,2} - \\ &- v_3^4 \cdot P_3(v_3) + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2) = m_0 \cdot \ln 2 + \\ &+ \ln(M_3) + x_{3,1} + x_{3,2} + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3), \end{aligned} \quad (19)$$

where $|\delta_3| < 1,496 \cdot 2^{-123}$.

Let us bound the error in the computation of $x_{3,2}$. Recall that v_3^2 is computed exactly. We obtain

$$v_3^4 \leq 1,682 \cdot 2^{-59}, |\Delta(v_3^4)| = |\Delta(v_3^2 \cdot v_3^2)| \leq 2^{-123}.$$

On the other hand, we have

$$|P_3(v_3)| < 1,001 \cdot 2^{-2} \text{ and } |\Delta(P_3(v_3))| < 1,001 \cdot 2^{-66}.$$

Since $|v_3^4 \cdot P_3(v_3)| < 1,684 \cdot 2^{-61}$, we obtain

$$\begin{aligned} |\Delta(v_3^4 \cdot P_3(v_3))| &< |\Delta(v_3^4)| \cdot |P_3(v_3)| + \\ &+ v_3^4 \cdot |\Delta(P_3(v_3))| + |\Delta(v_3^4) \cdot \Delta(P_3(v_3))| + \\ &+ 2^{-125} < 1,843 \cdot 2^{-124}. \end{aligned} \quad (20)$$

It follows from Theorems 7, 8, and 9 that

$$\begin{aligned} |x_{0,3} + x_{1,2} + x_{2,2}| &< 1,061 \cdot 2^{-64}, \\ |\Delta((x_{0,3} + x_{1,2}) + x_{2,2})| &\leq 1,5 \cdot 2^{-128}. \end{aligned} \quad (21)$$

Recall that $|x_{3,2}| < 1,821 \cdot 2^{-61}$ (see (18)). We get

$$\begin{aligned} \Delta(x_{3,2}) &\leq |\Delta((x_{0,3} + x_{1,2}) + x_{2,2})| + \\ &+ |\Delta(v_3^4 \cdot P_3(v_3))| + 2^{-125} < 1,219 \cdot 2^{-123}. \end{aligned} \quad (22)$$

Taking into account the errors in the computation of $x_{3,2}$, we obtain from (19) and (22):

$$x = m_0 \cdot \ln 2 + \ln(M_3) + x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a,$$

where $|\delta_a| \leq |\delta_0| + |\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + |\Delta(x_{3,2})| < 1.436 \cdot 2^{-122}$.

3.2. Function evaluation

Algorithms 5 and 6 complete the computation of the correctly rounded exponent. For $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$, we use Algorithm 5; for $x_{zero2} \leq x < x_{dnrm}$, we use Algo-

rithm 6. In the first case, the result is a normal number; in the second case, it is a subnormal number or 0.

In fact, each of these algorithms describes three algorithms: the first is for the round-to-nearest mode, the second is for rounding towards plus infinity, and the third is for rounding towards minus infinity (see comments on the algorithms). For example, for the round-to-nearest mode, Algorithm 5 uses line 8 and ignores lines 9 to 24. The algorithms themselves use only the round-to-nearest mode with *roundTiesToEven* when computing.

Algorithm 5. $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$

<pre> 1: $M_{3,1} \leftarrow R_{-30}(M_3)$ 2: $M_{3,2} \leftarrow M_3 - M_{3,1}$ 3: $S_1 \leftarrow R_{-62}(x_{3,1})$ 4: $(Y, Y_1) \leftarrow Fast2Sum((2^{11} - 1) + M_3, M_{3,1} \cdot S_1)$ 5: $x_3 \leftarrow x_{3,1} + x_{3,2}$ 6: $S_2 \leftarrow ((x_{3,1} - S_1) + x_{3,2}) + x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)$ 7: $Y_2 \leftarrow Y_1 + (M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2)$ 8: $y \leftarrow (Y + Y_2) - (2^{11} - 1)$ 9: $y \leftarrow Y - (2^{11} - 1)$ 10: if $Y_2 > 0$ then 11: if $y \geq 1$ then 12: $y \leftarrow y + 2^{-52}$ 13: else 14: $y \leftarrow y + 2^{-53}$ 15: end if 16: end if 17: $y \leftarrow Y - (2^{11} - 1)$ 18: if $Y_2 < 0$ then 19: if $y > 1$ then 20: $y \leftarrow y - 2^{-52}$ 21: else 22: $y \leftarrow y - 2^{-53}$ 23: end if 24: end if 25: return $y \cdot 2^{m_0}$ </pre>	<pre> ▷ $0.702 < M_{3,1} < 1.422$, $M_{3,1} \in B_{0,-30}$ ▷ $M_{3,2} \leq 2^{-31}$, $M_{3,2} \in B_{-31,-52}$ ▷ $S_1 < 1.211 \cdot 2^{-29}$, $S_1 \in B_{-29,-62}$ ▷ $M_{3,1} \cdot S_1 < 1.723 \cdot 2^{-29}$, $M_{3,1} \cdot S_1 \in B_{-29,-92}$ ▷ $(2^{11} - 1) + M_3 \in B_{11,-52}$ ▷ Y and Y_1 are computed exactly ▷ $x_3 < 1.211 \cdot 2^{-29}$, $\Delta(x_3) \leq 2^{-93}$ ▷ $S_2 < 1.985 \cdot 2^{-59}$, $\Delta(S_2) < 1.850 \cdot 2^{-121}$ ▷ $M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2 < 1.714 \cdot 2^{-58}$ ▷ Rounding to the nearest ▷ Rounding towards $+\infty$ ▷ Rounding towards $-\infty$ ▷ Reconstruction </pre>
--	---

Algorithm 6. $x_{zero2} \leq x \leq x_{dnrm}$

1: $M_{3,1} \leftarrow R_{-30}(M_3)$ ▷ $0.702 < M_{3,1} < 1.422$, $M_{3,1} \in B_{0,-30}$
2: $M'_3 \leftarrow 2^{m_0} \cdot M_3$
3: $M'_{3,1} \leftarrow 2^{m_0} \cdot M_{3,1}$
4: $M'_{3,2} \leftarrow M'_3 - M'_{3,1}$
5: $S_1 \leftarrow R_{-62}(x_{3,1})$ ▷ $|S_1| < 1.211 \cdot 2^{-29}$, $S_1 \in B_{-29,-62}$
6: $(t_0, t_1) \leftarrow Fast2Sum(M'_3, M'_{3,1} \cdot S_1)$
7: $(Y, t_2) \leftarrow Fast2Sum(2^{-1011}, t_0)$ ▷ t_0, t_1, t_2 , and Y are computed exactly
8: $x_3 \leftarrow x_{3,1} + x_{3,2}$ ▷ $|x_3| < 1.211 \cdot 2^{-29}$, $|\Delta(x_3)| \leq 2^{-93}$
9: $S_2 \leftarrow ((x_{3,1} - S_1) + x_{3,2}) + x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)$ ▷ $|S_2| < 1.985 \cdot 2^{-59}$, $|\Delta(S_2)| < 1.850 \cdot 2^{-121}$

10: $y \leftarrow Y - (2^{-1011} - 2^{-1022})$ ▷ Rounding
▷ Rounding to the nearest
11: **if** $(t_2 + 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) < 0$ **then**
12: $y \leftarrow y - 2^{-1074}$
13: **else if** $(t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) > 0$ **then**
14: $y \leftarrow y + 2^{-1074}$
15: **end if** ▷ Rounding towards $+\infty$

16: **if** $t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) > 0$ **then**
17: $y \leftarrow y + 2^{-1074}$
18: **end if** ▷ Rounding towards $-\infty$

19: **if** $t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) < 0$ **then**
20: $y \leftarrow y - 2^{-1074}$
21: **end if** ▷ Reconstruction
22: **return** $y - 2^{-1022}$

Theorem 11. *Let x be a double-precision number. If $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$ then Algorithms 1, 2, 3, 4, and 5 calculate the correctly rounded exponent of x . If $x_{zero2} \leq x < x_{dnrm}$, then Algorithms 1, 2, 3, 4, and 6 calculate the correctly rounded exponent of x .*

Proof: Since Algorithms 5 and 6 have much in common, we first present the reasoning useful for both algorithms. Let x be a double-precision number such that $x_{dnrm} \leq x \leq x_{ovr}$. Theorem 10 implies that

$$e^x = 2^{m_0} \cdot M_3 \cdot e^{x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a}, \quad (23)$$

where $0.703 < M_3 < 1.421$, $M_3 \in B_{0,-52}$,
 $|\delta_a| < 1.436 \cdot 2^{-122}$.

Taking into account that $M_{3,1} \leftarrow R_{-30}(M_3)$, we obtain

$$\begin{aligned} M_{3,1} &< 1.422, \quad M_{3,1} \in B_{0,-30}, \\ M_{3,2} &\leq 2^{-31}, \quad M_{3,2} \in B_{-31,-52}. \end{aligned} \quad (24)$$

Let us consider the following approximation

$$\begin{aligned} 2^{-m_0} \cdot e^x &= M_3 \cdot e^{x_{3,1} + x_{3,2} + \delta_a} \approx M_3 \cdot e^{x_{3,1} + x_{3,2}} \approx \\ &\approx M_3 \cdot \left(1 + x_{3,1} + x_{3,2} + x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)\right). \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} S_1 &\leftarrow R_{-62}(x_{3,1}), \\ S_2 &\leftarrow (x_{3,1} - S_1) + x_{3,2} + x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right), \end{aligned}$$

we see that

$$2^{-m_0} \cdot e^x \approx M_3 \cdot (1 + S_1 + S_2). \quad (25)$$

Let us bound the error of this approximation. Using Theorem 10 we obtain

$$\begin{aligned} |S_1| < 1.211 \cdot 2^{-29}, S_1 \in B_{-29, -62}, |x_{3,2}| < 1.821 \cdot 2^{-61}, \\ |x_3| < 1.211 \cdot 2^{-29}, |S_2| < 1.985 \cdot 2^{-59}. \end{aligned} \quad (26)$$

From Lagrange mean value theorem [12] and Theorem 10, it follows that (ignoring rounding errors)

$$\begin{aligned} |2^{-m_0} \cdot e^x - M_3 \cdot e^{x_3}| &= |M_3 \cdot e^{x_3 + \delta_a} - M_3 \cdot e^{x_3}| < \\ < M_3 \cdot 1.001 \cdot |\delta_a| < 1.022 \cdot 2^{-121}. \end{aligned} \quad (27)$$

By Taylor's theorem with the Lagrange form of the remainder [12], we obtain (ignoring rounding errors)

$$\begin{aligned} |M_3 \cdot e^{x_3} - M_3 \cdot (1 + S_1 + S_2)| &= \\ = \left| M_3 \cdot \left(e^{x_3} - 1 - x_3 - 0.5 \cdot x_3^2 - \frac{x_3^3}{3!} \right) \right| < \\ < M_3 \cdot 1.001 \cdot \frac{x_3^4}{4!} < 1.020 \cdot 2^{-119}. \end{aligned} \quad (28)$$

Let δ_b be the error of the approximation (25) ignoring rounding errors. It follows from (27) and (28) that

$$\begin{aligned} |\delta_b| &= |2^{-m_0} \cdot e^x - M_3 \cdot (1 + S_1 + S_2)| < \\ < |2^{-m_0} \cdot e^x - M_3 \cdot e^{x_3}| + M_3 |e^{x_3} - (1 + S_1 + S_2)| < \\ < 1.276 \cdot 2^{-119}. \end{aligned} \quad (29)$$

Using (24) and (26), we obtain

$$\begin{aligned} M_3 \cdot (1 + S_1 + S_2) &= \\ = M_3 + M_{3,1} \cdot S_1 + M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} |M_{3,1} \cdot S_1| < 1.723 \cdot 2^{-29}, M_{3,1} \cdot S_1 \in B_{-29, -92}, \\ |M_{3,2} \cdot S_1| < 1.211 \cdot 2^{-60}, M_{3,2} \cdot S_1 \in B_{-60, -114}, \\ |M_3 \cdot S_2| < 1.411 \cdot 2^{-58}, |M_3 + M_{3,1} \cdot S_1| < 1.422, \\ |M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2| < 1.714 \cdot 2^{-58}. \end{aligned} \quad (30)$$

Therefore, the values $M_{3,1} \cdot S_1$, and $M_{3,2} \cdot S_1$ are calculated exactly (no rounding).

Let us bound the error in the computation of $M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2$.

Recall that the values $x_{3,1}$, M_3 , $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, S_1 , $M_{3,1} \cdot S_1$, and $M_{3,2} \cdot S_1$ are computed exactly. From (26), it follows that $|\Delta(x_3)| \leq 2^{-93}$ (δ_a includes the error in the computation of $x_{3,2}$). Further, we obtain

$$x_3^2 < 1.467 \cdot 2^{-58},$$

$$\begin{aligned} |\Delta(x_3^2)| &\leq 2 \cdot |x_3| \cdot |\Delta(x_3)| + |\Delta(x_3)|^2 + \\ &2^{-122} < 1.712 \cdot 2^{-121}. \end{aligned} \quad (31)$$

Since

$$\begin{aligned} \Delta\left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right) &\leq 1.001 \cdot 2^{-65}, \\ \left|x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)\right| &< 1.470 \cdot 2^{-59}, \end{aligned} \quad (32)$$

we have

$$\begin{aligned} \Delta\left(x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)\right) &\leq \\ \leq x_3^2 \cdot \Delta\left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right) + \Delta(x_3^2) \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right) + \\ + \Delta(x_3^2) \cdot \Delta\left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right) + 2^{-123} &< 1.475 \cdot 2^{-121}. \end{aligned} \quad (33)$$

Using (26), we obtain

$$\begin{aligned} |(x_{3,1} - S_1) + x_{3,2}| &< 1.036 \cdot 2^{-60}, \\ |S_2| &< |x_{3,1} - S_1| + |x_{3,2}| + \\ + \left|x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)\right| &< 1.988 \cdot 2^{-59}, \\ |\Delta(S_2)| &\leq |\Delta((x_{3,1} - S_1) + x_{3,2})| + \\ + \left|\Delta\left(x_3^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x_3\right)\right)\right| + 2^{-123} &< \\ < 2^{-124} + 1.475 \cdot 2^{-121} + 2^{-123} &= 1.850 \cdot 2^{-121}. \end{aligned} \quad (34)$$

Recall that M_3 is computed exactly, and $|M_3 \cdot S_2| < 1.411 \cdot 2^{-58}$ (see (30)). Using (34), we obtain

$$|\Delta(M_3 \cdot S_2)| \leq |M_3 \cdot \Delta(S_2)| + 2^{-122} < 1.565 \cdot 2^{-120}$$

The values of $M_{3,2}$ and S_1 are computed exactly, and $|M_{3,2} \cdot S_1| < 1.211 \cdot 2^{-60}$, therefore, $|\Delta(M_{3,2} \cdot S_1)| < 2^{-124}$. Taking into account (30), we obtain

$$\begin{aligned} |\Delta(M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2)| &\leq \\ \leq |\Delta(M_{3,2} \cdot S_1)| + |\Delta(M_3 \cdot S_2)| + 2^{-122} &< 1.878 \cdot 2^{-120}. \end{aligned} \quad (35)$$

Let us consider the case $x_{dorm} \leq x \leq x_{ovr}$ (Algorithm 5). The mantissa of extended double-precision numbers is 11 bits longer than the mantissa of double-precision numbers. Therefore, at first, we compute the correctly rounded value of $e^x \cdot 2^{-m_0} + (2^{11} - 1)$ in the extended double-precision environment and then subtract $2^{11} - 1$ to obtain the rounded value in the double-precision environment. In both cases, the least bit of the mantissa corresponds to the same value.

From (23), it follows

$$\begin{aligned} (2^{11} - 1) + 0.703 < (2^{11} - 1) + M_3 < (2^{11} - 1) + 1.421, \\ (2^{11} - 1) + M_3 \in B_{11,-52}. \end{aligned} \quad (36)$$

Therefore, $(2^{11} - 1) + M_3$ is computed exactly. Recall that $M_{3,1} \cdot S_1$ (see (30)) is also computed exactly. We use the *Fast2Sum* algorithm to calculate the values of Y and Y_1 . Taking into account (23) and (30), we obtain

$$\begin{aligned} Y + Y_1 &= ((2^{11} - 1) + M_3) + M_{3,1} \cdot S_1; \\ 0.702 + (2^{11} - 1) < Y < 1.422 + (2^{11} - 1); \\ Y \in B_{11,-52} &\text{ if } Y \geq 2^{11}; \\ Y \in B_{10,-53} &\text{ if } Y < 2^{11}. \end{aligned} \quad (37)$$

Therefore, $|Y_1| \leq 2^{-53}$. From (37), it follows

$$\begin{aligned} 0.702 < Y - (2^{11} - 1) < 1.422; \\ Y - (2^{11} - 1) \geq 1, Y - (2^{11} - 1) \in B_{0,-52} &\text{ if } Y \geq 2^{11}; \\ Y - (2^{11} - 1) < 1, Y - (2^{11} - 1) \in B_{-1,-53} &\text{ if } Y < 2^{11}. \end{aligned} \quad (38)$$

Therefore, $Y - (2^{11} - 1)$ is a double-precision number. Using (30), we obtain

$$\begin{aligned} |Y_1| \leq 2^{-53}, |Y_2| < 1.054 \cdot 2^{-53} &\text{ if } Y \geq 2^{11}; \\ |Y_1| \leq 2^{-54}, |Y_2| < 1.108 \cdot 2^{-54} &\text{ if } Y < 2^{11}. \end{aligned} \quad (39)$$

Recall that Y_1 is computed exactly. Taking into account (35) and (39), we obtain

$$\begin{aligned} |\Delta(Y_2)| &= |\Delta(Y_1 + (M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2))| \leq \\ &\leq |\Delta(M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2)| + 2^{-117} < 1.235 \cdot 2^{-117}. \end{aligned} \quad (40)$$

In other words,

$$Y_1 + (M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2) = Y_2 - \delta_c, \quad (41)$$

where $|\delta_c| < 1.235 \cdot 2^{-117}$.

From (29), (30), (37), and (41), it follows that

$$\begin{aligned} 2^{-m_0} \cdot e^x &= M_3 + M_{3,1} \cdot S_1 + M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2 - \delta_b = \\ &= (Y - (2^{11} - 1)) + Y_1 + M_{3,2} \cdot S_1 + M_3 \cdot S_2 - \delta_b = \\ &= (Y - (2^{11} - 1)) + Y_2 - \delta_b - \delta_c. \end{aligned} \quad (42)$$

Taking into account (37) and (40), we obtain

$$0.701 < (Y - (2^{11} - 1)) + Y_2 < 1.423. \quad (43)$$

Consequently, mantissa distance between e^x and $2^{m_0} \cdot (Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ is not greater than (see (29) and (40))

$$|2 \cdot (\delta_b + \delta_c)| < 1.554 \cdot 2^{-116}. \quad (44)$$

If $|x| \geq 2^{-54}$, then by Theorem 6, the rounded values of e^x and $2^{m_0} \cdot ((Y - (2^{11} - 1)) + Y_2)$ are equal to each other in the case of rounding to the nearest in the double-precision environment. If $|x| \geq 2^{-37}$, then by Theorem 5, the rounded values of e^x and $2^{m_0} \cdot ((Y - (2^{11} - 1)) + Y_2)$ are equal to each other for any considered rounding modes in the double-precision environment.

Now we need to prove that for $|x| < 2^{-37}$, the rounded values of e^x and $2^{m_0} \cdot ((Y - (2^{11} - 1)) + Y_2)$ are equal to each other in the cases of rounding towards plus and minus infinity in the double-precision environment.

Suppose that $|x| < 2^{-37}$ then we obtain

$$\begin{aligned} x_{0,1} &= x_{1,1} = x_{2,1} = x_{3,1} = x_3 = x, \\ x_{0,2} &= x_{0,3} = x_{1,2} = x_{2,2} = x_{3,2} = 0, \\ m_0 &= 0, M_3 = M_{3,1} = 1, M_{3,2} = 0, S_1 = R_{62}(x), \\ Y_2 \leftarrow Y_1 + S_2, |\delta_b| &= |e^x - (1 + S_1 + S_2)| < 1.001 \cdot \frac{x_3^4}{4!} \end{aligned} \quad (45)$$

Consequently,

$$\begin{aligned} |\delta_b| &< 1.335 \cdot 2^{-153} \text{ if } |x| < 2^{-37}; \\ |\delta_b| &< 1.335 \cdot 2^{-181} \text{ if } |x| < 2^{-44}. \end{aligned} \quad (46)$$

Let us bound the errors in the computations. We have

$$\begin{aligned} x^2 < 2^{-74}, |\Delta(x^2)| &\leq 2^{-138} \text{ if } |x| < 2^{-37}; \\ x^2 < 2^{-88}, |\Delta(x^2)| &\leq 2^{-152} \text{ if } |x| < 2^{-44}; \\ x^2 < 2^{-98}, |\Delta(x^2)| &\leq 2^{-162} \text{ if } |x| < 2^{-49}. \end{aligned}$$

Similar to (32) and (33), we see that

$$\begin{aligned} \left| \Delta \left(x^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x \right) \right) \right| &\text{ is less than} \\ 1.502 \cdot 2^{-138} &\text{ if } |x| < 2^{-37}; \\ 1.502 \cdot 2^{-152} &\text{ if } |x| < 2^{-44}; \\ 1.502 \cdot 2^{-162} &\text{ if } |x| < 2^{-49}. \end{aligned} \quad (47)$$

Let δ_c be the error in calculating Y_2 . From (42) and (45) it follows that

$$e^x = (Y - (2^{11} - 1)) + Y_2 - \delta_b - \delta_c. \quad (48)$$

Recall that $Y - (2^{11} - 1)$ is a double-precision number. Taking into account (39), we see that for rounding towards plus or minus infinity, if $|\delta_b + \delta_c| < |Y_2|$ and $|\delta_b + \delta_c| < 2^{-55}$, then rounded values of $e^x = (Y - (2^{11} - 1)) + (Y_2 - \delta_b - \delta_c)$ and $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ are equal each other.

Let us consider the case $2^{-44} \leq |x| < 2^{-37}$. From (45), it follows

$$\begin{aligned} x_{3,1} = x_3 = x, x_{3,2} = 0, (2^{11} - 1) + M_3 = 2^{11}, \\ M_{3,1} \cdot S_1 = S_1 = R_{-62}(x) \in B_{-37,-62}. \end{aligned} \quad (49)$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} \left| x^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x \right) \right| < 1.001 \cdot 2^{-75}, \\ |x - S_1| \leq 2^{-63}, |S_2| < 1.001 \cdot 2^{-63}. \end{aligned} \quad (50)$$

Using (39) and (47), we obtain

$$\begin{aligned} |\Delta(S_2)| \leq \left| \Delta \left(x^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x \right) \right) \right| + \\ + 2^{-127} < 1.001 \cdot 2^{-127}, \\ \delta_c = \Delta(Y_2) \leq \Delta(S_2) + 2^{-117} < 1.001 \cdot 2^{-117}. \end{aligned} \quad (51)$$

The values of Y and Y_1 are the result of applying the function *Fast2Sum* to 2^{11} and S_1 . Recall that $S_1 \in B_{-37,-62}$ (see (49)). Therefore, all low-order mantissa bits of Y_1 starting with the bit corresponding to 2^{-63} are equal to 0. Consequently, either $|Y_1| \geq 2^{-62}$ or $Y_1 = 0$.

Suppose $Y_1 \geq 2^{-62}$. Using (45), (46), (50), and (51) we obtain

$$|Y_2| \geq |Y_1| - |S_2| > 0.999 \cdot 2^{-63}, |\delta_b + \delta_c| < 1.001 \cdot 2^{-117}. \quad (52)$$

Consequently, if $Y_1 \neq 2^{-62}$, then for rounding towards minus infinity or plus infinity, rounded values of $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ and $(Y - (2^{11} - 1)) + (Y_2 - \delta_b - \delta_c)$ are equal to each other.

Suppose that $Y_1 = 0$ and $|x - S_1| > 2^{-74}$, then $Y_2 = S_2$. Using (50), we obtain

$$\begin{aligned} |Y_2| = |S_2| > |x - S_1| - \\ - \left| x^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x \right) \right| > 0.999 \cdot 2^{-75}. \end{aligned}$$

Combing this with (52), we see that the numbers Y_2 and $Y_2 - \delta_b - \delta_c$ have the same sign as $x - S_1$. Consequently, for rounding towards minus infinity or plus infinity, rounded values $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ and $(Y - (2^{11} - 1)) + (Y_2 - \delta_b - \delta_c)$ are equal to each other.

Suppose that $Y_1 = 0$ and $|x - S_1| \leq 2^{-74}$. From (47) and (50), it follows that

$$\begin{aligned} |Y_2| = |S_2| \leq 1.501 \cdot 2^{-74}, \\ |\delta_c| = \Delta(Y_2) = \Delta(S_2) \leq \Delta \left(x^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x \right) \right) + \\ + 2^{-138} < 1.251 \cdot 2^{-137} \end{aligned} \quad (53)$$

The mantissa distance between e^x and $(Y_1 - (2^{11} - 1)) + Y_2$ is not greater than

$$|2 \cdot (\delta_b + \delta_c)| < 1.252 \cdot 2^{-136}.$$

Applying Theorem 5 for the case $2^{-44} \leq |x| < 2^{-37}$, we see that on this interval, the rounded values of e^x and $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ are equal to each other in the cases of rounding towards plus and minus infinity in the double-precision environment.

The cases $2^{-50} \leq |x| < 2^{-44}$ and $2^{-54} \leq |x| < 2^{-50}$ are considered similarly.

Let us consider the case $|x| < 2^{-54}$. We obtain

$$\begin{aligned} x_{3,1} = x_3 = x, x_{3,2} = 0, S_1 = R_{-62}(x), |S_1| \leq 2^{-54}, \\ Y = 2^{11}, Y - (2^{11} - 1) = 1, Y_1 = S_1, \\ S_2 \leftarrow (x - S_1) + x^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{3!} \cdot x \right), Y_2 \leftarrow S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (54)$$

Furthermore, we obtain

$$0 < Y_2 < 1.001 \cdot 2^{-54} \text{ if } x > 0, |Y_2| \leq 2^{-54} \text{ if } x < 0. \quad (55)$$

First, we consider the directed rounding modes. It follows from (55) that if $x > 0$, then for rounding towards plus infinity, the rounded value of $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ and e^x are equal to $1 + 2^{-52}$. If $x < 0$, then when rounding towards minus infinity, the rounded value $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ and e^x are equal to $1 - 2^{-53}$. In all other cases, correctly rounded values $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ and e^x are equal to 1.

Now we consider the round-to-nearest mode. It follows from (55) that for the round-to-nearest mode, the rounded value of $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ is equal to 1. The rounded value of e^x is also equal to 1 for the rounding to nearest mode. Thus, if x is a double-precision number such that $|x| < 2^{-54}$, then the correctly rounded values of e^x and $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ are equal for all considered rounding modes.

Now we need to consider calculating the rounded value of $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ in the double-precision environment. Recall that all computations are performed using extended double-precision arithmetic. From (37) and (39), it follows that

$$0.702 < Y - (2^{11} - 1) < 1.422, |Y_2| < 1.054 \cdot 2^{-53}.$$

Recall that the subtraction $Y - (2^{11} - 1)$ does not require rounding, and the result is a double-precision number. Let Y_3 be the rounded value of the sum $Y + Y_2$ in the cases of *rounding to the nearest* in the extended double-precision environment. If $Y + Y_2 \geq 2^{11}$, then

$$\begin{aligned} |(Y + Y_2) - Y_3| &\leq 2^{-53}, \\ \left| \left((Y + Y_2) - (2^{11} - 1) \right) - \left(Y_3 - (2^{11} - 1) \right) \right| &\leq 2^{-53}, \\ 2^{11} &\leq Y_3 < 2^{11} + 1, Y_3 \in B_{11,-52}, \\ 1 &\leq Y_3 - (2^{11} - 1) < 2, Y_3 - (2^{11} - 1) \in B_{0,-52}. \end{aligned}$$

If $Y + Y_2 < 2^{11}$, then

$$\begin{aligned} |(Y + Y_2) - Y_3| &\leq 2^{-54}, \\ \left| \left((Y + Y_2) - (2^{11} - 1) \right) - \left(Y_3 - (2^{11} - 1) \right) \right| &\leq 2^{-54}, \\ 2^{11} - 1 &< Y_3 \leq 2^{11}, Y_3 \in B_{10,-53} \text{ or } Y_3 = 2^{11}, \\ 0 &< Y_3 - (2^{11} - 1) \leq 1, \\ Y_3 - (2^{11} - 1) &\in B_{-1,-53} \text{ or } Y_3 - (2^{11} - 1) = 1. \end{aligned}$$

Thus, $Y_3 - (2^{11} - 1)$ is a double-precision number. The result of rounding $(Y + Y_2) - (2^{11} - 1)$ is equal to $Y_3 - (2^{11} - 1)$ for the rounding to nearest mode in the double-precision environment.

Now consider the calculation of the rounded value of $(Y - (2^{11} - 1)) + Y_2$ in the case of *rounding towards plus infinity* in the double-precision environment. If $y = Y - (2^{11} - 1) > 1$, then (see (39)) $|Y_1| \leq 2^{-53}$, $|Y_2| < 1.054 \cdot 2^{-53}$. If $y = Y - (2^{11} - 1) < 1$, then $|Y_1| \leq 2^{-54}$, $|Y_2| < 1.108 \cdot 2^{-54}$. If $y = 1$, then

$$\begin{aligned} -2^{-54} &< Y_1 < 2^{-53}, \\ -1.108 \cdot 2^{-54} &< Y_2 < 1.054 \cdot 2^{-53}. \end{aligned}$$

Therefore, if $Y_2 \leq 0$, then the rounded value of $y + Y_2$ is equal to y . If $Y_2 > 0$ and $y \geq 1$, then the rounded value of $y + Y_2$ is equal to $y + 2^{-52}$. If $Y_2 > 0$ and $y < 1$, then the rounded value of $y + Y_2$ is equal to $y + 2^{-53}$.

The case of *rounding towards minus infinity* is treated similarly.

Let us consider the case $x_{zero2} \leq x < x_{dnrm}$ (Algorithm 6). By direct calculations, we obtain $-1075 \leq m_0 \leq -1022$. From (29), it follows that (ignoring rounding errors)

$$\mathbf{e}^x = M'_3 \cdot (1 + S_1 + S_2) - \delta'_b, \quad (56)$$

where $|\delta'_b| < 1.276 \cdot 2^{m_0-119}$.

Taking into account (23), (26), and (29), we see that the mantissa of \mathbf{e}^x is equal to either $2^{-m_0} \cdot \mathbf{e}^x$ or $2^{-m_0+1} \cdot \mathbf{e}^x$.

The value of \mathbf{e}^x is a subnormal number or 0 in the double-precision environment. Because of this, we first calculate the rounded value of $2^{-1011} + \mathbf{e}^x$ in the extended double-precision environment and then subtract 2^{-1011} to obtain the rounded value in the double-precision

environment. Recall that the last mantissa bit of the subnormal double-precision numbers corresponds to 2^{-1074} . The last mantissa bit of the rounded value of $2^{-1011} + \mathbf{e}^x$ in the extended double-precision environment also corresponds to 2^{-1074} .

From (56), it follows that

$$\begin{aligned} 2^{-1011} + \mathbf{e}^x &= 2^{-1011} + M'_3 \cdot (1 + S_1 + S_2) - \delta'_b = \\ &= 2^{-1011} + M'_3 + M'_{3,1} \cdot S_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b = (57) \\ &= Y + t_2 + t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b. \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^x &= (Y - 2^{-1011}) + \\ &+ (t_2 + t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b). \end{aligned} \quad (58)$$

The values M'_3 and $M'_{3,1} \cdot S_1$ are computed exactly (see Theorem 10 and (30)). The values t_0 and t_1 are obtained by applying the *Fast2Sum* algorithm to the values M'_3 and $M'_{3,1} \cdot S_1$. Using (23) and (30), we obtain

$$0.702 \cdot 2^{m_0} < t_0 < 1.422 \cdot 2^{m_0}, |t_1| \leq 2^{m_0-64}. \quad (59)$$

To calculate the values of Y and t_2 , we apply the *Fast2Sum* algorithm to 2^{-1011} and t_0 . Consequently,

$$\begin{aligned} 2^{-1011} + 0.701 \cdot 2^{m_0} &< Y < 2^{-1011} + 1.423 \cdot 2^{m_0}, \\ Y &\in B_{-1011,-1074}, |t_2| \leq 2^{-1075}, \\ Y - 2^{-1011} &< 1.423 \cdot 2^{m_0} \leq 1.423 \cdot 2^{-1022}, \\ Y - 2^{-1011} &\in B_{-1022,-1074}. \end{aligned} \quad (60)$$

The subtraction $Y - 2^{-1011}$ is computed exactly (no rounding). Moreover, $Y - 2^{-1011}$ is a double-precision number. Taking into account (30), (35), and (59), we obtain

$$\begin{aligned} |t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)| &< 1.730 \cdot 2^{m_0-58}, \\ \left| \Delta(t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right| &\leq \\ &\leq \left| \Delta(M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2) \right| + 2^{m_0-122} < \\ &< 2^{m_0} \cdot (1.878 \cdot 2^{-120} + 2^{-122}) < 1.064 \cdot 2^{m_0-119}. \end{aligned} \quad (61)$$

Recall that $m_0 \leq -1022$. It follows from (56), and (61)

$$\begin{aligned} \left| \left(t_2 + \left(t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2) \right) \right) - \delta'_b \right| &< \\ &< 2^{-1075} + 1.730 \cdot 2^{m_0-58} + 1.276 \cdot 2^{m_0-119} < \\ &< 1.055 \cdot 2^{-1075}. \end{aligned} \quad (62)$$

Let us consider *rounding towards plus and minus infinity*. Let Y_1 be the result of the computation $t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2))$, and δ'_c be the computation error. Using (61) and (62), we obtain

$$\begin{aligned}
& t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) = Y_1 - \delta'_c, \\
& |\delta'_c| = \left| \Delta(t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2))) \right| < \\
& < \left| \Delta(t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right| + 2^{-1075-64} < \\
& < 1.064 \cdot 2^{m_0-119} + 2^{-1075-64} < 1.266 \cdot 2^{-1075-64}.
\end{aligned} \quad (63)$$

Combining this with (56), (57), and (62), we obtain

$$e^x = (Y - 2^{-1011}) + (Y_1 - \delta'_b - \delta'_c), \quad (64)$$

where $Y - 2^{-1011} \in B_{-1022, -1074}$, $|Y_1| < 1.055 \cdot 2^{-1075}$, $|\delta'_b| < 1.276 \cdot 2^{m_0-119}$, $|\delta'_c| < 1.266 \cdot 2^{-1075-64}$.

Consequently, the result of rounding depends only on the rounding mode and the sign of $Y_1 - \delta'_b - \delta'_c$.

Using (61) and (64), we obtain

$$\begin{aligned}
& |t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 - \delta'_b| \leq \\
& \leq |t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2| + |\delta'_b| < 1.731 \cdot 2^{m_0-58}, \\
& \leq |t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2 + \delta'_c| \leq \\
& \leq |t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2| + |\delta'_c| < 1.750 \cdot 2^{m_0-58}.
\end{aligned} \quad (65)$$

Suppose $|t_2| > 1.751 \cdot 2^{m_0-58}$. From (64) and (65), it follows that both numbers Y_1 and $Y_1 - \delta'_b - \delta'_c$ have the same sign as t_2 . Therefore, the rounded values of e^x and $(Y - 2^{-1011}) + Y_1$ are equal (in the double-precision environment).

Suppose now that $|t_2| \leq 1.751 \cdot 2^{m_0-58}$. Using (61), we obtain

$$\begin{aligned}
& |t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2))| < \\
& < 1.751 \cdot 2^{m_0-58} + 1.730 \cdot 2^{m_0-58} < 1.741 \cdot 2^{m_0-57}, \\
& |\delta'_c| = \left| \Delta(t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_2 + M'_3 \cdot S_2))) \right| < \\
& < \left| \Delta(t_1 + M'_{3,2} \cdot S_2 + M'_3 \cdot S_2) \right| + 2^{m_0-57-64} < \\
& < 1.064 \cdot 2^{m_0-119} + 2^{m_0-121} < 1.314 \cdot 2^{m_0-119}.
\end{aligned} \quad (66)$$

The distance between the mantissas of e^x and $(Y - 2^{-1011}) + Y_1$ is not greater than (see (56) and (66))

$$\begin{aligned}
& 2^{1-m_0} \cdot |\delta'_b + \delta'_c| \leq \\
& \leq 2 \cdot (1.276 \cdot 2^{m_0-119} + 1.314 \cdot 2^{m_0-119}) < 1.295 \cdot 2^{-117}.
\end{aligned}$$

By Theorem 4, the rounded values of e^x and $(Y - 2^{-1011}) + Y_1$ are equal to each other (in the double-precision environment).

From (64), it follows that $|Y_1| < 2^{-1074}$. Thus, for rounding towards plus infinity, the rounded value of $(Y - 2^{-1011}) + Y_1$ is equal to $(Y - 2^{-1011}) + 2^{-1074}$ if $Y_1 > 0$ and is equal to $Y - 2^{-1011}$ otherwise. The case of rounding towards minus infinity is treated similarly.

Let us consider the rounding to nearest mode. Let Y_2 be the result of evaluating the expression

$$(t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)),$$

and Y_3 be the result of evaluating the expression

$$(t_2 + 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)).$$

We claim that for $Y_2 > 0$, the rounded value of e^x equal to $(Y - 2^{-1011}) + 2^{-1074}$, for $Y_3 < 0$, the rounded value of e^x is equal to $(Y - 2^{-1011}) - 2^{-1074}$, and for $Y_2 \leq 0$ and $Y_3 \geq 0$, it is equal to $Y - 2^{-1011}$.

Suppose $t_2 > 2^{-1075} - 2^{m_0-54}$. Recall that $|t_2| \leq 2^{-1075}$ (see (60)). Since $-1075 \leq m_0 \leq -1022$, we see that $2^{m_0-54} \leq 0.5 \cdot 2^{-1075}$. Therefore, the difference $t_2 - 2^{-1075}$ is calculated exactly, and $|t_2 - 2^{-1075}| < 2^{m_0-54}$. Using (61), we obtain

$$\begin{aligned}
& \left| (t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right| < \\
& < 1.109 \cdot 2^{m_0-54} < 1.109 \cdot 2^{-1076}.
\end{aligned} \quad (67)$$

Besides, we see that $Y_3 > 0$.

Let δ'_c be the error in the computation Y_2 . In other words, we have

$$(t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) = Y_2 - \delta'_c. \quad (68)$$

Using inequalities (61) and (67), we obtain

$$\begin{aligned}
& |\delta'_c| = \left| \Delta((t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2))) \right| < \\
& < \left| \Delta(t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right| + 2^{m_0-54-64} < \\
& < 1.064 \cdot 2^{m_0-119} + 2^{m_0-118} < 1.532 \cdot 2^{m_0-118}.
\end{aligned} \quad (69)$$

From (58) and (68), it follows that

$$e^x = (Y - 2^{-1011}) + (Y_2 + 2^{-1075} - \delta'_c - \delta'_b). \quad (70)$$

Recall that the mantissa of e^x is equal to either $2^{-m_0} \cdot e^x$ or $2^{-m_0+1} \cdot e^x$. Taking into account (56), (69), and (70), we see that the mantissa distance between e^x and $(Y - 2^{-1011}) + (Y_2 + 2^{-1075})$ is not greater than

$$\begin{aligned}
& 2^{1-m_0} \cdot |\delta'_b + \delta'_c| \leq 2 \cdot (1.276 \cdot 2^{-119} + 1.533 \cdot 2^{-118}) < \\
& < 1.085 \cdot 2^{-116}.
\end{aligned}$$

By Theorem 4, the rounded values of e^x and $(Y - 2^{-1011}) + (Y_2 + 2^{-1075})$ are equal to each other in the double-precision environment.

Let us consider rounding of $(Y - 2^{-1011}) + (Y_2 + 2^{-1075})$. Recall that $Y - 2^{-1011} \in B_{-1022, -1074}$ and $|Y_2| < 2^{-1075}$ (see (60), (67), (68), and (69)). If $Y_2 > 0$, then the rounded values of $(Y - 2^{-1011}) + (Y_2 + 2^{-1075})$ and e^x are equal to $(Y - 2^{-1011}) + 2^{-1074}$. Otherwise, they are equal to $Y - 2^{-1011}$.

Suppose $t_2 < -2^{-1075} + 2^{m_0-54}$. This case is very similar to the previous one. Arguing as in the previous case, we see that $Y_2 < 0$ and the rounded values of \mathbf{e}^x and $(Y - 2^{-1011}) + (Y_3 - 2^{-1075})$ are equal to each other. If $Y_3 < 0$, then the rounded values \mathbf{e}^x and $(Y - 2^{-1011}) + (Y_3 - 2^{-1075})$ are equal to $(Y - 2^{-1011}) - 2^{-1074}$. Otherwise, they are equal to $Y - 2^{-1011}$.

Now suppose $|t_2| \leq 2^{-1075} - 2^{m_0-54}$, then (see (61))

$$\begin{aligned} & \left| (t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right| \leq \\ & \leq |t_2| + 2^{-1075} + |t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)| < \\ & < 2^{-1075} - 2^{m_0-54} + 2^{-1075} + 1.730 \cdot 2^{m_0-58} < \\ & < 2^{-1074} - 1.784 \cdot 2^{m_0-55}. \end{aligned} \quad (71)$$

Let us bound the error in the calculation of Y_2 and Y_3 . From (61) and (71), it follows that

$$\begin{aligned} & \left| \Delta \left((t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right) \right| < \\ & < \left| \Delta (t_2 - 2^{-1075}) \right| + \left| \Delta \left((t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right) \right| + \\ & + 2^{-1075-64} < 2^{-1075-64} + 1.064 \cdot 2^{m_0-119} + 2^{-1075-64} < \\ & < 2^{-1075-63} + 1.064 \cdot 2^{-1022-119} = 1.133 \cdot 2^{-1075-63}. \end{aligned}$$

Similarly, we get

$$\begin{aligned} & \left| (t_2 + 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right| < \\ & < 2^{-1074} - 1.784 \cdot 2^{m_0-55}. \\ & \left| \Delta \left((t_2 + 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) \right) \right| < \\ & < 1.133 \cdot 2^{-1075-63}. \end{aligned}$$

Using (61), we obtain

$$\begin{aligned} & (t_2 - 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) < \\ & < -2^{m_0-54} + 1.730 \cdot 2^{m_0-58} < -1.784 \cdot 2^{m_0-55}, \\ & (t_2 + 2^{-1075}) + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) > \\ & > 2^{m_0-54} - 1.730 \cdot 2^{m_0-58} > 1.784 \cdot 2^{m_0-55}. \end{aligned} \quad (72)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} Y_2 & < -1.784 \cdot 2^{m_0-55} + 1.133 \cdot 2^{-1075-63} < 0, \\ Y_3 & > 1.784 \cdot 2^{m_0-55} - 1.133 \cdot 2^{-1075-63} > 0. \end{aligned}$$

From (57), it follows that

$$\mathbf{e}^x = (Y - 2^{-1011}) + (t_2 + t_1 + M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_1) - \delta'_b.$$

By assumption, $|t_2| \leq 2^{-1075} - 2^{m_0-54}$. Taking into account (56) and (61)

$$\begin{aligned} & \left| t_2 + (t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)) - \delta'_b \right| < \\ & < |t_2| + |t_1 + (M'_{3,2} \cdot S_1 + M'_3 \cdot S_2)| + |\delta'_b| < \\ & < 2^{-1075} - 2^{m_0-54} + 1.730 \cdot 2^{m_0-58} + 1.276 \cdot 2^{m_0-119} < \\ & < 2^{-1075} - 1.783 \cdot 2^{m_0-55}. \end{aligned}$$

Recall that $Y - 2^{-1011} \in B_{-1022, -1074}$ (see (60)). Consequently, the rounded value of \mathbf{e}^x is equal to $Y - 2^{-1011}$.

To avoid computations with subnormal numbers, first, instead of computing $Y - 2^{-1011}$ or $(Y - 2^{-1011}) \pm 2^{-1074}$, we compute $Y - (2^{-1011} - 2^{-1022})$ or $(Y - (2^{-1011} - 2^{-1022})) \pm 2^{-1074}$. Next, we convert the resulting value to a double-precision number, and instead of subtracting 2^{-1022} , we write 0 to the exponent of this number.

The algorithms presented above were implemented as C function `crexp_e()` calculating the correctly rounded exponent. This function was tested and its time characteristics was measured. The reader can find a detailed description of testing and timing in [2]. Here we only note that all tests passed successful. The function `crexp_e()` has the shortest maximum execution time among the considered functions. The average execution time of the function `crexp_e()` on the interval $[x_{zero2}, x_{dnrm})$ is also less than other considered functions. However, the average execution time of the function `crexp_e()` in the interval $[x_{dnrm}, x_{ovr}]$ is longer than the exponential functions of CRLibm and Linux. It can be reduced by combining functions `crexp_e()` and `__ieee754_exp()` of Linux, similar to how it is done in [3].

Conclusion

The article presented the algorithm for calculating the correctly rounded value of the exponential function. Both the argument and value of the function are double-precision numbers, and the calculation uses extended double-precision numbers. Rounding can be done using any of the rounding modes specified by the IEEE754 standard. A formal description of the algorithm was given with the full proof of its correctness. The C-function implementing the presented algorithm was developed. Testing the function confirmed the correctness of the algorithm once again. The execution time of the function turned out to be better than that of other similar functions.

Acknowledgment: The author would like to thank A. A. Asonov for correcting his English.

This work was supported by the State Research Program of the Russian Federation (Project Number FNEF-2022-002).

References

1. **IEEE Std. 754-2008** — IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, IEEE Std., 2018.
2. **Godunov A. N.** Algorithm for Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double Precision Using Double-Extended Arithmetic, *Programming and Computer Software*, 2022, vol. 48, no. 6, pp. 369–375. DOI: 10.1134/S0361768822060032.
3. **Godunov A.** Algorithms for Calculating Correctly Rounded Exponential Function in Double-Precision Arithmetic, *IEEE Transactions on Computers*, 2020, vol. 69, no. 9, pp. 1388–1400. DOI: 10.1109/TC.2020.2972901.
4. **Muller J.-M.** *Elementary Functions: Algorithms and Implementation*. Birkhauser, 2005, 286 p.
5. **Lefevre V., Muller J.-M.** Worst cases for correct rounding of the elementary functions in double precision, *Proceedings of the 15th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, June 2001, pp. 111–118.
6. **de Dinechin F., Defour D., Lauter C.** Fast correct rounding of elementary functions in double precision using double-extended arithmetic, INRIA, Research Report, RR-5137, 2004, available at: <http://inria.hal.science/inria-00071446/document> (date of access 03.07.2023).
7. **Lefèvre V.** Hardest-to-Round Cases — Part 2, Journées TaMaDi, Lyon, Oct. 2013, available at: <http://www.vinc17.org/research/slides/tamadi2013-10.pdf> (date of access 03.07.2023).
8. **Daramy-Loirat C., Defour D., de Dinechin F., Gallet M., Gast N., Lauter C. Q., Muller J.-M.** CR-LIBM, a library of correctly rounded elementary functions in double-precision, LIP, Research Report, 2006, available at: <https://hal-ens-lyon.archives-ouvertes.fr/ensl-01529804> (date of access 03.07.2023).
9. **Chevillard S., Joldes M., Lauter C.** Sollya: An Environment for the Development of Numerical Codes, *Mathematical Software — ICMS 2010*, Heidelberg, Germany, Springer, September 2010, pp. 28–31.
10. **Lauter C.** A correctly rounded implementation of the exponential function on the Intel Itanium architecture. INRIA, Research Report, RR-5024, 2003, available at: <https://hal.inria.fr/inria-00071560/documnt> (date of access 03.07.2023).
11. **Gelfond A. O.** *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover, NewYork, 1960, 208 p.
12. **Shilov G. E.** *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Pubns, NewYork, 1996, 516 p.

ИНФОРМАЦИЯ

Продолжается подписка на журнал «Программная инженерия» на первое полугодие 2024 г.

Оформить подписку можно через подписные агентства
или непосредственно в редакции журнала (для юридических лиц).

Подписной индекс по Объединенному каталогу

«Пресса России» — 22765

Сообщаем, что с 2020 г. возможна подписка
на электронную версию нашего журнала:

ООО «ИВИС»: тел. (495) 777-65-57, 777-65-58; e-mail: sales@ivis.ru;
ООО«УП Урал-Пресс Округ». Для оформления подписки (индекс 013312)
следует обратиться в филиал по месту жительства — <http://ural-press.ru>

Адрес редакции: 107076, Москва, Матросская Тишина, д. 23, с. 2, оф. 45,

Издательство «Новые технологии»,
редакция журнала «Программная инженерия»

Тел.: (499) 270-16-52. E-mail: prin@novtex.ru

С. В. Жуков, аспирант, i@coder-stas.ru,
О. А. Ковалева, д-р техн. наук, доц., проф., solomina-oa@yandex.ru,
С. В. Ковалев, д-р техн. наук, доц., проф., sseedd@mail.ru,
Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина

Анализ влияния автоматической перекомпоновки контента на скорость полной отрисовки страницы

Поступила в редакцию 15.07.2023

Принята к публикации 29.08.2023

Скорость, с которой сайты отображаются у пользователей, влияет на отношение к просматриваемому ресурсу, а следовательно, и на продвижение ресурса в поисковых системах. Несмотря на это, скорость отображения многих сайтов низкая. Такое положение вещей вредит и конечному потребителю информации, и владельцам интернет-ресурсов. В статье рассмотрен вариант решения задачи, устраняющей этот недостаток с помощью автоматической перекомпоновки контента html-документа. Представлено описание разработанного скрипта mirror для создания копий страниц веб-сайтов и для тестирования алгоритмов оптимизации html-контента. Приведены описания алгоритмов, разработанных для устранения низкой скорости загрузки. Рассмотрены результаты оптимизации контента на примере двух сайтов.

Ключевые слова: оптимизация, html, веб-страница, скорость загрузки, PageSpeed Insights, компоновка веб-контента, скрипт, алгоритм

Для цитирования:

Жуков С. В., Ковалева О. А., Ковалев С. В. Анализ влияния автоматической перекомпоновки контента на скорость полной отрисовки страницы // Программная инженерия. 2023. Том 14, № 11. С. 550—562. DOI: 10.17587/prin.14.550-562.

Введение

С тех пор как компания Google заявила о том, что скорость загрузки страницы влияет на ее ранжирование в результатах поиска, многие веб-мастера начали уделять этому вопросу большое внимание [1]. Они стали оптимизировать свои сайты для быстрой загрузки страниц, используя различные методы, такие как сжатие изображений, минимизация CSS и JavaScript, кеширование данных и т. д. Однако при проверке на практике в эксперименте Метта Питерса, проведенном совместно с Zoompf [2], не была найдена корреляция между скоростью полной загрузки страницы и ее местом в поисковой выдаче. Однако была найдена закономерность между скоростью получения первого байта от сервера и местом сайта в поисковой выдаче — более высокие места в ней занимали сайты, серверы которых быстрее начинали отправлять данные (рис. 1).

Было выявлено, что страницы с большим количеством контента занимают более высокие места в поисковой выдаче, чем страницы с меньшим количеством контента. Так как степень наполнения страницы контентом является одним из факторов повышения посещаемости сайта, разработчики и специалисты по оптимизации (далее — оптимизаторы) сайтов заинтересованы в увеличении его количества на странице, что приводит к росту веса страницы. Так, по данным HTTP Archive, средний размер страницы для десктопных устройств вырос с 652,6 килобайт в 2012 г. до 2393,8 килобайт в 2023 г. [3] (рис. 2, см. вторую сторону обложки).

Объем контента на страницах постепенно увеличивается. Чем больше контента содержится на странице, тем больше ее вес и, как следствие, больше времени нужно для полной загрузки страницы. Пользователи обычно покидают сайт, если он загружается долго. Если страница загружается быстро, то пользователь может остаться на сайте



Рис. 1. Среднее время до первого байта по отношению к позиции в поисковом рейтинге (по данным moz.com)

и продолжить просмотр контента. Таким образом, скорость полной загрузки страницы является одним из факторов, влияющих на bounce rate.

Bounce rate — это метрика, отражающая число посетителей сайта, которые уходят вскоре после открытия страницы и не совершают никаких действий. Показатель рассчитывают в процентном соотношении к общему числу посетителей [4]. Эта метрика также является одним из поведенческих факторов, основываясь на которых поисковые системы оценивают качество сайта. Различные поисковые системы по-разному вычисляют bounce rate. Так, в Google Analytics есть две технологии сбора данных: Universal Analytics и GA4. Более актуальная GA4 определяет bounce rate как процент сеансов, которые не были вовлеченными сеансами. Вовлеченный сеанс — это посещение, которое длится 10 с или дольше, имеет одно или несколько событий-конверсий или имеет два или более просмотров страниц [5]. Яндекс считает оценку bounce rate, как показатель ухода пользователя со страницы в течение 15 с после захода [6]. По данным исследования Ranking Factors SEMrush Study 2.0, bounce rate — четвертый по значимости фактор, влияющий на ранжирование сайта в поисковых системах [7].

В мае 2020 г. компания Google объявила об обновлении фактора ранжирования Core Web Vitals. Было заявлено, что положительный опыт взаимодействия пользователя с сайтом напрямую влияет на конверсию, и поэтому с мая 2021 г. данный фактор будет влиять на ранжирование сайта в поисковой системе Google [8]. Фактор Core Web Vitals состоит из нескольких перечисленных далее метрик.

Largest Contentful Paint (LCP) — скорость загрузки основного контента. Показатель измеря-

ет, сколько времени требуется для появления на экране наиболее важной части контента. Хороший результат по этому показателю должен быть в пределах 2,5 с от начала загрузки страницы.

First Input Delay (FID) — время ожидания до первого взаимодействия с контентом. Показатель измеряет, насколько быстро страница может реагировать на первое взаимодействие с пользователем. Это время не должно превышать 100 мс для комфорта пользователя.

Cumulative Layout Shift (CLS) — совокупное смещение макета. Показатель измеряет стабильность визуальных элементов на просматриваемой странице. Другими словами, перемещается ли что-то на экране во время загрузки. Чтобы обеспечить удобство работы пользователей, показатель CLS не должен превышать 0,1 (сумма всех индивидуальных оценок сдвига макета для каждого неожиданного сдвига макета) [9].

На основе представленных выше соображений можно сделать вывод, что скорость и качество полной отрисовки страницы становятся одним из важных факторов для продвижения сайта в формате поисковой оптимизации. В настоящее время под скоростью загрузки страницы понимают перечисленные далее параметры.

Скорость полной отрисовки страницы — время, необходимое браузеру для загрузки и отображения всей страницы, включая все изображения, стили, скрипты и другие элементы. Она зависит от многих факторов, таких как размер страницы, скорость интернет-соединения, производительность компьютера и т. д.

Скорость получения первого байта страницы — время задержки между отправкой запроса на сервер и получением первого байта ответа. Она также зависит от многих факторов, таких как произво-

длительность веб-сервера, оптимизация серверных скриптов, использование технологий кеширования, качество интернет-соединения.

Оба перечисленных выше параметра важны для продвижения сайта в поисковых системах, и проблема по их увеличению остается актуальной в настоящее время. Например, по данным исследования LittleData на сентябрь 2022 г., из 5727 сайтов только 10 % загружаются менее чем за 2,2 с [10]. Если бы владельцы веб-сайтов могли автоматически увеличить скорость полной отрисовки страницы, то они бы получили преимущество перед конкурентами.

Структура html-страниц описана в стандартах и может быть изменена автоматизированными алгоритмами. В зависимости от сложности страницы браузер затрачивает разное время на ее отрисовку и загрузку. Существуют рекомендации по разметке html-документа, позволяющие ускорить его отображение. На этой основе можно создавать алгоритмы и их программные реализации для автоматического приведения документа в вид, позволяющий браузерам отображать страницу быстрее.

Таким образом, целью работы является оптимизация структуры html-страницы для увеличения скорости ее полного отображения браузером. Для достижения этой цели потребуются решить ряд задач. Начать следует с выбора инструментальных средств, позволяющих измерить скорость полной отрисовки страницы, которая сможет показать эффективность автоматической перекомпоновки html-контента. Затем нужно будет создать тестовую площадку для проверки разных способов оптимизации страницы. После этого необходимо разработать алгоритмы, изменяющие html-документ, и проверить их эффективность на практике.

Инструментальные средства для измерения скорости загрузки страницы

Существует большой набор инструментальных средств, которые могут помочь измерить скорость загрузки страницы. Рассмотрим некоторые из них.

Google PageSpeed Insights — инструментальное средство открытого доступа от Google, которое позволяет проверить скорость загрузки страницы на интересующем сайте и получить рекомендации по улучшению производительности.

Pingdom — средство, распространяемое на коммерческой основе, которое предоставляет подробную информацию о времени загрузки страницы и ее состоянии.

GTMetrix — средство открытого доступа, которое позволяет измерять время загрузки страницы и предоставляет рекомендации по оптимизации.

WebPageTest — сервис, который позволяет провести тестирование скорости загрузки страницы на различных устройствах и браузерах.

Yandex.Metrika — система, разработанная Яндексом, которая также может отслеживать время загрузки страниц и анализировать данные о производительности сайта.

В данной статье будем использовать модель и программные механизмы измерения скорости полной отрисовки страницы, предоставляемые Google PageSpeed Insights [11]. Она основана на инструментальном средстве Lighthouse, которое в десятой версии опирается на перечисленные далее метрики загрузки страницы.

First Contentful Paint (FCP) — это время, которое необходимо браузеру для отображения первого контента на странице. Этот показатель позволяет оценить, как быстро сайт загружается и насколько быстро пользователи смогут начать работу с ним. Время FCP измеряется в миллисекундах и зависит от нескольких факторов, включая скорость соединения с Интернетом, размер страницы [12].

Speed Index (SI) — насколько быстро контент визуально отображается во время загрузки страницы (измеряется в секундах) [13].

Total Blocking Time (TBT) — это общее время, в течение которого пользователь не может использовать веб-сайт или приложение из-за блокировок [14].

Largest Contentful Paint (LCP) — это время, за которое браузер успевает отобразить самый большой элемент на странице [15].

Cumulative Layout Shift (CLS) — этот показатель измеряется на основе изменений в положении элементов на странице после ее загрузки. Если элементы сдвигаются сильно, то это может привести к ухудшению пользовательского опыта и снижению конверсии [16].

Метрики влияют на итоговую оценку в соответствии с пропорциями, принятыми в Lighthouse v. 10: для FCP — 10 %; для SI — 10 %; для LCP — 25 %; для TBT — 30 %; для CLS — 25 %. В Lighthouse v. 9 метрики следующие: FCP — 10 %; SI — 10 %; LCP — 25 %; TTI — 10 %; TBT — 30 %; CLS — 15 %. Здесь TTI — **Time to Interactive** — время, требующееся странице, чтобы стать полностью интерактивной.

Для тестирования эффективности алгоритмов автоматической компоновки контента нужно применить их на реальных веб-сайтах и сравнить результаты до и после использования автоперекомпоновки данных. Однако чтобы разработать такие алгоритмы, нужно много раз проверять эффективность их работы на разных ресурсах.

Для решения этой задачи на языке программирования PHP был написан скрипт `mirror`. Это инструментальное средство, способное создавать полные копии веб-страниц и размещать их на отдельном сервере, где установлено само средство. Скрипт обладает рядом качеств, которые позволяют автоматизировать тестирование разрабатываемых алгоритмов автоматической компоновки контента.

Основная задача скрипта `mirror` — предоставлять возможность тестирования различных компоновок HTML-документа без необходимости вносить изменения в код сайта. Она решается путем создания копии веб-страницы и выполнением над ней ряда автоматических преобразований HTML-документа с использованием авторских алгоритмов. Такой подход значительно сокращает время на внесение корректировок в алгоритмы перекomпоновки HTML-контента и облегчает процесс разработки и тестирования новых функций.

Еще одним преимуществом использования скрипта `mirror` является предоставляемая им возможность тестирования скорости загрузки веб-страниц на различных серверах. Это позволяет нивелировать влияние времени ответа рабочего сервера (на котором происходит работа с реальными клиентами и актуальными данными) на скорость загрузки страницы посредством тестирования страницы на отдельном незагруженном сервере. Если простое копирование страницы на незагруженный сервер значительно влияет на скорость загрузки страницы, прежде всего следует разобраться с настройкой рабочего сервера, устранить возможные проблемы в его конфигурации.

Скрипт может также создавать копии оригинальных ресурсов веб-страницы, таких как скрипты JavaScript, CSS-стили и изображения распространенных web-форматов (JPG, PNG). Затем он автоматически уменьшает размер этих скопированных ресурсов. Кроме того, он имеет возможность конвертировать копии оригинальных изображений в формат WebP, который обеспечивает более эффективное сжатие и уменьшает размер файлов, не ухудшая качество изображений. Оптимизированные копии ресурсов могут быть использованы скриптами автоматической компоновки контента для увеличения скорости отображения страницы. При переносе скриптов автоматической перекomпоновки страницы на целевой сайт алгоритмы оптимизации внешних ресурсов следует заменить на алгоритмы, предоставляемые платформой сайта.

Влияние автоматической компоновки контента на скорость загрузки веб-страницы

Как было отмечено ранее, цитируемые метрики по-разному влияют на итоговую оценку скорости загрузки страницы. Некоторые метрики взаимосвязаны, например, скорость отрисовки самого большого контента не может быть меньше, чем скорость первой отрисовки контента. Если разработанный алгоритм компоновки позволит максимизировать баллы на метриках, имеющих наибольшее влияние на итоговый балл, пусть даже ценой ухудшения другой метрики, скорость загрузки страницы увеличится.

При помощи проверки и тестирования разных рекомендаций по увеличению скорости загрузки страницы были разработаны перечисленные далее алгоритмы, позволяющие вносить следующие корректировки в HTML-документ в автоматическом и полуавтоматическом режимах.

Алгоритм оптимизации внешних ресурсов заменяет ссылки на файлы стилей, скриптов, изображений на их оптимизированные версии. Принцип работы алгоритма представлен на рис. 3. При этом алгоритм использует три внешних обработчика, оптимизирующих файлы определенных типов. Внешний обработчик зависит от того, где используется алгоритм. Может использоваться обработчик из окружения, в котором выполняется алгоритм, например, JS- и CSS-файлы может сжимать компонент `MinifyX` в CMS `MODX` [17]. Можно использовать свой обработчик. Фрагмент такого обработчика изображений, разработанного авторами на языке программирования PHP, приведен на рис. 4. Метод `generateWebp` создает копию изображения (форматов PNG или JPEG) в формате WebP и возвращает в массиве описания файла относительный путь к созданному изображению в случае успешной генерации изображения.

Алгоритм оптимизации стилей выполняет замену подключенных стилей на критические стили и загрузчик основных стилей, написанный на JavaScript. Принцип работы алгоритма представлен на рис. 5. Для выделения критических стилей используется внешний обработчик — плагин `grunt-critical` для менеджера задач `Grunt` [18]. Задача разработанного алгоритма заключается в подготовке данных, передаваемых обработчику, и установке созданных им ресурсов в исходный HTML-документ.

Алгоритм уменьшения времени подключения к сторонним ресурсам заключается в добавлении тегов `link` с атрибутами `rel = "preconnect"` и `rel = "dns-prefetch"` для доменов, отличающихся от

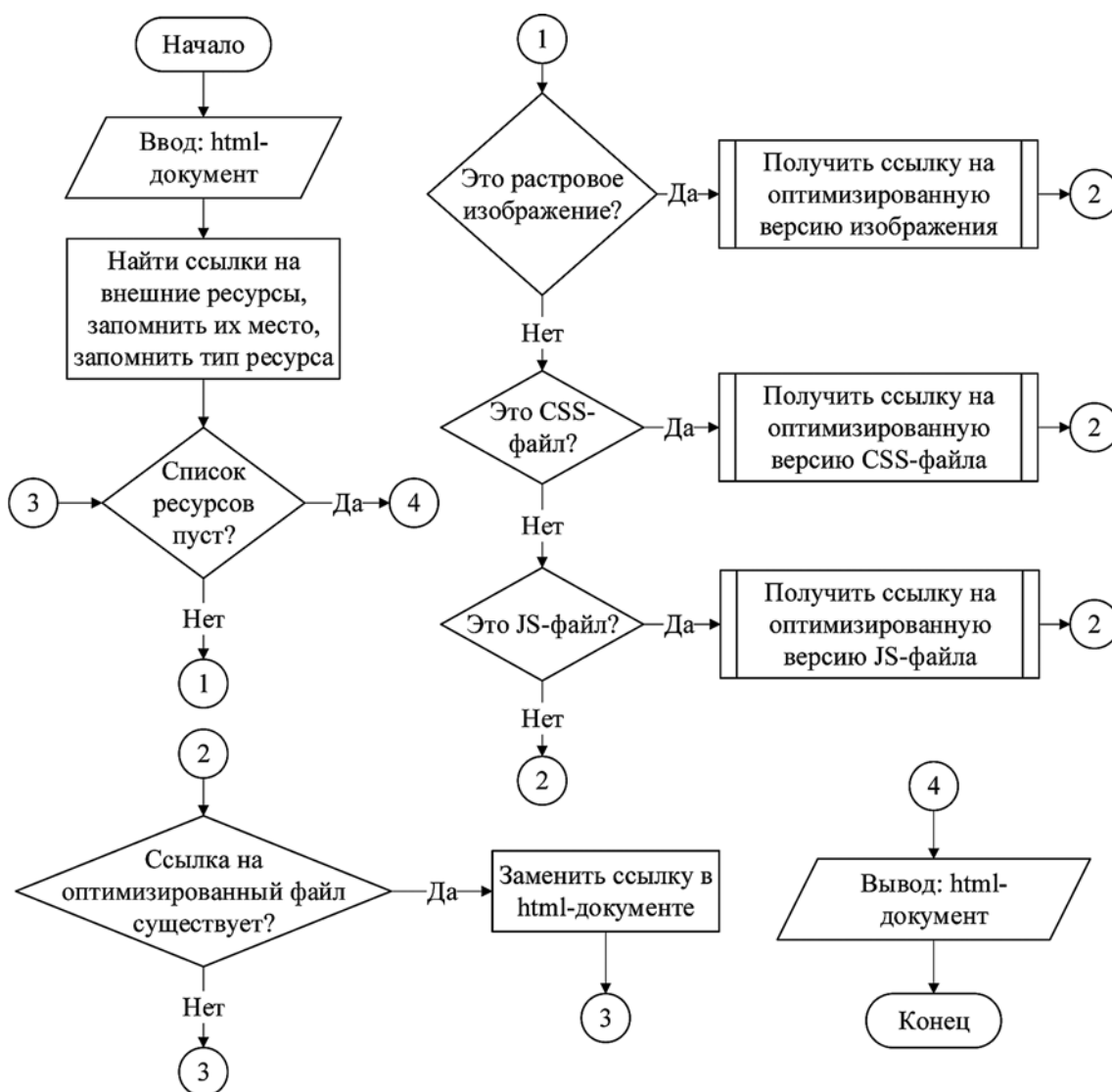


Рис. 3. Принцип работы алгоритма по оптимизации внешних ресурсов

основного домена сайта, с которых будут загружаться ресурсы для страницы. Это позволяет выполнить предварительное подключение к доменам и предварительное разрешение DNS-записей. Всего подключается пять доменов, ссылки на которые повторяются чаще остальных или располагаются выше к началу html-документа. Принцип работы алгоритма приведен на рис. 6.

Алгоритм оптимизации скриптов ищет скрипты, размещенные на странице, добавляет им атрибут для асинхронной загрузки. Принцип его работы отображен на рис. 7.

Алгоритм отложенной загрузки iframe-элементов ищет в html-коде iframe-элементы, вырезает из них ссылки на ресурсы. Добавляет JavaScript-код, восстанавливающий ссылки при попадании элемента в область просмотра пользователя. Принцип работы алгоритма представлен на рис. 8.

Алгоритм оптимизации изображений проверяет, как подключены изображения, добавляет при необходимости атрибуты для отложенной загрузки и декодирования. Принцип работы алгоритма представлен на рис. 9.

Описанные и реализованные алгоритмы применялись для оптимизации разных сайтов. Эффективность их работы будет рассмотрена на примере двух проектов: первый — сайт по продаже автомобилей; второй — сайт приюта домашних животных. На первый проект скрипты для оптимальной переконфигурации контента установлены в систему управления сайтом. Для второго проекта приведены результаты тестирования алгоритмов на тестовом стенде, созданным скриптом mirror.

Результаты измерений скорости загрузки страниц для первого проекта отображены в табл. 1—4.

```

protected static function generateWebp(array $arImage, int $intQuality = 90)
{
    $arImage['WEBP_SRC'] = false;
    $arImage['WEBP_PATH'] = self::generatePath($arImage['SRC']);
    $arImage['WEBP_FILE_NAME'] = self::generateFileName($arImage['FILE_NAME']);
    $fullPath = self::$documentRoot . $arImage['WEBP_PATH'];

    if (self::checkFormat($arImage['CONTENT_TYPE']) && self::availablePath($fullPath)) {

        $arImage['WEBP_SRC'] = $arImage['WEBP_PATH'] . DIRECTORY_SEPARATOR . $arImage['WEBP_FILE_NAME'];
        $fullPathFileWebp = self::$documentRoot . $arImage['WEBP_SRC'];
        $fullPathFileOriginal = self::$documentRoot . $arImage['SRC'];

        if (!file_exists($fullPathFileWebp)) {

            $im = false;
            $success = false;

            if (self::$isPng) {
                $im = imagecreatefrompng($fullPathFileOriginal);
            } else {
                $im = imagecreatefromjpeg($fullPathFileOriginal);
            }

            if (is_resource($im) || $im instanceof \GdImage) {
                $success = imagewebp($im, $fullPathFileWebp, $intQuality);
                imagedestroy($im);
            }

            if (!$success) {
                $arImage['WEBP_SRC'] = false;
            }
        }
    }

    return $arImage;
}

```

Рис. 4. Метод конвертации изображения в формат WebP (на языке программирования PHP)

После применения автоматической оптимизации контента наблюдается увеличение скорости загрузки страницы. Lighthouse версии v. 9 показы-

вает, что Total Blocking Time увеличилось за счет добавления новых скриптов и отложенной загрузки старых, но остальные показатели стали меньше.

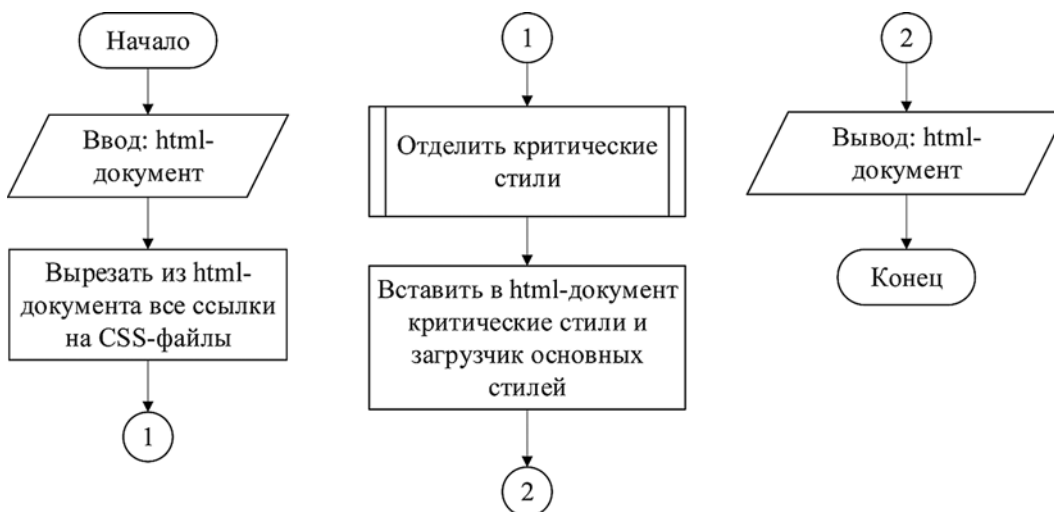


Рис. 5. Принцип работы алгоритма оптимизации стилей

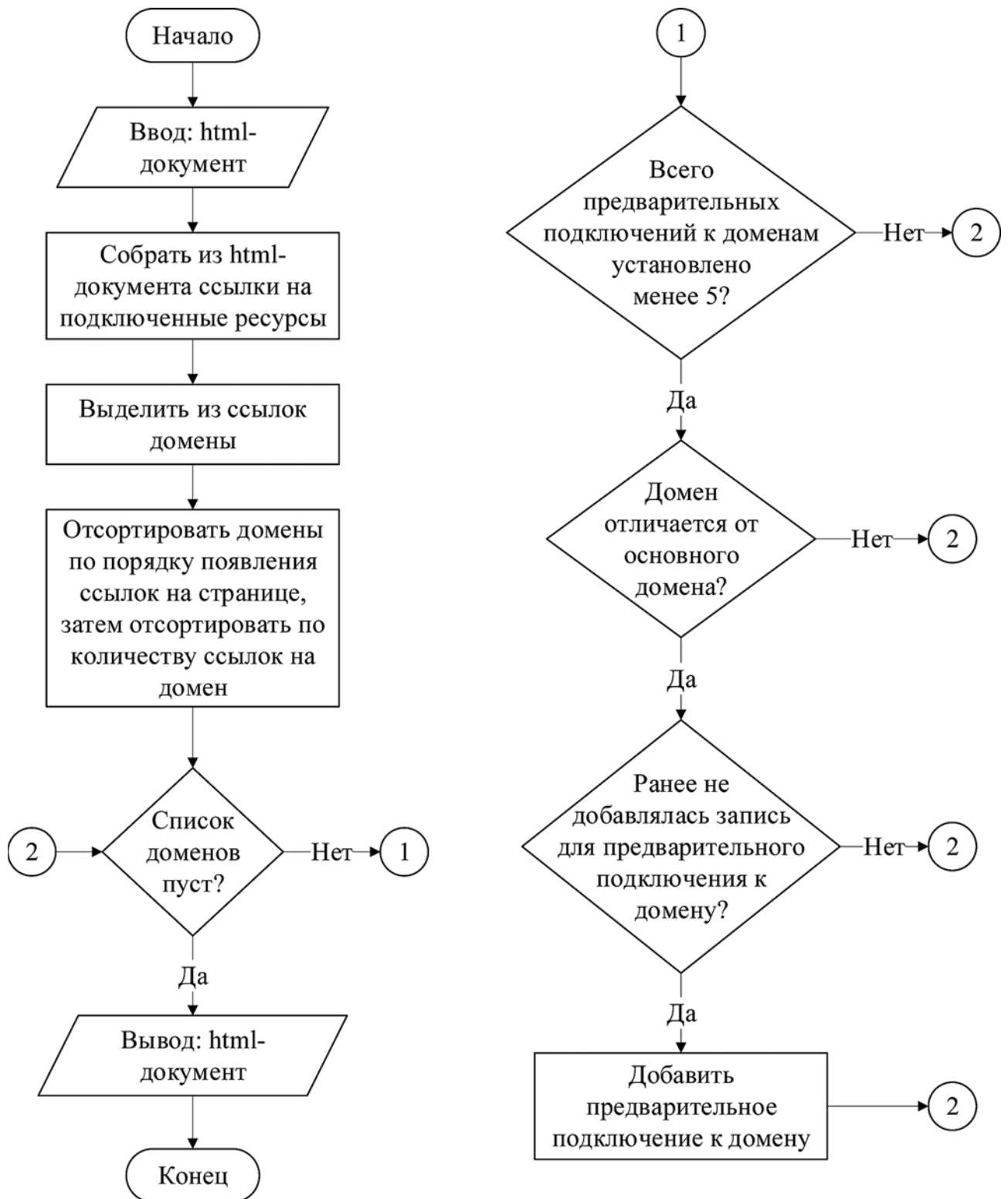


Рис. 6. Принцип работы алгоритма уменьшения времени подключения к сторонним ресурсам

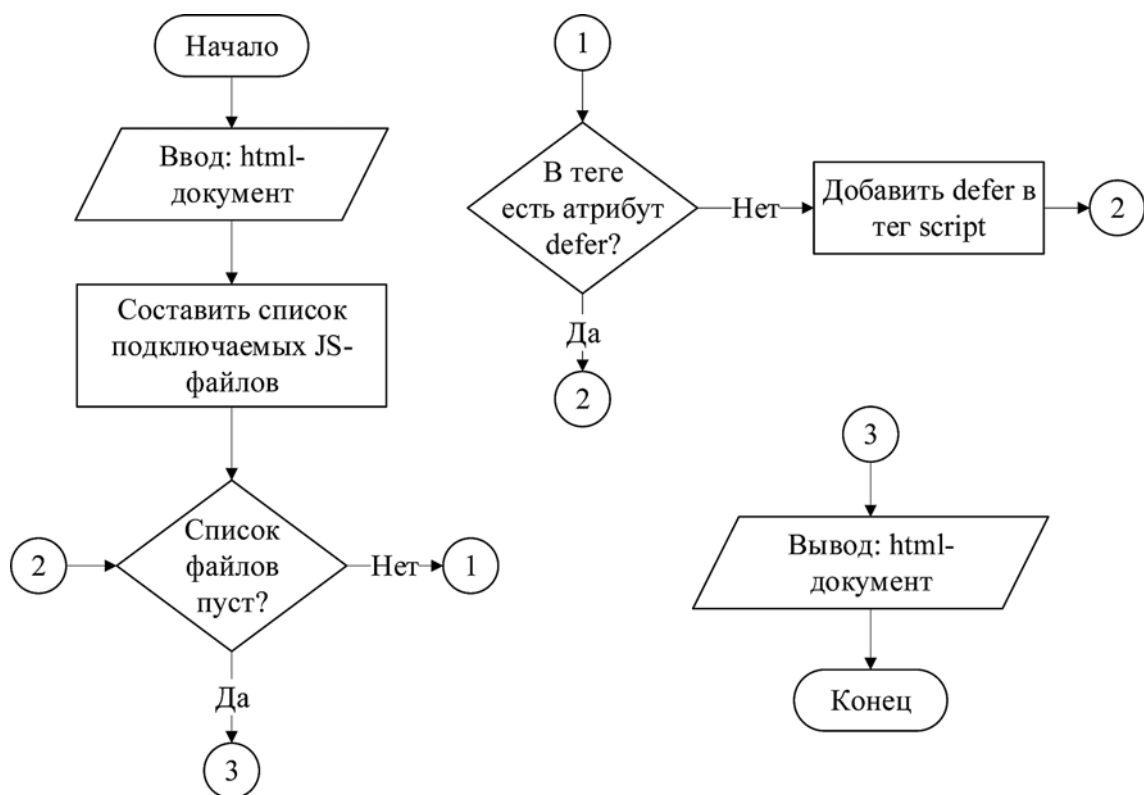


Рис. 7. Принцип работы алгоритма оптимизации скриптов

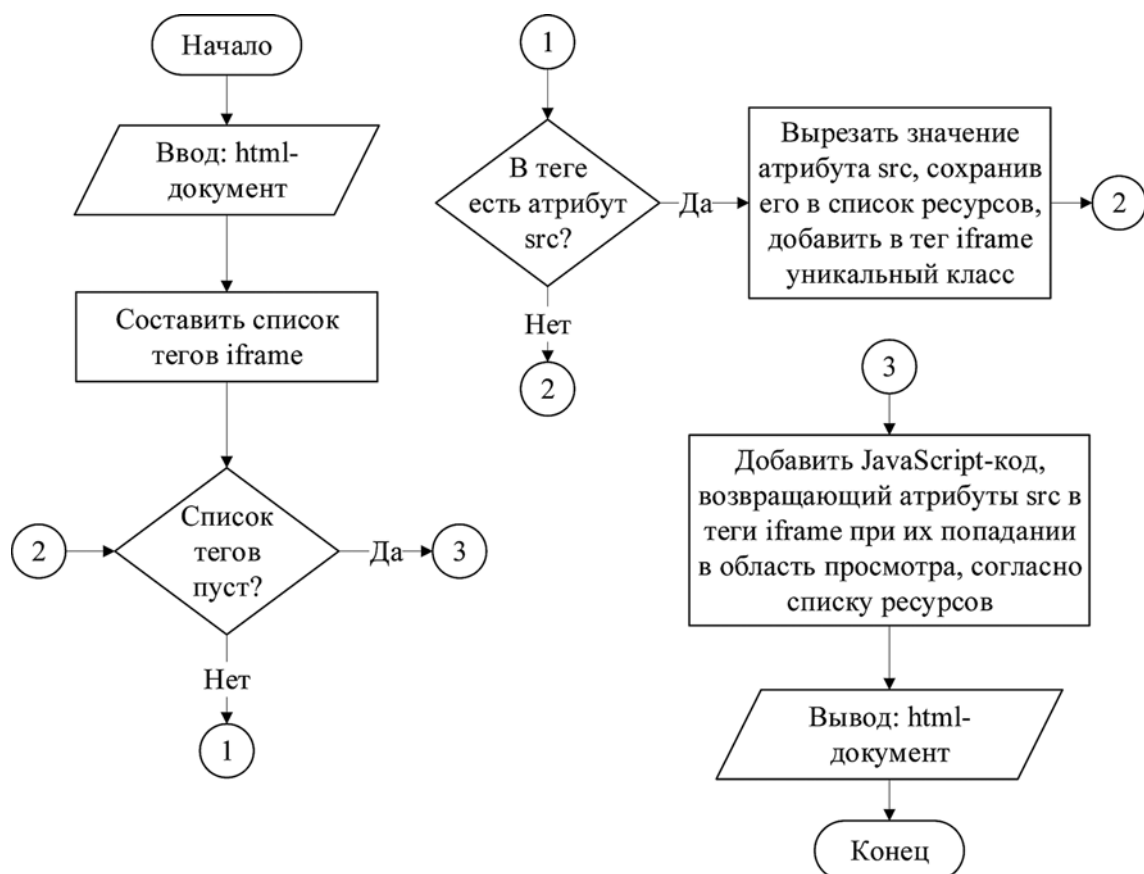


Рис. 8. Принцип работы алгоритма отложенной загрузки iframe-элементов

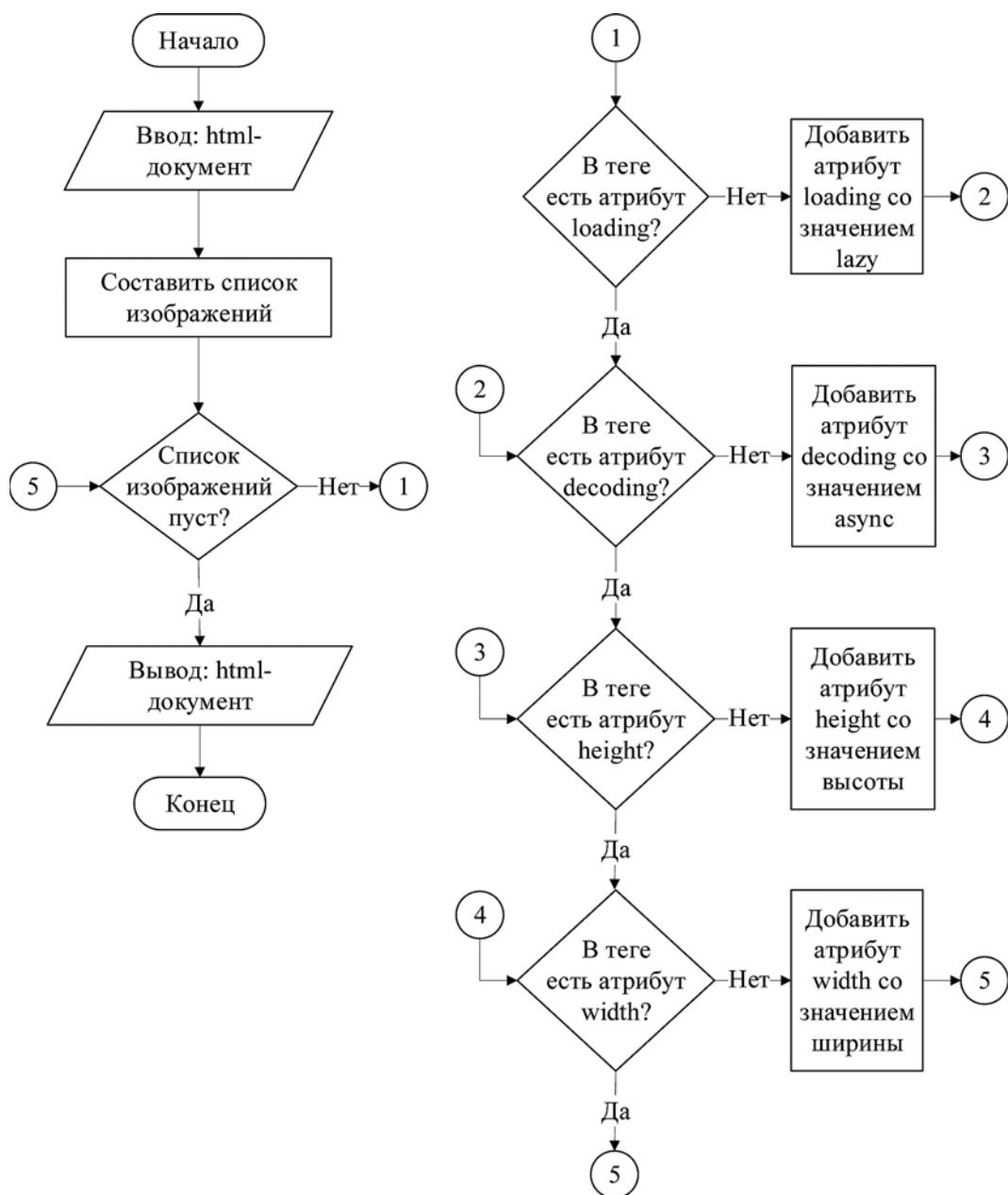


Рис. 9. Принцип работы алгоритма оптимизации изображений

Таблица 1

Скорость полной отрисовки страницы для главной страницы первого сайта

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика						Итог
			FPC, с	TTI, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с	CLS	
До оптимизации	1	Mobile	N/A*	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		PC	1,6	5,9	7,6	200	18,8	0,408	35
	2	Mobile	7	23,1	12,3	1410	29,6	0,493	8
		PC	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
	3	Mobile	7,2	26,5	13,7	2080	30,5	0,486	5
		PC	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A

Окончание табл. 1

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика						Итог
			FPC, с	TTI, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с	CLS	
После оптимизации	1	Mobile	1	18,7	6,6	3310	1	0	55
		PC	0,3	3,7	1,5	200	0,3	0,001	89
	2	Mobile	1	16,2	6,2	2510	1	0,007	56
		PC	0,3	3,6	1,7	320	0,3	0	81
	3	Mobile	1	17,6	5,5	2100	1	0	58
		PC	0,3	3,8	1,6	310	0,3	0	81

* N/A — данные отсутствуют, так как при тестировании произошла ошибка, в данном случае всегда работал тест только на одной из платформ.

Таблица 2

Скорость полной отрисовки страницы для типовой станции каталога товаров первого сайта (списка машин)

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика						Итог
			FPC, с	TTI, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с	CLS	
До оптимизации	1	Mobile	8,4	24,7	16,1	990	25	0,003	23
		PC	1,9	4,2	3,5	40	2,3	0,11	67
	2	Mobile	8,4	24,5	15	1510	25	0,003	19
		PC	1,9	4,5	3,2	90	3,2	0,022	63
	3	Mobile	8,4	24,4	14,2	1070	24,1	0,005	23
		PC	1,8	4	3,2	170	2,3	0,019	66
После оптимизации	1	Mobile	1	17,9	6,8	2650	2,1	0	54
		PC	0,3	4,1	1,5	210	0,6	0,009	87
	2	Mobile	1	18,1	5,7	3130	1	0	56
		PC	0,3	3,8	1,5	290	0,6	0,013	82
	3	Mobile	1	18	6	3040	1	0	56
		PC	0,3	3,8	1,7	240	0,6	0	85

Таблица 3

Скорость полной отрисовки страницы для типовой страницы карточки товара первого сайта (определенной машины)

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика						Итог
			FPC, с	TTI, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с	CLS	
До оптимизации	1	Mobile	7,5	21	18,5	760	37,5	0,314	17
		PC	1,6	4,8	6,9	60	5,0	0,016	56
	2	Mobile	7,5	22,4	11,8	520	29,7	0,332	23
		PC	1,7	4,2	6,8	90	5	0,018	56
	3	Mobile	7,7	22,8	14	1340	29,6	0,32	11
		PC	1,6	3,6	7,2	30	5	0,041	58

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика					Итог	
			FPC, с	TTI, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с		CLS
После оптимизации	1	Mobile	1	18	5,6	2300	1	0	57
		PC	0,3	3,8	1,5	140	0,6	0	92
	2	Mobile	1	18,8	5,7	3290	1	0,019	56
		PC	0,3	4	1,4	190	0,6	0	89
	3	Mobile	1	17,5	6,6	2170	1	0	56
		PC	0,3	3,6	1,4	100	0,6	0,021	94

Таблица 4

Скорость полной отрисовки страницы для типовой страницы лендинга первого сайта (презентация модели машины)

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика					Итог	
			FPC, с	TTI, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с		CLS
До оптимизации	1	Mobile	7,2	24	13,3	2290	17,9	0,037	17
		PC	N/A*	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
	2	Mobile	7,2	22,9	14,6	1110	11,7	0,007	22
		PC	1,6	5,2	3,3	140	5,1	0,069	54
	3	Mobile	7,2	24,7	13,3	1920	10,7	0,191	12
		PC	1,6	5,1	3,9	120	3,5	0,049	59
После оптимизации	1	Mobile	1	19,4	6	4050	1	0	55
		PC	0,3	4	1,6	430	0,6	0,03	75
	2	Mobile	1,1	19,4	6,4	4170	2,1	0	53
		PC	0,3	3,9	1,5	330	0,6	0,012	80
	3	Mobile	1	18,5	7,2	3640	1	0	54
		PC	0,3	3,7	1,3	160	0,6	0,018	91

* N/A — данные отсутствуют, так как при тестировании произошла ошибка, в данном случае всегда работал тест только на одной из платформ.

Аналогичную картину можно наблюдать на тестовой странице, созданной скриптом miggo для главной страницы сайта приюта для бездомных животных (табл. 5).

Таблица 5

Скорость полной отрисовки страницы для главной страницы второго сайта

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика				Итог	
			FPC, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с		CLS
До оптимизации	1	Mobile	9,1	11,9	1440	21,6	0,017	30
		PC	3,2	3,5	160	6,8	0,154	47
	2	Mobile	9,1	11,8	870	22,8	0,406	16
		PC	3,2	3,4	220	6,8	0,153	44
	3	Mobile	9,1	11,3	1230	22,3	0,017	32
		PC	3,2	3,4	290	6,9	0,152	40

Состояние тестируемого ресурса	№ теста	Платформа	Метрика					Итог
			FPC, с	SI, с	TBT, мс	LCP, с	CLS	
После оптимизации	1	Mobile	1,0	5,0	2390	8,4	0,021	43
		PC	0,3	1,5	220	3,0	0,095	72
	2	Mobile	1,0	4,1	3050	8,6	0	44
		PC	0,3	1,6	290	2,9	0,095	68
	3	Mobile	1,0	4,3	1490	9,8	0,021	47
		PC	0,3	1,4	380	2,7	0,095	65

Таким образом, разработанные алгоритмы автоматической перекомпоновки html-документа показывают свою эффективность в оптимизации скорости загрузки страниц по данным Lighthouse v. 9 и v. 10.

Заключение

Компоновка html-документа влияет на время отрисовки полной веб-страницы. Использование оптимизированных ресурсов также положительно сказывается на скорости отрисовки страницы. Существует возможность автоматически изменять компоновку контента в html-документе так, чтобы страница отображалась быстрее. Значение прироста скорости отличается на разных страницах и зависит от того, какой контент на странице расположен. Разработанные алгоритмы автоматической перекомпоновки контента могут быть интегрированы в различные CMS-системы, что позволит в автоматическом режиме оптимизировать скорость загрузки страниц.

На настоящее время алгоритмы, созданные авторами статьи, нуждаются в ручной установке на CMS-системы, однако они могут быть объединены в программный модуль, который не будет требовать навыков программирования для установки. Разработка такого модуля будет являться следующим этапом в развитии наработок на исследуемом направлении. Использование данного модуля позволит сократить время на оптимизацию веб-страниц, чем ускорит разработку и поддержку веб-сайтов.

Список литературы

1. **Using** site speed in web search ranking. URL: <https://developers.google.com/search/blog/2010/04/using-site-speed-in-web-search-ranking> (дата обращения 14.07.2023).
2. **Hoffman B.** How Website Speed Actually Impacts Search Ranking. URL: <http://moz.com/blog/how-website-speed-actually-impacts-search-ranking> (дата обращения 14.07.2023).
3. **Report:** State of the Web. URL: <https://httparchive.org/reports/state-of-the-web/> (дата обращения 14.07.2023).
4. **Азаренко Н.** Показатель отказов на сайте. URL: <https://www.unisender.com/ru/glossary/chto-takoe-pokazatel-otkazov/> (дата обращения 15.08.2023).
5. **Silva C.** What Is Bounce Rate and What Is a Good Rate? URL: <https://www.semrush.com/blog/bounce-rate/> (дата обращения 14.07.2023).
6. **Поведенческие** факторы. URL: <https://blog.skillfactory.ru/glossary/povedencheskie-factory/> (дата обращения 14.07.2023).
7. **Ranking** Factors 2.0. URL: <https://www.semrush.com/ranking-factors/> (дата обращения 14.07.2023).
8. **Core** Web Vitals — обновленный фактор ранжирования в Google. Как подготовиться и на что обратить внимание. URL: <https://habr.com/ru/sandbox/153080/> (дата обращения 14.07.2023).
9. **Walton P.** Web Vitals. URL: <https://web.dev/i18n/ru/vitals/> (дата обращения 14.07.2023).
10. **What** is the average time before full desktop page load? URL: <https://lp.littledata.io/average/time-before-full-desktop-page-load/> (дата обращения 14.07.2023).
11. **About** PageSpeed Insights. URL: <https://developers.google.com/speed/docs/insights/v5/about?hl=en> (дата обращения 15.08.2023).
12. **Walton P.** Первая отрисовка контента (FCP). URL: <https://web.dev/fcp/> (дата обращения 14.07.2023).
13. **Speed** Index. URL: <https://developer.chrome.com/docs/lighthouse/performance/speed-index/> (дата обращения 14.07.2023).
14. **Walton P.** Общее время блокировки (TBT). URL: <https://web.dev/tbt/> (дата обращения 14.07.2023).
15. **Walton P.** Скорость загрузки основного контента (LCP). URL: <https://web.dev/lcp/> (дата обращения 14.07.2023).
16. **Walton P., Mihajlija M.** Совокупное смещение макета (CLS). URL: <https://web.dev/cls/> (дата обращения 14.07.2023).
17. **MinifyX.** URL: <https://docs.modx.pro/components/minifyx> (дата обращения 16.08.2023).
18. **Grunt-critical.** URL: <https://github.com/bezoerb/grunt-critical> (дата обращения 16.08.2023).

Analysis of the Impact of Automatic Content Reflow on the Speed of Full Page Rendering

S. V. Zhukov, Postgraduate Student, i@coder-stas.ru,
O. A. Kovaleva, Dr. Sc., Tech., Professor, solomina-oa@yandex.ru,
S. V. Kovalev, Dr. Sc., Tech., Professor, sseedd@mail.ru,
Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000, Russian Federation

Corresponding author:

Stanislav V. Zhukov, Postgraduate Student,
Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000, Russian Federation
E-mail: i@coder-stas.ru

Received on July 15, 2023
Accepted on August 29, 2023

Now more and more information is transmitted via the Internet, including through websites. The speed with which sites are displayed to users affects their attitude to the resource they are viewing, and therefore, the speed also affects the success of the resource itself. For example, search engines will be less likely to offer users resources with lower behavioral factors. Despite this, the display speed of many sites is low. This state of affairs harms both the end user of information and the owners of Internet resources. To fix the download speed, you can apply content reflow to optimize the html document. Manually making such edits is a rather time-consuming process. It can be accelerated by automating content reflow through special algorithms. The aim of the work is to optimize the structure of the HTML page to increase the speed of its full display by the browser. A list of services is provided that allows you to check the page loading speed. The text describes the "mirror" script, designed to create copies of web site pages, to test html content optimization algorithms. Descriptions of algorithms developed to solve the problem of low download speed are given. The article presents the results of content optimization on the example of two sites. The full page rendering speed measurement model provided by the Google PageSpeed Insights tool was used, which includes the following metrics: First Contentful Paint (FCP), Speed Index (SI), Total Blocking Time (TBT), Largest Contentful Paint (LCP), Cumulative Layout Shift (CLS). The developed algorithms for automatic reflow of html documents show their effectiveness in optimizing page loading speed according to Lighthouse 9 and 10 versions.

Keywords: optimization, html, web page, loading speed, PageSpeed Insights, web content layout, script, algorithm, Lighthouse, bounce rate

For citation:

Zhukov S. V., Kovaleva O. A., Kovalev S. V. Analysis of the Impact of Automatic Content Reflow on the Speed of Full Page Rendering, *Programmnaya Ingeneria*, 2023, vol. 14, no. 11, pp. 550—562. DOI: 10.17587/prin.14.550-562.

References

1. **Using** site speed in web search ranking, available at: <https://developers.google.com/search/blog/2010/04/using-site-speed-in-web-search-ranking> (date of access 14.07.2023).
2. **Hoffman B.** How Website Speed Actually Impacts Search Ranking, available at: <http://moz.com/blog/how-website-speed-actually-impacts-search-ranking> (date of access 14.07.2023).
3. **Report:** State of the Web, available at: <https://httparchive.org/reports/state-of-the-web/> (date of access 14.07.2023).
4. **Azarenko N.** Site bounce rate, available at: <https://www.unisender.com/ru/glossary/chto-takoe-pokazatel-otkazov/> (date of access 15.08.2023) (in Russian).
5. **Silva C.** What Is Bounce Rate and What Is a Good Rate? available at: <https://www.semrush.com/blog/bounce-rate/> (date of access July 14, 2023).
6. **Behavioral** factors, available at: <https://blog.skillfactory.ru/glossary/povedencheskie-factory/> (date of access 14.07.2023) (in Russian).
7. **Ranking** Factors 2.0, available at: <https://www.semrush.com/ranking-factors/> (date of access 14.07.2023).
8. **Core Web** Vitals — Updated Google Ranking Factor. How to prepare and what to look out for, available at: <https://habr.com/ru/sandbox/153080/> (date of access 14.07.2023) (in Russian).
9. **Walton P.** Web Vitals, available at: <https://web.dev/i18n/ru/vitals/> (date of access 14.07.2023).
10. **What** is the average time before full desktop page load? available at: <https://lp.littledata.io/average/time-before-full-desktop-page-load/> (date of access 14.07.2023).
11. **About** PageSpeed Insights, available at: <https://developers.google.com/speed/docs/insights/v5/about?hl=en> (date of access August 15, 2023).
12. **Walton P.** First rendering of content (FCP), available at: <https://web.dev/fcp/> (date of access July 14, 2023) (in Russian).
13. **Speed** Index, available at: <https://developer.chrome.com/docs/lighthouse/performance/speed-index/> (date of access 14.07.2023).
14. **Walton P.** Total Block Time (TBT), available at: <https://web.dev/tbt/> (date of access 14.07.2023) (in Russian).
15. **Walton P.** Main content download speed (LCP), available at: <https://web.dev/lcp/> (date of access 14.07.2023) (in Russian).
16. **Walton P., Mihajlija M.** Cumulative Layout Offset (CLS), available at: <https://web.dev/cls/> (date of access 14.07.2023) (in Russian).
17. **MinifyX**, available at: <https://docs.modx.pro/components/minifyx> (date of access 16.08.2023) (in Russian).
18. **Grunt-critical**, available at: <https://github.com/bezoerb/grunt-critical> (date of access 16.08.2023).

А. Г. Ларченко, канд. техн. наук, доц., Larchenkoa@inbox.ru,
Иркутский государственный университет путей сообщения

Комплекс программных продуктов для удаленного контроля характеристик подвижного состава в режиме реального времени

Поступила в редакцию 28.07.2023

Принята к публикации 28.08.2023

Современному специалисту в сфере обслуживания и ремонта подвижного состава необходимо постоянно иметь доступ к актуальной информации, связанной с техническим состоянием, оснащением и местоположением обслуживаемых единиц. В настоящий момент в вагонном хозяйстве средства получения данной информации устарели и не соответствуют темпам развития информационных технологий. Цель работы, результаты которой представлены в настоящей статье, заключается во внедрении современных средств получения данных на предприятия, осуществляющие организацию и ремонт подвижного состава. Данная работа посвящена созданию и описанию программных продуктов для поиска информации по техническому состоянию подконтрольных вагонов. Программный комплекс может быть использован как на персональном компьютере, так и в среде онлайн-приложений в сети Интернет. В структуре программ предусмотрены механизмы обновления и поддержки процессов сопровождения, включая исправление ошибок, обновление функциональных возможностей и при необходимости масштабирования объектов контроля (например, адаптирование программы для контроля не только вагонов, но и путевых машин, запасных частей и т. д.). Использование предлагаемых средств позволит специалисту в области логистики, обслуживания и ремонта подвижного состава повысить оперативность прогнозирования, организации процессов перевозки грузов и проведения ремонтных работ. В статье в виде блок-схем даны алгоритмы работы каждого продукта в составе программного комплекса, схема используемой базы данных. В базу данных в соответствии с номерами вагонов добавлены геометрические параметры и номера колесных пар, даты последнего текущего и капитального ремонта, их местонахождение. Создан массив данных с фотографиями вагонов. Представлены фрагменты программного комплекса, написанного на языке Python. Данный язык позволил полностью реализовать алгоритм действий продукта. В процессе тестирования программ проверялось действие основной функции, а именно — поиск параметров по номеру вагона. Представлено решение задачи вывода фото- и видеоматериалов по запросу пользователя. Такая функция позволяет сокращать время на подбор вагона для аренды, контролировать качество ремонта. При создании программного продукта в среде онлайн-приложений также решена задача безопасности передачи данных.

Ключевые слова: автоматизация, управление, ремонт, логистика, подвижной состав, информационные технологии, планирование, удаленный контроль, машиностроение

Для цитирования:

Ларченко А. Г. Комплекс программных продуктов для удаленного контроля характеристик подвижного состава в режиме реального времени // Программная инженерия. 2023. Том 14, № 11. С. 563—571. DOI: 10.17587/prin.14.563-571.

Введение, обзор проблематики, постановка цели

Во всех сферах хозяйственного комплекса идет интенсивное развитие средств автоматизации на

основе современных информационных технологий. Предприятия по обслуживанию и ремонту подвижного состава, такие как эксплуатационные и ремонтные депо, грузовые и логистические железнодорожные (ж/д) компании, также нуждаются

в использовании новых информационных решений [1—6]. Ремонт грузовых вагонов с каждым годом становится более востребован, он напрямую связан с квалификацией, временем и возможностями выполняющих его специалистов. Современному специалисту в сфере обслуживания и ремонта подвижного состава для эффективного управления процессами планирования и организации таких работ необходимо постоянно иметь доступ к актуальной информации, связанной с техническим состоянием, оснащением и местоположением обслуживаемых единиц.

В вагонном хозяйстве при организации ремонтных работ и контроле качества выпускаемой продукции в настоящее время применяют пакет приложений Microsoft, программные продукты фирмы 1С. Данные продукты позволяют создавать, хранить, модифицировать и извлекать информацию [7, 8].

В настоящее время набирает популярность официальный сервис ОАО «РЖД» — Личный кабинет клиента ОАО «РЖД» в сфере грузовых перевозок. Сервис предлагает зарегистрированному клиенту (собственнику, арендатору или оператору грузовых вагонов) комплекс онлайн-решений по получению информации о грузовых вагонах, состоянии единого лицевого счета клиента, ведению документооборота и прочие услуги. Предлагается также использование мобильного приложения «РЖД Груз 2.0». Сервис ОАО «РЖД» перспективен и внушает доверие из-за получения актуальной информации от первоисточника. Однако на данный момент продукт проходит стадию тестирования, при работе с сервисом нередко встречаются ошибки [9].

Необходимо отметить, что большинство крупных и средних компаний в сфере грузовых перевозок имеют свои программные комплексы для работы с подвижным составом, либо пользуются платными программными решениями от поставщиков услуг (часто устаревших, имеющих множество недочетов и ошибок). Стоит учесть, что владельцы таких программных продуктов на платной договорной основе получают информацию из баз данных ОАО «РЖД». От частоты получения информации зависит актуальность предоставляемых данных конечному потребителю. Представители малого бизнеса, мелкие собственники, а также арендаторы и операторы подвижного состава нередко не имеют возможности оперативного получения качественной актуальной информации об используемом подвижном составе, его дислокации и техническом состоянии.

Все существующие методы получения информации о грузовых вагонах, а также прочие про-

граммные продукты имеют множество различий, преимуществ и недостатков по отношению друг к другу. Однако возможность выгрузки необходимой информации в виде таблицы в формате Excel присутствует практически во всех имеющихся продуктах, так как данный формат поддерживается на большинстве рабочих мест.

В условиях непрерывного производственного процесса специалисту вагонного хозяйства, как было отмечено выше, необходимо иметь под рукой доступное и простое средство получения информации, направленное на повышение продуктивности, ускорение выпуска ремонтной продукции, а также на уменьшение числа дополнительных, вспомогательных действий.

Исходя из изложенного выше, целью данной работы является внедрение современных средств получения данных на предприятия, осуществляющие отслеживание, обслуживание и ремонт подвижного состава. В качестве средства получения данных подразумевается комплекс программных продуктов для удаленного контроля характеристик подвижного состава в режиме реального времени. Программный продукт должен иметь возможность выполнять задачи на персональном компьютере, а также в среде приложений или облачных сервисах, что актуально в период командировок или при удаленной работе. Специализированное обеспечение должно быть простым, гибким, с высокой скоростью реагирования, с возможностью реализации дополнительных функций и задач в зависимости от потребностей предприятий. У программного обеспечения должна быть совместимость с большинством имеющихся и уже внедренных на предприятиях программных продуктов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- сформировать основные требования к программе;
- спроектировать блок-схему работы продукта;
- создать программный код;
- протестировать готовое программное обеспечение в условиях производственного процесса.

Согласно поставленной цели, функциональные возможности (функции) программы должны заключаться в поиске актуальной информации из имеющейся базы данных (пробег вагона, путь следования состава, геометрические параметры узлов и деталей, номенклатура установленных деталей, даты плановых видов ремонта и прочее), в отображении фотографий узлов и деталей подвижного состава, а также в выводе результатов поиска в удобном формате.

Блок-схема работы продукта

После формирования основных требований к программе была решена задача проектирования блок-схемы, т. е. схематичного представления процесса поиска, обработки и вывода данных подконтрольных вагонов (рис. 1).

На основе блок-схемы (рис. 1) для реализации работы программного продукта необходимо создать базу данных с требуемыми параметрами [10, 11].

Для быстрого и эффективного формирования хранилища информации была выбрана программа Microsoft Excel (рис. 2, см. третью сторону обложки).

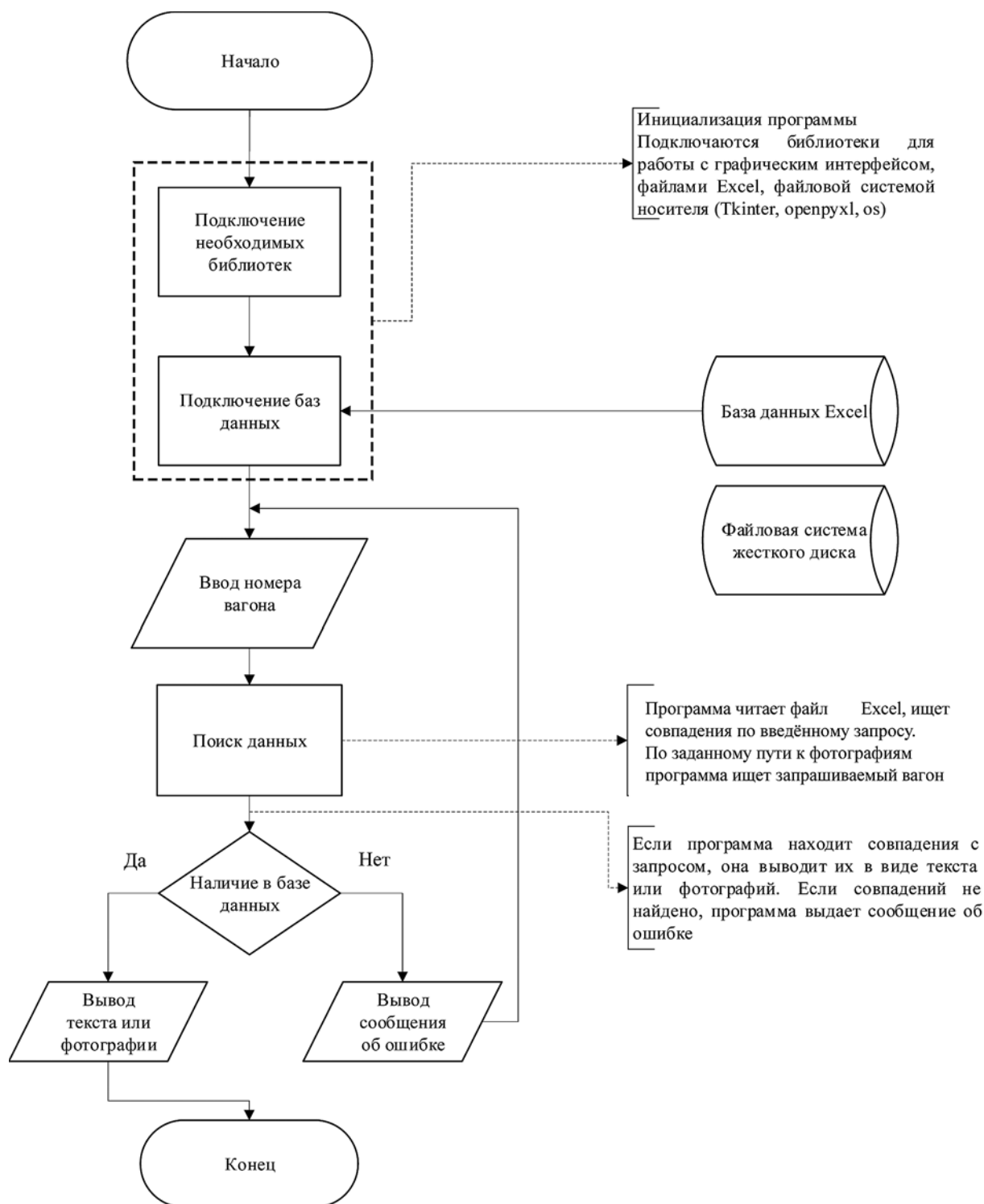


Рис. 1. Блок-схема алгоритма программного обеспечения

Как было отмечено ранее, практически любой имеющийся метод получения ж/д информации (дата последнего ремонта, маршрут следования, параметры узлов и деталей) можно настроить на выгрузку таблицы с необходимыми параметрами, также можно настроить периодичность обновления таблицы. В представленную базу данных (рис. 2, см. третью сторону обложки) в соответствии с номером вагона были добавлены геометрические параметры и номера колесных пар, даты последнего текущего и капитального ремонта, местонахождение вагона. Также был создан массив данных с фотографиями вагонов. Данная информация играет ключевую роль при планировании структуры плановых ремонтов и адресации на ближайшие ремонтные предприятия. Кроме этого, база данных дает возможность отлеживать резервные элементы вагона.

Программный код

После формирования базы данных необходимо было создать программный код продукта. При решении данной задачи был выбран язык Python. Язык имеет базовый синтаксис, похожий на грамматический строй английского языка, и набор стандартных кодов для реализации любой команды. Фрагмент программного кода представлен на рис. 3.

Тестирование готового программного обеспечения

Язык Python позволил полностью реализовать алгоритм действий продукта согласно блок-схеме, приведенной на рис. 1. В процессе тестирования проверялась работа основной функции (рис. 4). На рисунке следует обратить внимание, что у колесной пары (КП 2) толщина обода составляет менее 30 мм (выделено овалом), необходимо учитывать данный факт при планировании следующего обслуживания или ремонта.

Помимо этого, была решена задача вывода фото- и видеоматериалов по запросу номера

```
import tkinter as tk
import openpyxl
import json
from datetime import datetime

class CustomJSONEncoder(json.JSONEncoder):
    def default(self, obj):
        if isinstance(obj, datetime):
            return obj.date().isoformat() # Format the datetime as date only
        return super().default(obj)

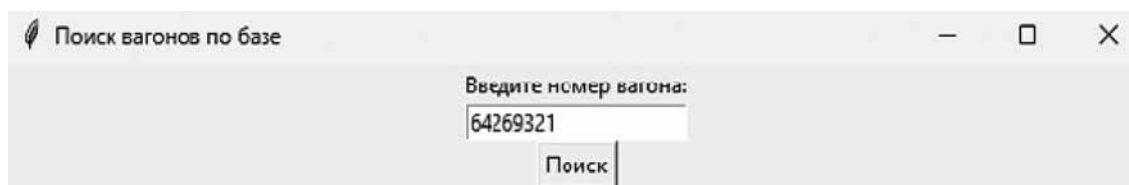
def search_in_excel(file_path, search_string):
    # Открываем файл Excel
    workbook = openpyxl.load_workbook(file_path)
    sheet = workbook.active
    # Получаем заголовки столбцов
    headers = [cell.value for cell in next(sheet.iter_rows())]
    # Создаем пустой список для хранения результатов
    results = []
    # Итерируемся по строкам и столбцам в таблице
    for row in sheet.iter_rows(min_row=2, values_only=True): # Пропускаем первую строку с заголовками
        for cell, header in zip(row, headers):
            if search_string in str(cell):
                # Если найдено совпадение, добавляем всю строку в список результатов
```

Рис. 3. Фрагмент программного кода на языке Python

вагона, если таковые имеются. Функция вывода фотоматериалов позволит сократить время на подбор вагона для аренды, проконтролировать качество ремонта, оптимизировав рабочее время специалиста.

Адаптирование программного обеспечения к среде онлайн-приложений

Программный продукт должен быть не только на рабочем компьютере, но и под рукой в любое время суток, так как ремонт вагонов — это процесс непрерывной работы. Поэтому было принято решение реализовать продукт через приложение для обмена информацией. Для пробного тестирования был выбран набирающий популярность сервис Telegram [12, 13]. Для решения поставленной задачи был разработан дополнительный алгоритм действий, представленный на рис. 5. Согласно алгоритму, был сформирован Telegram-бот на языке Python. Telegram-бот построен на файл-серверной архитектуре, он хранит данные



```
[
  {
    "Номер вагона": 64269321,
    "Тип вагона": "Грузовой",
    "Дислокация": "Москва",
    "Пробег": 242000,
    "Дата последнего капитального ремонта": "2019-01-01",
    "Дата последнего текущего ремонта": "2021-01-01",
    " КП 1": "119-1398-05",
    " КП 2": "0039-49861-05",
    " КП 3": "119-1398-05",
    " КП 4": "005-211682-12",
    "Толщина обода КП 1": 30,
    "Толщина обода КП 2": 27,
    "Толщина обода КП 3": 33,
    "Толщина обода КП 4": 31
  }
]
```

Рис. 4. Результаты работы программы

в файлах на локальном компьютере и обращается к ним по запросу пользователя. Выбранная архитектура позволяет разделить логику, представление и управление. Проект включает следующие заинтересованные стороны: пользователей, администратора, владельца бота, системы хранения файлов и базы данных, разработчиков, поставщиков данных, систему уведомлений и техническую поддержку. Каждая сторона выполняет уникальные роли, сотрудничая для успешной реализации бота, обеспечивая функциональные возможности, безопасность данных, обратную связь и поддержку пользователей.

Основные программные средства включают Python 3.11 для совместимости, модуль aiogram 2.25.1 для интеграции с Telegram API и создания интерфейса, модуль openpyxl для работы с таблицами Excel, библиотеку PIL для обработки изображений, модули requests (для взаимодействия с Telegram API) и logging (для логирования), а также библиотеку pandas для работы с данными. Это обеспечит структурированный код, удобство сопровождения и эффективное взаимодействие с пользователем.

Бот выполняет поиск информации по номеру грузового вагона (рис. 6, см. третью сторону обложки). Если в сообщении пользователя есть один или несколько восьмизначных номеров вагона, то бот выводит их номера в виде кнопок. При

нажатии пользователя на кнопку с вагоном, бот выводит две кнопки «Фото» и «Информация».

При написании кода для поиска восьмизначных номеров грузовых вагонов использовались регулярные выражения. Для вывода номеров вагонов в виде кнопок был использован класс InlineKeyboardButton. При написании кода для обработки нажатий на кнопки с номерами вагонов был выбран класс CallbackQuery из модуля aiogram. Если пользователь нажимает на кнопку «Фото», бот выполняет следующие шаги:

- получает текущий номер вагона;
- ищет папку с таким номером вагона на уровне выше каталога исполняемого файла.

Если папка не найдена, то бот отправляет сообщение «Папка с фото не найдена» и завершает выполнение функции. Если папка найдена, то бот выводит сообщение с названием папки и числом файлов в ней по типам в формате «Название папки (число файлов)» (рис. 6, см. третью сторону обложки). Бот формирует список папок и файлов в текущей папке и подпапках, выводит список папок и файлов в сообщении в виде кнопок, обрабатывая нажатие пользователем. При нажатии пользователем на кнопку папки, бот рекурсивно обрабатывает все файлы в этой папке и ее подпапках и отправляет их пользователю. После отправки всех файлов бот отправляет сообщение «Все файлы отправлены».

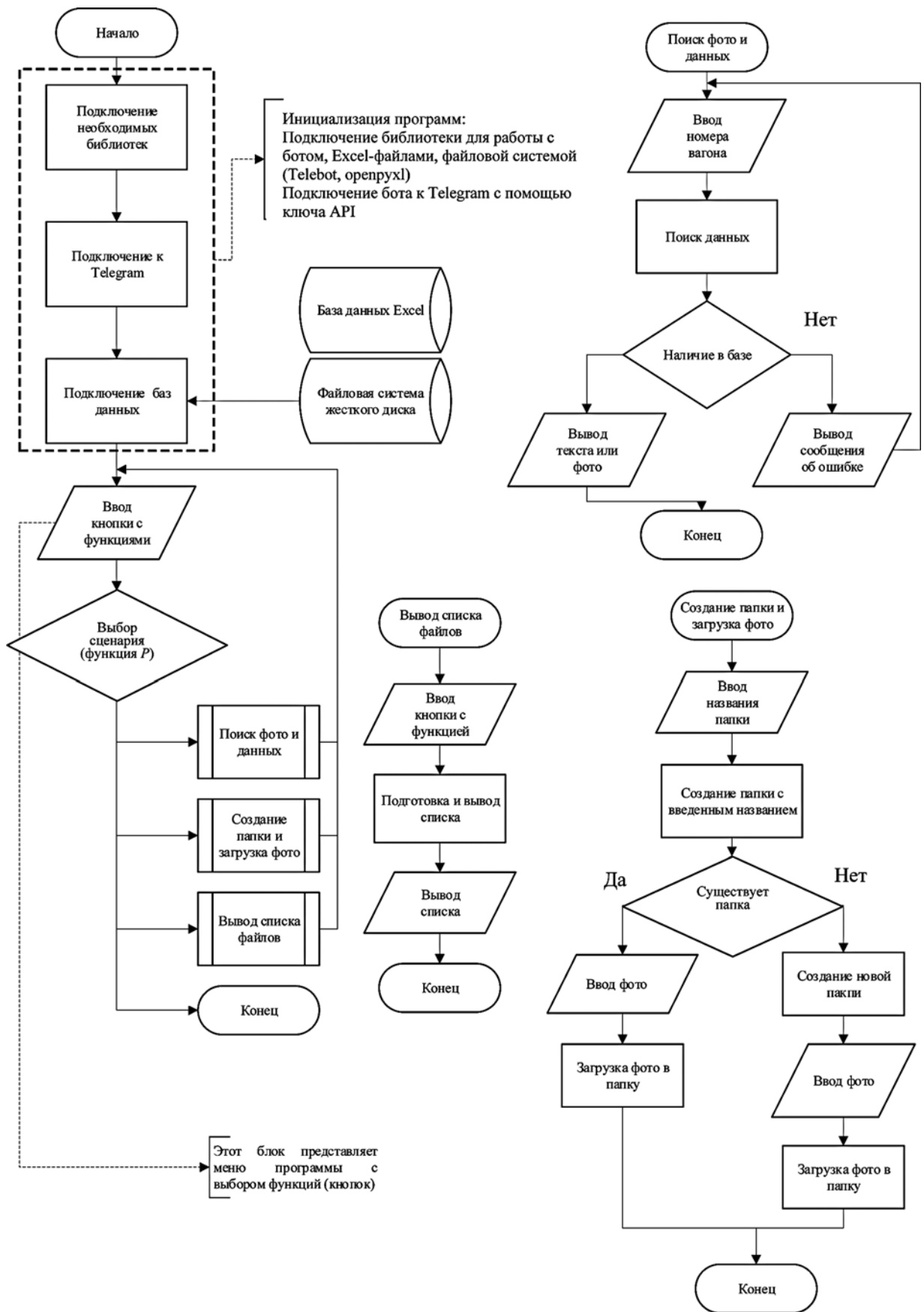


Рис. 5. Блок-схема алгоритма программного обеспечения в среде онлайн-приложения Telegram

```

# Белый список пользователей
try:
    with open('users.json', 'r') as f:
        users = json.load(f)
except (FileNotFoundError, json.JSONDecodeError):
    users = {}

print(users)

@dp.message_handler(commands=['start'])
async def send_welcome(message: types.Message):
    user_id = str(message.from_user.id)
    await message.answer(f"Ваш ID:")
    await message.answer(f"{message.from_user.id}")
    if user_id in users:
        await message.answer(f"Добро пожаловать! {message.from_user.full_name}")
    else:
        await message.answer(f"Секретный код был отправлен администратору, введите этот код")
        await bot.send_message(ADMIN_ID, f"Новый пользователь: {message.from_user.full_name}\n"
            f"ID: {user_id}\n"
            f"Секретный код: {SECRET_CODE}")

```

Рис. 8. Фрагмент кода реализации защиты «Белый лист»

Если пользователь нажимает на кнопку «Информация», то бот ищет в папке tables последний сохраненный файл.xlsx (база данных может обновляться 6–24 раз в сутки), ищет в первом столбце файла текст с номером выбранного вагона и отправляет пользователю всю строку таблицы в текстовом сообщении в виде «заголовков — значение» построчно. После того как бот отправит пользователю всю строку таблицы в текстовом сообщении, он должен предложить пользователю две кнопки: «Отправить фото» и «Закончить работу с вагоном». Важно учесть, что при поиске папок и файлов бот должен обрабатывать ошибки, которые могут возникнуть при отсутствии требуемых файлов и папок, и уведомлять пользователя об этих ошибках соответствующими сообщениями.

При создании Telegram-бота был решен вопрос безопасности передачи данных (рис. 7, см. третью сторону обложки). В данном продукте предусматриваются такие способы защиты, как белый лист (на рис. 8 представлен фрагмент программного кода), шифрование паролем, сквозное шифрование и защита от копирования и пересылок. При регистрации пользователя в приложении, администратору отправляются информация о пользователе и код доступа, который он может сообщить по своему усмотрению. Также имеется возможность редактирования белого списка пользователя вручную.

Заключение

Отметим, что описанный выше программный комплекс, предназначенный для удаленного контроля технического состояния единиц подвижного состава в режиме реального времени, успешно прошел испытания в рамках производственной деятельности ООО «ТКВС» [14]. По результатам работы получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Удаленный контроль технического состояния единиц подвижного состава в режиме реального времени» [15].

Список литературы

1. **Жаркова Е. А.** Системные аспекты развития железнодорожного транспорта на основе информационных технологий // Вестник СГУПС: гуманитарные исследования. 2018. № 1 (3). С. 10–14.
2. **Иванова Е. И.** Интеллектуальная информационная система для решения задач прогнозирования неисправностей вагонного оборудования на железнодорожном транспорте // Программные продукты и системы. 2015. № 4 (112). С. 231–236.
3. **Капустин К. А., Ларченко А. Г.** Информационные технологии и системы комплексного контроля технического состояния вагонов // Молодая наука Сибири. 2023. № 1 (19). С. 182–191.
4. **Винокурцева Е. А.** Информационные системы вагонного хозяйства: аналитический обзор // Вагоны и вагонное хозяйство. 2021. № 3 (67). С. 46–48.
5. **Курс** на цифровое взаимодействие // Железнодорожный транспорт. 2021. № 3. С. 3.

-
-
6. **Суконников Г. В.** Развитие информационных технологий ОАО РЖД // Автоматика, связь, информатика. 2017. № 9. С. 16–18.
 7. **Юсупов И. М.** Оптимизация работы ОАО «РЖД» за счет отказа от системы ERP SAP и перехода на 1С // Молодежная наука: труды XXVI Всероссийской студенческой научно-практической конференции КРИЖТ ИрГУПС. 2022. Том 2. С. 189–192.
 8. **Филипченко С. А., Ледяева Н. В., Куренков П. В.** Современная технология учета мониторинга парка грузовых вагонов // Железнодорожный транспорт. 2016. № 2. С. 58–63.
 9. **Личный кабинет клиента ОАО «РЖД».** URL: <https://ozd-center.ru/ik-new-doc> (дата обращения 21.07.2023).
 10. **Кулешов А. В., Пашков Н. П.** Структурная организация базы данных информационной системы мониторинга технического состояния вагона // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2008. № 6. С. 19–23.
 11. **Руководящий документ** по ремонту и техническому обслуживанию колесных пар с буксовыми узлами грузовых вагонов магистральных железных дорог колеи 1520. ОАО «ВНИИЖТ».
 12. **Шумилина М. А., Коробко А. В.** Разработка чат-бота на языке программирования Python в мессенджере «Telegram» // Научные известия. 2022. № 28. С. 47–55.
 13. **Кожекина Е. Н., Печекин Н. Д., Борщевский С. В.** Автоматизация ежедневного сбора данных с помощью Telegram-бота // Вестник Донецкого национального университета: Серия Г: Технические науки. 2022. № 2. С. 22–30.
 14. **Транспортная компания ВагонСервис.** URL: <https://tkvcs.rf> (дата обращения 21.07.2023).
 15. **Капустин К. А., Ларченко А. Г.** Удаленный контроль технического состояния единиц подвижного состава в режиме реального времени: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023665998 от 25.07.2023 г.
-
-

A Set of Products for Remote Control of Rolling Stock Characteristics

A. G. Larchenko, Associate Professor, Larchenkoa@inbox.ru, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, 664074, Russian Federation

Corresponding author:

Anastasia G. Larchenko, Associate Professor, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, 664074, Russian Federation
E-mail: Larchenkoa@inbox.ru

*Received on July 28, 2023
Accepted on August 28, 2023*

A modern specialist in the field of maintenance and repair of rolling stock needs to constantly have access to up-to-date information about the technical condition, equipment and location of serviced units. This article analyzes the existing software products and applications that allow you to plan and manage the processes of repair work and operation. The work is devoted to the creation of products for finding up-to-date information about the technical condition of rolling stock units both on a personal computer and in an online application environment. Programs have the ability to be updated and supported, including bug fixes. The use of the proposed tools will allow a specialist in the field of logistics, maintenance and repair of rolling stock to increase the efficiency of forecasting, organization of transport processes and repair work. The algorithms of operation of each software product are formed in the work. The algorithms are presented in the form of flowcharts. The generated database is presented. Geometric parameters and wheelset numbers, dates of the last maintenance and overhaul, location were added to the presented database in accordance with the number. An array of data with photos of car was also created. The article presents a text written in the Python programming language. This language made it possible to fully implement the algorithm of the product's actions. During the testing of the programs, the operation of the main functions was checked, namely, the search for parameters by the composition number. The work solved the problem of displaying photos and videos on the screen at the user's request. This function will reduce the time to choose a rolling stock unit for rent and control the quality of repairs. The results of the work of programs in the environment of online applications and on a personal computer are presented in the form of drawings. When creating a software product in an online application environment, the issue of data transfer security (whitelist, password encryption, end-to-end encryption, as well as copy and forwarding protection) was resolved.

Keywords: automation, management, repair, logistics, rolling stock, information technology, planning, remote control, mechanical engineering

For citation:

Larchenko A. G. A Set of Products for Remote Control of Rolling Stock Characteristics, *Programmная Ingeneria*, 2023, vol. 14, no. 11, pp. 563–571. DOI: 10.17587/prin.14.563-571.

References

1. **Zharkova E. A.** System aspects of the development of railway transport based on information technologies, *Vestnik SGUPS: gumanitarnyye issledovaniya*, 2018, no. 1 (3), pp. 10–14 (in Russian).
2. **Ivanova Ye. I.** Intelligent information system for solving the problems of predicting malfunctions of railcar equipment in railway transport, *Programmnyye produkty i sistemy*, 2015, no. 4 (112), pp. 231–236 (in Russian).
3. **Kapustin K. A., Larchenko A. G.** Information technologies and systems for comprehensive monitoring of the technical condition of wagons, *Molodaya nauka Sibiri. Young Science of Siberia*, 2023, no. 1 (19), pp. 182–191 (in Russian).
4. **Vinokurtseva Ye. A.** Information systems of the wagon economy: an analytical review, *Vagony i vagonnoye khozyaystvo*, 2021, no. 3 (67), pp. 46–48 (in Russian).
5. **Course** towards digital interaction, *Zheleznodorozhnyy transport*, 2021, no. 3, pp. 3 (in Russian).
6. **Sukonnikov G. V.** Development of information technologies of Russian Railways, *Avtomatika, svyaz', informatika*, 2017, no. 9, pp. 16–18 (in Russian).
7. **Yusupov I. M.** Optimization of the work of Russian Railways by abandoning the ERP SAP system and switching to IC, *Molodezhnaya nauka; trudy XXVI Vserossiyskoy studencheskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii KrIZhT IrGUPS*, 2022, vol. 2, pp. 189–192 (in Russian).
8. **Filipchenko S. A., Ledyayeva N. V., Kurenkov P. V.** Modern technology for accounting for monitoring the fleet of freight cars, *Zheleznodorozhnyy transport*, 2016, no. 2, pp. 58–63 (in Russian).
9. **Personal** account of the client of Russian Railways, available at: <https://ozd-center.ru/lk-new-doc> (date of access 21.07.2023).
10. **Kuleshov A. V., Pashkov N. P.** Structural organization of the database of the information system for monitoring the technical condition of the car, *Informatsionnyye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh system*, 2008, no. 6, pp. 19–23 (in Russian).
11. **Guidelines** for the repair and maintenance of wheel sets with axle boxes for freight cars on 1520 gauge mainline railways. JSC VNIIZhT (in Russian).
12. **Shumilina M. A., Korobko A. V.** Development of a chatbot in the python programming language in the Telegram messenger, *Nauchnyye izvestiya*, 2022, no. 28, pp. 47–55 (in Russian).
13. **Kozhekina Ye. N., Pechekin N. D., Borshchevskiy S. V.** Automation of daily data collection using Telegram-bot, *Vestnik Donetskogo natsional'nogo universiteta, Seria G: Technicheskie nauki*, 2022, no. 2, pp. 22–30 (in Russian).
14. **Transport** company VagonService, available at: <https://tkvc.pf> (date of access 21.07.2023).
15. **Kapustin K. A., Larchenko A. G.** Remote control and technical composition of the rolling stock in real time: certificate of state registration of the computer program. No. 2023665998 dated 07.25.2023.

ИНФОРМАЦИЯ

XXVI Международная конференция

«Цифровая обработка сигналов и ее применение — DSPA-2024»

27–29 марта 2024 г.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва,

Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова при поддержке Института проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, компании AUTEX Ltd. проводит XXVI Международную конференцию «Цифровая обработка сигналов и ее применение — DSPA-2024».

Формат проведения: совмещенный формат личного и онлайн-участия

Тематика конференции разделена на следующие секции:

1. Теория сигналов и систем
2. Теория и методы цифровой обработки сигналов
3. Обработка сигналов в системах телекоммуникаций
4. Обработка сигналов в радиотехнических системах
5. Обработка и передача изображений
6. Обработка сигналов в биотехнических системах
7. Проектирование и техническая реализация систем ЦОС
8. Системы «технического зрения», искусственный интеллект и робототехника
9. Обработка сигналов в измерительных системах

Рабочие языки конференции: русский и английский

Подробности: <http://dspa-conf.org>

18-я Всероссийская научная конференция

«Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2024»

2—4 апреля 2024 г., Челябинск, НИУ ЮУрГУ

«Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2024» — всероссийская научная конференция с международным участием, 18-я в серии ежегодных конференций, посвященных развитию и применению параллельных вычислительных технологий и машинного обучения в различных областях науки и техники.

Главная цель конференции — предоставить возможность для представления и обсуждения результатов, полученных ведущими научными группами в использовании суперкомпьютерных и нейросетевых технологий для решения практических задач.

Организаторы конференции:

- ◆ Министерство науки и высшего образования РФ
- ◆ Суперкомпьютерный консорциум университетов России

Тематика конференции покрывает все аспекты применения облачных, суперкомпьютерных и нейросетевых технологий в науке и технике, включая приложения, аппаратное и программное обеспечение, специализированные модели, языки, библиотеки и пакеты.

Во все дни работы конференции будет действовать суперкомпьютерная выставка, на которой ведущие производители аппаратного и программного обеспечения представят свои новейшие разработки в области высокопроизводительных вычислений.

Место и время конференции: ПаВТ'2024 будет проходить 2—4 апреля 2024 г. в г. Челябинске в Южно-Уральском государственном университете (национальном исследовательском университете).

Языки конференции: русский, английский.

Официальный сайт конференции: <http://agora.guru.ru/pavt2024/>

ООО "Издательство "Новые технологии". 107076, Москва, ул. Матросская Тишина, д. 23, стр. 2
Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *А. В. Чугунова*.

Сдано в набор 26.09.2023 г. Подписано в печать 31.10.2023 г. Формат 60×88 1/8. Заказ РИ1123
Цена свободная.

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru

Рисунки к статье А. Г. Ларченко
«КОМПЛЕКС ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ ДЛЯ
УДАЛЕННОГО КОНТРОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДВИЖНОГО СОСТАВА
В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ»

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
	Номер вагона	Тип вагона	Дислокация	Пробег	Дата последнего капитального ремонта	Дата последнего текущего ремонта	КП 1	КП 2	КП 3	КП 4	Толщина обода КП 1	Толщина обода КП 2	Толщина обода КП 3	Толщина обода КП 4
1														
2	64269321	Грузовой	Москва	242000	01.01.2019	01.01.2021	119-1398-05	0039-49861-05	119-1398-05	005-211682-12	30	27	33	31
3	24142432	Грузовой	Санкт-Петербург	134467	01.02.2021	01.02.2021	119-1398-05	0039-49861-05	119-1398-05	005-211682-12	35	34	35	35
4	31245132	Грузовой	Новосибирск	82428	01.03.2020	01.03.2021	119-1398-05	0039-49861-05	119-1398-05	005-211682-12	52	48	50	52
5	32432123	Грузовой	Екатеринбург	271021	01.04.2020	01.04.2021	119-1398-05	0039-49861-05	119-1398-05	005-211682-12	36	27	36	36
6	56472234	Грузовой	Красноярск	194502	01.05.2020	01.05.2021	119-1398-05	0039-49861-05	119-1398-05	005-211682-12	33	34	32	33
7	23154863	Грузовой	Омск	287000	01.06.2021	01.06.2021	119-1398-05	0039-49861-05	119-1398-05	005-211682-12	37	28	37	37

Рис. 2. Фрагмент сформированной базы данных



Рис. 6. Результаты работы продукта в среде Telegram (результаты поиска фотографий по номеру грузового вагона)

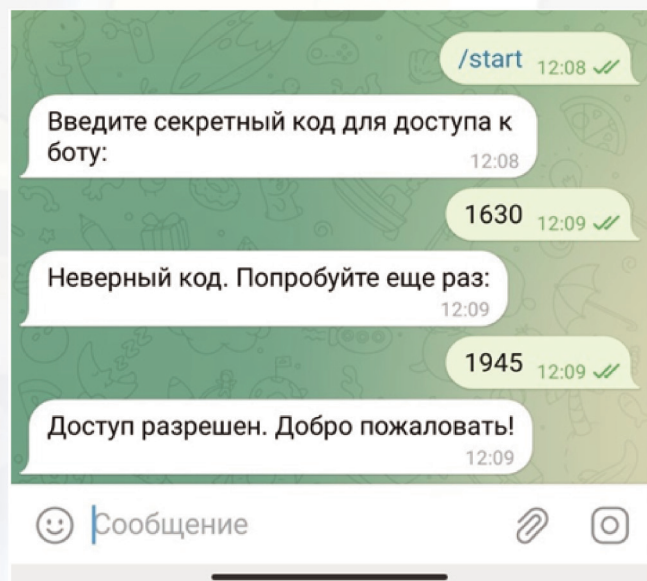


Рис. 7. Организация безопасной работы

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ» выпускает научно-технические журналы



Теоретический и прикладной научно-технический журнал **ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ**

В журнале освещаются состояние и тенденции развития основных направлений индустрии программного обеспечения, связанных с проектированием, конструированием, архитектурой, обеспечением качества и сопровождением жизненного цикла программного обеспечения, а также рассматриваются достижения в области создания и эксплуатации прикладных программно-информационных систем во всех областях человеческой деятельности.

Подписной индекс по Объединенному каталогу
«Пресса России» – 22765



Ежемесячный теоретический
и прикладной научно-
технический журнал

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития основных направлений в области разработки, производства и применения информационных технологий.

Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 72656

Междисциплинарный
теоретический и прикладной
научно-технический журнал

НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития нано- и микросистемной техники, рассматриваются вопросы разработки и внедрения нано микросистем в различные области науки, технологии и производства.



Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 79493



Ежемесячный теоретический
и прикладной
научно-технический журнал

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

В журнале освещаются достижения в области мехатроники, интегрирующей механику, электронику, автоматику и информатику в целях совершенствования технологий производства и создания техники новых поколений. Рассматриваются актуальные проблемы теории и практики автоматического и автоматизированного управления техническими объектами и технологическими процессами в промышленности, энергетике и на транспорте.

Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 79492

Ежемесячный
научно-практический
и учебно-методический журнал

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В журнале освещаются достижения и перспективы в области исследований, обеспечения и совершенствования защиты человека от всех видов опасностей производственной и природной среды, их контроля, мониторинга, предотвращения, ликвидации последствий аварий и катастроф, образования в сфере безопасности жизнедеятельности.



Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 79963

Адрес редакции журналов для авторов и подписчиков:

107076, Москва, ул. Матросская Тишина, д. 23, стр. 2, оф. 45. Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ".

Тел.: (499) 270-16-52. E-mail: antonov@novtex.ru