

Программная инженерия



Пр **8**
ИН **2021**
Том 12

Рисунки к статье К. Ф. Ивановой
 «ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
 ИНТЕРВАЛЬНЫХ РЯДОВ
 ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ»

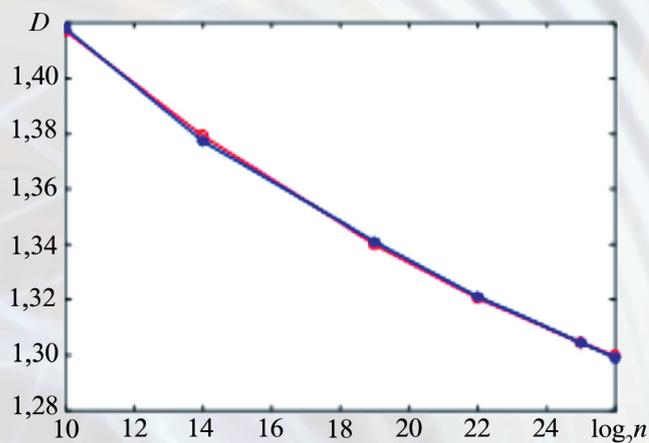


Рис. 5. Зависимость размерности D от $\log_2 n$ с ростом длины ИРПЧ n : синяя линия – расчет; красная линия – аппроксимация

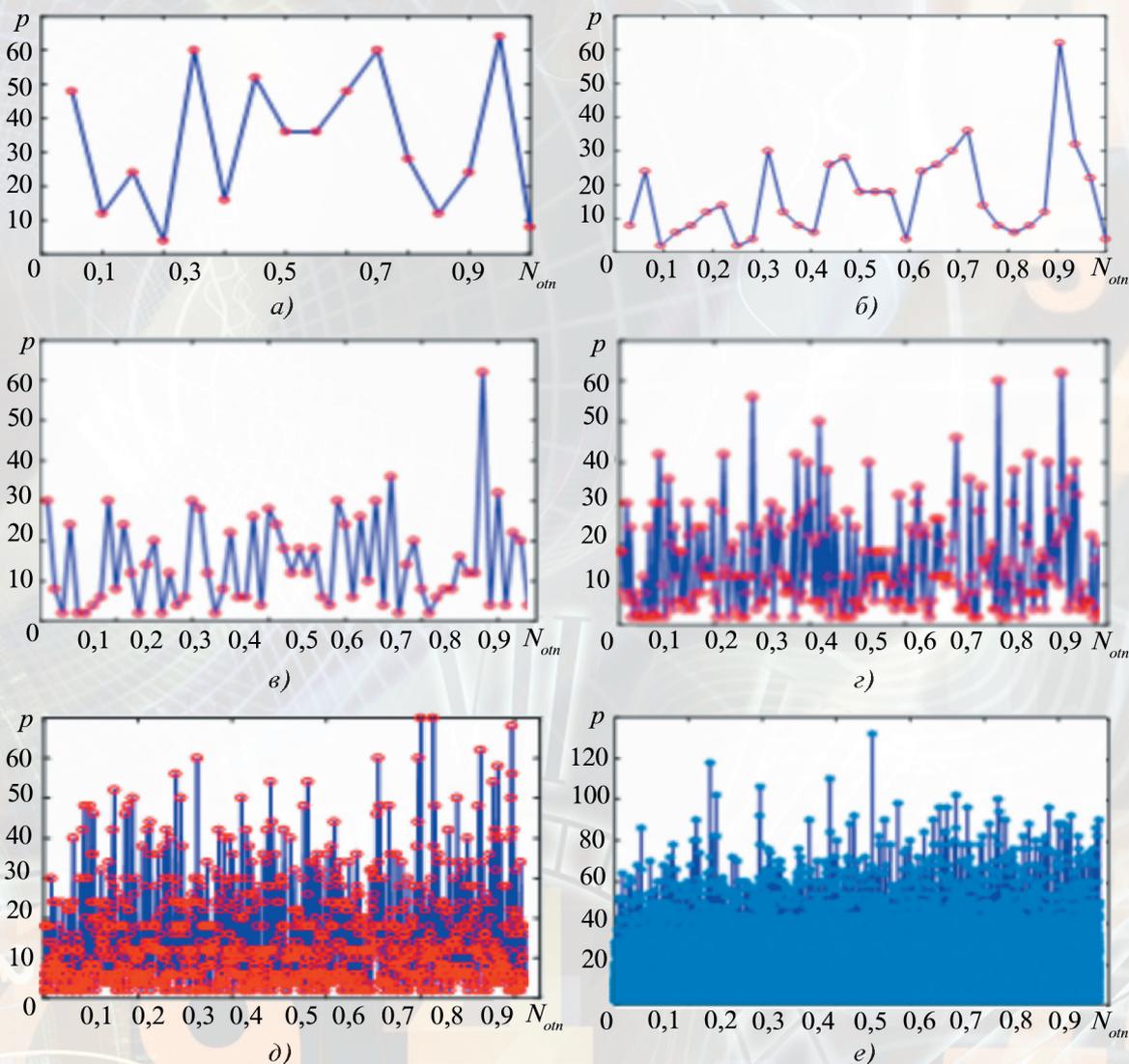


Рис. 6. Количественная картина выборки k ($a - 2^4$; $b - 2^5$; $v - 2^6$; $z - 2^8$; $d - 2^{10}$; $e - 2^{15}$) интервалов на границах смежных периодов длиной m :
 $a - 2^{15}$; $b - 2^{14}$; $v - 2^{13}$; $z - 2^{11}$; $d - 2^9$; $e - 2^4$

Программная инженерия

Том 12
№ 8
2021
Пр
ИН

Учредитель: Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

Издается с сентября 2010 г.

DOI 10.17587/issn.2220-3397

ISSN 2220-3397

Редакционный совет

Садовничий В.А., акад. РАН
(председатель)
Бетелин В.Б., акад. РАН
Васильев В.Н., чл.-корр. РАН
Жижченко А.Б., акад. РАН
Макаров В.Л., акад. РАН
Панченко В.Я., акад. РАН
Стемпковский А.Л., акад. РАН
Ухлинов Л.М., д.т.н.
Федоров И.Б., акад. РАН
Четверушкин Б.Н., акад. РАН

Главный редактор

Васенин В.А., д.ф.-м.н., проф.

Редколлегия

Антонов Б.И.
Афонин С.А., к.ф.-м.н.
Бурдонов И.Б., д.ф.-м.н., проф.
Борзовс Ю., проф. (Латвия)
Гаврилов А.В., к.т.н.
Галатенко А.В., к.ф.-м.н.
Корнеев В.В., д.т.н., проф.
Костюхин К.А., к.ф.-м.н.
Махортов С.Д., д.ф.-м.н., доц.
Манцивода А.В., д.ф.-м.н., доц.
Назирова Р.Р., д.т.н., проф.
Нечаев В.В., д.т.н., проф.
Новиков Б.А., д.ф.-м.н., проф.
Павлов В.Л. (США)
Пальчунов Д.Е., д.ф.-м.н., доц.
Петренко А.К., д.ф.-м.н., проф.
Позднеев Б.М., д.т.н., проф.
Позин Б.А., д.т.н., проф.
Серебряков В.А., д.ф.-м.н., проф.
Сорокин А.В., к.т.н., доц.
Терехов А.Н., д.ф.-м.н., проф.
Филимонов Н.Б., д.т.н., проф.
Шапченко К.А., к.ф.-м.н.
Шундеев А.С., к.ф.-м.н.
Щур Л.Н., д.ф.-м.н., проф.
Язов Ю.К., д.т.н., проф.
Якобсон И., проф. (Швейцария)

Редакция

Лысенко А.В., Чугунова А.В.

Журнал издается при поддержке Отделения математических наук РАН, Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ имени Н.Э. Баумана

СОДЕРЖАНИЕ

- Морозов А. Ю.** Параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами 395
- Тимофеев Е. Г., Жуков И. А., Теплякова А. В.** Комплекс программ для автоматизированного расчета геометрии ударных узлов машин 404
- Прокопьев А. П., Набижанов Ж. И., Иванчура В. И., Емельянов Р. Т.** К вопросу создания системы непрерывного контроля уплотнения дорожных материалов для асфальтоукладчиков 413
- Галатенко В. А., Костюхин К. А., Левченкова Г. Л.** Целостность как аспект информационной безопасности: обзор современных подходов 420
- Иванова К. Ф.** Фрактальный анализ интервальных рядов простых чисел 425
- Шундеев А. С.** Создание адаптивного учебного курса по математическим основам машинного обучения 431

Журнал зарегистрирован
в Федеральной службе
по надзору в сфере связи,
информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС77-38590 от 24 декабря 2009 г.

Журнал распространяется по подписке, которую можно оформить в любом почтовом отделении (индекс по Объединенному каталогу "Пресса России" — 22765) или непосредственно в редакции.

Тел.: (499) 269-53-97. Факс: (499) 269-55-10.

Http://novtex.ru/prin/rus E-mail: prin@novtex.ru

Журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования и базу данных RSCI на платформе Web of Science.

Журнал входит в Перечень научных журналов, в которых по рекомендации ВАК РФ должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

© Издательство "Новые технологии", "Программная инженерия", 2021

Editorial Council:

SADOVNICHY V. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS (*Head*)
BETELIN V. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Acad. RAS
VASIL'EV V. N., Dr. Sci. (Tech.), Cor.-Mem. RAS
ZHIZHCENKO A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS
MAKAROV V. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Acad.
RAS
PANCHENKO V. YA., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS
STEMPKOVSKY A. L., Dr. Sci. (Tech.), Acad. RAS
UKHLINOV L. M., Dr. Sci. (Tech.)
FEDOROV I. B., Dr. Sci. (Tech.), Acad. RAS
CHETVERTUSHKIN B. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Acad. RAS

Editor-in-Chief:

VASENIN V. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.)

Editorial Board:

ANTONOV B.I.
AFONIN S.A., Cand. Sci. (Phys.-Math)
BURDONOV I.B., Dr. Sci. (Phys.-Math)
BORZOV JURIS, Dr. Sci. (Comp. Sci), Latvia
GALATENKO A.V., Cand. Sci. (Phys.-Math)
GAVRILOV A.V., Cand. Sci. (Tech)
JACOBSON IVAR, Dr. Sci. (Philos., Comp. Sci.),
Switzerland
KORNEEV V.V., Dr. Sci. (Tech)
KOSTYUKHIN K.A., Cand. Sci. (Phys.-Math)
MAKHORTOV S.D., Dr. Sci. (Phys.-Math)
MANCIVODA A.V., Dr. Sci. (Phys.-Math)
NAZIROV R.R., Dr. Sci. (Tech)
NECHAEV V.V., Cand. Sci. (Tech)
NOVIKOV B.A., Dr. Sci. (Phys.-Math)
PAVLOV V.L., USA
PAL'CHUNOV D.E., Dr. Sci. (Phys.-Math)
PETRENKO A.K., Dr. Sci. (Phys.-Math)
POZDNEEV B.M., Dr. Sci. (Tech)
POZIN B.A., Dr. Sci. (Tech)
SEREBRJAKOV V.A., Dr. Sci. (Phys.-Math)
SOROKIN A.V., Cand. Sci. (Tech)
TEREKHOV A.N., Dr. Sci. (Phys.-Math)
FILIMONOV N.B., Dr. Sci. (Tech)
SHAPCHENKO K.A., Cand. Sci. (Phys.-Math)
SHUNDEEV A.S., Cand. Sci. (Phys.-Math)
SHCHUR L.N., Dr. Sci. (Phys.-Math)
YAZOV Yu. K., Dr. Sci. (Tech)

Editors: LYSENKO A.V., CHUGUNOVA A.V.

CONTENTS

Morozov A. Yu. Parallel Adaptive Interpolation Algorithm based on Sparse Grids for Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters 395

Timofeev E. G., Zhukov I. A., Teplyakova A. V. Program Complex for Automated Calculation of the Geometry of Impact Units of Machines 404

Prokopev A. P., Nabizhanov Zh. I., Ivanchura V. I., Emelyanov R. T. On the Issue of Designing a System for Continuous Control of Road Materials Compaction for Pavers 413

Galatenko V. A., Kostyukhin K. A., Levchenkova G. L. Integrity as an Aspect of Information Security: an Overview of Modern Approaches 420

Ivanova K. F. Fractal Analysis of Interval Series of Prime Numbers ... 425

Shundeev A. S. Towards an Adaptive Educational Course on the Mathematical Foundations of Machine Learning 431

А. Ю. Морозов, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.¹, ст. преподаватель², morozov@infway.ru,
¹ Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), Москва,
² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)" (МАИ)

Параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами

Представлен параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами. Идея алгоритма заключается в построении кусочно-полиномиальной функции, интерполирующей зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров. Использование разреженных сеток позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты, но тем не менее сложность алгоритма в общем случае остается экспоненциальной относительно числа интервальных параметров. В связи с этим актуальным является вопрос ускорения алгоритма. Представлены основные аспекты и особенности распараллеливания и программной реализации алгоритма. Выполнена апробация алгоритма на представительных задачах с использованием различного числа вычислительных ядер. Полученные результаты демонстрируют эффективность используемых подходов.

Ключевые слова: распараллеливание, OpenMP, алгоритм адаптивной интерполяции, адаптивные разреженные сетки, многомерная интерполяция, интервальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, большие размерности

Введение

Задачи с интервальными неопределенностями возникают в разных современных прикладных областях [1, 2]. Существующие методы на практике часто или дают чрезмерно завышенные интервальные оценки решения, или обладают экспоненциальной сложностью относительно числа интервальных неопределенностей. В связи с этим обстоятельством в настоящее время актуальным является создание эффективных параллельных методов и их реализаций для решения данного класса задач.

Предложенный ранее алгоритм адаптивной интерполяции [3–8] относится к методам, которые представляют решение в виде полинома относительно интервальных параметров. Его суть заключается в построении кусочно-полиномиальной функции, которая интерполирует зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров. Алгоритм имеет теоретическое обоснование [3–5] и успешно применен к жестким системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [5], системам с динамическим хаосом и бифуркациями [6], прикладным задачам химической кинети-

ки [5] и молекулярной динамики [4, 8]. В работе [7] рассмотрены различные аспекты распараллеливания и реализации алгоритма с использованием технологии CUDA [9].

В классическом варианте алгоритма применяется интерполяция на полных сетках, в связи с этим он имеет экспоненциальную вычислительную сложность и для задач с большим числом интервальных неопределенностей становится практически неприменим. Интерполяция на разреженных сетках [10–13] требует значительно меньше вычислительных ресурсов, чем интерполяция на полных сетках, поэтому их использование представляется перспективным. Эффективность использования адаптивных разреженных сеток в рамках алгоритма адаптивной интерполяции была ранее подтверждена на ряде примеров [8]. Целью работы, результаты которой описаны в статье, является разработка параллельного варианта алгоритма, а также его реализации с применением технологии OpenMP [14].

OpenMP (*Open Multi-Processing*) — это набор директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на

многопроцессорных системах с общей памятью [15]. Данная технология позволяет достаточно легко создавать многопоточные приложения на различных языках программирования.

Отметим, что вопросы распараллеливания сеточных алгоритмов рассматривались, например, в работах [16, 17], а в [18, 19] исследовались возможности распараллеливания разреженных сеток.

Динамические системы на практике часто описывают с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому в работе рассматриваются именно они.

Алгоритм адаптивной интерполяции можно представить в виде комбинации трех действий:

- перенос решений, соответствующих узлам интерполяционной сетки, на следующий временной слой;
- вычисление погрешности интерполяции;
- выполнение адаптации.

Распараллеливание алгоритма подразумевает представление данных действий в виде набора независимых подзадач. Алгоритм отчасти носит рекурсивный характер, поэтому в основном для распараллеливания применяются приемы по обходу в ширину графа вызовов.

1. Постановка задачи

Без ограничения общности рассматривается дискретная динамическая система с m интервальными неопределенностями в начальном состоянии:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}^k), \\ \mathbf{y}^0 \in \left(\left[\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0 \right], \dots, \left[\underline{y}_m^0, \overline{y}_m^0 \right], y_{m+1}^0, \dots, y_n^0 \right)^T, \\ k = 0, \dots, N-1, \end{cases} \quad (1)$$

где n — размерность фазового пространства ($n \geq m$); N — конечный момент дискретного времени; $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ — вектор состояния системы; $\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0, i = 1, \dots, m$ — нижние и верхние границы интервальных неопределенностей; $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ — вектор-функция, которая определяет переход системы из одного состояния в другое.

Если динамическая система задается с помощью системы ОДУ, тогда $\mathbf{F}(\mathbf{y}^k)$ представляет решение соответствующей системы:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)), \\ \mathbf{z}(t_k) = \mathbf{y}^k, t \in [t_k, t_{k+1}], \end{cases} \quad (2)$$

где правая часть $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим единственность и существование решения при всех

$\mathbf{z}(t_0) \in \left(\left[\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0 \right], \dots, \left[\underline{y}_m^0, \overline{y}_m^0 \right], y_{m+1}^0, \dots, y_n^0 \right)^T$. Выполнив несложные преобразования, любую систему ОДУ, содержащую параметры или являющуюся неавтономной, можно привести к виду системы уравнений (2).

В частности, $\mathbf{F}(\mathbf{y}^k)$ может реализовывать классическую схему Рунге—Кутты четвертого порядка [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{y}^k) &= \mathbf{y}^k + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4), \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^k), \mathbf{K}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}^k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1\right), \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}^k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2\right), \mathbf{K}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{y}^k + h\mathbf{K}_3), \end{aligned}$$

где $h = t_{k+1} - t_k$.

Решение системы (1) \mathbf{y}^k в каждый момент времени можно рассматривать как вектор-функцию от точечных значений интервальных начальных условий:

$$\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_m) = \left(y_1^k(x_1, x_2, \dots, x_m), y_2^k(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n^k(x_1, x_2, \dots, x_m) \right)^T,$$

где $x_i \in \left[\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0 \right], 1 \leq i \leq m$.

Цель рассматриваемого алгоритма для каждого $k = 0, \dots, N$ — построить вектор-функцию $\mathbf{P}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$,

где $\Omega = \left[\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0 \right] \times \left[\underline{y}_2^0, \overline{y}_2^0 \right] \times \dots \times \left[\underline{y}_m^0, \overline{y}_m^0 \right]$, интерполирующую $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ с контролируемой точностью. Для этого над областью, образованной интервальными неопределенностями Ω , строится интерполяционная сетка, в которой каждому узлу соответствует решение исходной задачи при определенных неинтервальных значениях начальных условий.

2. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток

При $k = 0$ вектор-функция \mathbf{P}^0 определяется тривиальным образом:

$$\mathbf{P}^0(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_{m+1}^0, y_{m+2}^0, \dots, y_n^0)^T.$$

Построим \mathbf{P}^{k+1} по \mathbf{P}^k . Получение $\mathbf{P}^{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ сводится к интерполяции функции $\mathbf{F}(\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_m))$. Интерполяционный полином \mathbf{P}^k строится по определенному набору узлов, которые образуют сетку. Поэтому сначала выполняется применение \mathbf{F} к значениям, хранящимся в узлах сетки, а далее в зависимости от погрешности интерполяции происходит адаптация. В тех местах сетки, где погрешность большая, происходит добавление новых узлов, а в тех местах, где погрешность маленькая, — разрежение сетки.

Разреженные сетки основаны на иерархическом базисе. Интерполяцию по иерархическому базису можно рассматривать как последовательное построение полиномов, интерполирующих невязку. Рассмотрим интерполяционный полином \mathbf{P}^{k+1} :

$$\mathbf{P}^{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\phi_{1,i} \in \Psi} \mathbf{a}_{1,i} \phi_{1,i}(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (3)$$

где $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ — мультиуровень; $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ — мультииндекс; Ψ — множество базисных функций.

Область значений компонентов мультииндекса зависит от соответствующих компонентов мультиуровня:

$$i_j \in \begin{cases} \{0, 1\}, & l_j = 0, \\ \{2^p - 1 \mid p = 1, \dots, 2^{l_j-1}\}, & l_j > 0, \end{cases} 1 \leq j \leq m. \quad (4)$$

Многомерные базисные функции $\varphi_{l,i}$ определяются через произведение одномерных функций:

$$\varphi_{l,i}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^m \varphi_{l_j, i_j}(x_j).$$

В случае с линейным базисом одномерные функции $\varphi_{l,i}(x)$ задаются следующим образом:

$$\varphi_{l,i}(x) = \varphi_l(2^l x - i), \quad (5)$$

где

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Коэффициенты $\mathbf{a}_{l,i}$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\mathbf{a}_{l,i} = \mathbf{a}_{l,i}^{(1)},$$

$$\mathbf{a}_{l,i}^{(j)} = \mathbf{a}_{l,i}^{(j+1)} - \begin{cases} 0, & l_j = 0, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{l,i \dots i_j - 1 \dots i_m}^{(j+1)} + \mathbf{a}_{l,i \dots i_j + 1 \dots i_m}^{(j+1)}), & l_j > 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_{l,i}^{(m+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{l,i})), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{x}_{l,i} = \left(\underline{y}_1^0 + \left[\underline{y}_1^0 - \underline{y}_1^0 \right] i_1 2^{-l_1}, \right. \\ \left. \underline{y}_2^0 + \left[\underline{y}_2^0 - \underline{y}_2^0 \right] i_2 2^{-l_2}, \dots, \underline{y}_m^0 + \left[\underline{y}_m^0 - \underline{y}_m^0 \right] i_m 2^{-l_m} \right)^T.$$

Точки $\mathbf{x}_{l,i}$ образуют интерполяционную сетку, с каждым узлом которой связано значение интерполируемой вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{l,i}))$.

Построение интерполяционного полинома (3) начинается с добавления в множество базисных

функций ψ единственной функции с мультиуровнем $\mathbf{l} = (1, 1, \dots, 1)$ и мультииндексом $\mathbf{i} = (1, 1, \dots, 1)$. При вычислении коэффициентов $\mathbf{a}_{l,i}$ в ψ автоматически добавляются функции, которые соответствуют \mathbf{l} и \mathbf{i} в выражении (7). Получающиеся значения компонентов i_j мультииндекса будут не соответствовать области значений (4). Поэтому подбираются другие \hat{l}_j и \hat{i}_j таким образом, чтобы $\hat{i}_j 2^{-\hat{l}_j} = i_j 2^{-l_j}$. Это можно выполнить последовательным делением i_j на 2 и уменьшением l_j на единицу до тех пор, пока i_j не станет нечетным или $l_j \neq 0$.

Коэффициенты $\mathbf{a}_{l,i}$ характеризуют погрешность интерполяции. Если $\|\mathbf{a}_{l,i}\|$ больше, чем заданное наперед значение ε , то в базис добавляются функции на один уровень больше:

$$\varphi_{(l_1+1, l_2, \dots, l_m), (2i_1-1, i_2, \dots, i_m)}, \varphi_{(l_1+1, l_2, \dots, l_m), (2i_1+1, i_2, \dots, i_m)}, l_1 > 0, \\ \dots \\ \varphi_{(l_1, l_2, \dots, l_m+1), (i_1, i_2, \dots, 2i_m-1)}, \varphi_{(l_1, l_2, \dots, l_m+1), (i_1, i_2, \dots, 2i_m+1)}, l_m > 0.$$

Значение ε подбирается из соображений желаемой абсолютной погрешности интерполяции на одном шаге алгоритма и должно быть согласовано с областью значений фазовых переменных.

Классические разреженные сетки являются результатом оптимизации вычислительных затрат для аппроксимации функций с ограниченными смешанными производными [18]. Поэтому для применения алгоритма необходимо чтобы $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ обладала соответствующими свойствами.

Отличия нелинейного базиса от линейного будут заключаться в базисных функциях (5) и в вычислении весовых коэффициентов (6). Для квадратичного базиса имеем:

$$\varphi_{l,i}(x) = \begin{cases} \varphi_l(2^l x - i), & l = 0, \\ \varphi_2(2^l x - i), & l > 0, \end{cases}$$

где

$$\varphi_2(x) = - \begin{cases} (x-1)(x+1), & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и вместо (6):

$$\mathbf{a}_{l,i}^{(j)} = \mathbf{a}_{l,i}^{(j+1)} - \begin{cases} 0, & l_j = 0, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{l,i \dots i_j - 1 \dots i_m}^{(j+1)} + \mathbf{a}_{l,i \dots i_j + 1 \dots i_m}^{(j+1)}), & l_j = 1, \\ \frac{1}{8}(3\mathbf{a}_{l,i \dots i_j - 1 \dots i_m}^{(j+1)} + 6\mathbf{a}_{l,i \dots i_j + 1 \dots i_m}^{(j+1)} - \mathbf{a}_{l,i \dots i_j + 3 \dots i_m}^{(j+1)}), & l_j > 1, i_j \bmod 4 = 1, \\ \frac{1}{8}(3\mathbf{a}_{l,i \dots i_j + 1 \dots i_m}^{(j+1)} + 6\mathbf{a}_{l,i \dots i_j - 1 \dots i_m}^{(j+1)} - \mathbf{a}_{l,i \dots i_j - 3 \dots i_m}^{(j+1)}), & l_j > 1, i_j \bmod 4 = 3. \end{cases}$$

Для базиса четвертой степени:

$$\varphi_{l,i}(x) = \begin{cases} \varphi_1(2^l x - i), & l = 0, \\ \varphi_2(2^l x - i), & l = 1, \\ \varphi_4^1(2^l x - i), & l > 1, i \bmod 4 = 1, \\ \varphi_4^2(2^l x - i), & l > 1, i \bmod 4 = 3, \end{cases}$$

где

$$\varphi_4^1(x) = -\frac{1}{6} \begin{cases} (x+1)(x-1)(x-2)(x-3), & x \in [-1, 3], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi_4^2(x) = -\frac{1}{6} \begin{cases} (x+3)(x+2)(x+1)(x-1), & x \in [-3, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и вместо (6):

$$\mathbf{a}_{1,i}^{(j)} = \mathbf{a}_{1,i}^{(j+1)} - \begin{cases} 0, & l_j = 0, \\ \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j-1} \dots i_d}^{(j+1)} + \mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j+1} \dots i_d}^{(j+1)}), & l_j = 1, \\ \frac{1}{8} \begin{cases} 3\mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j-1} \dots i_d}^{(j+1)} + 6\mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j+1} \dots i_d}^{(j+1)} - \mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j+3} \dots i_d}^{(j+1)}, & i_j \bmod 4 = 1 \\ 3\mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j+1} \dots i_d}^{(j+1)} + 6\mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j-1} \dots i_d}^{(j+1)} - \mathbf{a}_{1,i_1 \dots i_{j-3} \dots i_d}^{(j+1)}, & i_j \bmod 4 = 3 \end{cases}, & l_j = 2 \\ \frac{1}{128} \begin{cases} 35\mathbf{a}_{1,i_j-1..}^{(j+1)} + 140\mathbf{a}_{1,i_j+1..}^{(j+1)} - 70\mathbf{a}_{1,i_j+3..}^{(j+1)} + 28\mathbf{a}_{1,i_j+5..}^{(j+1)} - 5\mathbf{a}_{1,i_j+7..}^{(j+1)}, & i_j \bmod 8 = 1 \\ -5\mathbf{a}_{1,i_j-3..}^{(j+1)} + 60\mathbf{a}_{1,i_j-1..}^{(j+1)} + 90\mathbf{a}_{1,i_j+1..}^{(j+1)} - 20\mathbf{a}_{1,i_j+3..}^{(j+1)} + 3\mathbf{a}_{1,i_j+5..}^{(j+1)}, & i_j \bmod 8 = 3 \\ 3\mathbf{a}_{1,i_j-5..}^{(j+1)} - 20\mathbf{a}_{1,i_j-3..}^{(j+1)} + 90\mathbf{a}_{1,i_j-1..}^{(j+1)} + 60\mathbf{a}_{1,i_j+1..}^{(j+1)} - 5\mathbf{a}_{1,i_j+3..}^{(j+1)}, & i_j \bmod 8 = 5 \\ -5\mathbf{a}_{1,i_j-7..}^{(j+1)} + 28\mathbf{a}_{1,i_j-5..}^{(j+1)} - 70\mathbf{a}_{1,i_j-3..}^{(j+1)} + 140\mathbf{a}_{1,i_j-1..}^{(j+1)} + 35\mathbf{a}_{1,i_j+1..}^{(j+1)}, & i_j \bmod 8 = 7 \end{cases}, & l_j > 2. \end{cases}$$

При вычислении значения $\mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{1,i})$ в выражении (7) нет необходимости использовать формулу (3). Сначала выполняется поиск $\mathbf{x}_{1,i}$ среди узлов, образующих сетку. Если поиск завершился успехом, тогда $\mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{1,i})$ будет равняться значению, которое соответствует найденному узлу. Если подходящий узел не был найден, то выполняется интерполяция. Коэффициенты $\mathbf{a}_{1,i}$ численно равны разнице между значением интерполируемой функции в точке $\mathbf{x}_{1,i}$ и интерполяционным полиномом. Для того чтобы вычислить \mathbf{P}^k в точке $\mathbf{x}_{1,i}$, достаточно модифицировать формулу для коэффициентов $\mathbf{a}_{1,i}$:

$$\mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{1,i}) = \hat{\mathbf{a}}_{1,i}^{(1)}, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{1,i}^{(j)} = \hat{\mathbf{a}}_{1,i}^{(j+1)} - \begin{cases} 0, & \hat{l}_j = 0, \\ \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{a}}_{1,i_1 \dots i_{j-1} \dots i_m}^{(j+1)} + \hat{\mathbf{a}}_{1,i_1 \dots i_{j+1} \dots i_m}^{(j+1)}), & \hat{l}_j > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{1,i}^{(m+1)} = - \begin{cases} (0, 0, \dots, 0)^T, & \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{i}, \\ G^k[\mathbf{x}_{1,i}], & \mathbf{x}_{1,i} \in G^k, \\ \mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{1,i}), & \mathbf{x}_{1,i} \notin G^k, \end{cases} \quad (10)$$

где G^k — множество узлов сетки и соответствующих им значений. Для того чтобы избежать повторных вычислений, все получаемые значения $\mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{1,i})$ в процессе построения \mathbf{P}^{k+1} добавляются в G^k .

3. Распараллеливание и реализация

Для того чтобы распараллелить работу алгоритма, его нужно представить в виде набора независимых подзадач. Можно выделить три группы таких подзадач:

- 1) применение \mathbf{F} к значениям, соответствующим узлам сетки;
- 2) вычисление весовых коэффициентов $\mathbf{a}_{1,i}$ (вычисление погрешности);
- 3) интерполяция значений в новых узлах.

Вторая и третья группы подзадач подразумевают распараллеливание рекурсии.

Псевдокод в стиле языка Python одного шага алгоритма представлен на рис. 1.

На рис. 1 все узлы сетки содержатся в глобальном массиве `items`. Каждый узел сетки имеет следующий набор полей: `l` — мультиуровень; `i` — мультииндекс; `y` — значение вектора состояний системы; `y_prev` — предыдущее значение вектора состояний системы; `status` — статус; `depth` — глубина рекурсии интерполяции.

Циклы, помеченные словом `parallel`, распараллеливаются с помощью OpenMP путем добавления соответствующей директивы на уровне программного кода.

Функция `add(l, i)` выполняет добавление в сетку узла с мультиуровнем `l` и мультииндексом `i`, а также всех дополнительных узлов, необходимых для вычисления весового коэффициента. Если узел уже есть в сетке и имеет статус `is_empty`, то статус изменяется на `is_used`. Если узла нет в сетке, то он добавляется в конец массива `items`, при этом вычисляется глубина рекурсии, которая будет при интерполяции значения в этом узле в соответствии с формулами (8)–(10).

Функция `eval_a(l, i)` вычисляет значение соответствующего весового коэффициента. Функция `interpolation(l, i)` выполняет интерполяцию в точке $\mathbf{x}_{1,i}$ по значениям `y_prev`.

```

-----
1: start = 0
2: end = len(items)
3: parallel for item in items:
4:   item.y_prev = item.y
5:   item.y = F(item.y_prev)
6: parallel for item in items:
7:   item.a = eval_a(item.l, item.i)
8:   item.status = is_empty
9: add([1, 1, ..., 1], [1, 1, ..., 1])
10: while True:
11:   for item in items[start : end]
12:     if (item.status == is_used) and (||item.a|| > eps):
13:       for j = 1...m:
14:         if item.l[j] > 0:
15:           add([..., item.l[j]+1, ...], [..., 2*item.i[j]-1, ...])
16:           add([..., item.l[j]+1, ...], [..., 2*item.i[j]+1, ...])
17:   start = end
18:   end = len(items)
19:   if start == end:
20:     break
21: for d = 1...max([item.depth for item in items[start : end]]):
22:   parallel for item in [x for x in items[start : end] if x.depth == d]:
23:     item.y_prev = interpolation(item.l, item.i)
24:   parallel for item in items[start : end]:
25:     item.y = F(item.y_prev)
26:   parallel for item in items[start : end]:
27:     item.a = eval_a(item.l, item.i)
28:     item.status = is_used
29: delete([item for item in items if item.status == is_empty])
-----

```

```

h := h^(h >> 20)^(h >> 12);
h := h^(h >> 7)^(h >> 4);
index := h & (size - 1),

```

где \wedge — исключающее побитовое "или"; \gg — побитовый сдвиг вправо; $\&$ — побитовое "и"; $size$ — размер хеш-таблицы, степень числа 2.

Для решения задачи устранения коллизий в массиве `items` формируются списки. В структуру узла добавляется дополнительное поле, указывающее на следующий элемент в списке.

В конце каждого шага алгоритма выполняется удаление незадействованных узлов (рис. 1, строка 29). При этом происходит обновление соответствующих ссылок в хеш-таблице и в списках разрешения коллизий.

4. Результаты

С помощью параллельного алгоритма адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток с использованием базиса четвертой степени выполняется численное решение двух систем ОДУ с интервальными неопределенностями. Параметр $\varepsilon = 10^{-5}$. Характеристики вычислительной машины, на которой выполнялась реализация алгоритма: 2x Intel(R) Xeon(R) Gold 6246 CPU @ 3.30GHz, оперативная память 192GiB DDR4 2666 MHz, число физических ядер — 24, логических ядер — 48. Выполняется анализ ускорения S и эффективности E :

$$S = \frac{T_1}{T_p}; \quad E = \frac{S}{P} = \frac{T_1}{T_p P},$$

где T_1 — время работы последовательной версии алгоритма; T_p — время работы параллельной версии алгоритма с использованием P вычислительных ядер.

Вначале рассмотрим систему ОДУ с двумя интервальными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' = -y\sqrt{x^2 + y^2}, & y' = \sin(x), \\ x(0) = x_0 \in [-1, 1], & y(0) = y_0 \in [0, 1], \\ t \in [0, 20]. \end{cases} \quad (11)$$

На рис. 2 и 3 показано множество решений системы (11) и получающаяся сетка в различные моменты времени.

В процессе интегрирования множество закручивается в спиралевидную структуру. В окрестности точки $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ наблюдается уплотнение сетки, от-

Рис. 1. Псевдокод одного шага алгоритма

Строки 21–23 на рис. 1 отвечают за распараллеливание рекурсии при интерполяции значений в новых узлах. Узлы на одной глубине обрабатываются независимо друг от друга. Адаптация сетки происходит в строках 11–16.

Значения `start` и `end` соответствуют текущему диапазону обрабатываемых узлов из массива `items`.

В процессе работы алгоритма постоянно происходит поиск узлов по мультиуровню и мультииндексу, в связи с этим над массивом `items` организовывается хеш-таблица. Используется следующая хеш-функция:

$$hash(\mathbf{l}, \mathbf{i}) = \sum_{j=1}^m (l_j + i_j p^m) p^{j-1} \bmod q,$$

где $p = 87178291199$; $q = 99999990000001$. Для получения непосредственно индекса ячейки таблицы дополнительно выполняются следующие преобразования:

$$h := hash(\mathbf{l}, \mathbf{i});$$

части это связано с тем, что данная точка является особенной.

На рис. 4 показаны графики зависимости ускорения и эффективности от числа вычислительных ядер. За счет распараллеливания алгоритма получилось сократить вычислительное время в 23 раза. В силу того что добавление узлов в алгоритме выполняется последовательно, наблюдается снижение эффективности при увеличении числа используемых ядер, что соответствует закону Амдала [21].

Далее рассматривается система ОДУ, соответствующая модели взаимодействия двух видов типа "хищник — жертва" (модель Лотки — Вольтерры), которая содержит два интервальных начальных условия и четыре интервальных параметра:

$$\begin{cases} x' = -\alpha x + \beta xy, \\ y' = \gamma y - \delta xy, \\ x(0) = x_0 \in [0, 9, 1], y(0) = y_0 \in [0, 7, 0, 8], \\ \alpha \in [0, 7, 0, 9], \beta \in [0, 5, 0, 6], \gamma \in [0, 7, 0, 8], \\ \delta \in [0, 8, 1], t \in [0, 20], \end{cases} \quad (12)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

На рис. 5 показано множество решений в различные моменты времени. Оно представляет собой шестимерный прямоугольный параллелепипед, который претерпевает нелинейные деформации. На рис. 6 представлена некоторая проекция по-

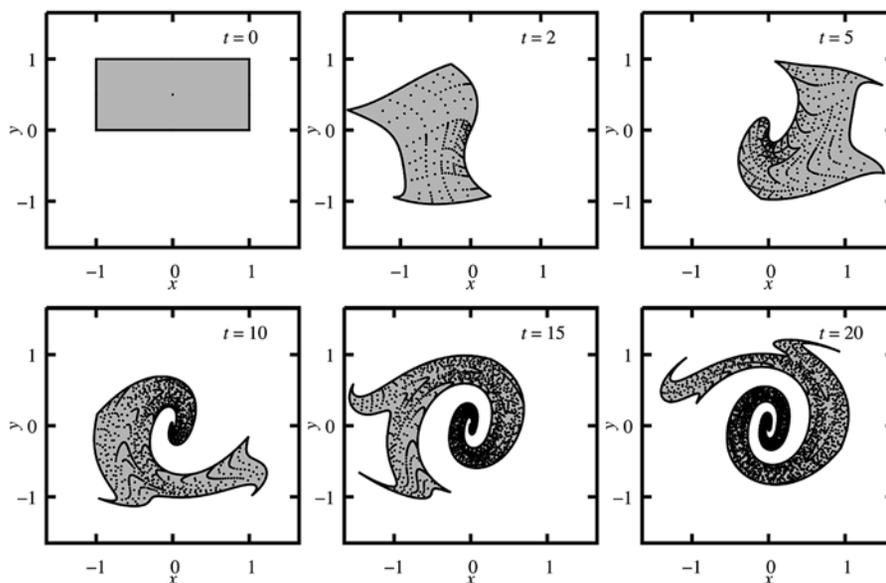


Рис. 2. Множество решений системы (11) в различные моменты времени

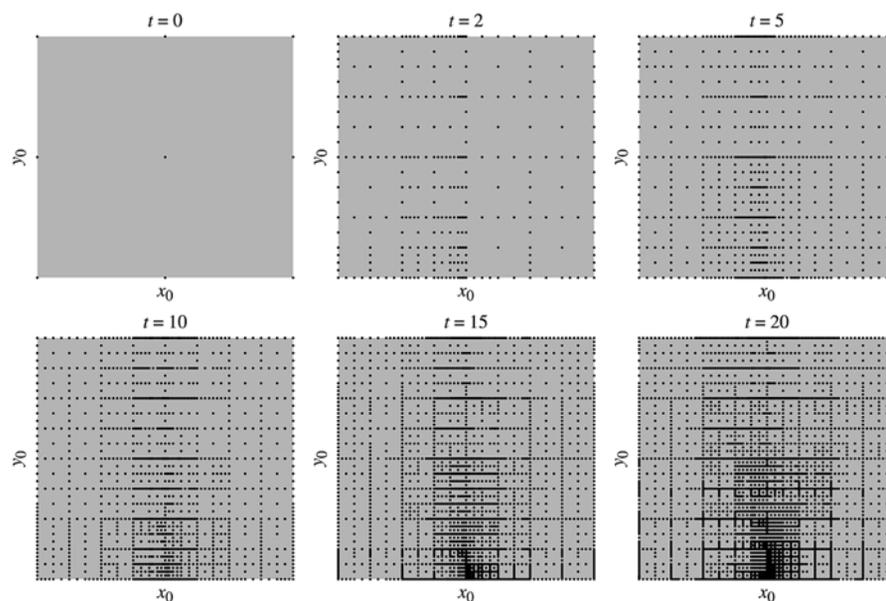


Рис. 3. Сетка, получающаяся в процессе решения системы (11)

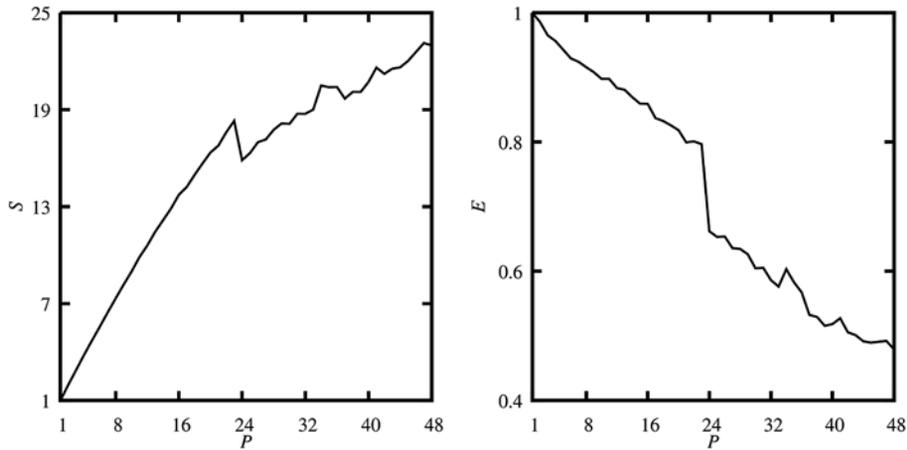


Рис. 4. Ускорение и эффективность распараллеливания при решении системы (11)

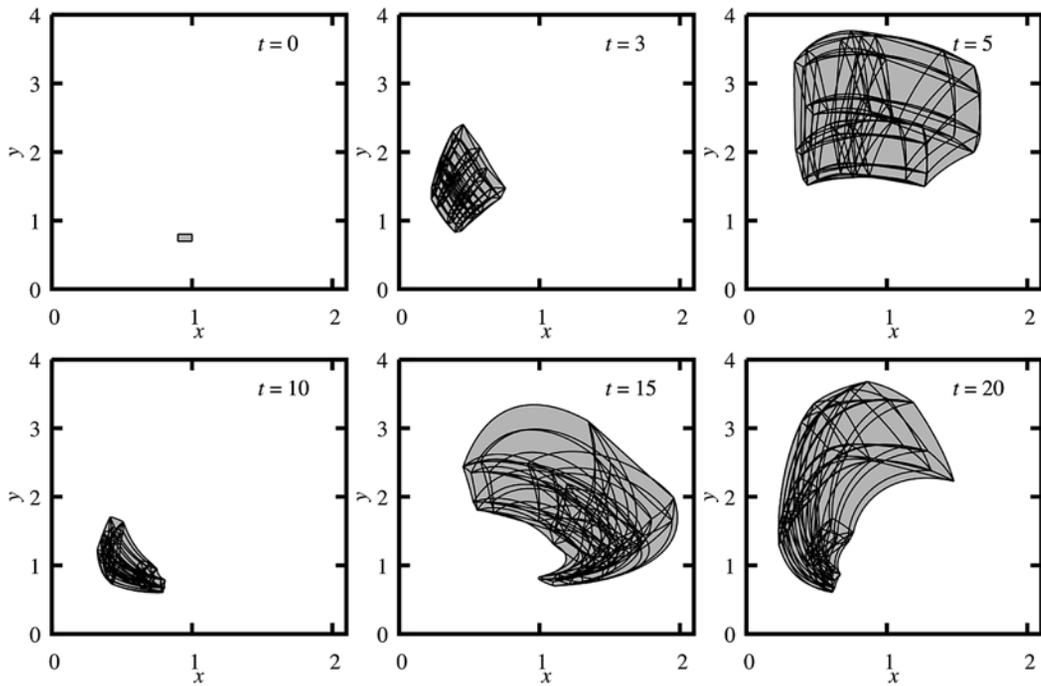


Рис. 5. Множество решений системы (12) в различные моменты времени

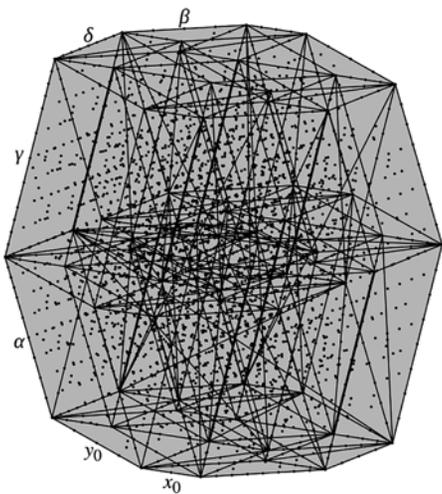


Рис. 6. Сетка в конечный момент времени

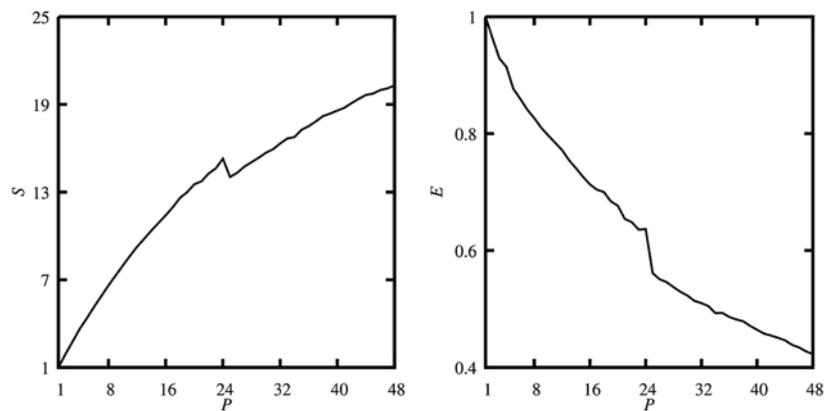


Рис. 7. Ускорение и эффективность распараллеливания при решении системы (12)

лученной шестимерной сетки в конечный момент времени.

На рис. 7 показаны графики зависимости ускорения и эффективности от числа вычислительных ядер. Максимальное достигнутое ускорение — в 20 раз. Как и на рис. 4, здесь при $P = 24$ наблюдается скачок. Это связано с тем, что при числе используемых ядер $P \leq 24$ задействуется только один из установленных процессоров, а при $P > 24$ — уже оба, и в результате появляются дополнительные временные задержки.

Вычислительное время в основном тратится на интегрирование систем ОДУ (2) при определенных значениях начальных условий и на вычисление весовых коэффициентов (в том числе на интерполяцию). Поэтому благодаря распараллеливанию данных операций можно существенно ускорить работу алгоритма адаптивной интерполяции.

Заключение

В работе рассматривается алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток с нелинейным базисом для моделирования динамических систем с интервальными неопределенностями с позиции распараллеливания. В алгоритме можно выделить несколько наборов, представляющих решение независимых подзадач: обновление значений, соответствующих узлам сетки; вычисление весовых коэффициентов; интерполяция значений в новых узлах. Последние два набора подразумевают распараллеливание рекурсии, поэтому здесь применяются приемы по обходу в ширину графа вызовов. Выполнена апробация параллельной реализации алгоритма на двух системах ОДУ, содержащих два и шесть интервальных параметров соответственно. Получено ускорение в 20...23 раза при значении эффективности распараллеливания $\approx 0,5$.

Список литературы

1. Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J. Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009. — 235 p.
2. Шарый С. П. О мере вариабельности оценки параметров в статистике интервальных данных // Вычислительные технологии. — 2019. — Т. 24, № 5. — С. 90—108. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.008.
3. Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 963—974. DOI: 10.1134/S0374064118070130.
4. Морозов А. Ю., Журавлев А. А., Ревизников Д. Л. Анализ и оптимизация алгоритма адаптивной интерполяции численного решения систем обыкновенных дифференциальных

уравнений с интервальными параметрами // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 7. — С. 960—974. DOI: 10.1134/S0374064120070122.

5. Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л., Гидаспов В. Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 12. — С. 129—144. DOI: 10.31857/S023408790001940-8.

6. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Modeling of Dynamic Systems with Interval Parameters in the Presence of Singularities // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2020. — Vol. 16, No. 3. — P. 479—490. DOI: 10.20537/nd200306.

7. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Modelling of Dynamic Systems with Interval Parameters on Graphic Processors // Programmynaya Ingeneria. — 2019. — Vol. 10, No. 2. — P. 69—76. DOI: 10.17587/prin.10.69-76.

8. Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L. Sparse Grid Adaptive Interpolation in Problems of Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, No. 4. — Article 298. DOI: 10.3390/math9040298.

9. CUDA Zone. URL: <https://developer.nvidia.com/cuda-zone> (дата обращения: 07.04.2021).

10. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 148:5. — С. 1042—1045.

11. Judd K. L., Maliar S., Maliar L., Valero R., Smolyak Method for Solving Dynamic Economic Models: Lagrange Interpolation, Anisotropic Grid and Adaptive Domain // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2014. — Vol. 44. — P. 92—123. DOI: 10.2139/ssrn.2306869.

12. Bungartz H.-J. Finite Elements of Higher Order on Sparse Grids, Shaker, 1998. — 127 p.

13. Bungartz H.-J., Dirnstorfer S. Higher Order Quadrature on Sparse Grids // Computational Science — ICCS 2004. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3039. Springer, Berlin, Heidelberg. 2004. — P. 394—401. DOI: 10.1007/978-3-540-25944-2_52.

14. OpenMP. URL: <https://www.openmp.org/> (дата обращения: 07.04.2021).

15. Технология OpenMP. URL: <https://pvs-studio.com/gu/a/0057/> (дата обращения: 07.04.2021).

16. Мартыненко С. И. Многосеточная технология: теория и приложения. — М.: Физматлит, 2015. — 208 с.

17. Мартыненко С. И., Волохов В. М., Яновский Л. С. Параллельная многосеточная технология: редукция к независимым задачам // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 6. — С. 89—97. DOI: 10.1134/S2070048217010100.

18. Brumm J., Scheidegger S. Using Adaptive Sparse Grids to Solve High-Dimensional Dynamic Models // Econometrica. — 2017. — Vol. 85, Iss. 5. — P. 1575—1612.

19. Klimke A., Wohlmuth B. Constructing dimension-adaptive sparse grid interpolants using parallel function evaluations // Parallel Processing Letters. — 2006. — Vol. 16, No. 4. — P. 407—418. DOI: 10.1142/S0129626406002733.

20. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.

21. Amdahl G. M. Validity of the Single Processor Approach to Achieving Large-Scale Computing Capabilities // AFIPS Conference Proceedings (30). 1967. — P. 483—485. DOI:10.1145/1465482.1465560.

Parallel Adaptive Interpolation Algorithm based on Sparse Grids for Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters

A. Yu. Morozov, morozov@infway.ru,

¹Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow,

²Moscow Aviation Institute

Corresponding author:

Morozov Alexander Yu., Researcher¹, Senior Lecturer², morozov@infway.ru

¹Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow,

²Moscow Aviation Institute

E-mail: morozov@infway.ru

Received on July 13, 2021

Accepted on September 02, 2021

The paper presents a parallel algorithm for adaptive interpolation based on sparse grids for modeling dynamic systems with interval parameters. The idea of the algorithm is to construct a piecewise polynomial function that interpolates the dependence of the solution to the problem on the point values of the interval parameters. In the classical version of the algorithm, polynomial interpolation on complete grids is used, and with a large number of uncertainties, the algorithm becomes difficult to apply due to the exponential growth of computational costs. The use of sparse grids can significantly reduce the computational costs, but nevertheless the complexity of the algorithm in the general case remains exponential with respect to the number of interval parameters. In this regard, the issue of accelerating the algorithm is relevant. The algorithm can be divided into several sets of independent subtasks: updating the values corresponding to the grid nodes; calculation of weighting factors; interpolation of values at new nodes. The last two sets imply parallelization of recursion, so here the techniques for traversing the width of the call graph are mainly used. The parallel implementation of the algorithm was tested on two ODE systems containing two and six interval parameters, respectively, using a different number of computing cores. The results obtained demonstrate the effectiveness of the approaches used.

Keywords: parallelization, OpenMP, adaptive interpolation algorithm, adaptive sparse grids, multidimensional interpolation, interval systems of ordinary differential equations, large dimensions

For citation:

Morozov A. Yu. Parallel Adaptive Interpolation Algorithm based on Sparse Grids for Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters, *Programmnaya Ingeneria*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 395–403.

DOI: 10.17587/prin.12.395-403

References

1. Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J. *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, 2009, 235 p.
2. Shary S. P. On a variability measure for estimates of parameters in the statistics of interval data, *Computational technologies*, 2019, vol. 24, no. 5, pp. 90–108. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.008.
3. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Adaptive Interpolation Algorithm Based on a kd-Tree for Numerical Integration of Systems of Ordinary Differential Equations with Interval Initial Conditions, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 945–956. DOI: 10.1134/S0012266118070121.
4. Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L. Analysis and Optimization of an Adaptive Interpolation Algorithm for the Numerical Solution of a System of Ordinary Differential Equations with Interval Parameters, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 935–949, DOI:10.1134/s0012266120070125.
5. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L., Gidaspov V. Yu. Adaptive Interpolation Algorithm Based on a KD-Tree for the Problems of Chemical Kinetics with Interval Parameters, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 622–633, DOI: 10.1134/S2070048219040100.
6. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Modeling of Dynamic Systems with Interval Parameters in the Presence of Singularities, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, no. 3, pp. 479–490. DOI: 10.20537/nd200306.
7. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Modelling of Dynamic Systems with Interval Parameters on Graphic, *Programmnaya Ingeneria*, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 69–76. DOI: 10.17587/prin.10.69-76.
8. Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L. Sparse Grid Adaptive Interpolation in Problems of Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 4, article 298. DOI: 10.3390/math9040298.
9. CUDA Zone, available at: <https://developer.nvidia.com/cuda-zone> (date of access 07.04.2021).
10. Smolyak S. A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, vol. 148:5, pp. 1042–1045 (in Russian).
11. Judd K. L., Maliar S., Maliar L., Valero R. Smolyak Method for Solving Dynamic Economic Models: Lagrange Interpolation, Anisotropic Grid and Adaptive Domain, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, vol. 44, pp. 92–123. DOI: 10.2139/ssrn.2306869.
12. Bungartz H.-J. *Finite Elements of Higher Order on Sparse Grids*, Shaker, 1998, 127 p.
13. Bungartz H.-J., Dirnstorfer S. Higher Order Quadrature on Sparse Grids, *Computational Science — ICCS 2004. ICCS 2004. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3039. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004, pp. 394–401. DOI: 10.1007/978-3-540-25944-2_52.
14. OpenMP, available at <https://www.openmp.org/> (date of access 07.04.2021).
15. OpenMP technology, available at <https://pvs-studio.com/ru/a/0057/> (date of access 07.04.2021).
16. Martynenko S. I. *Multigrid Technology: Theory and Applications*, Moscow, Fizmatlit, 2015, 208 p. (in Russian).
17. Martynenko S. I., Volokhov V. M., Yanovskiy L. S. Parallel multigrid technique: Reduction to independent problems, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, pp. 120–126, DOI: 10.1134/S2070048217010100.
18. Brumm J., Scheidegger S. Using Adaptive Sparse Grids to Solve High-Dimensional Dynamic Models, *Econometrica*, 2017, vol. 85, iss. 5, pp. 1575–1612.
19. Klimke A., Wohlmuth B. Constructing dimension-adaptive sparse grid interpolants using parallel function evaluations, *Parallel Processing Letters*, 2006, vol. 16, no. 4, pp. 407–418, DOI: 10.1142/S0129626406002733.
20. Formalev V. F., Reviznikov D. L. *Numerical Methods*, Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 p. (in Russian).
21. Amdahl G. M. Validity of the Single Processor Approach to Achieving Large-Scale Computing Capabilities, *AFIPS Conference Proceedings* (30), 1967, pp. 483–485, DOI:10.1145/1465482.1465560.

Е. Г. Тимофеев, аспирант, veefomit77777@yandex.ru, Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк,
И. А. Жуков, д-р техн. наук, проф., tmmiok@yandex.ru,
А. В. Теплякова, студент, teplyakovanu@mail.ru, Санкт-Петербургский горный университет

Комплекс программ для автоматизированного расчета геометрии ударных узлов машин

Совершенствование конструкций горных машин ударного действия в целях повышения производительности буровых работ требует проведения расчетов геометрических параметров ударных узлов. Наибольший эффект при ударном воздействии на горную породу дает ударный импульс, соответствующий силам сопротивления разрушаемого объекта. В свою очередь, форма и параметры ударного импульса определяются геометрией соударяющихся тел. Аналитические методы анализа динамических процессов в ударных системах предполагают применение достаточно сложного математического аппарата, что не позволяет оперативно решать задачи инженерного проектирования машин и механизмов. Авторами настоящей статьи разработан численный метод расчета и анализа ударных импульсов, генерируемых в системе машины телами любой геометрической сложности. Достоверность теоретических подходов подтверждена результатами физического эксперимента. Разработанное программное обеспечение позволяет достаточно быстро и точно решать задачу поиска и обоснования рациональных геометрических параметров ударных узлов машин.

Ключевые слова: ударная машина, удар, импульс, форма бойка, анализ геометрии ударного узла, автоматизация расчета ударного импульса

Введение

При добыче полезных ископаемых широко применяются машины ударного действия [1–4], предназначенные для бурения шпуров и скважин в горных породах. Основным элементом этих машин является ударный узел, в котором происходит генерирование полезной энергии путем нанесения продольного удара бойком по штанге-волноводу или рабочему инструменту [5–8]. Энергия удара передается к разрушаемому объекту в виде волновых импульсов, параметры и форма которых оказывает непосредственное влияние на эффективность разрушения объекта [9–12]. Доказано, что форма ударных импульсов зависит от массы, скорости и геометрических параметров ударяющего тела [13–15]. Начиная с 60-х годов XX века, в период стремительного развития машиностроения появился большой интерес к поиску и разработке аналитических методов нахождения ударных импульсов от бойков ударных машин различного назначения. Эта задача является неотъемлемой составляющей при проектировании новых машин и механизмов ударного действия, или при совершенствовании имеющегося оборудования. Одним из наиболее эффективных был признан графо-динамический метод расчета ударных импульсов [13, 16], который в настоящее время преобразован в численно-аналитический метод [17, 18].

Применение компьютерной техники позволяет автоматизировать расчеты, базирующиеся на численных методах [19–21], путем создания программного обеспечения на различных языках программирования. Анализ известных зарубежных исследований [22–25] подтверждает актуальность выбранного направления исследований ударных систем, но не дает информации о разработках соответствующего программного обеспечения. В настоящей статье представлен комплекс программ, позволяющих анализировать ударяющие тела, представляющие собой сплошные тела вращения переменного сечения, рассчитывать генерируемые ими ударные импульсы при нанесении продольных ударов по полубесконечному волноводу и определять основные характеристики этих импульсов.

Обоснование актуальности и определение задач исследования

Современные математические приложения (например, Maple, Mathcad и др.) позволяют проводить инженерные расчеты различного уровня сложности [26, 27]. Они позволяют также создавать процедуры и автоматизировать вычисления, скрывая от глаз пользователя их сложную алгоритмическую структуру, демонстрируя только входные данные и результаты вычислений. Одним из недостатков таких процедур является то, что они работают исклю-

чительно в тех приложениях, в которых были созданы. Данные приложения являются коммерческими и требуют наличия лицензии, да и сами расчетные процедуры не всегда являются бесплатными, а права на их использование принадлежат разработчикам (третьим лицам). Современные программные средства моделирования напряженно-деформированного состояния твердых тел (например, SolidWorks, Ansys, T-Flex) обладают широкими возможностями изучения задач механики деформируемого твердого тела, однако они не позволяют анализировать динамические процессы, происходящие в ударных системах, с точки зрения волновой теории продольного удара.

Целью исследования, результаты которого представлены в настоящей статье, является создание программного обеспечения, позволяющего автономно без использования сторонних приложений моделировать ударные процессы в стержневой системе со сложными геометрическими параметрами. Наличие таких программных ресурсов позволит существенно сократить сроки и упростить процедуру выполнения инженерных расчетов машин ударного действия, что является актуальным для любой сферы деятельности.

Поставленная цель требует решения следующих задач:

1) изучить применяемые на практике аналитические методы расчета и моделирования динамических процессов в машинах и механизмах ударного действия;

2) подобрать для реализации методов анализа бойков и расчета ударного импульса среду и язык программирования;

3) разработать численный алгоритм решения задачи анализа ударных импульсов в стержневой системе сложной геометрической формы;

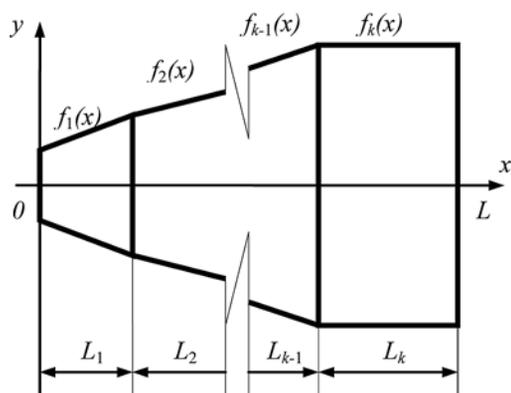
4) реализовать численный алгоритм в виде программного комплекса с удобным и понятным пользователю интерфейсом;

5) выполнить расчеты различных вариантов ударных систем и оценить погрешность результатов, получаемых при использовании созданного программного обеспечения.

Способы анализа ударников и особенности численного представления моделей ударных узлов

В машинах и механизмах ударного действия боек (поршень, ударник) представляет собой тело вращения постоянного или переменного сечения [5, 28]. По особенностям геометрической формы их условно можно разделить на два типа: простые и сложные. Простые бойки представляют собой тела вращения, образующая боковой поверхности которых выполнена по одной или нескольким кривым, описываемым в декартовой системе координат функциями вида $y = f(x)$ (рис. 1, а). Ударники, образующая которых задана одной кривой, называются одноступенчатыми, а двумя и более кривыми — многоступенчатыми. Сложными являются бойки, выполненные в виде тел вращения с добавлением к ним различных геометрических элементов, таких как фаски, прорези, выступы, канавки, отверстия и т. п. Ударники этого типа при проектировании механизма, как правило, моделируются в стороннем приложении (КОМПАС, T-Flex и др.) и представляются в виде 3D-моделей (рис. 1, б).

Расчет ударного импульса осуществляется численным методом, который может быть реализован на любом алгоритмическом языке программирования (Pascal, C++ и др.). Его использование предполагает представление реального ударника в расчетном виде. Для этого тело ударника длиной L рассекается N плоскостями, перпендикулярными его геометрической оси, расположенными на одинаковом расстоянии l_1 друг от друга (число плоскостей N определяется сложностью боковой поверхности бойка). Объем материала ударника, заключенный между двумя ближайшими секущими плоскостями, приближенно заменяется цилиндром с площадью основания, равной площади сечения, расположенной ближе к ударному торцу бойка, и высотой, равной расстоянию l_1 . Каждый такой цилиндр является единичной расчетной ступенью, а тело, составленное из этих ступеней, формирует приведенную форму бойка



а)



б)

Рис. 1. Моделирование ударника с помощью функций вида $y = f_k(x)$ с областью определения на соответствующем участке L_k (а) и модель ударника, выполненная в системе 3D-моделирования T-Flex (б)

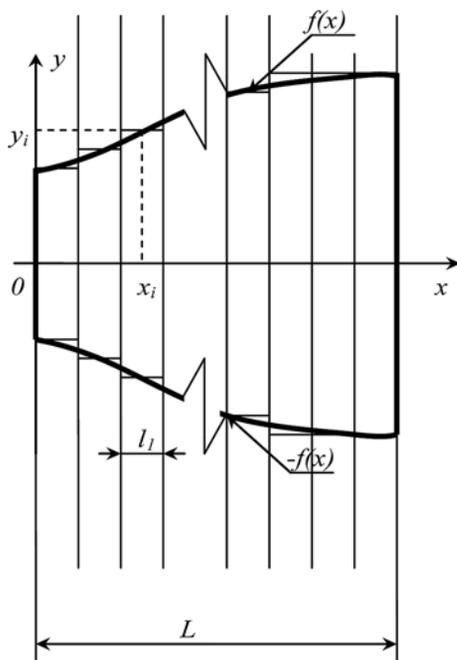


Рис. 2. Формирование приведенной формы бойка

(рис. 2). Площадь каждой единичной расчетной ступени записывается в одномерный массив площадей S_i ($i = 0, 1, \dots, N$), где S_0 — это площадь поперечного сечения волновода, воспринимающего удар.

Численное моделирование простого ударника осуществляется по значениям функций $y_i = f(x_i)$, задающих образующую бойка, вычисленных по абсциссам x_i , задающим координаты точек, расположенных посередине отрезков, отсекаемых на оси Ox секущими плоскостями (рис. 2). Эти значения соответствуют радиусам единичных расчетных цилиндрических ступеней. Они позволяют сформировать массив S_i , в который при формировании модели ударного узла добавляется значение элемента S_0 .

Численное моделирование сложного ударника проводится с использованием систем 3D-моделирования. Здесь боек рассекается плоскостями, расположенными на небольшом расстоянии друг от друга (0,1...1 мм). Площади сечений рассчитываются с помощью встроенных в редактор инструментов (или функции), их численные значения записываются в файл и передаются в массив S_i , в который при формировании модели ударного узла также добавляется значение элемента S_0 .

Особенности среды программирования и программного кода для анализа бойков и ударных импульсов

Для реализации разработанного численного метода моделирования бойков и расчета ударных импульсов была выбрана среда программирования LAZARUS [29, 30] со встроенным языком программирования Object Pascal [31, 32]. На такой выбор повлияли следующие факторы.

1. Среда программирования является бесплатной, все ее компоненты находятся в открытом доступе и легко редактируются по желанию пользователя.

2. Компилятор среды LAZARUS является кросс-платформенным, что позволяет создавать программные продукты для ЭВМ с различными операционными системами — Windows (все ее модификации и разрядности) и LINUX (во всех возможных модификациях, что является актуальным, так данная ОС бесплатная, что делает ее привлекательной для многих промышленных предприятий).

3. Наличие удобного компонента работы с графиками функций *tChart*, позволяющего не только строить графики, но и оперативно их масштабировать с помощью манипулятора "мышь". Он позволяет увеличивать различные области графиков с сопутствующим пересчетом численных значений, отображаемых на осях, что избавляет от проведения дополнительных расчетов.

Достаточно сложным программным компонентом, который был разработан, является модуль, позволяющий вводить функцию вида $f(x)$ с клавиатуры. Этот модуль преобразует текстовую строку, введенную по определенным правилам [33], в математическое выражение. Для этого применяется алгоритм *обратной польской нотации*, второе название которого — алгоритм парсинга строки в функцию. Программный код этого алгоритма был разработан в 1990-х гг., постоянно совершенствуется и в настоящее время находится в свободном доступе [34–36]. Такой программный модуль позволяет преобразовать текстовую строку, введенную по правилам математики, в функцию одной переменной вида $y = f(x)$ и рассчитать ее значения согласно значению произвольно заданного аргумента.

Комплекс расчетных программ и особенности моделирования ударников

Итогом работы стало создание трех расчетных программ, позволяющих моделировать различные ударники и рассчитывать ударные импульсы от бойков как простой, так и сложной формы [37].

Программа I "Ударный импульс 2.0" (Свидетельство о регистрации № 2015662766). Данная программа позволяет создавать модель простого одноступенчатого ударника по следующим исходным данным: масса бойка; функция образующей боковой поверхности, описанная одной кривой вида $y = f(x)$; длина единичной расчетной ступени. Результатом является эскиз формы бойка (рис. 3, а) с расчетом остальных его геометрических характеристик (длина и диаметры ударного и неударного торцов) и генерируемый при продольном ударе расчетным бойком импульс с вычислением его параметров.

Программа II "Удар многоступенчатым бойком" (Свидетельство о регистрации № 2017613900). Данная программа моделирует и визуализирует эскиз ударника, образующая боковой поверхности которого задана несколькими кривыми вида $y = f(x)$ с известными областями определения (рис. 3, б), и рассчитывает генерируемый им ударный импульс.

Программа III "Удар бойком сложной геометрической формы" (Свидетельство о регистрации № 2019619495). Данная программа формирует и ви-

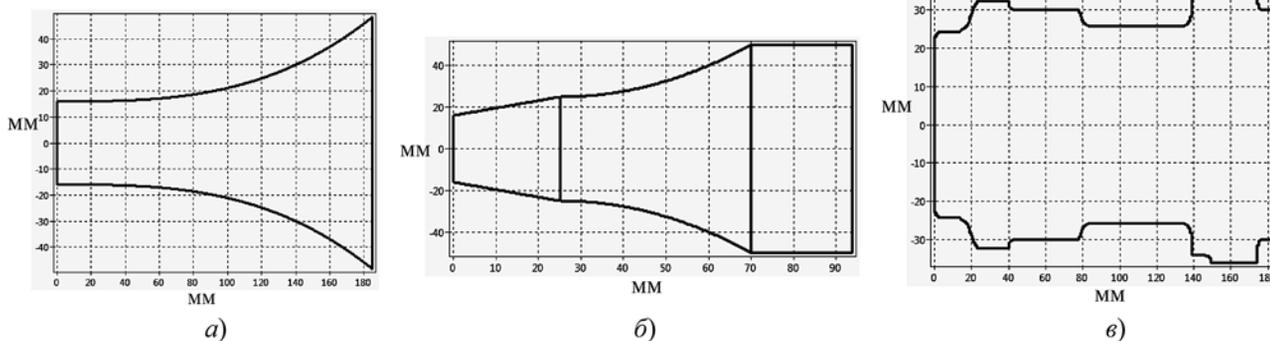


Рис. 3. Эскизы:

a — одноступенчатого простого ударника, выполнен в программе "Ударный импульс 2.0"; *b* — трехступенчатого простого ударника, выполнен в программе "Удар многоступенчатым бойком"; *v* — приведенной формы сложного бойка, представленного на рис. 1, *b*, выполнен в программе "Удар бойком сложной геометрической формы"

зуализирует эскиз приведенной формы бойка, модель которого выполнена в стороннем приложении, по численным значениям площадей сечений S_i , записанных в текстовый файл (рис. 3, *v*), и также выполняет расчет ударного импульса.

Важной особенностью способов моделирования простых ударников, реализованных в программах I и II, является то, что они не идентичны. Они базируются на различных алгоритмах и дополняют друг друга. При этом каждую ступень многоступенчатого бойка, моделируемого в программе II, можно рассчитать в программе I по ее известным параметрам, описанным выше.

Объединяющей частью комплекса программ является то, что алгоритм расчета ударного импульса и способ представления результатов динамической части задачи являются одинаковыми.

Интерфейс пользователя и принцип работы программ комплекса

Все программы комплекса имеют схожую визуальную структуру. Они выполнены из двух вкладок.

Первая вкладка "Проект бойка" позволяет работать с моделью ударника (рис. 4). В ней вводятся параметры, характеризующие исследуемый ударный узел: масса и предударная скорость бойка, плотность и модуль упругости материала бойка и волновода, диаметр волновода. Задаются также геометрические характеристики, необходимые для моделирования бойка (в каждой программе они разные):

- программа I требует ввода функции образующей и длины единичной расчетной ступени;
- программа II требует ввода числа ступеней (количества функций, задающих образующую), функций, задающих их образующие, их длины и числа единичных расчетных ступеней, на которые разбивается боек;
- программа III требует ввода пути к файлу, где хранятся численные значения, задающие модель бойка, и длины единичной расчетной ступени.

Активация расчета модели ударника проводится нажатием интерактивной кнопки "Расчет модели бойка". В результате строится эскиз или так назы-

ваемая приведенная форма бойка и рассчитываются следующие параметры: общая длина бойка, диаметры ударного и неударного торцов, длина единичной цилиндрической ступени (в программе II) или их количество (в программах I и III), погрешность моделирования и скорость звука в материале бойка и волновода.

Во второй вкладке "Расчет ударного импульса" осуществляется решение и визуализация динамической части задачи (рис. 5). Перед активацией расчета ударного импульса необходимо ввести число расчетных шагов k . Это число выбирается произвольно и не должно быть менее $2N$, где N — число единичных расчетных ступеней. Далее необходимо запустить расчет с помощью интерактивной кнопки "Генерация ударного импульса". Число расчетных шагов определяет длительность рассчитываемого ударного импульса, который состоит из нескольких длин волн (анализ динамических характеристик ударных импульсов показывает, что определяющими, несущими более 90 % энергии, являются первые две волны), каждая из которых имеет длительность

$$t_I = 2Nl_1\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

где N — число расчетных единичных ступеней; l_1 — длина единичной расчетной ступени; E и ρ — модуль упругости и плотность материала бойка и волновода соответственно.

Результатом генерации ударного импульса является его график, построенный в системе координат "сила F (кН) — время t (мкс)". По полученному графику рассчитываются параметры ударного импульса: начальное и максимальное значения силы удара, коэффициент усиления импульса, длительность одной волны ударного импульса, импульс силы от удара смоделированным бойком, переносимый первой и совместно первой и второй волнами. Расчет параметров ударного импульса активируется с помощью интерактивной кнопки "Параметры ударного импульса", работа с которой возможна после построения графика импульса.

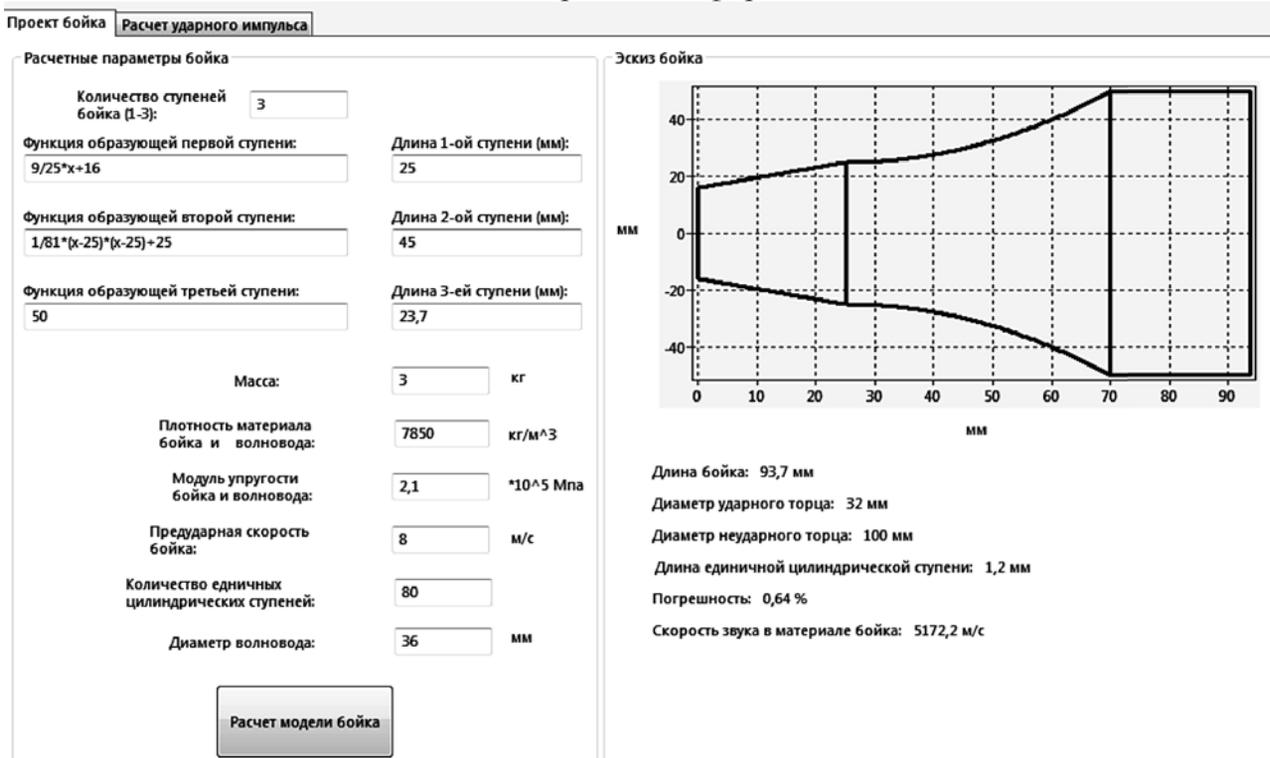


Рис. 4. Интерфейс вкладки "Проект бойка" программы "Удар многоступенчатым бойком"

Тестирование программ комплекса проводилось путем сравнения ударных импульсов, рассчитанных по разработанному алгоритму, в Maple-процедуре и вычисленных в разработанных программах.

Результат показал расхождение в пределах 2 %, которое связано с погрешностью, вызванной разбиением ударяющего тела на цилиндрические ступени.

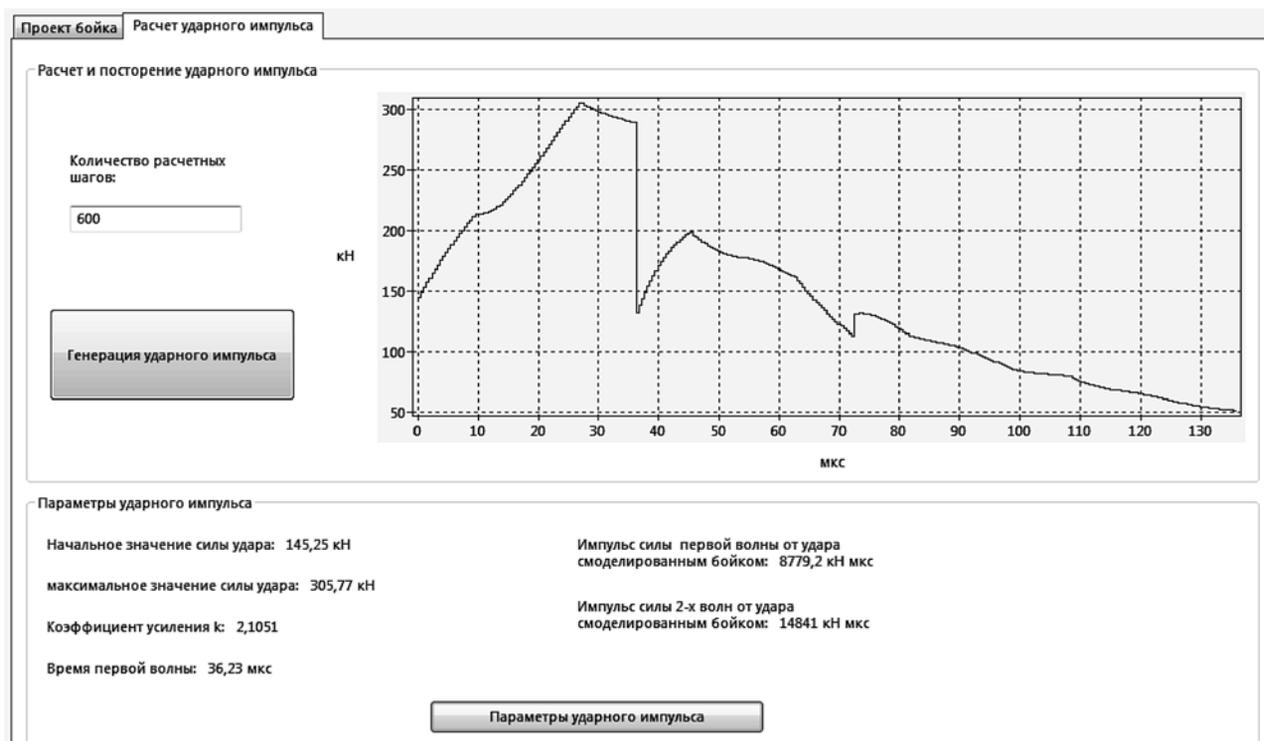
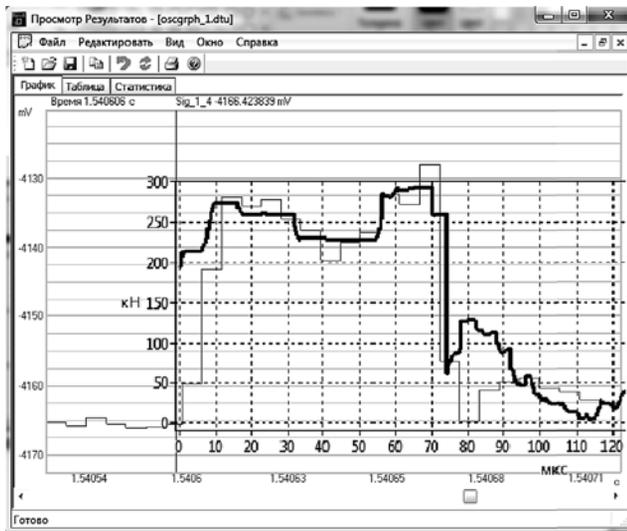


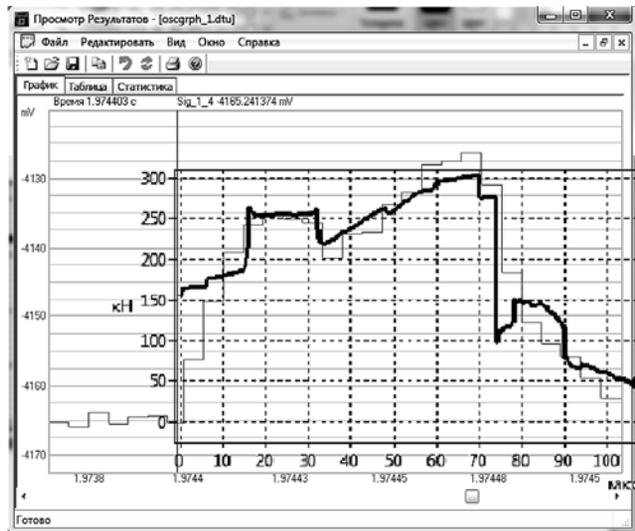
Рис. 5. Программная вкладка "Расчет ударного импульса"



Рис. 6. Опытные образцы бойков ПП 110 ЭН



а)



б)

Рис. 7. Сравнение теоретических и экспериментальных ударных импульсов

Функционирование и поддержка программного комплекса осуществлялись выявлением ошибок, связанных с работой программ, а также с учетом рекомендаций пользователей, тестирующих расчеты. Данный подход позволил оперативно вносить изменения в программный код, дописывать новые модули, которые позволили исключить ошибки, допущенные при разработке.

Программный комплекс функционирует при условии соблюдения следующих требований к ресурсам компьютера: ОС WINDOWS или LINUX, 100 МБ свободного места на жестком диске, 512 МБ оперативной памяти. Все программы комплекса не требуют установки, они выполнены в виде одного файла, который просто вписывается на жесткий диск ЭВМ в любое место по желанию пользователя без каких-либо ограничений.

Оценка погрешностей вычислений и вопросы внедрения комплекса программ

Оценка достоверности и точности разработанного численного метода расчета ударных импульсов в зависимости от геометрических параметров ударной системы проводилась сопоставлением результатов

теоретических вычислений с экспериментальными данными, полученными в процессе исследования динамических процессов в погружной пневмоударной машине.

Конструкции наиболее распространенных в практике пневмоударников разработаны учеными Института горного дела Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск). Одним из перспективных вариантов в настоящее время является модель пневмоударника ПП 110 ЭН [38]. В рамках сотрудничества с Институтом была решена задача совершенствования конструкции ударного узла машины в целях повышения эффективности разрушения горной породы пневмоударником. На рис. 6 приведены традиционно применяемый поршень-боек и модернизированный вариант, в котором образующая свободных боковых поверхностей выполнена с применением цепной линии — катены.

Экспериментальное исследование проводилось на ударном вертикальном копре [39], конструкция которого позволяет проводить бурение практически с любой энергией удара. В качестве измерительного прибора применялся цифро-аналоговый преобразователь ZET 230, осциллограммы ударных импульсов с которого фиксировались специализирован-

ным программным обеспечением ZetLAB. Масштаб получаемых осциллограмм определялся с помощью тарировочного прямоугольного импульса, генерируемого в штанге цилиндрическим бойком равного с ней сечения.

На рис. 7 приведены осциллограммы ударных импульсов от старого (рис. 7, а) и нового (рис. 7, б) бойков с наложенными на них теоретическими решениями, полученными с использованием авторского программного обеспечения, описанного в настоящей статье.

Результаты статистической обработки данных свидетельствуют о том, что теоретические и экспериментальные исследования имеют удовлетворительную сходимость. Погрешность результатов составляет $7,3 \pm 2,1$ %.

Заключение

Наличие ударного импульса и его параметров позволяет оперативно выполнять анализ спроектированной конструкции ударного механизма. Лишь некоторые конкретные сочетания физико-механических свойств разрушаемого объекта в совокупности с формами, размерами, геометрией и материалами соударяющихся деталей могут давать наибольший эффект при ударном воздействии на обрабатываемую среду. На этом основании предлагаемое в настоящей статье программное обеспечение представляется необходимым инструментарием проектирования. Оно позволяет решать задачу повышения эффективности машин ударного действия.

Список литературы

1. Саруев Л. А., Кузнецов И. В., Васенин С. С. Исследование и оценка энергоэффективности современных машин ударного действия // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2013. — № 4 (1). — С. 8—11.
2. Толстунов С. А., Половинко А. В. Определение эффективности применения машин ударного действия при добыче горных пород // Записки Горного института. — 2013. — Т. 205. — С. 36—39.
3. Юнгмейстер Д. А., Крупенский И., Лавренко С. А. Анализ вариантов модернизации станков шарошечного бурения с погружным пневмоударником // Записки Горного института. — 2018. — Т. 231. — С. 321—325. DOI: 10.25515/PMI.2018.3.321.
4. Керимов З. Э. Гидравлические машины ударного действия и их практическое применение // Известия ТулГУ. Технические науки. — 2019. — Вып. 10. — С. 481—489.
5. Манжосов В. К. Продольный удар. — Ульяновск: УлГУ, 2007. — 357 с.
6. Бурак А. Я., Юнгмейстер Д. А., Васильев А. Ю., Судьенков Ю. В. Стендовые исследования ручного перфоратора с ударной системой "поршень—боек" // Записки Горного института. — 2008. — Т. 178. — С. 175—180.
7. Асатур К. Г., Маховиков Б. С., Незаметдинов А. Б. О прочности при продольном ударе // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. — 2010. — № 1. — С. 106—108.
8. Болотов В. И., Баталов А. П., Тхань Бинь Ле, Юсупов Г. А. Закономерности разрушения горной породы единичным ударом // Горное оборудование и электромеханика. — 2017. — № 6 (133). — С. 43—48.
9. Юнгмейстер Д. А., Соколова Г. В., Бурак А. Я., Судьенков Ю. В. Исследование ударных систем на стенде с баллистическим маятником // Горное оборудование и электромеханика. — 2006. — № 7. — С. 39—42.
10. Судьенков Ю. В., Бурак А. Я., Юнгмейстер Д. А., Пивнев В. А. Исследования ударных систем "поршень—боек—инструмент" при разрушении кембрийских глин // Горное оборудование и электромеханика. — 2008. — № 11. — С. 18—21.
11. Дворников Л. Т., Клишин В. И., Никитенко С. М. и др. Энергоемкость процесса разрушения горных пород как основной критерий оценки эффективности конструкций породоразрушающего инструмента // Научные технологии обработки и использования минеральных ресурсов. — 2016. — № 3. — С. 548—551.
12. Лавренко С. А., Чуприн А. В., Дунаев А. А., Ракитин И. В. Обоснование эффективности трехмассовых ударных систем для ударных исполнительных органов при проходке выработок метро Санкт-Петербурга // Высокие технологии и инновации в науке: Сб. избранных статей Международной научной конференции. — СПб.: Изд-во: Частное научно-образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Гуманитарный национальный исследовательский институт "НАЦРАЗВИТИЕ", 2020. — С. 115—120.
13. Иванов К. И., Латышев В. А., Андреев В. Д. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Недра, 1987. — 272 с.
14. Сабитов А. Э., Уразбахтин Р. Ю. Исследование параметров перфораторов-ударников для проходческих комплексов при проведении специальных выработок // Инновации в транспорте и в машиностроении: сборник трудов IV Международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 28—29 апреля 2016 года. — СПб.: Национальный минерально-сырьевой университет "Горный", 2016. — С. 48—51.
15. Жуков И. А. В доказательство практической целесообразности идеи использования эффекта влияния геометрических параметров соударяющихся деталей для повышения производительности горных машин ударного действия // Journal of Advanced Research in Technical Science. — 2017. — № 7-1. — С. 80—84.
16. Айзенберг-Степаненко М. В., Ошарович Г. Г., Шер Е. Н., Яновицкая З. Ш. Численное моделирование ударно-волновых процессов в упругих средах и конструкциях. I. Метод решения и расчетные алгоритмы // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2012. — № 1. — С. 89—109.
17. Zhukov I. A., Repin A. A., Timofeev E. G. Automated calculation and analysis of impacts generated in mining machine by anvil blocks of complex geometry // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. — 2018. — Vol. 134. — Article 012071. DOI: 10.1088/1755-1315/134/1/012071.
18. Ямпольский Д. З. Численное моделирование продольного удара. Сравнение с экспериментом // Вестник научно-технического развития. — 2019. — № 9 (145). — С. 30—51.
19. Слепухин В. В. Моделирование движения и восстановления скорости ступенчатого стержня при ударе о жесткую преграду // Информационные системы и технологии. — 2009. — № 5 (55). — С. 48—55.
20. Битюрин А. А. Математическое моделирование потери устойчивости ступенчатого физически однородного стержня при ударе о жесткую преграду методом Тимошенко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 3. — С. 45—49.
21. Музаев И. Д. Математическое моделирование упругих колебательных процессов в ударном инструменте // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Сб. науч. тр. Международной научно-практической конференции, Москва, 20 октября 2017 года. — М.: Научно-издательский центр ИНФРА-М, 2018. — С. 6—10.
22. Xu T. L. Study of main technical parameters affecting performance for hydraulic breaking hammer // Construction Machinery. — 2005. — No. 6. — P. 67—68.
23. Axinti G. Dynamic aspects of percussion equipments // The Annals of "Dunarea De Jos" University of Galati Fascicle XIV Mechanical Engineering. — 2009. — P. 39—43.
24. Wang L., Yang G.-P., Liang C.-P., Ding C.-C. Test Method of Impact Property for Hydraulic Breaking Hammer // Construction Machinery. — 2009. — No. 6. — P. 98—100.
25. Ding W.-S., Tian L., Liu K. Analysis of dynamic characteristic of transient impact from hydraulic hammer //

Huanan Ligong Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban). 2016. — Vol. 44, No. 11. — P. 63–70. DOI: 10.3969/j.issn.1000-565X.2016.11.010.

26. **Ефремов Ю. С., Петропавловский М. Д.** Методы математической физики в пакете символьной математики Maple: учебное пособие. — Изд. 2-е, испр. и доп. — Барнаул: Алтайская государственная педагогическая академия, 2005. — 300 с.

27. **Иванов Д. Н., Литвинок Н. Ю., Гадлгареева Р. Р.** Компьютерное моделирование с применением математического пакета MAPLE // Научный потенциал — аграрному производству: Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 450-летию вхождения Удмуртии в состав России, Ижевск, 26–29 февраля 2008 г. — Ижевск: Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, 2008. — С. 121–126.

28. **Шимукович П. Н.** Оптимизация работы составного бойка ударного механизма // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 1999. — № 7. — С. 167–169.

29. **Бутакова М. А., Нечитайло Н. М., Ильичева В. В.** Программирование в среде Lazarus: учебное пособие. — Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2016. — 231 с.

30. **Ляш О. И.** Возможность использования бесплатной среды разработки приложений Lazarus // Сб. науч. тр. по материалам Международной научно-практической конференции. — 2009. — Т. 3, № 1. — С. 16–18.

31. **Остапенко А. Г., Кашенко Г. А., Морев Д. Е., Давыдов И. В.** Средства объектно-ориентированного программирования в языках Pascal, Object Pascal и C++: Учеб. пособие. — Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2003. — 153 с.

32. **Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Кучер Т. В.** Free Pascal и Lazarus: Учебное пособие по программированию. — Саратов: Профобразование, 2017. — 438 с.

33. **Трубников С. В.** Компьютерное моделирование: Учеб. пособие для студентов вузов. — Брянск: Брянский государственный университет, 2004. — 336 с.

34. **Алгоритм парсинга арифметических выражений.** URL: <https://habr.com/ru/post/263775/>

35. **Акимов П. М., Губанкова Е. В., Гузеев А. В., Сосновиков Г. К.** Исследование практического использования методов парсинга данных для разработки веб-служб на примере парсинга математических выражений // Телекоммуникации и информационные технологии. — 2016. — Т. 3, № 1. — С. 111–114.

36. **Ашихмин А., Клепов Д.** Метод решения "обратная польская нотация" // Настоящее и будущее физико-математического образования: Материалы докладов V Всероссийской научно-практической конференции, Киров, 26–27 октября 2018 г. — Киров: Радуга-ПРЕСС, 2018. — С. 189–191.

37. **Жуков И. А., Тимофеев Е. Г.** Математическое и компьютерное моделирование ударных процессов в стержневой системе машин ударного действия // Современные наукоемкие технологии. — 2020. — № 12-1. — С. 43–49. DOI: 10.17513/snt.38409.

38. **Смоляницкий Б. Н., Репин А. А., Данилов Б. Б.** и др. Повышение эффективности и долговечности импульсных машин для сооружения протяженных скважин в породных массивах / отв. ред. Б. Ф. Симонов. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. — 204 с.

39. **Zhukov I. A., Smolyanitsky V. N., Timonin V. V.** Improvement of down-the-hole air hammer efficiency by optimizing shapes of colliding parts // Journal of Mining Science. — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 212–217. DOI: 10.1134/S1062739118023569.

Program Complex for Automated Calculation of the Geometry of Impact Units of Machines

E. G. Timofeev, veefomit77777@yandex.ru, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, 654007, Russian Federation,

I. A. Zhukov, tmmiok@yandex.ru, **A. V. Teplyakova**, teplyakovanu@mail.ru, Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg, 199106, Russian Federation

Corresponding author:

Zhukov Ivan A., Professor, Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg, 199106, Russian Federation
E-mail: tmmiok@yandex.ru

*Received on July 01, 2021
Accepted on September 01, 2021*

Improving the designs of impact mining machines in order to increase the productivity of drilling operations requires calculations of the geometric parameters of impact units. The greatest effect when the impact is applied to the rock is given by an impact pulse corresponding to the resistance forces of the object being destroyed. In turn, the shape and parameters of the impact pulse are determined by the geometry of the colliding bodies. Analytical methods for analyzing dynamic processes in impact systems involve the use of a very complex mathematical apparatus, which does not allow us to quickly solve the problems of engineering design of machines and mechanisms. The authors of this article have developed a numerical method for calculating and analyzing impact pulses generated in the machine system by bodies of any geometric complexity. The reliability of the theoretical approaches is confirmed by the results of a physical experiment. The developed software allows you to quickly and accurately solve the problem of finding and justifying rational geometric parameters of impact nodes of machines.

Keywords: *impact machine, impact, pulse, striker shape, analysis of the geometry of the impact node, automation of the calculation of the shock pulse*

For citation:

Timofeev E. G., Zhukov I. A., Teplyakova A. V. Program Complex for Automated Calculation of the Geometry of Impact Units of Machines, *Programmnyaya Ingeneria*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 404–412.

DOI: 10.17587/prin.12.404-412

References

1. Saruev L. A., Kuznetsov I. V., Vasenin S. S. Research and evaluation of energy efficiency of modern impact machines, *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten*, 2013, no. 4 (1), pp. 8–11 (in Russian).
2. Tolstunov S. A., Polovinko A. V. Determination of the effectiveness of the use of impact machines in the extraction of rocks, *Zapiski Gornogo instituta*, 2013, vol. 205, pp. 36–39 (in Russian).
3. Yungmeister D. A., Krupensky I., Lavrenko S. A. Analysis of modernization options for roller drilling machines with a submerged pneumatic hammer, *Zapiski Gornogo instituta*, 2018, vol. 231, pp. 321–325 (in Russian). DOI: 10.25515/PMI.2018.3.321.
4. Kerimov Z. E. Hydraulic impact machines and their practical application *Izvestiya TulGU, Tekhnicheskie nauki*, 2019, no. 10, pp. 481–489 (in Russian).
5. Manzhosov V. K. *Longitudinal impact*, Ulyanovsk, UIGTU, 2007, 357 p. (in Russian).
6. Burak A. Ya., Yungmeister D. A., Vasiliev A. Yu., Sudienkov Yu. V. Bench studies of a manual perforator with a piston–striker shock system, *Zapiski Gornogo instituta*, 2008, vol. 178, pp. 175–180 (in Russian).
7. Asatur K. G., Makhovikov B. S., Yudinov A. B. On strength at longitudinal impact, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy Zhurnal*, 2010, no. 1, pp. 106–108 (in Russian).
8. Bolobov V. I., Batalov A. P., Le Thanh Binh, Yusupov G. A. Patterns of rock destruction by a single impact, *Gornoe oborudovanie i elektromekhanika*, 2017, no. 6, pp. 43–48 (in Russian).
9. Yungmeister D. A., Sokolova G. V., Burak A. Ya., Sudienkov Yu. V. Research of impact systems on a stand with a ballistic pendulum, *Gornoe oborudovanie i elektromekhanika*, 2006, no. 7, pp. 39–42 (in Russian).
10. Sudienkov Yu. V., Burak A. Ya., Jungmeister D. A., Pivnev V. A. Studies of impact systems "piston–striker–tool" during the destruction of Cambrian clays, *Gornoe oborudovanie i elektromekhanika*, 2008, no. 11, pp. 18–21 (in Russian).
11. Dvornikov L. T., Klislin V. I., Nikitenko S. M. et al. Energy intensity of the process of rock destruction as the main criterion for evaluating the effectiveness of rock-destroying tool structures, *Naukoemkie tekhnologii obrabotki i ispolzovaniya mineralnykh resursov*, 2016, no. 3, pp. 548–551 (in Russian).
12. Lavrenko S. A., Chuprin A. V., Dunaev A. A., Rakitin I. V. Substantiation of the effectiveness of three-mass impact systems for shock executive bodies when sinking workings of the St. Petersburg metro, *Vysokie tekhnologii i innovatsii v nauke: Sbornik izbrannykh statej Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*, St. Petersburg, Publishing house Private Scientific and educational institution of additional professional education Humanitarian National Research Institute "National Development", 2020, pp. 115–120 (in Russian).
13. Ivanov K. I., Latyshev V. A., Andreev V. D. *Drilling technique in the development of mineral deposits*, Moscow, Nedra, 1987, 272 p. (in Russian).
14. Sabitov A. E., Urazbakhitin R. Yu. Investigation of the parameters of hammer drills for tunneling complexes during special workings, *Innovatsii na transporte i v mashinostroenii: sbornik trudov IV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, St. Petersburg, National Mineral Resource University "Gorny", 2016, pp. 48–51 (in Russian).
15. Zhukov I. A. Proof of the practical usefulness of the idea of using the effect of geometrical parameters of colliding parts to improve the performance of impact mining machines, *Journal of Advanced Research in Technical Science*, 2017, no. 7-1, pp. 80–84 (in Russian).
16. Ayzenberg-Stepanenko M. V., Sher E. N., Yanovitskaya Z. Sh. Numerical simulation of shock-wave processes in elastic solids and structures. I. Method of solution and computational algorithms, *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2012, no. 1, pp. 89–109 (in Russian).
17. Zhukov I. A., Repin A. A., Timofeev E. G. Automated calculation and analysis of impacts generated in mining machine by anvil blocks of complex geometry, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2018, vol. 134, article 012071. DOI: 10.1088/1755-1315/134/1/012071.
18. Yampolsky D. Z. Numerical simulation of a longitudinal impact. Comparison with the experiment, *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya*, 2019, no. 9 (145), pp. 30–51 (in Russian).
19. Stepukhin V. V. Modeling of the movement and restoration of the speed of a stepped rod when hitting a rigid barrier, *Informatsionnye sistemy i tekhnologii*, 2009, no. 5 (55), pp. 48–55 (in Russian).
20. Bituyurin A. A. Mathematical modeling of stability loss of a stepped physically homogeneous rod when hitting a rigid barrier by the Timoshenko method, *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 45–49 (in Russian).
21. Muzaev I. D. Mathematical modeling of elastic oscillation percussion instrument, *Matematicheskoe modelirovanie, chislennyye metody i kompleksoy programm: Sbornik nauchnykh trudov Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, Moscow, Nauchno-izdatelskiy tsentr INFRA-M, 2018, pp. 6–10 (in Russian).
22. Xu T. L. Study of main technical parameters affecting performance for hydraulic breaking hammer, *Construction Machinery*, 2005, no. 6, p. 67–68.
23. Gavril Axinti. Dynamic aspects of percussion equipments, *The Annals of "Dunarea De Jos" University of Galati Fascicle XIV Mechanical Engineering*, 2009, pp. 39–43.
24. Wang L., Yang G.-P., Liang C.-P., Ding C.-C. Test Method of Impact Property for Hydraulic Breaking Hammer, *Construction Machinery*, 2009, no. 6, pp. 98–100.
25. Ding W.-S., Tian L., Liu K. Analysis of dynamic characteristic of transient impact from hydraulic hammer, *Huanan Ligong Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban)*, 2016, vol. 44, no. 11, pp. 63–70. DOI: 10.3969/j.issn.1000-565X.2016.11.010.
26. Efremov Yu. S., Petropavlovskiy M. D. *Methods of mathematical physics package in Maple symbolic mathematics: textbook*, Barnaul, Altai State Pedagogical Academy, 2005, 300 p. (in Russian).
27. Ivanov D. N., Litvinyuk N. Yu., Gadlgareeva R. R. Computer modeling with the use of mathematical software package MAPLE, *Nauchnyy potentsial – agrarnomu proizvodstvu: Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyaschennoy 450-letiyu vhozhdeniya Udmurtii v sostav Rossii*, Izhevsk, Izhevsk state agricultural academy, 2008, P. 121–126 (in Russian).
28. Simonovic P. N. Optimization of composite hammer impact mechanism, *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten*, 1999, no. 7, pp. 167–169 (in Russian).
29. Butakova M. A., Nechitailo N. M., Ilyicheva V. V. *Programming in the Lazarus environment: a textbook*, Rostov-on-Don: Rostov State University of Railway Transport, 2016, 231 p. (in Russian).
30. Lyash O. I. The possibility of using the free application development environment Lazarus, *Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, 2009, vol. 3, no. 1, pp. 16–18 (in Russian).
31. Ostapenko A. G., Kashchenko G. A., Morev D. E., Davydov I. V. *Means of object-oriented programming in the languages Pascal, Object Pascal and C++: Textbook*, Voronezh, Voronezh State Technical University, 2003, 153 p. (in Russian).
32. Alekseev E. R., Chesnokova O. V., Kucher T. V. *Free Pascal and Lazarus: Textbook on programming*, Saratov, Vocational Education, 2017, 438 p. (in Russian).
33. Trubnikov S. V. *Computer modeling: Textbook for university students*, Bryansk, Bryansk State University, 2004, 336 p. (in Russian).
34. Algorithm of parsing arithmetic expressions, available at: <https://habr.com/ru/post/263775/>
35. Akimov P. M., Gubankova E. V., Guzeev A. V., Sosnovikov G. K. Research of practical use of data parsing methods for the development of web services on the example of parsing mathematical expressions, *Telekommunikatsii i informatsionnye tekhnologii*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 111–114 (in Russian).
36. Ashikhmin A., Klepov D. Method for the solution of "reverse Polish notation", *Nastoyaschey i budushey fiziko-matematicheskoy obrazovaniya: Materialy dokladov V serossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, Kirov, Raduga PRESS, 2018, pp. 189–191 (in Russian).
37. Zhukov I. A., Timofeev E. G. Mathematical and computer modeling of impact processes in the core system of impact machines, *Sovremennyye naukoemkie tekhnologii*, 2020, no. 12-1, pp. 43–49. DOI: 10.17513/snt.38409 (in Russian).
38. Smolyanitsky B. N., Repin A. A., Danilov B. B. et al. *Improving the efficiency and durability of pulse machines for the construction of extended wells in rock massifs*, Novosibirsk, Publishing house of SB RAS, 2013, 204 p. (in Russian).
39. Zhukov I. A., Smolyanitsky B. N., Timonin V. V. Improvement of down-the-hole air hammer efficiency by optimizing shapes of colliding parts, *Journal of Mining Science*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 212–217. DOI: 10.1134/S1062739118023569.

А. П. Прокопьев, канд. техн. наук, доц., prok1@yandex.ru,
Ж. И. Набижанов, аспирант, jasur150691@yandex.ru,
В. И. Иванчура, д-р техн., проф., ivan43ura@yandex.ru,
Р. Т. Емельянов, д-р техн., проф., ert-44@yandex.ru,
Сибирский федеральный университет, Красноярск

К вопросу создания системы непрерывного контроля уплотнения дорожных материалов для асфальтоукладчиков

Рассматриваются результаты исследования по созданию системы автоматического контроля уплотнения (САКУ) для асфальтоукладчиков в реальном времени. В основу исследования положены методы искусственных нейронных сетей (ИНС). Проведена настройка модели ИНС с прямой связью, с помощью которой можно определять коэффициент уплотнения асфальтобетонной смеси. Входные переменные САКУ — скорость движения асфальтоукладчика, частота ударов трамбуемого бруса, усилие в толкателе трамбуемого бруса, тип смеси, толщина слоя. Представлены результаты вычислительного эксперимента по расчету коэффициента уплотнения в режиме реального времени. Предложенная модель ИНС с прямой связью способна объяснить более 98 % измеренных данных.

Ключевые слова: система автоматического контроля, искусственные нейронные сети, неразрушающие технологии, контроль уплотнения, дорожные материалы

Введение

Одним из перспективных научных направлений в области дорожного строительства является совершенствование этапа укладки и уплотнения асфальтобетонной смеси (АБС) при строительстве дорожных покрытий автомобильных дорог. Этот этап строительства выполняют комплекты машин, состоящие из асфальтоукладчика (АСФУ) и дорожных катков (легкого, среднего и тяжелого типов). Асфальтоукладчики уплотняют АБС рабочими органами с трамбуемым брусом и вибрационной плитой непрерывно со скоростью движения 1...5 м/мин. Дорожные катки уплотняют АБС повторяющимися проходами по одной полосе длиной 30...50 м со статическим или вибрационным воздействием на слой покрытия. За счет эффективного уплотнения АБС асфальтоукладчиками и дорожными катками можно устранить до 50 % недостатков дорожных покрытий и увеличить срок их службы [1].

Для повышения производительности машин и улучшения качества дорожных покрытий необходимо внедрение на объектах строительства автомобильных дорог систем непрерывного контроля качества уплотнения путем использования дорожно-строительных систем с элементами интеллектуального управления [2, 3]. В процессе дорожного строительства выполняется точечный, выборочный неразрушающий контроль качества уплотнения

с применением переносных приборов (экспресс-метод). Недостатком этого метода является отсутствие возможности осуществлять непрерывный контроль уплотнения по всей площади дорожного покрытия. Известны методы и средства непрерывного неразрушающего контроля для вибрационных катков, основанные на спектральном анализе сигналов акселерометров, установленных на вибрационном вальце катка, например [4–12].

Экспериментальные исследования, посвященные проверке эффективности применения систем непрерывного контроля на вибрационных катках, показали, что существующие показатели качества уплотнения (CCV, CMV, RMV и ряд других) имеют значительную погрешность [1, 11, 12]. Это обстоятельство обусловлено тем, что существующие показатели уплотнения не учитывают переменные, оказывающие значительное влияние на качество уплотнения. Совершенствование и разработка методов непрерывного неразрушающего контроля уплотнения дорожных материалов в реальном времени являются важной задачей, требующей своего решения [1].

Значительным резервом повышения эффективности дорожного строительства является увеличение коэффициента уплотнения K_u , обеспечиваемого рабочими органами асфальтоукладчика. Известны результаты испытаний АСФУ [13] с высокоэффективным рабочим органом (трамбуемый брус, вибра-

ционная плита, две прессующие планки), который обеспечивает получение стандартной плотности АБС типа А (ГОСТ 9128—2013 "Смеси асфальтобетонные, полимерасфальтобетонные, асфальтобетон, полимерасфальтобетон для автомобильных дорог и аэродромов") при скорости 3 м/мин, экономию трудовых и энергетических ресурсов за счет исключения из технологической цепи дорожных катков легкого и среднего типа.

Результаты экспериментальных исследований укладчика с эффективным рабочим органом (два трамбуемых бруса, выглаживающая плита) в реальных условиях дорожного строительства [14] позволяют сделать вывод о наличии зависимости коэффициента уплотнения K_u АБС типа Б от максимального усилия F в толкателях трамбуемого бруса (рис. 1).

Исследования [14] проводили при скоростях укладчика 1,6...4,8 м/мин и частотах вращения эксцентрикового вала 1100...1700 мин⁻¹. Возрастание сопротивления смеси уплотнению происходит постепенно и достигает максимальных значений после 4—5 воздействий на смесь трамбуемым брусом [15, 16].

На основании исследований в рассматриваемой области для повышения эффективности дорожно-строительных процессов, внедрения цифровизации в технологии строительства транспортной инфраструктуры, применения средств автоматизации процессов управления дорожно-строительными системами, авторами предложена идея разработки новых методов неразрушающих технологий непрерывного контроля уплотнения для АСФУ с использованием методов искусственного интеллекта.

Целью работы, результаты которой представлены в настоящей статье, является решение важной научно-технической задачи, заключающейся в разработке методов непрерывного неразрушающего контроля уплотнения дорожных материалов АСФУ на базе методов искусственного интеллекта и математической статистики. Объектом исследования является система непрерывного неразрушающего контроля уплотнения дорожных материалов. Предметом исследования являются зависимости процесса уплотнения дорожных материалов и методы искусственного интеллекта применительно к рассматриваемой проблемной области.

Методика исследования метода непрерывного контроля уплотнения

Специалистам известны результаты проведения полевых экспериментов в реальных условиях эксплуатации дорожно-строительной техники, особенно при строительстве асфальтобетонных дорожных покрытий. Для достижения поставленной цели участниками исследования из материалов научных публикаций получены экспериментальные данные исследований АСФУ с различными рабочими органами, которые проводились на опытных полигонах научно-исследовательских институтов ВНИИ-Стройдормаш, СоюзДорНИИ, МАДИ и в реальных условиях строительства автомобильных дорог с нежесткими асфальтобетонными покрытиями [13—17]. В результате анализа и обработки этих данных получена выборка информативных признаков, влияющих на коэффициент уплотнения, фрагмент которой приведен в табл. 1.

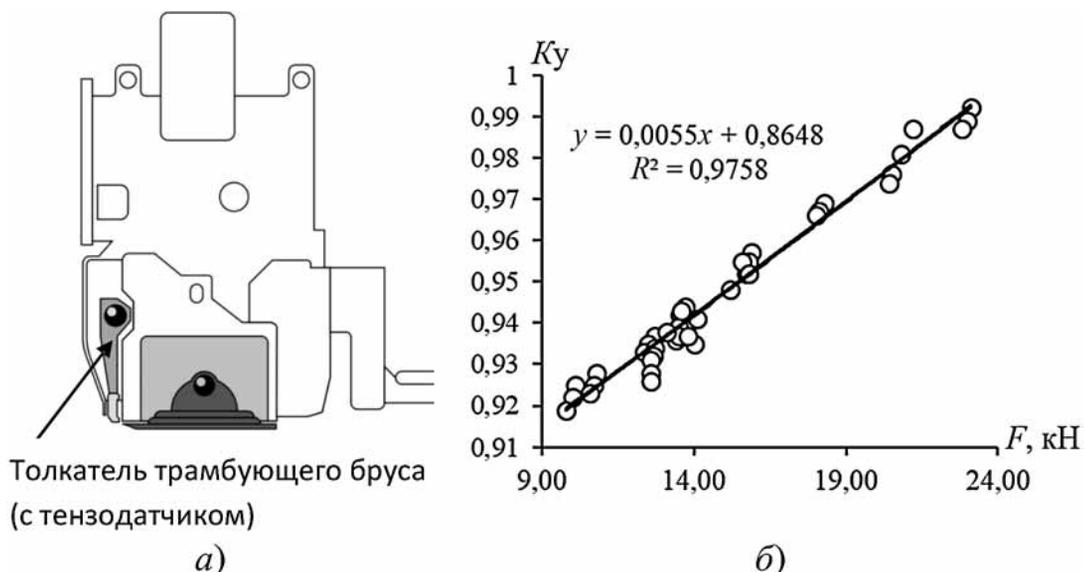


Рис. 1. Схема рабочего органа укладчика* (а) и зависимость коэффициента уплотнения K_u от максимального усилия F (б):

x — усилие в толкателе; y — коэффициент уплотнения K_u ; R^2 — коэффициент детерминации

* Брошюра VÖGELE. URL: https://www.wirtgen-group.com/binary/full/o5694v89_SUPER_1600_RU_2706704_mPW_1118.pdf.

Таблица 1

Выборка информативных признаков

Тип смеси (А-1, Б-2, В-3, Г-4)	Скорость асфальтоукладчика, м/мин	Частота трамбуемого бруса, 1/мин	Максимальное усилие в толкателе, кН	Коэффициент уплотнения
1	1	180	10,1	0,93
2	1	360	7,5	0,85
3	1	720	7,6	0,87
4	1	1440	7,6	0,84
1	2	180	9,4	0,9
...
1	5	180	10,6	0,93

Толщина слоя покрытия в данном исследовании принята постоянной в диапазоне 0,04...0,08 м, для которого действительны экспериментальные данные, полученные участниками исследований, опубликованные в работах [13–17].

Анализ современной научной и технической информации, проведенный участниками исследования, показал отсутствие предложений приборов для АСФУ, определяющих коэффициент уплотнения АБС. Авторами предложен вариант функциональной схемы системы автоматического контроля уплотнения для АСФУ, реализующей новый метод на основе переменных параметров рабочего процесса (рис. 2).

На рис. 2: u — регулирующий параметр объекта, изменение которого осуществляет оператор в зависимости от полученного значения коэффициента уплотнения; f — внешние возмущения, приложенные к входу объекта управления; $u' = u + f$; ОУ — объект управления; y — коэффициент уплотнения смеси после АСФУ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — переменные на входе САКУ: показатель типа смеси, скорость АСФУ, усилие в толкателе трамбуемого бруса, частота трамбуемого бруса, толщина слоя покрытия соответственно. Объект управления — процесс взаимодействия рабочего органа АСФУ (трамбуемый брус, вибрационная плита) и АБС.

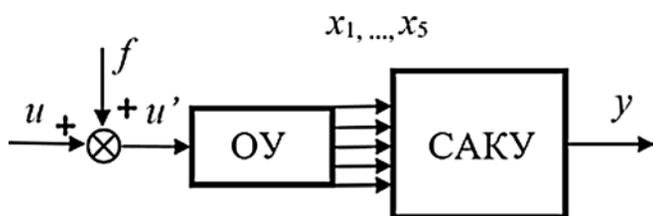


Рис. 2. Функциональная схема системы контроля уплотнения

Функциональная зависимость проектируемой САКУ:

$$K_u = \theta(\text{Type}, v, F, f_t, h),$$

где K_u — коэффициент уплотнения АБС; Type — показатель типа АБС; v — скорость движения АСФУ, м/мин; F — усилие в толкателе трамбуемого бруса, Н; f_t — частота колебаний трамбуемого бруса, Гц; h — толщина покрытия, м.

Предложен следующий алгоритм решения исследовательской задачи.

Шаг 1. Выполнить анализ экспериментальных данных, полученных участниками исследования из научных работ [13–17]. Получить образцы данных для вектора входных данных ИНС.

Шаг 2. Определить структуру модели ИНС и методику проектирования.

Шаг 3. Выполнить обучение модели ИНС для создания САКУ.

Шаг 4. Провести численный эксперимент с моделью, обученной ИНС в программе MATLAB/Simulink, определить достоверность прогнозирования коэффициента уплотнения в режиме реального времени.

Результаты исследования. Анализ исходных данных для построения ИНС

По материалам работ [13–17] авторами настоящей статьи получена выборка (2000 образцов) информативных эмпирических данных, фрагмент которых представлен в табл. 1. Объем образцов соответствует требованиям большой выборки. Переменные (факторы) — тип смеси, скорость движения АСФУ, частота трамбуемого бруса и усилие в толкателе трамбуемого бруса имеют статистически значимое влияние на K_u АБС. Выполнена статистическая проверка факторов функциональной зависимости K_u на мультиколлинеарность, результаты расчетов статистических показателей представлены в табл. 2.

Результаты проверки переменных на мультиколлинеарность показали, что зависимости между ними незначительные и их можно использовать в качестве образцов данных входного слоя модели ИНС при обучении для прогнозирования K_u в режиме реального времени.

Нормализация (масштабирование) данных входного вектора для приведения их значений к интервалу $[-1, 1]$ выполнена по следующей формуле:

$$x_n = \frac{(x - x_{\min})(b - a)}{x_{\max} - x_{\min}} + a,$$

где x_{\max} , x_{\min} — минимальное и максимальное значения выборки входных данных соответственно; b , a — значения заданного интервала.

Результаты проверки переменных на мультиколлинеарность

Фактор	Статистический показатель	Фактор			
		Тип АБС	Скорость АСФУ	Частота трамбуемого бруса	Усилие в толкателе трамбуемого бруса
Тип АБС	Корреляция Пирсона	1	-0,091	-0,124	-0,451
	Значимость (двухсторонняя)	—	0,359	0,210	0
Скорость АСФУ	Корреляция Пирсона	-0,091	1	0,127	-0,118
	Значимость (двухсторонняя)	0,359	—	0,198	0,231
Частота трамбуемого бруса	Корреляция Пирсона	-0,124	0,127	1	0,552
	Значимость (двухсторонняя)	0,210	0,198	—	0
Усилие в толкателе трамбуемого бруса	Корреляция Пирсона	-0,451	-0,118	0,552	1
	Значимость (двухсторонняя)	0	0,231	0	—

Настройка модели искусственной нейронной сети

Для построения модели ИНС отобраны 2000 образцов экспериментальных данных (см. табл. 1). Для обучения сети обучающая выборка разделена слу-

чайным образом на три части — обучающую, проверочную и тестовую, в соотношении 70, 15 и 15 % соответственно [18].

Для исследования принята модель ИНС с прямой связью, состоящая из трех слоев, для прогнозирования K_u в режиме реального времени АСФУ (рис. 3).

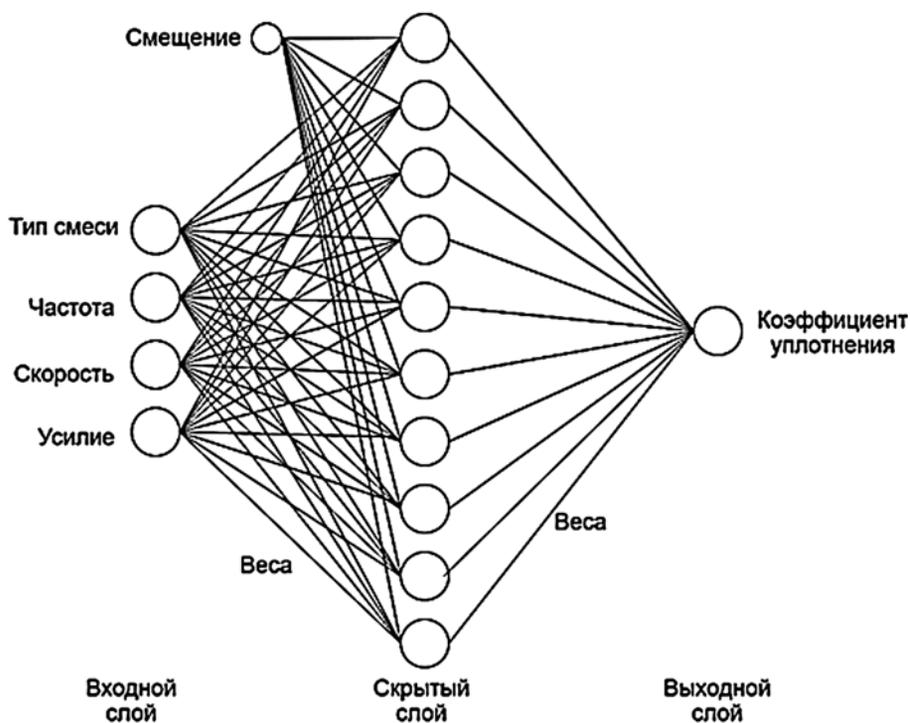


Рис. 3. Архитектура модели искусственной нейронной сети

Входной слой модели включает в себя четыре нейрона, соответствующие четырем параметрам: тип АБС, скорость движения АСФУ, частота трамбующего бруса и усилие в толкателе трамбующего бруса; скрытый слой состоит из десяти нейронов, которые находятся между входными и выходными слоями; выходной слой определяет значение коэффициента уплотнения АБС.

В качестве функции активации на выходе скрытого слоя использован гиперболический тангенс. Выходной слой определяет коэффициент уплотнения смеси. Функция активации выходного слоя — линейная функция. Смещение представляет собой вес соединения с постоянным ненулевым значением, добавленным к сумме входных данных и соответствующих весов. Входной сигнал проходит последовательно через все слои, выполняя вычислительные операции, и преобразуется в выходной слой.

Выход каждого нейрона предыдущего слоя нейронной сети соединен синаптическими связями со всеми входами нейронов следующего слоя. Таким образом, топология многослойной нейронной сети является однородной и регулярной [19]. На каждой эпохе на вход нейронной сети поочередно подаются все обучающие выборки, выходные значения сети сравниваются с желаемыми значениями и вычисляется значение погрешности, которое используется для коррекции весов, и действия повторяются. Процесс обучения прекращается в том случае, если пройдено определенное число эпох или значение погрешности достигло определенного наперед заданного уровня.

На основании анализа существующих методов нейросетевой идентификации в настоящей статье представлены результаты использования метода обучения ИНС, основанного на алгоритме Левенберга—Марквардта (Levenberg—Marquardt Algorithm, LMA). Такой подход реализует нелинейный метод наименьших квадратов, в качестве показателя оптимизации которого используется средняя квадратичная ошибка (*mean squared error*, MSE) [18, 20, 21].

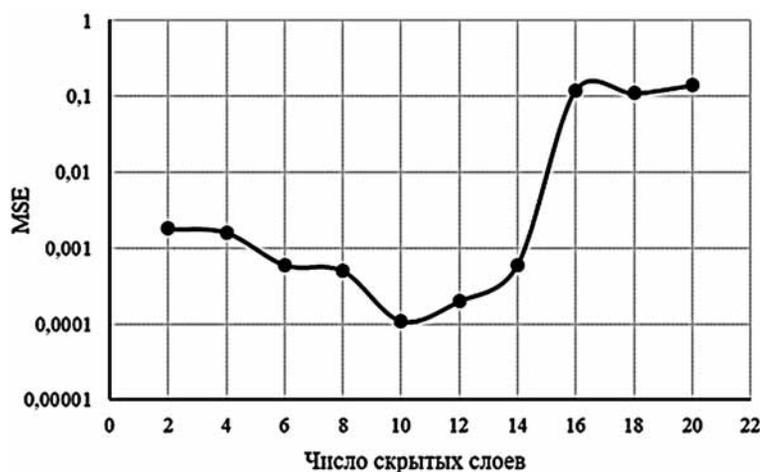


Рис. 4. График производительности искусственной нейронной сети

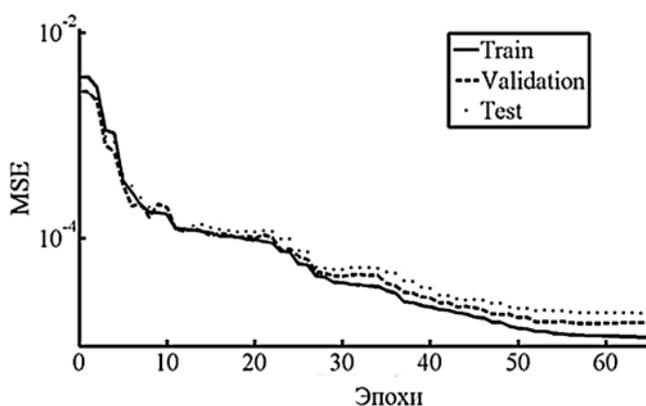


Рис. 5. График обучения искусственной нейронной сети

Чтобы определить число нейронов в скрытом слое, опробованы различные структуры ИНС с точки зрения итераций и числа скрытых слоев. Наименьшее значение MSE получено с десятью нейронами (рис. 4). Таким образом, ИНС с десятью нейронами в скрытом слое оказалась наиболее подходящей топологией для модели ИНС.

Проведен анализ достоверности прогнозирования коэффициента уплотнения с помощью модели ИНС. Наилучшая эффективность проверки получена на эпохе 58 и равна 0,000115. При исследовании влияния параметра скорости обучения методом LMA, для значений 0,0001, 0,001, 0,01 и 0,1 наибольшая точность ИНС была достигнута для значения 0,01. Чтобы оценить влияние числа тренировочных эпох (итераций) на точность ИНС, обучение проводилось в диапазоне 10...150 эпох.

Графики изменения MSE во время процесса обучения (Train), проверки (Validation) и тестирования (Test) ИНС показаны на рис. 5. Процесс обучения ИНС прекращается, когда ошибка валидации перестает уменьшаться. Уменьшение ошибки в данных тестирования показывает, как нейронная сеть будет обобщена для новых данных. Сеть достигла наилучшего значения MSE после 58 итераций. Этот факт означает, что модель ИНС с прямой связью может прогнозировать коэффициент уплотнения смеси с высокой степенью точности и обеспечить единообразное представление данных.

В результате моделирования рабочего процесса САКУ получены расчетные значения коэффициента уплотнения, которые отличаются от фактических не более чем на 2 %. Наименьшая погрешность предсказания коэффициента уплотнения наблюдается у сетей с десятью нейронами в скрытом слое. Коэффициенты достоверности аппроксимации при обучении, проверке и тестировании сети для всего набора данных составляют 0,989, 0,974 и 0,952 соответственно. Полученные результаты указывают на то, что разработанная модель ИНС с прямой связью способна объяснить более 95 % измеренных данных и использоваться для прогнозирования коэффициента уплотнения АБС.

Заключение

Статья посвящена актуальным аспектам задачи разработки методов контроля коэффициента уплотнения АБС в режиме реального времени с использованием элементов искусственного интеллекта. Проведен анализ предпосылок построения нейросетевой САКУ для асфальтоукладчиков. Обоснована выборка образцов экспериментальных данных для обучения ИНС. Предложена модель трехслойной ИНС с прямой связью, отвечающая реальным потребностям проблемной области. Входной слой данных ИНС включает следующие переменные: тип смеси; скорость движения асфальтоукладчика; частота трамбуемого бруса; усилие в толкателе трамбуемого бруса. Рассмотрены основные этапы настройки используемой модели. Получены результаты обучения, проверки и тестирования модели ИНС с прямой связью, которые указывают на способность сети объяснить более 95 % измеренных данных при прогнозировании коэффициента уплотнения АБС.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-37-90052.

Список литературы

1. Захаренко А. В., Пермяков В. Б., Молокова Л. В. Дорожные катки: теория, расчет, применение: монография. — СПб.: Лань, 2018. — 328 с.
2. Fradkov A. L. Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control. — Berlin, Germany: Springer, 2007. — 236 p.
3. Donghai L., Junjie Ch., Shuai L. Collaborative operation and real-time control of roller fleet for asphalt pavement compaction // Autom. in Constr. — 2019. — Vol. 98. — P. 16—29.
4. Anderl R., Eigner M., Sandler U., Stark R. Smart Engineering — Interdisziplinäre Produktentstehung. Acatech Diskussion, Springer, 2012. — 58 p.
5. Pistor J., Villwock S., Völkel W., Kopf F., Adam D. Continuous Compaction Control (CCC) with Oscillating Rollers // Procedia Engineering. — 2016. — No. 143. P. 2016514-21.
6. Hu W., Shu X., Huang B., Woods M. Field investigation of intelligent compaction for hot mix asphalt resurfacing // Frontiers

of Structural and Civil Engineering. — 2017. — No. 11 (1). — P. 47—55.

7. Barman M., Nazari M., Imran S. A., Commuri S., Zaman M., Beainy F., Singh D. Quality Control of Subgrade Soil Using Intelligent Compaction // Innovative Infrastructure Solutions. — 2016. — No. 1 (1). — P. 23.

8. Liu D. H., Li Z. L., Lian Z. H. Compaction quality assessment of earth-rock dam materials using roller integrated compaction monitoring technology // Autom. Constr. — 2014. — No. 44. — P. 234—246.

9. Kenneally B., Musimbi O. M., Wang J. Finite element analysis of vibratory roller response on layered soil systems // Comput. Geotech. — 2015. — No. 67. — P. 73—82.

10. Li J., Zhang Z., Xu H. Dynamic characteristics of the vibratory roller test-bed vibration isolation system: simulation and experiment // J. Terramech. — 2014. — No. 56. — P. 139—156.

11. Xu Q., Chang G. K. Adaptive quality control and acceptance of pavement material density for intelligent road construction // Automat. Constr. — 2016. — No. 62. — P. 78—88.

12. Zhu X., Bai S., Xue G., Yang J., Cai Y., Hu W., Jia X., Huang B. Assessment of compaction quality of multi-layer pavement structure based on intelligent compaction technology // Constr. Build. Mater. — 2018. — Vol. 161. — P. 316—329.

13. Кустарев Г. В., Павлов С. А., Ушков А. В. Высокоэффективные комплексы для скоростного строительства асфальтобетонных покрытий: монография. — М.: МАДИ, 2019. — 140 с.

14. Прокопьев А. П., Емельянов Р. Т. Автоматизация процесса уплотнения асфальтоукладчика // Изв. высш. учеб. завед. Стр.-во. — 2004. — № 7 (547). — С. 82—84.

15. Кизряков А. Н., Кабанов В. В., Фруктов П. А. Исследование уплотняющих рабочих органов асфальтоукладчиков // Труды ВНИИСтройдормаш. — 1985. — Вып. 102. — С. 3—7.

16. Кизряков А. Н., Кабанов В. В., Фруктов П. А. Определение параметров виброуплотняющих органов асфальтоукладчиков // Труды ВНИИСтройдормаш. — 1986. — Вып. 107. — С. 63—68.

17. Марышев Б. С., Слепая Б. М., Питецкий Ю. Н. и др. Уплотнение асфальтобетонных смесей асфальтоукладчиками // Автомобильные дороги. — 1979. — № 11. — С. 11—12.

18. Круглов В. В., Борисов В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. — М.: Горячая линия — Телеком, 2001. — 382 с.

19. Головкин В. А., Краснопрошин В. В. Нейросетевые технологии обработки данных. — Минск: БГУ, 2017. — 263 с.

20. Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least squares // Quart. Appl. Math. — 1944. — Vol. 2. — P. 164—168. DOI: 10.1090/QAM/10666.

21. Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // SIAM J. Appl. Math. — 1963. — Vol. 11. — P. 431—441. DOI: 10.1137/0111030.

On the Issue of Designing a System for Continuous Control of Road Materials Compaction for Pavers

A. P. Prokopev, prok1@yandex.ru, Zh. I. Nabizhanov, jasur150691@yandex.ru,
V. I. Ivanchura, ivan43ura@yandex.ru, R. T. Emelyanov, ert-44@yandex.ru,
Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation

Corresponding author:

Prokopev Andrey P., Associate Professor, Siberian Federal University, 660041, Krasnoyarsk, Russian Federation
E-mail: prok1@yandex.ru

*Received on June 17, 2021
Accepted on September 17, 2021*

The results of the research on the creation of an automatic compaction control system (ACCS) for pavers in real time are considered. The research is based on the methods of artificial neural networks (ANN). In this paper, an ANN model is obtained, with the help of which it is possible to determine the compaction coefficient (CC) of an

asphalt mixture. The input variables of the ACCS are the velocity of movement of the paver, the frequency of impacts of the tamper, the force in the pusher of the tamper, the type of mixture, the thickness of the layer. The results of a computational experiment on the calculation of CC in real time are presented. The ANN is able to explain more than 98 % of the measured data.

Keywords: automatic control system, artificial neural networks, non-destructive technologies, compaction control, road materials

Acknowledgements:

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-37-90052

For citation:

Prokopev A. P., Nabizhanov Zh. I., Ivanchura V. I., Emelyanov R. T. On the Issue of Designing a System for Continuous Control of Road Materials Compaction for Pavers, *Programmnaya Ingeneria*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 413–419.

DOI: 10.17587/prin.12.413-419

References

1. **Zakharenko A. V., Permyakov V. B., Molokova L. V.** *Road rollers: theory, calculation, application: monograph*, Saint-Petersburg, LAN Publishing House, 2018, 328 p. (in Russian).
2. **Fradkov A. L.** *Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control*, Berlin, Germany, Springer, 2007, 236 p.
3. **Donghai L., Junjie Ch., Shuai L.** Collaborative operation and real-time control of roller fleet for asphalt pavement compaction, *Autom. in Constr.*, 2019, vol. 98, pp. 16–29.
4. **Anderl R., Eigner M., Sandler U., Stark R.** *Smart Engineering — Interdisziplinäre Produktentstehung*, Acatech Diskussion Springer, 2012, 58 p.
5. **Pistol J., Villwock S., Völkel W., Kopf F., Adam D.** Continuous Compaction Control (CCC) with Oscillating Rollers, *Procedia Engineering*, 2016, no. 143, pp. 2016514-21.
6. **Hu W., Shu X., Huang B., Woods M.** Field investigation of intelligent compaction for hot mix asphalt resurfacing, *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 2017, no. 11 (1), pp. 47–55.
7. **Barman M., Nazari M., Imran S. A., Commuri S., Zaman M., Beainy F., Singh D.** Quality Control of Subgrade Soil Using Intelligent Compaction, *Innovative Infrastructure Solutions*, 2016, no. 1(1), pp. 23.
8. **Liu D. H., Li Z. L., Lian Z. H.** Compaction quality assessment of earth-rock dam materials using roller integrated compaction monitoring technology, *Autom. Constr.*, 2014, no. 44, pp. 234–246.
9. **Kenneally B., Musimbi O. M., Wang J.** Finite element analysis of vibratory roller response on layered soil systems, *Comput. Geotech.*, 2015, no. 67, pp. 73–82.
10. **Li J., Zhang Z., Xu H.** Dynamic characteristics of the vibratory roller test-bed vibration isolation system: simulation and experiment, *J. Terramech.*, 2014, no. 56, pp. 139–156.
11. **Xu Q., Chang G. K.** Adaptive quality control and acceptance of pavement material density for intelligent road construction, *Automat. Constr.*, 2016, no. 62, pp. 78–88.
12. **Zhu X., Bai S., Xue G., Yang J., Cai Y., Hu W., Jia X., Huang B.** Assessment of compaction quality of multi-layer pavement structure based on intelligent compaction technology, *Constr. Build. Mater.*, 2018, no. 161, pp. 316–329.
13. **Kustarev G. V., Pavlov S. A., Ushkov A. V.** *High-Performance complexes for high-speed construction of asphalt concrete coatings: monograph*, Moscow, MADI, 2019, 140 p. (in Russian).
14. **Prokopev A. P., Emelyanov R. T.** Automation of the process of compaction of the paver. *Izv. of higher institutions. Constr.*, 2004, no. 7 (547), pp. 82–84 (in Russian).
15. **Kizryakov A. N., Kabarov V. V., Frukto P. A.** Investigation of the compacting working bodies of asphalt pavers, *Trudy Vniistroydormash*, 1985, issue 102, pp. 3–7 (in Russian).
16. **Kizryakov A. N., Kabanov V. V., Frukto P. A.** Determination of parameters of vibration compacting bodies of asphalt pavers, *Trudy Vniistroydormash*, 1986, issue 107, pp. 63–68 (in Russian).
17. **Maryshev B. S., Slepaya B. M., Pitetsky Yu. N., Skrylnik A. P., Ostrovsky E. B., Lieberman M. A., Ksovreli P. I.** Compaction of asphalt concrete mixtures by asphalt pavers, *Highways*, 1979, issue 11, pp. 11–12. (in Russian).
18. **Kruglov V. V., Borisov V. V.** *Artificial neural networks. Theory and practice*, Moscow, Hotline-Telecom, 2001, 382 p. (in Russian).
19. **Golovko V. A., Krasnoproshin V. V.** *Neural network technologies of data processing*, Minsk, BSU, 2017, 263 p. (in Russian).
20. **Levenberg K.** A method for the solution of certain problems in least squares, *Quart. Appl. Math.*, 1944, vol. 2, pp. 164–168. DOI: 10.1090/QAM/10666.
21. **Marquardt D.** An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 1963, vol. 11, pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030.

В. А. Галатенко, д-р физ.-мат. наук, зав. сектором, galat@niisi.ras.ru,
К. А. Костюхин, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., kost@niisi.ras.ru,
Г. Л. Левченкова, ст. науч. сотр., galka@niisi.ras.ru, Федеральное государственное учреждение "Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук", Москва

Целостность как аспект информационной безопасности: обзор современных подходов*

Статья представляет собой краткий обзор современных подходов к обеспечению целостности как аспекта информационной безопасности. Сделана попытка рассмотреть соответствующие модели, политики и механизмы безопасности, а также их применение в разных предметных областях. Статья рассчитана на читателя, знакомого с основами информационной безопасности.

Ключевые слова: информационная безопасность, кибербезопасность, целостность, модели безопасности, политика безопасности, механизмы безопасности, качество данных

Введение

При рассмотрении вопросов информационной безопасности традиционно выделяют три аспекта:

- конфиденциальность;
- доступность;
- целостность.

В процессе развития информационно-коммуникационных технологий развивается, обогащается и трактовка этих аспектов. Обеспечение конфиденциальности перестало быть доминирующим требованием, но приватность как элемент конфиденциальности (или как самостоятельный аспект) привлекает, пожалуй, наибольшее внимание как на законодательном (защита персональных данных), так и на техническом (обезличивание больших данных) уровнях.

Интернет вещей определил новый уровень требований к доступности. На первый план вышел сетевой доступ, без которого "умный" чайник воду не вскипятит. Следует заметить, что попытки блокировки некоторых интернет-ресурсов приводили к подобным бытовым проблемам.

Понятие целостности обогатилось, вероятно, в наибольшей степени. Выросло число сущностей, целостность которых необходимо обеспечить. К ним относятся и потоки данных, и аппаратные конфигурации, и логистические цепочки и многое другое. Под целостностью стали понимать не только защищенность от

несанкционированной модификации, но и качество данных, их полноту и актуальность. Это обстоятельство и послужило причиной написания настоящей статьи. По мнению авторов, систематическое изложение современных подходов к обеспечению целостности в литературе отсутствует и поэтому представленные в статье материалы и идеи будут востребованы.

Нет смысла ранжировать аспекты информационной безопасности по степени их важности, однако роль целостности хотелось бы подчеркнуть. Целостность оказывается важнейшим аспектом информационной безопасности в тех случаях, когда информация является "руководством к действию", служит для принятия решений. Рецепт лекарства, предписанные медицинские процедуры, набор и характеристики комплектующих изделий, ход технологического процесса — все это примеры информации, нарушение целостности которой может в буквальном смысле оказаться смертельным. Неприятно и искажение официальной информации, будь то текст закона или страница сайта правительственной организации. Компрометация целостности процесса электронного голосования ставит под сомнение легитимность власти. Несанкционированное воздействие на финансовые потоки ведет к материальным потерям. Искажение навигационных данных способно привести к авариям. Можно привести множество других подобных примеров.

Предполагается, что читатель знаком с основами информационной безопасности. При необходимости можно обратиться к книгам [1, 2].

Понятие целостности

В соответствии с работой [1] в качестве отправной точки дадим следующее определение целостности: "Под целостностью понимается актуальность и не-

* Результаты исследований, представленные в публикации, выполнены в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по теме (проекту) "38. Проблемы создания глобальных и интегрированных информационно-телекоммуникационных систем и сетей, развитие технологий и стандартов GRID. Исследование и реализация программной платформы для перспективных многоядерных процессоров (0065-2019-0002)".

противоречивость информации, ее защищенность от разрушения и несанкционированного изменения". Целостность можно подразделить на статическую, понимаемую как неизменность информационных объектов, и динамическую, относящуюся к корректному выполнению сложных действий (транзакций).

Целостность необходимо обеспечивать для различных сущностей: данных, программ, аппаратно-программных комплексов. Соответственно, и трактовка целостности для этих сущностей может различаться. Например, для субъектов важны аутентичность и невозможность отказаться от совершенных действий.

Проблемы целостности имеют место не только для отдельных сущностей, но и на стыке между ними. Можно представить себе две подсистемы автономного транспортного средства, одна из которых (нейросетевая) распознает дорожные знаки, а другая (традиционная) интерпретирует эти знаки и реагирует на них. Очевидно, необходимо обеспечить целостность ассоциаций между образами и трактовкой дорожных знаков.

Безопасность вообще и целостность в частности должны поддерживаться на протяжении всего жизненного цикла информационно-коммуникационных систем. Эта общая задача распадается на подзадачи, относящиеся и к подмножествам компонентов систем, и к отрезкам жизненного цикла. Таковы, например, средства обеспечения статической целостности данных при их передаче по сети и при резервном копировании. Динамическую целостность должны поддерживать транзакции СУБД и средства установки программных коррекций.

Для современной трактовки понятия целостности характерен переход от бинарной оценки "целостность есть/нет" к шкале качества (данных, программ и т. д.): низкое, среднее, высокое [3]. Качество оценивается в соответствии с наперед заданными атрибутами и критериями и, таким образом, оказывается контекстно зависимым. Одним из возможных атрибутов является доверенность данных. Общий смысл требований состоит в том, что доверенные результаты не должны зависеть от недоверенных исходных данных.

Модель Кларка—Вильсона

В работе [4] Кларк и Вильсон предложили модель обеспечения целостности данных, приемлемую для современных коммерческих систем. Она основана не на привычных для традиционной безопасности понятиях грифа секретности и уровнях допуска, а на принятом в технологии программирования объектно-ориентированном подходе. Это важно, поскольку информационная безопасность является, в первую очередь, ветвью информационных технологий.

Центральным понятием модели Кларка—Вильсона является правильно построенная транзакция. Только с помощью таких транзакций разрешается модифицировать данные. Это означает, что мани-

пулирование данными осуществляется посредством высокоуровневого объектного интерфейса, а не с помощью низкоуровневых операций записи/чтения.

Второй составляющей модели служит принцип архитектурной безопасности, известный как "разделение обязанностей". В выполнении правильно построенной транзакции должны участвовать по крайней мере два субъекта, что должно уменьшить вероятность намеренной подделки или случайной ошибки.

В модели Кларка—Вильсона контроль целостности распространяется не на все данные, а только на так называемые ограниченные элементы данных (ОЭД), и осуществляется процедурами верификации целостности (ПВЦ). Различают внутреннюю и внешнюю целостность. Последняя определяет согласованность компьютерных данных с окружением информационных систем. Процедуры верификации должны существовать и применяться для обоих видов целостности.

Правильно построенные транзакции реализуют процедуры преобразования (ПП) наборов ОЭД, переводя их из одного корректного состояния в другое. Предполагается (и проверяется с помощью ПВЦ), что начальное состояние было корректным. Только ПП могут изменять ОЭД, в этом и состоит "ограниченность" ОЭД.

Чтобы убедиться, что ПП реализуют правильно построенные транзакции, их необходимо сертифицировать. В общем случае это сложный ручной процесс. В сертификации нуждаются и ПВЦ. Таким образом, можно сформулировать следующие далее два требования по сертификации.

- **С1.** Все ПВЦ должным образом проверяют целостность всех ОЭД.
- **С2.** Все ПП переводят набор ОЭД из одного корректного состояния в другое. Строго говоря, это требование не только к самим ПП, но и к дисциплине их выполнения. Их возможный параллелизм не должен противоречить логической сериализации.

Другой класс требований относится к проведению политики безопасности в жизнь, которое осуществляется системой. Требование **П1** гласит, что изменения ОЭД выполняются только сертифицированными ПП.

Приведенные правила образуют основу внутренней целостности. Внешняя целостность базируется на разделении обязанностей.

- **С3.** Должен быть сертифицирован список ПП, которые каждый пользователь может применять к ОЭД, и этот список соответствует принципу разделения обязанностей.
- **П2.** Система обеспечивает идентификацию и аутентификацию пользователей.
- **П3.** Система контролирует, что пользователи применяют только ПП из правила С3.

Могут быть наложены и другие ограничения, например, выполнение некоторых действий только в рабочее время. Тогда понадобятся дополнительные правила сертификации и проведения в жизнь.

К числу универсальных можно отнести правила **С4**. Все ПП должны быть сертифицированы на предмет корректности протоколирования.

Кроме ОЭД, в системе существуют неограниченные элементы данных (НЭД), которые могут обрабатываться ПП. Это не должно угрожать целостности. Отсюда следующее правило.

С5. Все ПП, использующие НЭД в качестве входных данных, должны либо выполнять корректные преобразования, либо ничего не менять.

Выполнение стандартных требований к доверенному пользователю обеспечивает правило **П4**. Только сертифициатор может изменять список сертифицированных ПП и ассоциированных с ними ОЭД. Сертификатор не должен иметь прав на выполнение ПП.

Модель Кларка—Вильсона не является формальной. В частности, сертификация — это неформализуемое, сложное, чреватое упущениями действие. Тем не менее модель представляется важной в идейном отношении. Ее смысл в использовании передовой технологии программирования и принципов архитектурной безопасности. Без подобного фундамента никакой набор механизмов и мер безопасности не может быть эффективным.

Целостность как ожидаемое качество информации

Качество информации традиционно трактуется как соответствие спецификациям или пригодность для использования. Целостность имеет место, если данные (а также оборудование, персонал, система и т. п.) удовлетворяют заранее заданным критериям качества, сформулированным с учетом контекста применения. Такой подход представляется логичным. Информационная безопасность считается обеспеченной, если выполнены требования политики безопасности. Целостность как аспект безопасности должна удовлетворять требованиям политики целостности.

Качество информации описывается набором атрибутов, таких как

- точность;
- непротиворечивость;
- своевременность, которая означает как актуальность, так и оперативность обновления (для часто изменяемых данных);
- допустимость;
- полнота.

Информация — это результат интерпретации данных, который используется для принятия решений, поэтому понятие качества включает в себя такие аспекты, как понятность и удобство восприятия пользователями. В корпорации IBM оценивают годовые потери от некачественных данных в США более чем в 3 трлн долларов [5].

Качество данных может страдать от ошибок ввода, от некорректных преобразований, проблемных вопросов интеграции данных из разных источников, из-за неполных или избыточных транзакций.

Для оценки, измерения и улучшения качества применяются каркасы целостности. Они учитывают контекст информационных систем, типы, формат и источники данных, характер обработки, способы хранения, потоки данных. Примером может служить каркас I*1, описанный в работе [6]. В нем учтены такие аспекты, как способность интеграции с существующими системами.

Обработка больших данных заставляет по-новому подходить к проблеме целостности. Возрастает роль метаданных. Необходимо справляться с возможной семантической разнородностью разных источников данных. Следует выявлять и устранять дублирование данных, собирать вместе данные, относящиеся к одному объекту. Без решения этих задач пользователь рискует получить бессмысленный ответ на свой запрос.

Есть еще одна задача, требующая решения — нахождение верного баланса между целостностью интегрированных данных и приватностью. Возможно, в каких-то случаях придется пойти на сознательное снижение качества данных для удовлетворения требований приватности. Критерием здесь служит общая политика безопасности.

Следует заботиться и о живучести данных. Если они окажутся в устаревшем формате или на устаревшем носителе, то по сути станут недоступными. Нужен мониторинг данных, проверки того, что данные можно извлечь и проинтерпретировать. Иногда для этого может потребоваться преобразование и перемещение данных.

Цифровые водяные знаки как инструмент поддержания целостности

Возможность восстановления критически важных данных, случайно или намеренно измененных или утерянных, требуется во многих приложениях баз данных. Резервное копирование — очевидное, но тяжеловесное решение, уместное для глобального восстановления. При локальных нарушениях желательно действовать проще и оперативнее. Цифровые водяные знаки направлены на достижение этой цели. Одна из возможных реализаций этого инструментария описана в работе [7].

Предлагаются водяные знаки двух видов:

- для доказательства прав собственности (авторства);
- для выявления и исправления несанкционированных изменений данных.

В свою очередь, жизненный цикл водяных знаков включает четыре фазы:

- ◇ подготовка водяных знаков;
- ◇ вставка водяных знаков;
- ◇ извлечение водяных знаков;
- ◇ принятие решений.

Водяные знаки для доказательства прав собственности строятся путем вычисления хеш-функции от некоего идентификатора автора и секретного ключа. В роли идентификатора может выступать любой элемент данных, выбранный автором, например,

имя или фотография собственника. Поскольку результат вычисления хеш-функции имеет фиксированный размер, размер исходного идентификатора не имеет значения и может быть сколь угодно большим.

Водяные знаки для данных строятся более сложным образом. Выбираются элементы отношений, которые считаются наиболее значимыми. То есть изначально не ставится цель полного восстановления, что-то несущественное может быть утеряно. Возможные значения существенных атрибутов разбиваются на кластеры, и для каждого элемента запоминается центроид соответствующего кластера. Однако следует отметить, что восстановление, если таковое понадобится, будет неточным. Степень granularity при этом выбирает владелец.

Для экономии места строится набор идентификаторов кластеров, именно они запоминаются в водяных знаках. Детальная информация о кластерах хранится отдельно и используется при восстановлении. Таким образом, водяные знаки для данных образуются как конкатенация идентификаторов кластеров значимых элементов данных.

Подготовленные водяные знаки вставляются в наименее значимые части элементов базы данных, являющихся вещественными числами. Это небесспорное, но одно из возможных решений. Ради сохранения целостности значимых атрибутов несколько меняются менее значимые. Тем самым удается избежать увеличения размера базы данных. Отметим, что сходные приемы применяются в стеганографии.

Для повышения безопасности в процесс вставки водяных знаков внесен ряд тонкостей. Позиция в "хвосте" вещественного числа, начиная с которой встраивается водяной знак, выбирается "секретно". Водяные знаки для выявления и исправления несанкционированных изменений данных дублируются и вставляются несколько раз. Тем самым достигается устойчивость к повреждению водяных знаков и возможность выбора правильного варианта путем голосования.

Извлечение водяных знаков и принятие решений по восстановлению данных выполняются очевидным образом.

По мнению авторов, цифровые водяные знаки — слишком тяжеловесное инструментальное средство, требующее от владельца базы данных принятия множества неочевидных решений. Такой подход портит данные и не обеспечивает их точного восстановления. Вероятно, две задачи — выявление нарушений целостности и восстановление данных — лучше решать отдельно, не стремясь к оперативности при восстановлении, поскольку это действие не должно требоваться часто. Цифровые водяные знаки можно рассматривать как обобщение корректирующих ко-

дов. Желательно сделать его проще и прямолинейнее, изначально предусмотрев накладные расходы и дополнительные, избыточные данные.

Возможно, продуктивной оказалась бы параллель между поддержанием целостности данных и обеспечением радиационной стойкости микросхем. Сочетание рассредоточения с дублированием полезно в обоих случаях. На этом направлении требуются дополнительные исследования.

Заключение

Информационная безопасность развивается, развиваются и ее аспекты, такие как целостность. Развитие подходов к обеспечению целостности идет по трем основным направлениям:

— совершенствование концептуальных основ (например, трактовка целостности как ожидаемого качества данных);

— учет новых угроз (таких, например, как программы-вымогатели);

— совершенствование механизмов безопасности (пример — цифровые водяные знаки).

Однако с практической точки зрения лучшими остаются простые решения, такие как представленные в руководстве [8]. Только систематический подход способен принести успех (точнее, минимизировать проблемы) в обеспечении целостности.

Список литературы

1. **Галатенко В. А.** Основы информационной безопасности. Под ред. В. Б. Бетелина. — М.: ИНТУИТ.РУ, 2003. — 280 с.
2. **Галатенко В. А.** Стандарты информационной безопасности. Под ред. В. Б. Бетелина. — М.: ИНТУИТ.РУ, 2004. — 328 с.
3. **Harley K., Cooper R.** Information Integrity: Are We There Yet? // ACM Computing Survey. — 2021. — Vol. 54, Issue 2. — Article 33. — P. 1–35.
4. **Clark D. D., Wilson D. R.** A comparison of commercial and military computer security policies // Proceedings of the IEEE Symposium on Security and Privacy, Washington, 1987. — P. 184–194.
5. **Cichy C., Rass S.** An overview of data quality frameworks // IEEE Access. — 2019. — Vol. 7. — P. 24634–24648.
6. **Geisler E., Prabhaker P., Nayar M.** Information integrity: An emerging field and the state of knowledge // Proceedings of the Portland International Conference on Management of Engineering and Technology (PICMET03), IEEE and PICMET, Portland, 2003. — P. 217–221.
7. **Khanduja V., Chakraverty S., Verma O. P.** Enabling information recovery with ownership using robust multiple watermarks // Journal of Information Security and Applications. — 2016. — P. 80–92.
8. **Cawthra J., Ekstrom M., Lusty L., Sexton J., Sweetnam J.** Data Integrity: Detecting and Responding to Ransomware and Other Destructive Events. NIST SPECIAL PUBLICATION 1800-26, DECEMBER 2020, 523 p. URL: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/SpecialPublications/NIST.SP.1800-26.pdf>.

Integrity as an Aspect of Information Security: an Overview of Modern Approaches

V. A. Galatenko, galat@niisi.ras.ru, K. A. Kostyukhin, kost@niisi.ras.ru,
G. L. Levchenkova, galka@niisi.ras.ru, Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences"

Corresponding author:

Kostyukhin Konstantin A., Senior Researcher, Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, 117218, Russian Federation
E-mail: kost@niisi.ras.ru

Received on August 04, 2021

Accepted on August 13, 2021

There are three main aspects of the information security:

- confidentiality;
- availability;
- integrity.

Nowadays ensuring the confidentiality has ceased to be the dominant requirement, but privacy as an element of confidentiality (or as an independent aspect) attracts, perhaps, the greatest attention both at the legislative (personal data protection) and at the technical (depersonalization of big data) levels.

The Internet of Things has defined a new level of accessibility requirements. Network access has come to the fore, without it a (too) smart kettle will not boil water. (Attempts to block some Internet resources led to similar everyday problems.)

The number of entities whose integrity needs to be ensured has grown. These are data flows, hardware configurations, logistics chains, and much more. Integrity began to be understood not only as security against unauthorized modification, but also as the quality of data, their completeness and validity. This was the reason for writing this article. In our opinion, there is no systematic presentation of modern approaches to ensuring integrity in the literature and therefore it would be appropriate.

It makes no sense to rank the aspects of information security according to their importance, but we would like to emphasize the role of integrity. Integrity turns out to be the most important aspect of information security in those cases when information is a "guide to action" and serves to make decisions. The prescription of medicines, prescribed medical procedures, the set and characteristics of components, the course of the technological process — all these are examples of information, the violation of the integrity of which can literally be fatal. It is also unpleasant to distort official information, whether it is the text of the law or the page of the website of a government organization. Compromising the integrity of the electronic voting process casts doubt on the legitimacy of the authorities. Unauthorized influence on financial flows leads to material losses. Distortion of navigation data can lead to accidents. The article is an overview of modern approaches to ensuring integrity as an aspect of information security. An attempt is made to analyze the relevant models, policies and security mechanisms, as well as their application in different subject areas.

Keywords: Information security, integrity, security mechanisms, security models, security policies, data quality

For citation:

Galatenko V. A., Kostyukhin K. A., Levchenkova G. L. Integrity as an Aspect of Information Security: an Overview of Modern Approaches, *Programmnyaya Ingeneriya*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 420—424.

DOI: 10.17587/prin.12.420-424

References

1. Galatenko V. A. *Osnovy informacionnoj bezopasnosti*, Moscow, INTUIT.RU, 2003, 280 p. (in Russian).
2. Galatenko V. A. *Standarty informacionnoj bezopasnosti*, Moscow, INTUIT.RU, 2004, 328 p. (in Russian).
3. Harley K., Cooper R. Information Integrity: Are We There Yet?, *ACM Computing Survey*, 2021, vol. 54, issue 2, article 33, pp. 1—35.
4. Clark D. D., Wilson D. R. A comparison of commercial and military computer security policies, *Proceedings of the IEEE Symposium on Security and Privacy*, Washington, 1987, pp. 184—194.
5. Cichy C., Rass S. An overview of data quality frameworks, *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 24634—24648.
6. Geisler E., Prabhaker P., Nayar M. Information integrity: An emerging field and the state of knowledge, *Proceedings of the Portland International Conference on Management of Engineering and Technology (PICMET03)*, IEEE and PICMET, Portland, 2003, pp. 217—221.
7. Khanduja V., Chakraverty S., Verma O. P. Enabling information recovery with ownership using robust multiple watermarks, *Journal of Information Security and Applications*, 2016, pp. 80—92.
8. Cawthra J., Ekstrom M., Lusty L., Sexton J., Sweetnam J. Data Integrity: Detecting and Responding to Ransomware and Other Destructive Events, NIST SPECIAL PUBLICATION 1800-26, DECEMBER 2020, 523 p., available at: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/SpecialPublications/NIST.SP.1800-26.pdf>.

К. Ф. Иванова, канд. техн. наук, постдокторант, Klara.i2010@yandex.ru,
Санкт-Петербургский государственный университет

Фрактальный анализ интервальных рядов простых чисел

Представлен подход к фрактальному анализу интервальных рядов, членами которых являются последовательные отклонения простых чисел натурального ряда. Вошедший в полную силу с конца прошлого века фрактальный анализ позволил выявить новые, необычные свойства геометрических и физических объектов и процессов, включая прогнозирование поведения временных и пространственных рядов. Объединение двух структурных блоков — пространственных интервальных рядов возрастающей мощности и фрактального множества — позволило применить к исследованию последовательности интервалов фрактальную методiku. С ее помощью расширено представление о феномене интервалов простых чисел как о структуре, которая не противоречит характеру большинства природных явлений. С помощью метода Херста и скейлинга установлено, что появление интервалов простых чисел не носит случайный характер. При ограничениях к доступной памяти компьютера проведены критериальные оценки интервальных рядов разной мощности и обнаружено, что они обладают свойствами масштабной инвариантности, мультифрактальности и самоподобия. Проведенные оценки подтверждают принадлежность континуума простых чисел на всех уровнях масштабов к фрактальным множествам.

Ключевые слова: простые числа, отклонения, интервальный ряд, критериальные оценки, самоподобие, фрактальный анализ, показатель Херста

Еще раз о простых числах

Непреодолимый интерес к простым числам объясняется все большей их востребованностью в различных областях современной науки, информационных полях, шифровании, криптографии и т. п. Начиная с Эвклида, доказавшего, что не существует наибольшего простого числа, т. е. ряд простых чисел бесконечен, их изучение вызвало к жизни значительный интерес выдающихся ученых последних столетий [1]. К их числу принадлежат Л. Эйлер, К. Гаусс, Б. Риман, А. Лежандр, П. Л. Чебышев, Ж. Адамар и многие другие ученые, включая современных. Непознанная тайна простых чисел упирается в алгоритмы определения их по аналитическим зависимостям или формулам. Исследование простых чисел получило новый подъем в связи с развитием компьютерной техники. В 1970 г. русским математиком Ю. В. Матиясевичем было доказано, что существует многочлен пятой степени от многих переменных, множество положительных значений которого совпадает с множеством простых чисел. Данное утверждение является следствием решения Ю. В. Матиясевичем десятой проблемы Гильберта [2]. В настоящее время известно число, имеющее 25 млн знаков. Вопрос о существовании конечного большого интервала между двумя последующими простыми числами также не изучен. В свете современных представлений о мультипликативности простых чисел как о псевдослучайном множестве, одновременно сохраняющем свойства как детерминированного, так и случайного множеств, кроется сложность их точного определения.

О фракталах и самоподобии фрактального множества

Под современным понятием "фрактал" (фрактал, лат. *fractus* — дробленный, сломанный, разбитый) подразумевается графическое изображение определенной структуры, которая в более крупном масштабе подобна сама себе [3]. Согласно одному из определений американского математика Б. Мандельброта [4] "Фракталом называется множество, хаусдорфова размерность которого строго больше его топологической размерности". Самоподобие предполагает, что копирование и масштабирование некоторого эталонного образа позволяет природе легко создавать сложную многомасштабную структуру. Иначе, самоподобный объект в силу масштабной инвариантности состоит из частей, получающихся путем преобразования подобия целого объекта. Фрактальный объект статистически единообразен в широком диапазоне масштабов.

Реальные объекты имеют довольно четко ограниченный интервал масштабов, в которых они проявляют свою фрактальную природу. Для реального природного фрактала существует некоторый минимальный масштаб длины l_{\min} такой, что на расстояниях $l \approx l_{\min}$ его основное свойство — самоподобие — пропадает. Кроме того, на достаточно больших масштабах длин $l > l_{\max}$, где l_{\max} — характерный геометрический размер объектов, это свойство самоподобия также нарушается.

В идеальном случае (математический фрактал) такое самоподобие приводит к тому, что фрактальный объект оказывается инвариантным относительно

масштабных изменений пространства (растяжений и сжатий).

Случайные формы многих физических объектов или процессов могут быть описаны фрактальным алгоритмом, включающим такое основополагающее понятие, как размерность. Это относится и к объектам, ранее определяемым топологически линейными. Кривые, построенные на плоскости по точкам и визуально воспринимаемые как гладкие, могут быть интерпретированы с позиции фрактальной (дробной) размерности. Исходя из введенного понятия фрактальности, чем больше извилистость линии, тем больше ее фрактальная размерность и тем больше эта размерность отклоняется от ее топологической размерности. Интерпретация полученных результатов позволяет оценить, насколько плотно самоподобный объект заполняет область отклонений. При незначительной изломанности размерность кривой близка к 1. При большой извилистости кривая может заполнить всю плоскость, как если бы ее размерность устремлялась к топологической размерности, равной 2.

Для анализа фрактальности интервалов простых чисел можно располагать ограничениями как по выбору минимального размера структуры, так и по его протяженности, так как длина интервального ряда является величиной неограниченной.

По численным значениям фрактальной размерности можно определить новые свойства и характеристики предмета исследования, представляющие значительный интерес. Применяя аналогичный подход к интервальным рядам все возрастающей мощности, можно получить аналогичные оценки, включающие специфику последовательностей интервалов простых чисел.

Анализ фрактальности интервального ряда простых чисел

Из наблюдений за последовательностью интервалов простых чисел следует, что, с одной стороны, геометрическое расположение их значений на плоскости представляет собой ломаную кривую, соединяющую отрезки разной длины. С другой стороны, их последовательность может быть интерпретирована как алгебраическая функция на дискретном множестве натуральных чисел в виде пространственного ряда. Подход к определению фрактальности ряда не самих простых чисел, а их интервалов, продиктован видом ломаной, образующей кривую с переменными отклонениями, в отличие от монотонно возрастающей последовательности самих простых чисел. Соединение дискретных точек интервалов определяет непрерывную неперiodическую функцию по пространственной координате с разрывной производной. Число простых чисел pr и их интервалов p в среднем на порядок меньше соответствующего им натурального числа из множества натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Интервальный ряд простых чисел (ИРПЧ) представляется как разность двух соседних значений последовательности простых чисел pr :

$$p_i = pr_{i+1} - pr_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Интерпретация интервального ряда порождает применение различных методик расчета фрактальности ИРПЧ. При этом речь идет не о прогнозной точности определения отклонений, а о выявлении особенностей фрактальности все возрастающих последовательностей интервалов простых чисел.

Постановка задачи

Определить фрактальный характер ИРПЧ с элементами $p_i, i = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ конечного множества $A\{p\}$ при возрастающем числе элементов, которые являются подмножествами бесконечного множества $B\{p\}$ с элементами $p_i, i = \{1, 2, 3, \dots, \}$, так что $A \subseteq B \Leftrightarrow (p \in A \Rightarrow p \in B)$. Определить свойства масштабной инвариантности (скейлинга) и мультифрактальности ИРПЧ разной длины.

Следует выяснить, подчиняются ли результаты алгоритмов расчета фрактальной размерности степенным законам. Степенные зависимости характерны для математического выражения свойств фрактального самоподобия, повторение самое себя на разных масштабных уровнях (**скейлинга**). Следует установить, насколько ИРПЧ как фрактал единообразно устроен в широком диапазоне масштабных изменений натуральных чисел. А также, как ИРПЧ разной длины проявляет свойства мультифрактальности, в какой степени одной фрактальной размерности недостаточно для описания его пространственного изменения и необходим спектр этого показателя.

Наиболее известным и часто применяемым методом оценки фрактальности временных рядов является метод Херста, "нормированного размаха" (R/S -анализ или R/S -статистика), названного в честь автора метода, британского гидролога Гарольда Эдвина Херста (H. E. Hurst) [5].

Показатель (критерий) Херста H может изменяться в широких пределах и позволяет сделать выводы о фрактальной размерности, наличии неперiodических циклов, долговременной памяти и других характеристиках процесса. Через показатель H могут быть выражены алгебраические оценки самоподобного (*self-similarity coefficient of Hurst*) процесса.

Обоснование фрактальности (самоподобия) ИРПЧ проводится на основании вычисленных показателей Херста H и определения степенной зависимости статистических показателей от выборки (длины интервального ряда).

Метод Херста

Задается ряд длиной n с элементами $p_i, i = \overline{1, n}$. Анализируемый ряд разделяют на k смежных периодов (масштабов, блоков) длиной m . Для простоты будем считать, что m уменьшается в целое число раз. При изменении числа k разбиений изменяется число элементов m в новом блоке и проводятся идентичные расчеты как и при первом разбиении: $2 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k = n/2, k = n/m$.

Показатель Херста H в общем случае вычисляется по формуле

$$H = \ln(R/S)/\ln(an), \quad (1)$$

где R — разность накопленных отклонений элементов ряда выборки наблюдений длиной n ; S — стандартное отклонение наблюдений; a — задаваемая константа.

Расчет показателя H проводится по следующей схеме.

1. По каждой группе периодов с m элементами рассчитывается стандартное отклонение:

$$S_m = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p_i - \bar{p}_m)^2}.$$

2. Среднее значение элементов за период:

$$\bar{p}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i.$$

3. Накопленное отклонение ряда от среднего значения \bar{p}_{m_k} :

$$Z_u = \sum_{1 < u < m} (p_i - \bar{p}_m)$$

4. Размах накопленных сумм (*the adjusted range of cumulative sums*) — разность между максимальным и минимальным накопленными значениями:

$$R_m = \max_{1 < u < m} (Z_u) - \min_{1 < u < m} (Z_u).$$

5. Величина размаха R_m нормируется значением эмпирического стандартного отклонения: R_m/S_m .

6. Среднее значение размаха вариации по всем k -м группам m делителей:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_m = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n/m} \left(\frac{R}{S}\right)_i.$$

Окончательный расчет состоит в вычислении логарифмов $(R/S)_m$ для k выбранных периодов. Каждый масштаб m напоминает другие масштабы, но не идентичен им. Отдельные периоды качественно самоподобны другим периодам. Коэффициент Херста H находится методом наименьших квадратов из оценки углового коэффициента линейной регрессии в двойном логарифмическом масштабе для всего спектра выбранных значений m :

$$\ln(R/S) = H \ln(m) + \ln(a),$$

откуда

$$H = \frac{\ln(R/S)}{\ln(am)}. \quad (2)$$

Основание логарифмов не имеет значения. Наклон линии регрессии H определяет, насколько быстро растет общее среднее квадратичное отклонение S локальных флуктуаций интервалов простых чисел p с увеличением размера выборки m . Критерий H определяет накопление и исследование прошлой информации и может быть представлен степенной зависимостью исходя из формулы (2): $R/S = am^H$.

Изменение масштаба по степенному закону — признак самоподобия и, как следствие, фрактальности пространственного ряда. Традиционная трактовка показателя Херста отработана на многочисленных примерах. Критерий H определяется на отрезке $[0, 1]$ и трактуется в перечисленных далее пределах.

- Значение $0,5 < H < 1$ — процесс представляет собой персистентный ряд (с "положительной" памятью). Если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то с большой вероятностью он будет сохранять эту тенденцию какое-то время в будущем.

- Значение $H = 0,5$ характеризует стохастический ряд, для которого возможна любая смена направления, указывает на его случайный характер. События случайны и не коррелированы. Настоящее не влияет на будущее. Чем ближе H к $0,5$, тем более зашумлен ряд и тем менее выражен его тренд. В курсах статистики говорится, что природа следует нормальному распределению. Открытие Херста это положение опровергает. Показатель Херста имеет тенденцию даже на случайных рядах оценивать их как персистентные (обладающие трендами), завышая H . Исследования многих ученых показывают, что динамике рыночных цен соответствуют показатели Херста намного больше $0,5$. Этот факт свидетельствует о том, что динамика рыночных цен не является случайной.

- Значение $0 < H < 0,5$ — антиперсистентный ряд, для которого более вероятно смена предыдущего направления показаний, т. е. возрастание в прошлом более вероятно приводит к убыванию в будущем. Данный диапазон соответствует антиперсистентным, или эргодическим рядам. Устойчивость такого антиперсистентного поведения зависит от того, насколько H близко к нулю. Такой ряд более изменчив, чем ряд случайный, так как состоит из частых реверсов спад-подъем. Если показатель Херста принимает значения меньше $0,5$, то считается, что ряд имеет хаотическое поведение.

Чем выше показатель Херста, тем меньше на пространственном ряду "зубрин". При показателе Херста, равном единице, будем иметь гладкую прямую (восходящий или нисходящий тренд). Для получения достоверной оценки показателя H требуется достаточно большое количество данных (тысячи значений), иначе полученные оценки могут оказаться некорректными. Известные данные о ранее проводимых расчетах показали, что наиболее достоверными являются результаты при выборе не самых маленьких и не самых больших периодов (блоков) расчета. Фрактальная размерность D (оценка степени изломанности кривой или точечных показаний ряда) определяется по формуле

$$D = 2 - H. \quad (3)$$

R/S-анализ интервальных рядов простых чисел

Применим R/S -анализ к ИРПЧ. Из временного ряда длиной n выделяются смежные периоды масштабирования длиной m элементов, где $k = n/m$ — число периодов. Периоды m и соответствующее им разбиение на k групп ограничиваются значениями

$m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$, $k_{\max} \geq k \geq k_{\min}$. Для ИРПЧ длиной n , равной $2^9, 2^{10}, 2^{14}, 2^{19}, 2^{22}, 2^{25}$, периоды изменяются в пределах $2^4 \leq m \leq 2^{n-4}$. На основании расчетов пяти кривых нормированного размаха по отношению к периоду масштабирования проводится сравнение полученных для них показателей Херста H . На рис. 1 в двойном логарифмическом масштабе показана зависимость R/S от m с графиком линейной регрессии для задаваемых значений n .

Для сравнения на рис. 2 помещен график зависимости $\log_2 R/S$ от логарифма числа точек разбиения $\log_2 k$, полученный при транспонировании исходной матрицы $R/S(m, k) \rightarrow R/S(k, m)$, на основании которого показатель Херста получается равным предыдущему значению H , но противоположным ему по знаку. Такой подход допускает более наглядное представление о фрактальности ИРПЧ.

На графиках рис. 2 прослеживается возрастание отклонения и смещение статистической кривой от ее интерполяции с ростом длины ряда при сохранении картины подобия кривых.

Как видно на графиках, изменение углов наклона (показателей Херста) возрастает с ростом длины ряда n от значений 0,582 до 0,701. Значение $H = 0,583$ получено для последовательности n , равной $2^9 = 512$. Показания H подтверждают характер мультифрактальности рассматриваемых рядов.

Коэффициенты H превосходят значение 0,5, соответствующее случайному процессу, и характеризуют персистентное поведение ряда. Сила этого смещения зависит от того, насколько H больше 0,5. На практике это означает, что имеет место эффект долговременной или даже "бесконечной" памяти, и любое направление изменчивости в настоящем с большой вероятностью сохранится в будущем (значение отдельных интервалов простых чисел постепенно возрастает).

Степень зависимости показаний между смежными периодами выражается корреляционным соотношением, возрастающим с ростом H : $C = 2^{(2H-1)} - 1$, где C — мера корреляции. Так, для $H = 0,582$, C равно 0,12; для $H = 0,701$, C равно 0,32, а для $H = 1$, C равно 1 (линейная зависимость).

Фрактальная размерность, в соответствии с формулой (3), изменяется от $D = 1,418$ до $D = 1,299$. Уменьшение значения D свидетельствует о снижении относительной изломанности ИРПЧ, что вполне закономерно согласно показаниям коэффициента Херста. В таблице размещены вычисленные по методу Херста значения коэффициента H и фрактальной размерности D для рассмотренных рядов.

На рис. 3 показана скорость появления новых интервалов p_{nov} в зависимости от соответствующих им простых чисел pr , при этом значение p_{nov}/pr уменьшается на пять порядков.

Относительные разности показателей Херста $(\Delta H/H)_i = (H_i - H_{i-1})/H_i$, $i = 3, 4, 5, 6, 7$, равные 0,0652, 0,0552, 0,0293, 0,0239, 0,0078, позволяют проследить, с какой скоростью отношения убывают с ростом длины ряда. На рис. 4 отражен график этой зависимости интерполяцией функции второго порядка. На графике видно, что в пределах отношение $\Delta H/H$ достаточно быстро убывает уже при длине ряда $n = 2^{26}$.

На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) прослеживается зависимость размерности D от $\log_2 n$, асимптотическое стремление размерности к значению, близкому 1,3, что согласуется с изменением коэффициента Херста.

На рис. 6 (см. вторую сторону обложки) приведены

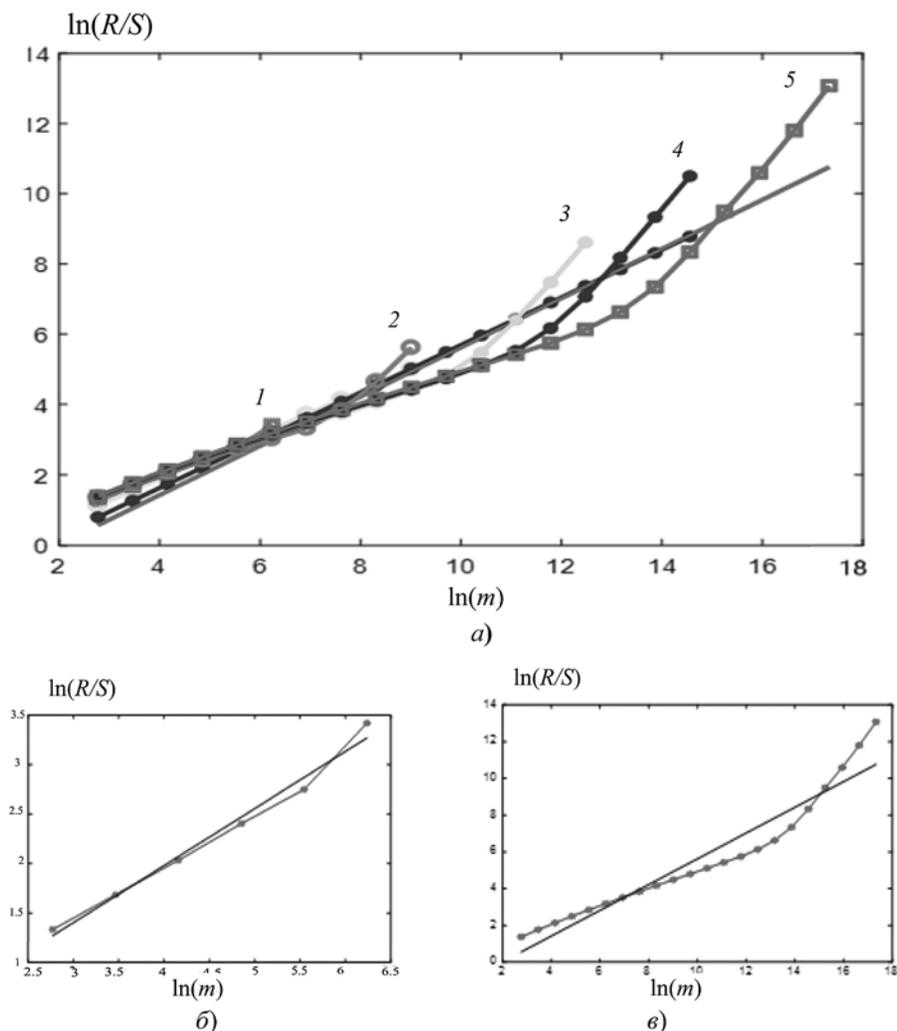


Рис. 1. Двойная логарифмическая зависимость кривых нормированного размаха R/S от периодов m с линейной интерполяцией для заданных значений длины ряда n : 1 — 2^{10} ; 2 — 2^{14} ; 3 — 2^{19} ; 4 — 2^{22} ; 5 — 2^{25} (а); а также отдельно для $n = 2^{10}$ (б) и $n = 2^{25}$ (в)

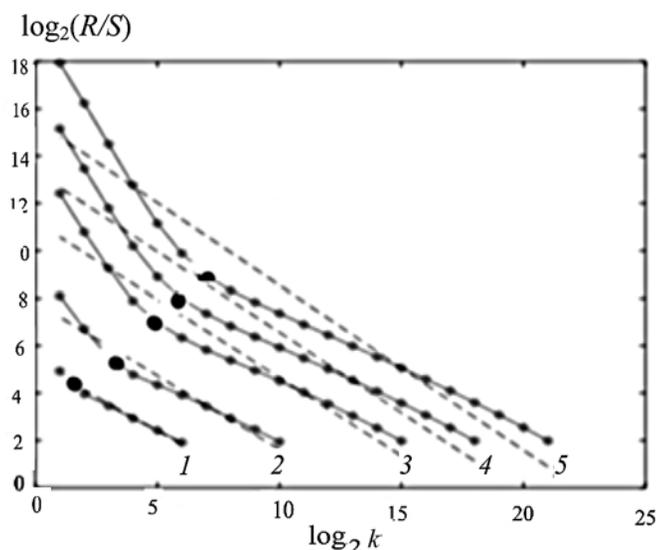


Рис. 2. Двойная логарифмическая зависимость нормированных размахов R/S и их линейных интерполяций от масштаба k для разной длины ИРПЧ n :
 1 — 2^{10} ; 2 — 2^{14} ; 3 — 2^{19} ; 4 — 2^{22} ; 5 — 2^{25}

графики расчета ИРПЧ длиной $n = 2^{19}$ с заданными периодами $m = 2^4, 2^5, 2^6, 2^8, 2^{10}, 2^{15}$. Число выбранных элементов определяется величиной $k = n/m$. Пространственный ряд переменных масштабируется в интервале $[0, 1]$. По оси x отложен масштабированный ряд N_{opt} . По оси y — значения переменных (интервалов простых чисел), соответствующих дроблению на k периодов для выбранных делителей m [6]. Сравнительная картина распределения интервалов определяет вид подобия ИРПЧ при скелинге (изменении масштаба выборки). На рис. 6 просматривается схожее положение максимумов и минимумов на кривых, полученных при различном масштабировании, чем лишний раз подтверждается фрактальный характер последовательности интервалов как статистически самоподобной структуры. Каждый масштаб напоминает другие масштабы, но не идентичен им. Это свойство делает фрактал ИРПЧ масштабно-инвариантным (сравните рис. 6, а, б и рис. 6, з, д).

Совместная картина распределения интервалов для разных периодов, сведенная к единому масштабу, приведена на кривых рис. 7 (см. третью сторону обложки), где по нижним двум ломаным a и b (см. рис. 6) заметно их статистическое подобие (пространственное совпадение максимумов и минимумов).

На рис. 8 (см. третью сторону обложки) показано расположение кривых интервалов простых чисел в полярных координатах при произвольных периодах масштабирования.

Соответствие между длиной ИРПЧ, коэффициентами Херста и фрактальной размерностью

n	2^9	2^{10}	2^{14}	2^{19}	2^{22}	2^{25}	2^{26}
H	0,5834	0,5820	0,6226	0,6590	0,6789	0,6956	0,7010
D	1,4166	1,4180	1,3774	1,3410	1,3211	1,3045	1,2990

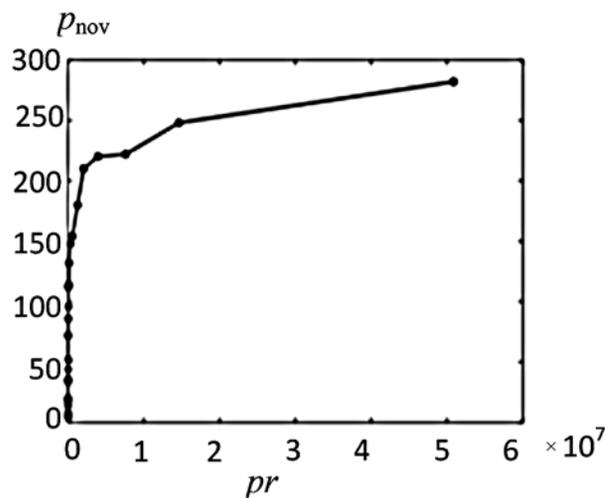


Рис. 3. Зависимость новых интервалов p_{nov} от соответствующих им простых чисел pr

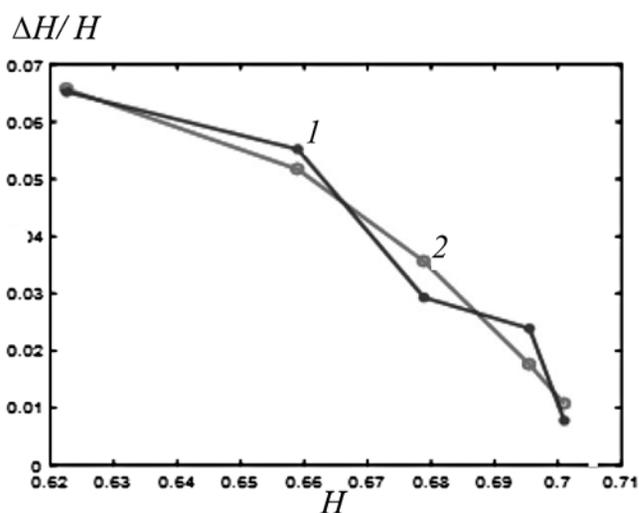


Рис. 4. Отношение приращения коэффициента Херста к его верхнему значению с ростом ИРПЧ:

1 — расчет; 2 — аппроксимация

Выводы

Предложена методика фрактального анализа структуры интервалов рассмотренных последовательностей.

Исследование и расчеты проводились на основе ограниченных, но все возрастающих рядов интервалов простых чисел.

В качестве метода определения фрактальности интервальных рядов использован метод Херста при скелинговом масштабировании. Обнаружено, что ряды разной длины имеют мультифрактальный характер и обладают свойствами самоподобия. С увеличением длины ряда (в пределах рассмотренных последовательностей) персистентный характер их поведения возрастает (показатель Херста H меняется от 0,583 до 0,701),

но имеет тенденцию резкого снижения скорости изменения с ростом длины ИРПЧ. Соответствующая фрактальная размерность D в пространстве возрастающих интервальных рядов $n = 2^9 \dots 2^{26}$ изменяется от 1,42 до 1,30, убывая с ростом ряда.

Установлено, что появление интервалов простых чисел **не носит случайный** характер, так как значения показателей Херста H , в пределах изменения этого критерия, превышают значение, близкое к 0,5 — показателя случайности процесса. В то же время не обнаружено детерминированного характера поведения рядов в асимптотике, которое возможно только при значении $H = 1$, которое вряд ли достижимо при наблюдаемом резком снижении скорости изменения показателя Херста с увеличением мощности последовательностей.

Разработка новых алгоритмов при изучении возрастающих по длине ИРПЧ может позволить выявить новые свойства интервалов простых чисел, области их самоподобия и определить способы их

прогнозирования. Дальнейшее исследование ИРПЧ планируется с использованием статистических оценок полученных критериев и показателей.

Во многом решение обсуждаемого в настоящей статье вопроса упирается в расширение возможности использования современных высокотехнологических средств компьютеризации.

Список литературы

1. **Грасиан Э.** Простые числа. Долгая дорога к бесконечности. Т. 3. — М.: Де Агостини, 2014. — 148 с.
2. **Матиясевич Ю. В.** Формулы для простых чисел // Квант. — 1975. — № 5. — С. 5—13.
3. **Федер Е.** Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 262 с.
4. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
5. **Hurst H. E.** The Long-term Storage of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers. — 1951. — Vol. 116. — P. 770—799.
6. **Старченко Н. В.** Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МИФИ, 2005. — 74 с.

Fractal Analysis of Interval Series of Prime Numbers

K. F. Ivanova, Klara.i2010@yandex.ru, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 195252, Russian Federation

Corresponding author:

Ivanova Klara F., Postdoctorant, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 195252, Russian Federation
E-mail: Klara.i2010@yandex.ru

*Received on April 17, 2021
Accepted on August 25, 2021*

The paper presents a fractal analysis of interval series, the members of which are consecutive deviations of natural prime numbers. Fractal analysis, which has been in full force since the end of the last century, has made it possible to identify new, unusual properties of geometric and physical objects and processes, including predicting the behavior of time and spatial series. The combination of two structural blocks - the spatial interval series of increasing power and the fractal set made it possible to apply the fractal technique to the study of the sequence of intervals. With its help, the idea of the phenomenon of intervals of prime numbers as a structure that does not contradict the nature of most natural phenomena is expanded. Using the Hurst method and scaling it is established that the appearance of intervals of prime numbers is not random. With restrictions on the available computer memory, criteria-based estimates of interval series of different capacities were carried out and it was found that they have the properties of scale invariance, multifractality and self-similarity. The performed estimates confirm that the continuum of primes at all scale levels belongs to fractal sets.

Keywords: primes, deviations, interval series, criterion estimates, self-similarity, fractal analysis, fractal dimension, Hurst index

For citation:

Ivanova K. F. Fractal Analysis of Interval Series of Prime Numbers, *Programmная Ingeneria*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 425—430.

DOI: 10.17587/prin.12.425-430

References

1. **Gracian E.** *Prime numbers. Long road to infinity*, vol. 3, Moscow, De Agostini, 2014, 148 p. (in Russian).
2. **Matiyasevich Yu. V.** Formulas for prime numbers, *Kvant*, 1975, no. 5, pp. 5—13 (in Russian).
3. **Feder E.** *Fractals*, Moscow, Mir, 1991, 262 p. (in Russian).

4. **Mandelbrot B.** *Fractal geometry of nature*, Moscow, Institute for Computer Research, 2002, 656 p. (in Russian).
5. **Hurst H. E.** The Long-term Storage of Reservoirs, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951, vol. 116, pp. 770—799.
6. **Starchenko N. V.** Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов. Дисс. канд. физ.-мат. наук, Moscow, MIFI, 2005, 74 p. (in Russian).

А. С. Шундеев, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., alex.shundeev@gmail.com,
МГУ имени М. В. Ломоносова

Создание адаптивного учебного курса по математическим основам машинного обучения

Представленная работа посвящена опыту создания учебного курса по математическим основам машинного обучения. Данный курс ориентирован на студентов и аспирантов математических специальностей. В нем выделяются базовая и вариативная части. Обязательная базовая часть строится вокруг модели PAC-обучения и решения задачи бинарной классификации. В рамках вариативной части рассмотрены вопросы слабой обучаемости и методы бустинга. Обсуждена методика изменения вариативной части курса.

Ключевые слова: учебный курс, машинное обучение, PAC-обучение, бустинг

Введение

В настоящее время развитие информационных технологий тесно связано с созданием и применением методов машинного обучения и анализа данных. По этой причине возрастает потребность в подготовке специалистов в этой области.

Очень часто изучение методов машинного обучения совмещено с изучением некоторого языка программирования и средств его специализированной библиотеки [1, 2]. Подобный подход безусловно оправдан, потому что обеспечивает возможность ускоренного применения полученных знаний на практике. В то же время следует отметить, что при таком подходе на первый план выходит не изучение методов машинного обучения, а некоторый набор методических приемов по использованию средств специализированной библиотеки.

Настоящая публикация посвящена вопросам построения учебного курса, ориентированного на изучение математических основ машинного обучения. Попытаемся более конкретно охарактеризовать эту учебную дисциплину или, возможно, набор взаимосвязанных дисциплин.

Существует два основных подхода к построению математической теории обучения. Исторически первым из них является *вычислительная теория обучения (computational learning theory)* [3]. В рамках этого подхода была предложена ставшая классической модель обучения PAC (*Probably Approximately Correct*) [4]. При определении модели PAC-обучения используется понятие вероятности. Однако в качестве основного данный подход использует математический аппарат теории вычислимости. Вторым подходом получил название *статистической теории обучения (statistical learning theory)* [5–9]. Как видно из названия, данный подход в качестве основного использует математический аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Несмотря на имеющиеся различия, эти два подхода имеют значительное пересечение. В рамках каждого из них может быть изложена теория PAC-обучения, а также материал, посвященный построению "сильных" обучающих алгоритмов с помощью методов бустинга [10]. Таким образом, для изложения материала учебного курса необходимо выбрать либо нотацию вычислительной теории обучения, либо нотацию, принятую в статистической теории обучения. Очевидно, что подобный выбор будет влиять на состав учебного курса. В дальнейшем будем предполагать, что в качестве основной выбирается нотация статистической теории обучения.

В статистической теории обучения можно выделить три основных раздела. Эти разделы посвящены соответственно решению задач: *прогнозирования (prediction)* [6], *оценки плотности вероятностных распределений (density estimation)* [11] и *кластеризации (clustering)* [12].

Попытка равномерно охватить все три раздела в рамках одного учебного курса может привести либо к превышению его разумной продолжительности, либо к неизбежной поверхностности изложения. В такой ситуации разумно акцентировать внимание на задаче прогнозирования, с которой связаны фундаментальные модели обучения, и, по возможности, факультативно затрагивать темы из двух других разделов. Даже в этом случае при изложении материала учебного курса можно сделать основной акцент или полностью ограничиться только рассмотрением задачи классификации [13], или только задачи восстановления регрессии [14, 15]. Конечно, в такой ситуации желательно добиться разумного компромисса.

В работе предлагается подход к построению программы учебного курса на основе выбора центральной темы. В качестве примера центральной темы будет рассматриваться алгоритм AdaBoost. При этом материал курса логически разбивается на три части. В первой, вводной части излагаются фундаменталь-

ные результаты, относящиеся к математической теории машинного обучения. Однако материал подбирается и структурируется таким образом, чтобы во второй части можно было бы максимально подробно и детально проработать выбранную центральную тему. Третья часть посвящена развитию результатов и идей, заложенных в центральной теме.

При таком выборе центральной темы основной акцент учебного курса будет сделан на задачу классификации. Примеры, связанные с задачей восстановления регрессии, естественным образом возникнут в третьей части курса. Анализ алгоритма AdaBoost позволит рассмотреть проблематику вычислительной теории обучения в сравнении со статистической теорией обучения.

Предлагаемый подход к построению учебного курса является адаптивным. Он предполагает возможность изменения центральной темы. Для этого в первой, вводной части учебного курса предполагается выделение ядра, которое не должно изменяться при такой замене.

Важной частью построения учебного курса является его позиционирование по отношению к базовым и смежным учебным дисциплинам. В рассматриваемом случае предполагается, что учащийся обладает знаниями в объеме университетских курсов по действительному анализу [16, 17] и теории вероятностей [18, 19]. Сразу возникает ряд взаимосвязанных вопросов, детальному обсуждению которых, наряду с задачей построения адаптивной программы учебного курса, посвящено основное содержание данной работы. Кратко сформулируем их.

Достаточно ли этого базового объема знаний для освоения материала нового учебного курса? Как поступать, если ответ на этот вопрос отрицательный? Как обеспечить непрерывность математического образования? Необходимо суметь перекинуть своеобразный мост между базовыми дисциплинами и новым учебным курсом. Существует ряд тем, которые могут параллельно излагаться в рамках разных учебных курсов. Желательно по возможности избежать дублирования материала, согласуя структуру нового учебного курса с образовательной программой учебного заведения, где предполагается его чтение.

Перейдем к более подробному рассмотрению обозначенных вопросов.

1. Переход от задачи оценки параметров к задаче прогнозирования

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с организацией введения в предмет учебного курса. Как это было отмечено выше, от учащегося предполагается наличие начальной теоретической подготовки в области теории вероятностей и математической статистики [18, 19]. В результате построения подобного введения требуется достижение двух целей.

С одной стороны, требуется показать общность и преемственность методов между классическими разделами математической статистики и статистической теории обучения. С другой стороны, необходимо обозначить круг вопросов, характерных для статистической теории обучения.

Этих целей можно добиться, начав с рассмотрения классической задачи оценки параметров семейств вероятностных распределений, которая традиционно включается во все начальные курсы по математической статистике. Однако для решения этой задачи применить методы неасимптотической статистики, базирующиеся на использовании неравенств концентрации меры [20]. После этого можно перейти к рассмотрению примеров решения задачи прогнозирования, базирующихся на применении этих новых методов.

1.1. Неасимптотический подход в статистике

Рассмотрим схему испытаний Бернулли, в рамках которой проводится m независимых наблюдений над случайной величиной, принимающей значение 1 (успех) с вероятностью θ и значение 0 (неудача) с вероятностью $1 - \theta$. По результатам наблюдений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ требуется оценить значение параметра θ . Для этого можно воспользоваться приближенной оценкой этого параметра

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i.$$

Насколько качественным является это построенное приближение? Для ответа на этот вопрос зафиксируем два произвольно выбранных числовых параметра $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$. Первый параметр называется точностью, а второй параметр называется достоверностью. После этого следует оценить вероятность события $|\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta| \leq \varepsilon$ и проверить, что эта вероятность не меньше, чем $1 - \delta$.

Применяя центральную предельную теорему, можно получить следующую оценку убывания вероятности рассматриваемого события:

$$P^m \{ \mathbf{x} : \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta > \varepsilon \} \lesssim e^{\frac{-m\varepsilon^2}{2\theta(1-\theta)}}.$$

Асимптотическое неравенство не позволяет точно указать число наблюдений m , при котором вероятность рассматриваемого события не будет превосходить заданное значение δ . Этот факт является существенным недостатком, который может быть преодолен с помощью использования неравенств концентрации меры.

Применяя неравенство Хёфдинга, которое более подробно будет рассмотрено в подразд. 2.2, получим

$$P^m \{ \mathbf{x} : |\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta| > \varepsilon \} \leq 2e^{-2m\varepsilon^2}.$$

Ограничивая правую часть этого неравенства величиной δ , получим решение

$$m \geq m(\varepsilon, \delta) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln \left(\frac{2}{\delta} \right) \right\rceil.$$

Из описанного примера может быть выделена общая схема построения решения, которая обобщается и на другие классы задач. В этих задачах требуется

построить некоторый объект. В рассмотренном примере это была числовая характеристика θ . Однако изначально на природу такого объекта не накладываются никакие ограничения. В качестве такого объекта может выступать, например, функция или граф. Объект строится приближенно с помощью некоторого алгоритма, на вход которому подается набор значений (наблюдений, примеров), имеющих статистическую природу. При этом учитывается размер m этого набора. В рассмотренном примере это была величина $\theta(\mathbf{x})$. Имеется возможность оценить точность построенного приближения с помощью вещественного параметра ε . Для рассматриваемого алгоритма существует функция сложности $m(\varepsilon, \delta)$, зависящая от значений параметров точности и достоверности и обладающая следующим свойством. Если размер набора входных значений $m \geq m(\varepsilon, \delta)$, то с вероятностью не меньшей, чем $1 - \delta$, алгоритм построит приближения с точностью ε .

В описанной схеме естественным образом возникают два вопроса, поиск ответов на которые определяет два возможных направления исследований. Первый вопрос отражает статистический взгляд на проблемную область. В рамках этого направления строятся и анализируются оценки функций сложности $m(\varepsilon, \delta)$. При этом конструктивные вопросы построения соответствующих приближенных алгоритмов игнорируются. Второй вопрос отражает вычислительный взгляд на проблемную область. В качестве основного предмета исследований выступает сложность рассматриваемых приближенных алгоритмов. При переходе от задачи оценки параметров к задаче обучения функций эти два направления трансформируются, соответственно, в предмет исследований статистической и вычислительной теории обучения.

1.2. Распознавание прямоугольников

Переход к постановке задачи прогнозирования также можно осуществить, начав с рассмотрения некоторых демонстрационных примеров. В качестве одного из таких примеров кратко разберем задачу распознавания прямоугольников на плоскости. Впервые решение этой задачи было представлено в работе [21]. Рассмотрение этой задачи часто включается в учебные пособия [3, 7, 8] и лекционные курсы [22] по машинному обучению.

В задаче рассматриваются прямоугольники на плоскости, стороны которых параллельны координатным осям. Заметим, что каждый такой прямоугольник можно отождествить с характеристической функцией множества точек, лежащих внутри него. Предположим, что зафиксирован некоторый прямоугольник, о котором известна неполная информация. Имеется набор точек (примеров), о которых известно, лежат ли они внутри прямоугольника или нет. Требуется по этому набору точек построить приближенный прямоугольник. Для этого можно воспользоваться следующим алгоритмом. Из набора примеров выделяется множество точек, лежащих внутри известного прямоугольника. В качестве приближен-

ного прямоугольника выбирается минимальный относительно теоретико-множественного включения прямоугольник, содержащий это множество точек.

Делается предположение о том, что существует вероятностное распределение, заданное на множестве точек евклидовой плоскости. В соответствии с этим распределением генерируются примеры для построения приближенного прямоугольника. Это вероятностное распределение также используется для определения близости между двумя прямоугольниками. В качестве меры близости берется вероятность симметрической разности этих прямоугольников.

Для описанного алгоритма функция сложности имеет вид

$$m(\varepsilon, \delta) = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \ln \left(\frac{4}{\delta} \right) \right\rceil.$$

Следует отметить, что вид этой функции не зависит от вероятностного распределения.

Данный пример имеет важное методическое значение. Для закрепления практических навыков этот пример может быть обобщен на случай вещественного евклидова пространства любой фиксированной размерности.

2. Полнота базовых учебных дисциплин

Выделим ряд результатов, относящихся к теории вероятностей и теории меры, которые играют ключевую роль при изложении математической теории машинного обучения. При этом следует отметить, что эти результаты не включаются в базовые учебные курсы [16–18].

2.1. Задача бинарной классификации

Вначале остановимся на задаче бинарной классификации. Предположим, что задано некоторое непустое множество объектов x и множество меток $y = \{0, 1\}$. Произвольная функция вида $f : x \rightarrow y$ называется классификатором. Качество классификатора оценивается относительно вероятностной меры P , заданной на $x \times y$. Изначально на эту вероятностную меру не накладываются никакие ограничения. Требуется только, чтобы она была зафиксирована.

Вводится функция риска $L(f) = P\{f(x) \neq y\}$. Чем меньше риск классификатора, тем более высоко оценивается его качество. Оказывается, что для каждой вероятностной меры P существует классификатор f_P^* , обладающий наименьшим риском. Этот классификатор называется байесовским классификатором. Он устроен следующим образом. Можно считать, что P является распределением некоторого случайного вектора (X, Y) . В этом случае $f_P^*(x) = 1$, если $\mathbb{E}(Y | X = x) \geq 1/2$, иначе $f_P^*(x) = 0$.

При доказательстве этого утверждения впервые в учебном курсе возникает потребность в использовании разложения вероятностной меры вида $P = P_X \times P_{Y|X}$, где P_X — это маргинальное распределение случайного элемента X , а $P_{Y|X}$ — это регулярное условное распределение случайного элемента Y относительно X . Как правило, в курсах по теории вероятностей огра-

ничиваются рассмотрением частных случаев существования регулярной условной вероятности. Она может быть явным образом построена, если X и Y имеют дискретные распределения или вероятностная мера P является абсолютно непрерывной.

В общем случае ответ о существовании регулярного условного распределения дает теорема о дезинтеграции [23–25]. Для его существования достаточно, чтобы y было бы снабжено структурой так называемого стандартного измеримого пространства [26, 27]. В случае бинарной классификации, когда $y = \{0, 1\}$, это условие заведомо выполняется.

Отечественные учебники (например, [16–18]) этот результат не содержат. Традиционно изучается теорема Фубини, которую можно трактовать как частный случай теоремы о дезинтеграции. В учебнике [18] содержится материал, посвященный регулярному условному распределению случайного элемента относительно σ -алгебры. Можно сказать, что в этом материале в неявном виде содержится теорема о дезинтеграции. Однако явным образом структура вероятностной меры, заданной на произведении вероятностных пространств, там не изучается.

2.2. Неравенства концентрации меры

В статистической теории обучения особую важную роль играют так называемые неравенства концентрации меры [20]. Это прежде всего касается неравенства Хёфдинга. Например, в работе [7] неравенство Хёфдинга используется при доказательстве свойства равномерной обучаемости конечного класса гипотез, на него опирается доказательство фундаментальной теоремы PAC-обучения, оно лежит в основе метода валидации под названием "контроль на отложенных данных" (*hold out set*). Остановимся более подробно на этом неравенстве.

Неравенство Хёфдинга. Пусть ξ_1, \dots, ξ_m — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $|\mathbb{E}\xi_1| < \infty$, и существуют $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $P\{a \leq \xi \leq b\} = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P\left\{\left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \xi_j - \mathbb{E}\xi_1\right| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{\frac{-2m\varepsilon^2}{(b-a)^2}}.$$

Разберем метод контроля на отложенных данных, который позволит в дальнейшем сделать ряд важных выводов. Вначале необходимо ввести ряд базовых определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

В задаче прогнозирования алгоритм обучения осуществляет построение функции, используя набор примеров. Каждый такой пример z представляет собой пару (x, y) , где y — это значение, которое должна принимать построенная функция на аргументе x . Элементы множества всех функций, которые могут быть построены с помощью алгоритма обучения, называются гипотезами. Для оценки того, насколько гипотеза h удовлетворяет примеру z , используются так называемые функции потерь. Функция потерь

имеет вид $l(h, z)$. Чем меньше значение этой функции, тем лучше гипотеза соответствует примеру. В задаче классификации функция потерь обычно задается формулой $h(x) \neq y$. На основе функции потерь вводятся понятия истинного риска

$$L(h) = \mathbb{E}l(h, \bullet)$$

и эмпирического риска

$$L_S(h) = \frac{1}{|S|} \sum_{z \in S} l(h, z),$$

где S — рассматриваемый набор примеров. Эти величины используются для оценки качества гипотезы, построенной алгоритмом классификации. Понятно, что основной интерес представляет значение истинного риска $L(h)$. Однако в большинстве случаев его вычисление в явном виде не представляется возможным. В распоряжении имеется только значение эмпирического риска $L_S(h)$. Возникает важный вопрос о том, как связаны между собой эти величины.

Метод контроля на отложенных данных дает следующий ответ. Все имеющиеся примеры делятся случайным образом на два набора S и V . Соотношение размеров этих наборов может варьироваться, но обычно разделение происходит пополам. На основе первого набора алгоритм обучения строит гипотезу h_S . Тогда с вероятностью не меньше, чем $1 - \delta$, выполняется оценка

$$L(h_S) \leq L_V(h_S) + \sqrt{\frac{\ln(2/\delta)}{2|V|}}.$$

Этот факт является простым следствием из неравенства Хёфдинга, где в качестве случайных величин берутся $\xi_j = l(h_S, z_j)$, где z_j — это j -й пример в наборе V .

Описанная ситуация во многом является типичной. Поэтому для более основательного понимания математических основ машинного обучения желательно иметь глубокое понимание методов и подходов, лежащих в основе построения неравенств концентрации меры. Следовательно, актуальным представляется вопрос о включении данного материала в учебный курс.

Существуют две принципиальные ситуации. Возможно, ранее, в рамках смежных учебных дисциплин, таких как, например, вероятностные методы в комбинаторике [28] или математические основы теории риска [29], этот материал уже был разобран. В этом случае, наверное, достаточно будет только напоминания основных формулировок и фактов. В противном случае этот материал должен составить важную часть вводной части курса, как это сделано в работах [8, 22, 29].

3. Структура учебного курса

Разберем более подробно возможную структуру экспериментального опробованного учебного курса, у которого в качестве центральной темы был выбран алгоритм AdaBoost. Для этого сначала приведены основные факты, отражающие особенности этого ал-

горитма. После этого дано представление программы учебного курса с краткими комментариями к ней. В заключение представлен краткий обзор использованной учебно-методической литературы.

3.1. Центральная тема

Изложим основную идею, лежащую в основе алгоритма AdaBoost, не приводя при этом его формального описания, которое можно найти в работах [7, 8, 10]. Как и любой алгоритм обучения, AdaBoost на вход получает набор примеров S и возвращает итоговый классификатор h_S . Кроме того, имеются два настраиваемых параметра, а именно T — число раундов (итераций цикла) и W — слабый алгоритм обучения. В рамках каждого раунда вычисляется промежуточный классификатор h_t и его вес w_t ($t = 1, \dots, T$). Итоговый классификатор имеет вид

$$h_S = \text{sign}(w_1 h_1 + w_2 h_2 + \dots + w_T h_T).$$

Промежуточные классификаторы вычисляются с помощью слабого учителя W . Понятие слабого учителя интерпретируется следующим образом. Слабый учитель способен построить классификатор, у которого значение вычисленного риска не будет превосходить значение $1/2 - \gamma$ для некоторого фиксированного $\gamma \in (0, 1/2)$. Точнее, вероятность такого события будет стремиться к единице с ростом размера набора обучающих примеров. На вход слабому учителю помимо обучающих примеров передаются также их веса. Если на предыдущем раунде работы алгоритма был построен промежуточный классификатор, который плохо распознает некоторый пример, то вес этого примера будет увеличен.

В следующей теореме формулируется основной результат, касающийся алгоритма AdaBoost [7].

Теорема. Пусть $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ и S — набор примеров.

Если на каждой итерации цикла алгоритма AdaBoost эмпирический риск построенной гипотезы $\varepsilon_t \leq \frac{1}{2} - \gamma$

($t = 1, \dots, T$), то для эмпирического риска итогового классификатора выполняется оценка $L_S(h_S) \leq e^{-2\gamma^2 T}$.

Приведенные сведения об алгоритме AdaBoost задают основные направления, по которым должно осуществляться проектирование учебного курса. Первое направление связано с изучением существующих моделей обучения, приводящих к понятию слабой обучаемости. В рамках второго направления необходимо получить ответ на вопрос о том, как связаны между собой истинный и эмпирический риски.

Напомним, что точность работы классификатора определяется значением истинного риска, которое в большинстве случаев не представляется возможным вычислить. Приходится использовать в качестве его приближения значение эмпирического риска. В частности, в представленной выше теореме дается оценка эмпирического риска для классификатора, построенного с помощью алгоритма AdaBoost.

Необходимо выяснить, насколько и в каких случаях эта оценка является содержательной с практической точки зрения.

3.2. Программа учебного курса

Опишем программу полугодового учебного курса. Будем исходить из возможности проведения 15 лекционных занятий.

Лекции 1 и 2 носят вспомогательный характер. В этих лекциях напоминаются основные определения и факты, относящиеся к теории меры и теории вероятностей. Довольно подробно обсуждается вопрос построения меры на произведении измеримых пространств и теорема о дезинтеграции. В виде обзора описывается аппарат условных математических ожиданий. С его помощью доказываются основные неравенства концентрации меры. Более подробно тематика этих двух лекций описана в разд. 2 настоящей работы.

Лекция 3 посвящена введению в задачу распознавания функций. В ней рассматривается ряд иллюстрирующих примеров, включая задачу распознавания прямоугольников на плоскости, описанную в подразд. 1.2 настоящей статьи, и задачу распознавания конъюнкций [3]. Дается точное решение задачи классификации и задачи восстановления регрессии для заданного распределения вероятностей, в соответствии с которым генерируются тренировочные примеры. Это решение для задачи классификации разобрано в подразд. 2.1 настоящей статьи.

Лекции 4 и 5 посвящены определению базовых формальных моделей обучения. Рассматриваются модели PAC-обучения, агностического PAC-обучения (APAC-обучения) и равномерного обучения. В общем виде даются определения для функций потерь и функций риска. Вводится понятие метода минимизации эмпирического риска. Устанавливается, что модель PAC-обучения является частным случаем модели APAC-обучения. Полностью разбирается случай конечных классов гипотез. Доказывается, что конечный класс гипотез обладает свойствами PAC-обучения, APAC-обучения и равномерного обучения. Анализируется структура ошибки обучения.

Лекции 6 и 7 посвящены установлению критерия обучаемости бесконечного класса гипотез для задачи бинарной классификации. С этой целью вводится понятие размерности Вапника—Червопенкиса и определяется функция роста для класса гипотез. Доказывается фундаментальная теорема PAC-обучения [7], утверждающая эквивалентность понятий PAC-обучаемости, APAC-обучаемости, равномерной обучаемости класса гипотез и наличия у него конечной размерности Вапника—Червопенкиса. Доказательство этой теоремы опирается на целый ряд промежуточных утверждений, которые имеют и собственную ценность. К их числу относится теорема "об отсутствии бесплатных завтраков" (*No-Free-Lunch theorem*), комбинаторная лемма

Сауэра—Шелаха и теорема, в которой дается оценка отличия эмпирического риска от истинного, выраженная через функцию роста класса гипотез.

Лекция 8 посвящена численному варианту фундаментальной теоремы PAC-обучения, в которой даются нижние и верхние оценки функций сложности обучения класса гипотез для каждой из рассматриваемых моделей.

Лекция 9 посвящена первому обобщению базовых моделей обучения. Дается определение неравномерного обучения. Доказывается теорема о представлении неравномерно обучаемого класса гипотез в виде счетного объединения равномерно обучаемых классов. Вводится понятие метода структурной минимизации риска. Устанавливается связь между этим методом и свойством неравномерной обучаемости.

Лекция 10 посвящена задачам выбора и валидации моделей обучения. Рассматриваются два подхода. Один подход базируется на использовании метода структурной минимизации риска. Другой подход основан на использовании методов скользящего контроля, один из которых (метод контроля на отложенных данных) был упомянут в подразд. 2.2 настоящей статьи.

Лекции 11, 12 и 13 посвящены изложению центральной темы учебного курса, описанной в подразд. 3.1. Изложение начинается с определения модели слабой обучаемости как обобщения модели PAC-обучения. Устанавливается важный с точки зрения статистической теории обучения результат о том, что класс гипотез, обладающий свойством слабой обучаемости, является также PAC-обучаемым. Описываются и анализируются два метода бустинга [10]: алгоритм Шапиро [3], исторически являющийся первым представителем этого класса методов, и алгоритм AdaBoost. Дается оценка размерности Вапника—Червоненкиса класса линейных комбинаций гипотез.

Лекция 14 посвящена решению задач классификации и восстановления регрессии с помощью деревьев принятия решений. Разбираются два алгоритма C4.5 [30] и CART (*Classification and Regression Trees*) [31].

Лекция 15 содержит изложение метода градиентного бустинга [32] применительно к решению задачи восстановления регрессии.

Как это уже было отмечено ранее, структура учебного курса делится на три логические части. Лекции 1—10 составляют первую вводную часть. Лекции 11—13 составляют вторую часть, посвященную изложению центральной темы. Лекции 14—15 составляют третью заключительную часть. В ней получают свое дальнейшее развитие идеи и подходы из центральной темы. Большая часть учебного курса посвящена вопросам, связанным с решением задачи бинарной классификации. По этой причине, в качестве своеобразной компенсации, в третьей части акцент делается на решение задачи восстановления регрессии.

Первые две лекции носят вспомогательный характер. В некоторых ситуациях материал этих лекций может быть опущен. Как уже было отмечено ранее, материал, относящийся к уравнениям концентрации меры, может содержаться в других учебных курсах [28, 29]. В этом случае изложение этого материала целесообразно пропустить.

Материал лекций 3—10 составляет своеобразное "ядро" учебного курса, которое скорее всего будет в нем оставаться при смене центральной темы. Во всяком случае это будет справедливым, если центральная тема относится к задаче классификации. Возможно в некоторых случаях придется изменить материал вводных лекций. Например, если в качестве центральной темы выбрать метод опорных векторов, то целесообразно предварительно изложить ряд фактов, относящихся к выпуклой оптимизации.

Если новая центральная тема будет относиться к задаче восстановления регрессии, то в качестве ядра учебного курса будет выступать материал лекций 4—5.

3.3. Методические материалы

Выделим пять групп учебно-методических материалов, которые были использованы при создании текущего варианта программы учебного курса. Заметим, что материалы этих групп пересекаются.

Материалы по базовым учебным дисциплинам. В эту группу можно включить отечественные учебники по действительному анализу [16, 17] и теории вероятностей [18]. Однако, как это было отмечено ранее, ряд важных тем в них либо вовсе не затрагивается, либо освещается недостаточно подробно. Это касается в первую очередь изучения структуры меры, заданной на произведении измеримых пространств, и теоремы о дезинтеграции. Кроме того, изложение материала в этих учебниках базируется на разных подходах. Например, в работе [18] активно используется аппарат π - λ -систем, который в работах [16, 17] не упоминается вовсе.

Этих недостатков лишены современные зарубежные учебные пособия о теории вероятностей [23—25], знакомство с которыми представляется полезным.

Справочные материалы. В качестве типового примера справочной книги можно привести работу [33]. Она состоит из независимых друг от друга глав, каждая из которых посвящена изложению одного из методов машинного обучения. Каждая глава имеет своего автора. Это приводит к дублированию определений и отсутствию согласованной системы обозначений. Тем не менее, для человека, имеющего базовое представление о предмете, эта справочная книга позволит углубиться в интересующую его тему.

К разряду справочных пособий можно также отнести работу [34]. В ней автор пытается охватить большое число тем, относящихся к практически всем популярным разделам машинного обучения. Сравнительно небольшой объем книги приводит к тому, что в некоторых местах изложение становится по-

верхностным. В то же время эта книга может быть полезна для первичного знакомства с интересующим читателя материалом.

Особый интерес представляет пособие [35]. В нем автор в структурированном виде приводит результаты по основным разделам математики, включая топологию, теорию меры и интеграла, функциональный анализ и выпуклую оптимизацию, которые необходимы для глубокого изучения методов машинного обучения. В конце книги достаточно подробно рассматриваются модели нейронных сетей, методы линейной регрессии и метод опорных векторов.

Материалы вводной части. Как уже было отмечено ранее, существует несколько подходов к организации изложения основ статистической теории обучения. Можно попытаться сразу охватить все разделы, а можно сконцентрироваться только на одной задаче, например, задаче прогнозирования. При этом изложение можно построить как с точки зрения задачи классификации, так и с точки зрения задачи восстановления регрессии. В этом случае полезными могут оказаться материалы [13–15].

Материалы для выбора центральной темы. Существует ряд монографий, посвященных избранным разделам теории машинного обучения. Здесь можно отметить монографию [10], посвященную целиком методам бустинга, и монографию [36], которая содержит подробное введение в методы глубокого обучения. Подобные монографии не включают в себя изложение базовых основ и поэтому требуют от читателя наличия предварительной подготовки. В то же время они содержат материал, который может использоваться для выбора и изложения центральной темы учебного курса.

Материалы существующих учебных курсов. Существует ряд учебных пособий [7, 8], которые часто берут в основу построения учебных курсов. Очень часто в этом качестве выступает работа [7]. Ее авторы имеют многолетний опыт чтения курса по статистической теории обучения. Фактически это пособие выросло из конспектов лекций этого курса. Несмотря на огромную популярность этого учебника, в нем содержится некоторое количество неточностей. Эти неточности часто некритически тиражируются в тех учебных курсах, которые на нем базируются.

В заключение в качестве примера современно-го и достаточно подробного изложения статистической теории обучения можно привести конспект лекций [22].

Заключение

Представленный в статье подход был апробирован при создании специального учебного курса по математическим основам машинного обучения, который читается на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова. Целевая аудитория этого курса представлена двумя группами слушателей. Первая группа слушателей состоит из студен-

тов четвертого курса. Ориентируясь именно на эту группу, автор делает предположение о составе базового учебного материала, владение которым можно ожидать от потенциальных слушателей.

Вторую группу слушателей составляют аспиранты, обучающиеся по специальности 05.13.17 "Теоретические основы информатики". Интересы этой группы во многом повлияли на текущий состав программы курса. Присутствие таких тем, как методы бустинга, методы валидации и выбора моделей обучения, а также алгоритмы построения деревьев принятия решений было обусловлено следующей целью — возможность использовать аспирантом этот учебный курс как составную часть подготовки к сдаче экзамена кандидатского минимума по специальности.

Список литературы

1. James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R. An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R (2nd edition). — Springer, 2021. — 648 p.
2. Geron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems, 2nd edition. — O'Reilly Media, 2019. — 856 p.
3. Kearns M. J., Vazirani U. V. An Introduction to Computational Learning Theory. — MIT Press, 1994. — 221 p.
4. Valiant L. G. A theory of the learnable // Communications of the ACM. — 1984. — Vol. 27, No. 11. — P. 1134–1142.
5. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction, 2nd edition. — Springer, 2016. — 767 p.
6. Devroye L., Györfi L., Lugosi G. A Probabilistic Theory of Pattern Recognition. — Springer, 1996. — 653 p.
7. Shalev-Shwartz S., Ben-David S. Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms. — Cambridge University Press, 2014. — 410 p.
8. Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A. Foundations of Machine Learning, 2nd edition. — MIT Press, 2018. — 504 p.
9. Vidyasagar M. Learning and Generalisation: With Applications to Neural Networks, 2nd Edition. — Springer, 2003. — 509 p.
10. Schapire R. E., Freund Y. Boosting: Foundations and Algorithms. — MIT Press, 2014. — 544 p.
11. Devroye L., Lugosi G. Combinatorial Methods in Density Estimation. — Springer, 2001. — 221 p.
12. Gan G., Ma C., Wu J. Data Clustering: Theory, Algorithms, and Applications. — SIAM, 2008. — 184 p.
13. Bousquet O., Boucheron S., Lugosi G. Theory of classification: a survey of recent advances // ESAIM Probability and Statistics. — 2005. — Vol. 9. — P. 323–375.
14. Cucker F., Smale S. On the mathematical foundations of learning // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2001. — Vol. 39, No. 1. — P. 1–49.
15. Cucker F., Zhou D. X. Learning Theory: An Approximation Theory Viewpoint. — Cambridge, 2007. — 238 p.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 576 с.
17. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: Факториал, 1998. — 160 с.
18. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2004. — Кн. 1. — 520 с.
19. Лагутин М. Б. Наглядная математическая статистика: учебное пособие. — 2-е изд., испр. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 472 с.

-
-
20. **Boucheron S., Lugosi G., Massart P.** Concentration Inequalities: A Nonasymptotic Theory of Independence. — Oxford University Press, 2016. — 496 p.
21. **Blumer A., Ehrenfeucht A., Haussler D., Warmuth M. K.** Learnability and the Vapnik–Chervonenkis dimension // Journal of the ACM. — 1989. — Vol. 36, No. 4. — P. 929–965.
22. **Hajek B., Raginsky M.** ECE 543: Statistical Learning Theory. Department of Electrical and Computer Engineering and the Coordinated Science Laboratory University of Illinois at Urbana-Champaign, March 18, 2021. — 207 p. URL: <http://maxim.ece.illinois.edu/teaching/SLT/SLT.pdf>
23. **Cinlar E.** Probability and Stochastics. — Springer, 2011. — 572 p.
24. **Klenke A.** Probability Theory: A Comprehensive Course, 3rd edition. — Springer, 2020. — 730 p.
25. **Kallenberg O.** Foundations of Modern Probability, 3rd edition. — Springer, 2021. — 958 p.
26. **Bercovici H., Brown A., Pearcy C.** Measure and Integration. — Springer, 2016. — 311 p.
27. **Garling D. J. H.** Analysis on Polish Spaces and an Introduction to Optimal Transportation. — Cambridge University Press, 2017. — 356 p.
28. **Алон Н., Спенсер Дж.** Вероятностный метод: Учеб. пособ. — Пер. 2-го англ. изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 320 с.
29. **Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я.** Математические основы теории риска: Учеб. пособ. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 620 с.
30. **Quinlan J. R.** C4.5: Programs for Machine Learning. — Morgan Kaufmann, 1993. — 302 p.
31. **Breiman L., Friedman J. H., Olshen R. A., Stone C. J.** Classification and Regression Trees. — CRC Press, 1984. — 368 p.
32. **Friedman J. H.** Greedy function approximation: A gradient boosting machine // The Annals of Statistics. — 2001. — Vol. 29, No. 5. — P. 1189–1232.
33. **Wu X., Kumar V.** The Top Ten Algorithms in Data Mining. — Chapman and Hall/CRC, 2009. — 232 p.
34. **Phillips J. M.** Mathematical Foundations for Data Analysis. — Springer, 2021. — 304 p.
35. **Simovici D.** Mathematical Analysis for Machine Learning and Data Mining. — WSPC, 2018. — 986 p.
36. **Calin O.** Deep Learning Architectures: A Mathematical Approach. — Springer, 2020. — 791 p.
-
-

Towards an Adaptive Educational Course on the Mathematical Foundations of Machine Learning

A. S. Shundeev, alex.shundeev@gmail.com, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation

Corresponding author:

Shundeev Aleksandr S., Leading Researcher, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation
E-mail: alex.shundeev@gmail.com

*Received on July 27, 2021
Accepted on August 13, 2021*

Today the development of information technology is closely related to the creation and application of machine learning and data analysis methods. In this regard, the need for training specialists in this area is growing.

Very often, the study of machine learning methods is combined with the study of a certain programming language and the tools of its specialized library. This approach is undoubtedly justified, because it provides the possibility of accelerated application of the knowledge gained in practice. At the same time, it should be noted that with this approach, it is rather not machine learning methods that are studied, but a certain set of methodological techniques for using the tools of the specialized library.

The presented work is devoted to the experience of creating an adaptive educational course on the mathematical foundations of machine learning. This course is aimed at undergraduate and graduate students of mathematical specialties. It is divided into core and variable parts. The obligatory core part is built around the PAC learning model and the binary classification problem. Within the variable part, issues of the weak learning model and the boosting methods are considered. Also a methodology of changing the variable part of the course is discussed.

Keywords: educational course, machine learning, PAC learning, boosting

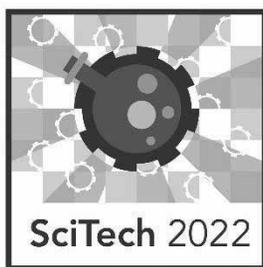
For citation:

Shundeev A. S. Towards an Adaptive Educational Course on the Mathematical Foundations of Machine Learning, *Programmnyaya Inzheneriya*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 431–439.

DOI: [10.17587/prin.12.431-439](https://doi.org/10.17587/prin.12.431-439)

References

1. **James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R.** *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R*, 2nd edition, Springer, 2021, 648 p.
2. **Geron A.** *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems*, 2nd edition, O'Reilly Media, 2019, 856 p.
3. **Kearns M. J., Vazirani U. V.** *An Introduction to Computational Learning Theory*, MIT Press, 1994, 221 p.
4. **Valiant L. G.** A theory of the learnable, *Communications of the ACM*, 1984, vol. 27, no. 11, pp. 1134–1142.
5. **Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.** *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, 2nd edition, Springer, 2016, 767 p.
6. **Devroye L., Györfi L., Lugosi G.** *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Springer, 1996, 653 p.
7. **Shalev-Shwartz S., Ben-David S.** *Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms*, Cambridge University Press, 2014, 410 p.
8. **Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A.** *Foundations of Machine Learning*, 2nd edition, MIT Press, 2018, 504 p.
9. **Vidyasagar M.** *Learning and Generalisation: With Applications to Neural Networks*, 2nd Edition, Springer, 2003, 509 p.
10. **Schapire R. E., Freund Y.** *Boosting: Foundations and Algorithms*, MIT Press, 2014, 544 p.
11. **Devroye L., Lugosi G.** *Combinatorial Methods in Density Estimation*, Springer, 2001, 221 p.
12. **Gan G., Ma C., Wu J.** *Data Clustering: Theory, Algorithms, and Applications*, SIAM, 2008, 184 p.
13. **Bousquet O., Boucheron S., Lugosi G.** Theory of classification: a survey of recent advances, *ESAIM Probability and Statistics*, 2005, vol. 9, pp. 323–375.
14. **Cucker F., Smale S.** On the mathematical foundations of learning, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2001, vol. 39, no. 1, pp. 1–49.
15. **Cucker F., Zhou D. X.** *Learning Theory: An Approximation Theory Viewpoint*, Cambridge, 2007, 238 p.
16. **Kolmogorov A. N., Fomin S. V.** *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza*, FIZMATLIT, 2017, 576 p. (in Russian).
17. **D'jachenko M. I., Ul'janov P. L.** *Mera i integral*, Faktorial, 1998, 160 p. (in Russian).
18. **Shirjaev A. N.** *Verojatnost'*. Kniga 1, MCNMO, 2004, 520 p. (in Russian).
19. **Lagutin M. B.** *Nagljadnaja matematicheskaja statistika*, BINOM. Laboratorija znaniy, 2009, 472 p. (in Russian).
20. **Boucheron S., Lugosi G., Massart P.** *Concentration Inequalities: A Nonasymptotic Theory of Independence*, Oxford University Press, 2016, 496 p.
21. **Blumer A., Ehrenfeucht A., Haussler D., Warmuth M. K.** Learnability and the Vapnik–Chervonenkis dimension, *Journal of the ACM*, 1989, vol. 36, no. 4, pp. 929–965.
22. **Hajek B., Raginsky M.** ECE 543: Statistical Learning Theory, Department of Electrical and Computer Engineering and the Coordinated Science Laboratory University of Illinois at Urbana-Champaign. March 18, 2021, available at: <http://maxim.ece.illinois.edu/teaching/SLT/SLT.pdf>
23. **Cinlar E.** *Probability and Stochastics*, Springer, 2011, 572 p.
24. **Klenke A.** *Probability Theory: A Comprehensive Course*, 3rd edition, Springer, 2020, 730 p.
25. **Kallenberg O.** *Foundations of Modern Probability*, 3rd edition, Springer, 2021, 958 p.
26. **Bercovici H., Brown A., Percy C.** *Measure and Integration*, Springer, 2016, 311 p.
27. **Garling D. J. H.** *Analysis on Polish Spaces and an Introduction to Optimal Transportation*, Cambridge University Press, 2017, 356 p.
28. **Alon N., Spencer J. H.** *The Probabilistic Method*, 2nd edition, Wiley-Interscience, 2000, 328 p.
29. **Korolev V. Ju., Bening V. E., Shorgin S. Ja.** *Matematicheskie osnovy teorii riska*, FIZMATLIT, 2011, 620 p. (in Russian).
30. **Quinlan J. R.** *C4.5: Programs for Machine Learning*, Morgan Kaufmann, 1993, 302 p.
31. **Breiman L., Friedman J. H., Olshen R. A., Stone C. J.** *Classification and Regression Trees*, CRC Press, 1984, 368 p.
32. **Friedman J. H.** Greedy function approximation: A gradient boosting machine, *The Annals of Statistics*, 2001, vol. 29, no. 5, pp. 1189–1232.
33. **Wu X., Kumar V.** *The Top Ten Algorithms in Data Mining*, Chapman and Hall/CRC, 2009, 232 p.
34. **Phillips J. M.** *Mathematical Foundations for Data Analysis*, Springer, 2021, 304 p.
35. **Simovici D.** *Mathematical Analysis for Machine Learning and Data Mining*, WSPC, 2018, 986 p.
36. **Calin O.** *Deep Learning Architectures: A Mathematical Approach*, Springer, 2020, 791 p.



24-25 февраля 2022 г. в г. Барнаул пройдет
II Международный научно-практический форум
по передовым достижениям
в науке и технике
(SciTech 2022)

Организатор форума: Ассоциация поддержки научных исследований.

Цель форума – теоретический анализ фундаментальных и прикладных вопросов научно-технологического развития России, прорывных технологий и передовых научных исследований в области органической и неорганической химии, физики, энергетики, материаловедения, компьютерных, инженерных, а также смежных наук.

Материалы форума будут опубликованы в коллективных научных монографиях, издаваемых в рамках книжных серий ведущего мирового издательства «Springer Nature». Каждая глава будет проиндексирована в наукометрических базах «Scopus» (Q3-Q4) и «Web of Science». Специально отобранные статьи будут отправлены на публикацию в высокорейтинговые научные журналы.

ПРОБЛЕМАТИКА И СЕКЦИИ

Форум станет уникальной площадкой для обсуждения актуальных вопросов научно-технологического развития России, прорывных технологий и передовых научных исследований.

Секции

1. Новая парадигма научно-технологического развития России и мира.
2. Достижения в области интеллектуальных систем и вычислений.
3. «Умные» системы и инновации.
4. Фундаментальные и прикладные исследования в точных науках.
5. Новые материалы и технологии: проблемы, достижения, перспективы.
6. Будущее энергетики: в поисках инновационной и устойчивой модели развития.
7. Сельскохозяйственные и продовольственные системы: технологические вызовы и перспективы развития.
8. Современное STEM-образование для опережающего развития.

КОНТАКТЫ

Петерс Кристина Андреевна

Тел.: +7 (3852) 73-05-82. Email: mail@conferences.science

<https://conferences.science/conferences/scitech-2022.html>

ООО "Издательство "Новые технологии". 107076, Москва, ул. Матросская Тишина, д. 23, стр. 2
Технический редактор *Е. М. Патрушева*. Корректор *Е. В. Комиссарова*

Сдано в набор 13.09.2021 г. Подписано в печать 15.10.2021 г. Формат 60×88 1/8. Заказ PI821
Цена свободная.

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru

Рисунки к статье К. Ф. Ивановой
 «ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РЯДОВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ»

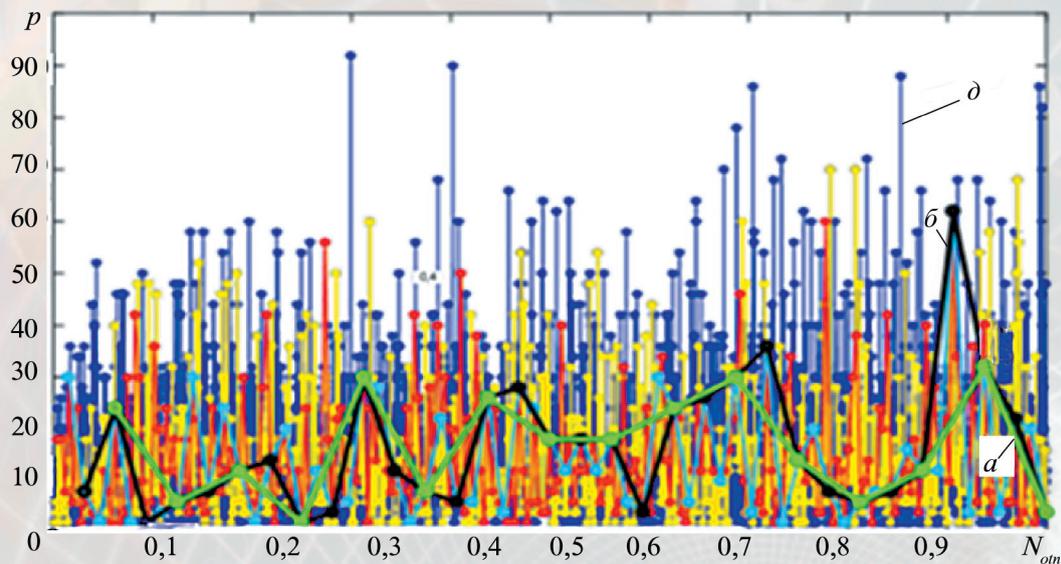


Рис. 7. Совместное распределение кривых масштабированного ряда длиной $n = 2^{19}$ в точках, соответствующих периодам m , равным $2^{15}; 2^{14}; 2^{13}; 2^{11}; 2^9; 2^4$; нижние ломаные соответствуют графикам рис. 6, $a - k = 2^4 (m = 2^{15})$; рис. 6, $b - k = 2^5 (m = 2^{14})$; верхняя зависимость – рис. 6, $d - k = 2^{15} (m = 2^4)$

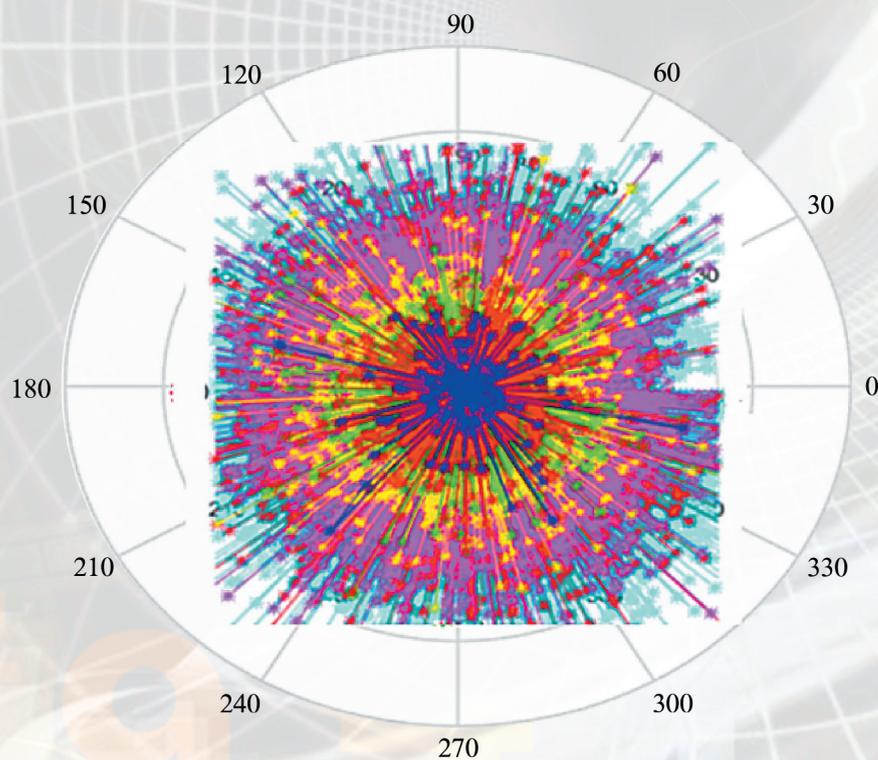
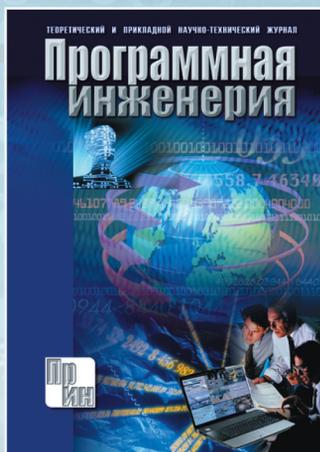


Рис. 8. Распределение кривых ИРПЧ с различными периодами масштабирования ИРПЧ длиной $n = 2^{19}$

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

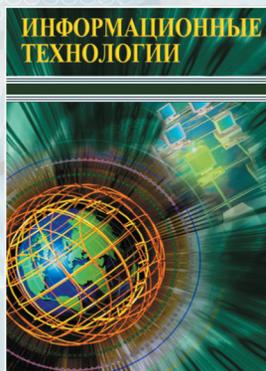
выпускает научно-технические журналы



Теоретический и прикладной научно-технический журнал **ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ**

В журнале освещаются состояние и тенденции развития основных направлений индустрии программного обеспечения, связанных с проектированием, конструированием, архитектурой, обеспечением качества и сопровождением жизненного цикла программного обеспечения, а также рассматриваются достижения в области создания и эксплуатации прикладных программно-информационных систем во всех областях человеческой деятельности.

Подписной индекс по Объединенному каталогу
«Пресса России» – 22765



Ежемесячный теоретический
и прикладной научно-
технический журнал

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития основных направлений в области разработки, производства и применения информационных технологий.

Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 72656

Междисциплинарный
теоретический и прикладной
научно-технический журнал

НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития нано- и микросистемной техники, рассматриваются вопросы разработки и внедрения нано микросистем в различные области науки, технологии и производства.



Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 79493



Ежемесячный теоретический
и прикладной
научно-технический журнал

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

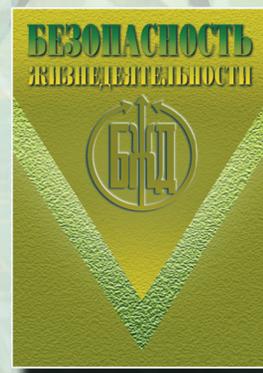
В журнале освещаются достижения в области мехатроники, интегрирующей механику, электронику, автоматизацию и информатику в целях совершенствования технологий производства и создания техники новых поколений. Рассматриваются актуальные проблемы теории и практики автоматического и автоматизированного управления техническими объектами и технологическими процессами в промышленности, энергетике и на транспорте.

Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 79492

Научно-практический
и учебно-методический журнал

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В журнале освещаются достижения и перспективы в области исследований, обеспечения и совершенствования защиты человека от всех видов опасностей производственной и природной среды, их контроля, мониторинга, предотвращения, ликвидации последствий аварий и катастроф, образования в сфере безопасности жизнедеятельности.



Подписной индекс по
Объединенному каталогу
«Пресса России» – 79963

Адрес редакции журналов для авторов и подписчиков:

107076, Москва, ул. Матросская Тишина, д. 23, стр. 2, оф. 45. Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ".

Тел.: (499) 270-16-52. E-mail: antonov@novtex.ru