

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 5 (158)

май

2014

Редакционный совет:

АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.
КАЛЯЕВ И. А., чл.-корр. РАН, проф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.
СИРОТКИН О. С., чл.-корр. РАН, проф.
СОЙФЕР В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.
ЮШЕНКО А. С., д. т. н., проф.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.
ВОСТРИКОВ А. С., д. т. н., проф.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.
КУЗЬМИН Н. Н., к. т. н., доц.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс., с. н. с.
ТИМОФЕЕВ А. В., д. т. н., проф.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.
ШАЛОБАЕВ Е. В., к. т. н., доц.
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Жабко А. П.** Анализ устойчивости гироскопических систем с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова. 3
Шелудько А. С., Ширяев В. И. Алгоритм минимаксной фильтрации для одномерного хаотического процесса 8

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Андривевский Б. Р., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А., Погромский А. Ю.** Распределенное управление нелинейной производственной системой 13
Раков В. И., Захарова О. В. Исследование вычислительных возможностей повышения быстродействия цифровых регуляторов для приводов технологического оборудования. Часть 2. Ускорение вычислительных операций 25
Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш., Насибуллаев И. Ш. Исследование динамических процессов в элементах топливной автоматики 31

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Градецкий В. Г., Ермолов И. Л., Князьков М. М., Семёнов Е. А., Суханов А. Н.** Кинематическая модель экзоскелета руки человека и определение ошибки позиционирования 37
Жиденко И. Г., Кутлубаев И. М. Методика определения сигналов управления антропоморфным манипулятором 41

Журнал в журнале

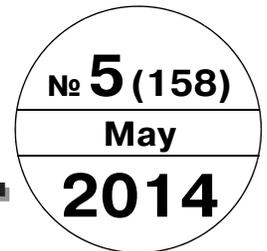
"УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

- Кабанов С. А., Кабанов Д. С.** Оптимальное управление разворотом самолета по различным критериям 48
Фирсов С. Н. Обеспечение функциональной устойчивости системы стабилизации и ориентации малогабаритного автономного летающего изделия. 54
Лебедев Г. Н., Зо Мин Тайк. Синтез оптимального управления боковым движением воздушных или речных судов при пересечении их маршрутов под произвольным углом 61
Чувашева Е. С., Чувашев С. Н. Математическое моделирование возможности обнаружения высокоскоростных летательных аппаратов в полете по инфракрасному излучению 69

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Editorial Council:

ALIEV T. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 ANSHAKOV G. P., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 BOLOTNIK N. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 VASILYEV S.N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 KALYAEV I. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KRASNEVSKIY L. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KUZNETSOV N. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 LEONOV G. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 MATVEENKO A. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 MIKRIN E. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PESHEKHONOV V. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 REZCHIKOV A. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SEBRYAKOV G. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SIGOV A. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 SIROTKIN O. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SOJFER V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SOLOVJEV V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SOLOMENTSEV Yu. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FEDOROV I. B., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 CHENTSOV A. G., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 CHERNOUSKO F. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 SCHERBATYUK A. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 YUSUPOV R. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PUTOV V. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 YUSCHENKO A. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu.

Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 ANTONOV B. I.
 ARSHANSKY M. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 BUKOV V. N., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 VITTIKH V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 VOSTRIKOV A. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 GRADETSKY V. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 IVCHENKO V. D., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 ILYASOV B. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KOLOSOV O. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KOROSTELEV V. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KUZMIN N. N., Cand. Sci. (Tech.), ass. prof.
 LEBEDEV G. N., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 LOKHIN V. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PAVLOVSKY V. E., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 PROKHOROV N. L., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PSHIKHOPOV V. Kh., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 RAPOPORT E. Ya., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SERGEEV S. F., Dr. Sci. (Psychol.), prof.
 TIMOFEEV A. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FILARETOV V. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FRADKOV A. L., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FURSOV V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SHALOBAYEV E. V., Cand. Sci. (Tech.), ass. prof.
 YUREVICH E. I., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E.V.

CONTENTS

METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P.** Stability Analysis of Gyroscopic Systems with Delay Via the Lyapunov Direct Method. 3
Sheludko A. S., Shiryaev V. I. Minimax Filtering Algorithm for One-Dimensional Chaotic Process. 8

AUTOMATION AND CONTROL OF INDUSTRIAL AND TECHNOLOGIC PROCESSES

- Andrievskii B. R., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Pogromsky A. Y.** Observer-Based Distributed Control of Production Line 13
Rakov V. I., Zakharova O. V. About Computing Opportunities of Increase of Speed of Digital Regulators for Drives of Processing Equipment. Part 2. Reduction of Time of Calculations 25
Denisova E. V., Nasibullaeva E. Sh., Nasibullayev I. Sh. Investigation Method of Dynamic Processes in the Fuel Elements of Automation 31

RODOTIC SYSTEMS

- Gradetsky V. G., Ermolov I. L., Knyazkov M. M., Semyonov E. A., Sukhanov A. N.** The Kinematic Model of the Human Arm Exoskeleton and Determination of Positioning Errors 37
Zhidenko I. G., Kutlubayev I. M. Technique of Definition of Control Signals Anthropomorphic Manipulator. 41

Journal within journal

"CONTROL AND INFORMATICS IN THE AEROSPACE AND MARINE SYSTEMS"

- Kabanov S. A., Kabanov D. S.** Optimal Control of Aircraft Banked Turn Using Various Criteria 48
Firsov S. N. Ensuring the Functional Stability of the Stabilization and Orientation System for Small-Sized Autonomous Flying Object 54
Lebedev G. N., Zaw Min Htike. Synthesis of Optimal Control of the Lateral Movement for Aircraft and Sea Vessels Crossing their Routes at Any Angle 61
Chuvashva E. S., Chuvashv S. N. Mathematical Modeling of Detection of High Speed Vehicle in Flight with Infrared Cameras 69

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 531.36

А. Ю. Александров, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой, проф., alex43102006@yandex.ru,

Е. Б. Александрова, канд. физ.-мат. наук, доц., star1460@yandex.ru,

А. П. Жабко, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой, проф., zhabko@apmath.spbu.ru,

СПбГУ, г. Санкт-Петербург

Анализ устойчивости гироскопических систем с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова¹

Изучаются механические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с запаздыванием в позиционных силах и большим параметром при гироскопических силах. Предполагается, что запаздывание является непрерывной ограниченной и неотрицательной функцией времени. С помощью прямого метода Ляпунова и подхода Разумихина доказано, что при достаточно больших значениях параметра из асимптотической устойчивости соответствующих прецессионной и нутационной систем без запаздывания следует асимптотическая устойчивость исходной системы. Показано, что разработанный подход может применяться для анализа устойчивости гибридных механических систем с переключающимися позиционными силами.

Ключевые слова: гироскопические системы, устойчивость, запаздывание, системы с переключениями, функции Ляпунова

A. Yu. Aleksandrov, E. B. Aleksandrova, A. P. Zhabko

Stability Analysis of Gyroscopic Systems with Delay Via the Lyapunov Direct Method

Mechanical systems described by linear differential equations of the second order with delay in the positional forces and a large parameter at the gyroscopic forces are studied. It is assumed that the delay is continuous bounded and nonnegative function of time. By the use of the Lyapunov direct method and the Razumikhin approach, it is proved that, for sufficiently large values of the parameter, the asymptotic stability of the corresponding delay-free precession and nutation systems implies that one for the initial system. It is shown that the developed approach can be used for the stability analysis of hybrid mechanical systems with switched positional fields.

Keywords: gyroscopic systems, stability, delay, switched systems, Lyapunov functions

Введение

В широком классе случаев колебания гироскопических систем описываются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка высокой размерности, содержащими большой положительный параметр, который можно рассматривать как кинетический момент быстро вращающихся роторов, входящих в состав этих систем [1, 2]. Высокая размерность указанных систем существенно затрудняет исследование их устойчивости. Эффективным способом решения данной проблемы является применение прецессионной теории [1], основанной на декомпозиции исходной системы второго порядка на две подсистемы (прецессионную и нутационную) первого порядка.

В работах [1, 2] с помощью первого метода Ляпунова и разложения корней характеристического

уравнения в ряды по отрицательным степеням параметра было показано, что при достаточно больших значениях параметра асимптотическая устойчивость прецессионной и нутационной систем гарантирует асимптотическую устойчивость полной системы.

Другой подход для обоснования декомпозиции гироскопических систем был предложен в статьях [3–5]. Он базируется на прямом методе Ляпунова, причем с использованием как скалярных, так и векторных функций Ляпунова. Следует отметить, что, в отличие от первого подхода, с помощью второго подхода могут быть получены условия устойчивости и для нестационарных систем. В частности, в работе [4] на его основе проводился анализ устойчивости некоторых классов гибридных систем с переключающимися силовыми полями.

Во многих прикладных задачах действующие на механическую систему силы зависят не только от текущих значений обобщенных координат и скоростей, но и от предыстории процесса [6]. Такие системы описываются дифференциальными уравне-

¹ Работа частично поддержана РФФИ (проекты № 13-01-00376 и № 13-08-00948) и Санкт-Петербургским государственным университетом (НИР № 9.38.674.2013).

ниями с запаздывающим аргументом. При их исследовании требуется учитывать влияние запаздывания на устойчивость решений. Известно, что введение даже малого запаздывания может привести к потере устойчивости [7].

Следует также отметить, что стабилизирующие управления формируются по принципу обратной связи на основе доступной измерению информации. Поскольку измерительное устройство на объекте управления и управляющее устройство, где формируется управляющий сигнал, могут быть разнесены в пространстве на значительное расстояние, то возникает запаздывание в канале обратной связи, которое может быть не малым и может меняться в процессе функционирования системы. Поэтому актуальной является задача нахождения предельных значений запаздываний, при которых сохраняется асимптотическая устойчивость программных движений.

В данной статье рассматриваются механические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с запаздыванием в позиционных силах и большим параметром при гироскопических силах. Предполагается, что запаздывание является непрерывной ограниченной и неотрицательной функцией времени. С помощью прямого метода Ляпунова и подхода Разумихина [8] доказано, что при достаточно больших значениях параметра из асимптотической устойчивости соответствующих прецессионной и нутационной систем без запаздывания следует асимптотическая устойчивость исходной системы. Кроме того, разработанный подход применяется для анализа устойчивости гибридных механических систем с переключающимися позиционными силами.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$A\ddot{x}(t) + (B + hG)\dot{x}(t) + C_1x(t) + C_2x(t - \tau(t)) = 0. (1)$$

Здесь $x(t), \dot{x}(t) \in R^n$; A — постоянная симметрическая положительно определенная матрица инерциальных характеристик системы; B — постоянная симметрическая положительно определенная матрица диссипативных сил; G — постоянная кососимметрическая матрица гироскопических сил; C_1 и C_2 — постоянные матрицы позиционных сил; h — положительный параметр; запаздывание $\tau(t)$ является непрерывной неотрицательной и ограниченной при $t \in [0, +\infty)$ функцией.

Пусть $\tau_0 = \sup_{t \geq 0} \tau(t)$. Будем считать, что начальные функции $\varphi(\xi)$ для решений системы (1) принадлежат

пространству $C^1[-\tau_0, 0]$ непрерывно дифференцируемых векторных функций с нормой $\|\varphi\|_{\tau_0} = \max_{\xi \in [-\tau_0, 0]} (\|\varphi(\xi)\| + \|\dot{\varphi}(\xi)\|)$, а под $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора.

В теории гироскопических систем [1, 2] параметр h можно интерпретировать как частоту вращения ротора гироскопа, а выражение $-C_2x(t - \tau(t))$ — как управляющее внешнее воздействие, запаздывание в котором обусловлено задержкой в канале обратной связи.

Будем предполагать, что матрица G является неособой. Рассмотрим соответствующие уравнениям (1) прецессионную

$$G\dot{y}(t) = -(C_1 + C_2)y(t) (2)$$

и нутационную

$$Az(t) = -(B + hG)z(t) (3)$$

подсистемы без запаздывания. Требуется определить условия, при выполнении которых из асимптотической устойчивости подсистем (2) и (3) следует асимптотическая устойчивость исходной системы (1).

Для случая, когда $\tau(t) \equiv 0$, такие условия были получены в монографии [2]. Если запаздывание является постоянным, то для решения поставленной задачи можно использовать подходы, предложенные в статьях [9, 10]. Отметим, что первый из них основан на применении функционалов Ляпунова—Красовского, а второй — на анализе корней характеристического квазиполинома рассматриваемой системы. Однако указанные подходы неприменимы в случае переменного запаздывания.

2. Достаточные условия асимптотической устойчивости

В данной работе обоснование декомпозиции системы (1) будем проводить с помощью метода функций Ляпунова и подхода Разумихина. Заметим, что положительная определенность матриц A и B гарантирует асимптотическую устойчивость нутационной подсистемы (3) при любом значении параметра h .

Теорема 1. Пусть прецессионная подсистема (2) асимптотически устойчива. Тогда для любого непрерывного неотрицательного и ограниченного при $t \in [0, +\infty)$ запаздывания $\tau(t)$ существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geq h_0$ система (1) будет асимптотически устойчива.

Доказательство. Введем новые переменные

$$z = \dot{x}, y = x + (B + hG)^{-1}Az$$

и представим уравнения (1) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}}(t) &= -(\mathbf{B} + h\mathbf{G})\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}_1\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_2\mathbf{y}(t - \tau(t)) + \\ &+ \mathbf{C}_1(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{C}_2(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}(t - \tau(t)), \\ \mathbf{G}\dot{\mathbf{y}}(t) &= -\frac{1}{h}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)\mathbf{y}(t) + \frac{1}{h}\mathbf{G}(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} \times \\ &\times (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{C}_2(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau(t))) + \\ &+ \mathbf{G}(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \\ &+ \mathbf{G}(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{C}_2(\mathbf{B} + h\mathbf{G})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

Из асимптотической устойчивости прецессионной подсистемы следует существование непрерывно дифференцируемой при $\mathbf{y} \in R^n$ функции Ляпунова $V_1(\mathbf{y})$, для которой при всех $\mathbf{y} \in R^n$ справедлива оценка

$$a_1\|\mathbf{y}\|^2 \leq V_1(\mathbf{y}) \leq a_2\|\mathbf{y}\|^2, \quad \dot{V}_1|_{(2)} \leq -a_3\|\mathbf{y}\|^2.$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — положительные постоянные.

Для нутационной подсистемы в качестве функции Ляпунова, удовлетворяющей требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, можно выбрать квадратичную форму $V_2(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z}$.

Далее строим функцию

$$V(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = V_1(\mathbf{y}) + \frac{\lambda}{h} V_2(\mathbf{z}), \quad (5)$$

где $\lambda = \text{const} > 0$. Функция $V(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ положительно определена. Продифференцируем ее в силу системы (4). Пусть \bar{h} — некоторое положительное число. Тогда при всех $h \geq \bar{h}$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(4)} &\leq -\frac{1}{h} a_3\|\mathbf{y}(t)\|^2 - \frac{\lambda}{h} b_1\|\mathbf{z}(t)\|^2 + \frac{\lambda}{h} b_2(\|\mathbf{y}(t)\| \cdot \|\mathbf{z}(t)\| + \\ &+ \frac{1}{h}\|\mathbf{z}(t)\|^2 + \|\mathbf{y}(t - \tau(t))\| \cdot \|\mathbf{z}(t)\| + \frac{1}{h}\|\mathbf{z}(t)\| \cdot \|\mathbf{z}(t - \tau(t))\|) + \\ &+ b_3\left(\frac{1}{h^2}\|\mathbf{y}(t)\|^2 + \frac{1}{h}\|\mathbf{y}(t)\| \cdot \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau(t))\| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{h^2}\|\mathbf{y}(t)\| \cdot \|\mathbf{z}(t)\| + \frac{1}{h^2}\|\mathbf{y}(t)\| \cdot \|\mathbf{z}(t - \tau(t))\|\right), \end{aligned}$$

где b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от выбранного значения \bar{h} .

Покажем, что если λ достаточно мало, а h достаточно велико, то функция (5) удовлетворяет требованиям теоремы 31.4 об асимптотической устойчивости решений систем с запаздыванием из работы [11].

Предположим, что для решения $(\mathbf{y}^T(t), \mathbf{z}^T(t))^T$ системы (4) при $\xi \in [t - 2\tau_0, t]$ выполнено условие

Разумихина $V(\mathbf{y}(\xi), \mathbf{z}(\xi)) < 2V(\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$. Тогда при $\xi \in [t - 2\tau_0, t]$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(\xi)\| &\leq c_1\left(\|\mathbf{y}(t)\| + \sqrt{\frac{\lambda}{h}}\|\mathbf{z}(t)\|\right), \\ \|\mathbf{z}(\xi)\| &\leq c_2\left(\sqrt{\frac{\lambda}{h}}\|\mathbf{y}(t)\| + \|\mathbf{z}(t)\|\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Используя оценки (6) и формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau(t))\| &\leq \\ &\leq \tilde{b}\tau_0\left(\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{\lambda h^3}}\right)\|\mathbf{y}(t)\| + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{h^3}}\right)\|\mathbf{z}(t)\|\right), \end{aligned}$$

где $\tilde{b} = \text{const} > 0$. Следовательно, если сначала выбрать параметр λ достаточно малым, а затем при фиксированном λ взять достаточно большое h , то будет справедливо неравенство

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)) \leq -\frac{1}{2h} a_3\|\mathbf{y}(t)\|^2 - \frac{\lambda}{2h} b_1\|\mathbf{z}(t)\|^2.$$

Значит (см. [11, с. 184—186]), система (4) асимптотически устойчива. Но тогда асимптотически устойчивой будет и система (1). Теорема доказана.

Замечание 1. Предложенный в настоящей статье способ обоснования декомпозиции системы (1) содержит конструктивную процедуру нахождения нижней оценки допустимых значений параметра h .

Замечание 2. Из приведенного доказательства теоремы 1 следует, что ее утверждение справедливо и в случае, когда величина τ_0 зависит от h , причем функция $\tau_0(h)$ может быть неограниченной при $h \in (0, +\infty)$. Требуется только, чтобы выполнялось условие $\tau_0(h)/h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$.

3. Анализ устойчивости гибридных механических систем

Покажем теперь, что предложенный в данной работе способ исследования устойчивости механических систем с запаздыванием можно использовать для получения условий асимптотической устойчивости систем с переключающимися позиционными силами.

Пусть задано конечное семейство линейных механических систем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B} + h\mathbf{G})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_1^{(s)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_2^{(s)}\mathbf{x}(t - \tau(t)) &= \mathbf{0}, \\ s &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $C_1^{(1)}, \dots, C_1^{(N)}, C_2^{(1)}, \dots, C_2^{(N)}$ — постоянные матрицы, а остальные обозначения — те же, что и в системе (1).

Допустимым законом переключения будем называть кусочно-постоянную правосторонне непрерывную функцию времени $\sigma(t), \sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \{1, \dots, N\}$, имеющую на каждом ограниченном промежутке только конечное число точек разрыва.

Рассмотрим порождаемую семейством (7) гибридную механическую систему с произвольным допустимым законом переключения позиционных сил, описываемую уравнениями

$$A\ddot{x}(t) + (B + hG)\dot{x}(t) + C_1^{(\sigma)}x(t) + C_2^{(\sigma)}x(t - \tau(t)) = 0. \quad (8)$$

Заметим, что системы с переключениями силовых полей широко используются при моделировании управляемых механических объектов со структурной реконфигурацией, отказами и восстановлением датчиков или исполнительных органов [12, 13].

Определим условия, выполнение которых гарантирует, что система (8) будет асимптотически устойчивой для любого допустимого закона переключения. Подобная задача естественным образом возникает в случаях, когда закон переключения или неизвестен, или слишком сложен для того, чтобы его можно было учитывать при анализе устойчивости [13].

Для гибридных систем с произвольным режимом переключения эффективным методом исследования устойчивости является использование общих функций Ляпунова, монотонно изменяющихся вдоль решений [13, 14]. Однако проблема существования общей функции Ляпунова не решена в полном объеме даже для семейства линейных автономных подсистем. Данная проблема является особенно трудной для механических систем. Движение механических систем описывается дифференциальными уравнениями второго порядка, что приводит к появлению определенных специфических свойств. В частности, в работе [15] показано, что некоторые известные для гибридных систем общего вида условия устойчивости неприменимы к механическим системам.

Строим вспомогательное семейство подсистем

$$G\dot{y}(t) = -(C_1^{(s)} + C_2^{(s)})y(t), \quad s = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть все подсистемы семейства (9) асимптотически устойчивы и для них существует непрерывно дифференцируемая при $y \in R^n$ однородная второго порядка общая функция Ляпунова $V_1(y)$, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Тогда для любого

непрерывного неотрицательного и ограниченного при $t \in [0, +\infty)$ запаздывания $\tau(t)$ существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geq h_0$ и при любом допустимом законе переключения система (8) будет асимптотически устойчива.

Для доказательства теоремы следует сначала перейти от семейства (7) к эквивалентному семейству

$$Az(t) = -(B + hG)z(t) - C_1^{(s)}y(t) - C_2^{(s)}y(t - \tau(t)) + C_1^{(s)}(B + hG)^{-1}Az(t) + C_2^{(s)}(B + hG)^{-1}Az(t - \tau(t)),$$

$$G\dot{y}(t) = -\frac{1}{h}(C_1^{(s)} + C_2^{(s)})y(t) + \frac{1}{h}G(B + hG)^{-1}BG^{-1} \times \\ \times (C_1^{(s)} + C_2^{(s)})y(t) + G(B + hG)^{-1}C_2^{(s)}(y(t) - \\ - y(t - \tau(t))) + G(B + hG)^{-1}C_1^{(s)}(B + hG)^{-1}Az(t) + \\ + G(B + hG)^{-1}C_2^{(s)}(B + hG)^{-1}Az(t - \tau(t)), \\ s = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Далее строим для систем (10) общую функцию Ляпунова по формуле (5), где $V_1(y)$ — указанная в формулировке теоремы функция, а в качестве $V_2(z)$ снова выбираем квадратичную форму $z^T Az$. Как и в предыдущем разделе статьи, нетрудно показать, что если число λ достаточно мало, то при достаточно больших значениях параметра h для построенной функции Ляпунова и ее производной, вычисленной в силу любой системы из семейства (10), будут выполнены условия теоремы 3.1.4 из работы [11].

Замечание 3. Теорема 2 позволяет сводить задачу нахождения общей функции Ляпунова для семейства систем размерности $2n$ со специальной структурой и запаздыванием в позиционных силах к аналогичной задаче для вспомогательного семейства подсистем (9), имеющих вдвое меньшую размерность, не содержащих запаздывания и не обладающих, вообще говоря, специальной структурой. Таким образом, для решения новой задачи можно использовать известные условия существования общей функции Ляпунова для семейства линейных стационарных систем, например, условие коммутативности их матриц [14], которое, как показано в работе [15], неприменимо для исходного семейства (7) даже в случае отсутствия запаздывания.

4. Пример

Пусть задано семейство, состоящее из двух систем

$$J\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) + C^{(s)}x(t - \tau(t)) = 0, \\ s = 1, 2. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \in R^2$; J, b, h — положительные параметры; матрицы $\mathbf{C}^{(s)}$ имеют вид

$$\mathbf{C}^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(s)} & -\gamma^{(s)} \\ \gamma^{(s)} & \eta^{(s)} \end{pmatrix},$$

где $\alpha^{(s)}, \gamma^{(s)}, \eta^{(s)}$ — некоторые постоянные, $s = 1, 2$; запаздывание $\tau(t)$ является непрерывной неотрицательной и ограниченной при $t \in [0, +\infty)$ функцией.

Заметим, что в случае, когда $\tau(t) \equiv 0, \alpha^{(s)} = \eta^{(s)} = 0, s = 1, 2$, системы такого рода используются для описания гировертикали с радиальной коррекцией [2].

Рассмотрим соответствующую семейству (11) гибридную систему

$$J\ddot{\mathbf{x}}(t) + b\dot{\mathbf{x}}(t) + h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}^{(s)}\mathbf{x}(t - \tau(t)) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Для анализа устойчивости этой системы воспользуемся теоремой 2. По формулам (9) строим прецессионные подсистемы

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -\gamma^{(s)} & -\eta^{(s)} \\ \alpha^{(s)} & -\gamma^{(s)} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad s = 1, 2. \quad (13)$$

Данные подсистемы асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда справедливы неравенства

$$\gamma^{(s)} > 0, \gamma^{(s)2} + \alpha^{(s)}\eta^{(s)} > 0, \quad s = 1, 2. \quad (14)$$

Далее применяем условие коммутативности матриц подсистем (13), выполнение которого гарантирует существование для них общей функции Ляпунова в виде квадратичной формы [13]. Приходим к соотношению

$$\alpha^{(1)}\eta^{(2)} = \alpha^{(2)}\eta^{(1)}. \quad (15)$$

Таким образом, если элементы матриц $\mathbf{C}^{(1)}$ и $\mathbf{C}^{(2)}$ удовлетворяют ограничениям (14) и (15), то для любого непрерывного неотрицательного и ограниченного при $t \in [0, +\infty)$ запаздывания $\tau(t)$ существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geq h_0$ и при любом допустимом законе переключения система (12) будет асимптотически устойчива.

Следует отметить, что для исходного семейства (11) условие коммутативности заведомо не выполнено [15].

Заметим также, что условия существования общей квадратичной функции Ляпунова для подсистем (13) можно получить с помощью критерия, установленного в работе [16] для семейства двумерных линейных систем. Прямое применение указанного критерия к семейству (11) невозможно, так как размерность входящих в него систем равна четырем.

Список литературы

1. **Зубов В. И.** Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970.
2. **Меркин Д. Р.** Гироскопические системы. М.: Наука, 1974.
3. **Косов А. А.** Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // Вестник С.-Петербурга. ун-та. Сер. 10. 2005. Вып. 4. С. 123—129.
4. **Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.** Stability of Hybrid Mechanical Systems with Switching Linear Force Fields // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2011. V. 11, N 1. P. 53—64.
5. **Александров А. Ю., Косов А. А.** Об устойчивости гироскопических систем // Вестник С.-Петербург. ун-та. Серия 10. 2013. Вып. 2. С. 3—13.
6. **Воротников В. И., Румянцев В. В.** Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
7. **Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
8. **Разумихин Б. С.** Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 500—512.
9. **Климушев А. И.** Об асимптотической устойчивости систем с последействием, содержащих малый параметр при производных // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 1. С. 52—61.
10. **Купцов С. Ю.** Об одном методе исследования на устойчивость семейств линейных систем дифференциальных уравнений // Труды Средневолжского математического общества. 2006. Т. 8, № 1. С. 224—235.
11. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
12. **DeCarlo R., Branicky M., Pettersson S., Lennartson B.** Perspectives and Results on the Stability and Stabilisability of Hybrid Systems // Proc. IEEE. 2000. V. 88. P. 1069—1082.
13. **Liberzon D.** Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
14. **Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.** Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. V. 49, N 4. P. 545—592.
15. **Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я.** Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 5—17.
16. **Пакшин П. В., Поздьяев В. В.** Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 4. С. 22—27.

А. С. Шелудько, инженер, antonsheludko@gmail.com,
В. И. Ширяев, д-р техн. наук, проф., зав. каф., vis@susu.ac.ru,
 Южно-Уральский государственный университет

Алгоритм минимаксной фильтрации для одномерного хаотического процесса

Рассматривается задача оценивания переменной состояния в модели одномерного хаотического процесса по единственной зашумленной реализации измерений. Исследуется применение минимаксного подхода, что подразумевает получение оценок в виде информационных множеств. При этом гарантируется, что истинное значение переменной состояния на каждом временном шаге будет принадлежать информационному множеству. Предложен вариант нахождения точечных оценок, основанный на аналогии с уравнениями фильтра Калмана.

Ключевые слова: детерминированный хаос, хаотическое отображение, минимаксная фильтрация

A. S. Sheludko, V. I. Shiryayev

Minimax Filtering Algorithm for One-Dimensional Chaotic Process

In this article we consider the state estimation problem for one-dimensional chaotic signal in the presence of noise. An algorithm based on the minimax approach is derived. The result of minimax filtering at every time step is an interval estimate (an information set) that always contains the true value of the state variable. We propose a way to find the point estimates of the state variable based on an analogy with the Kalman filter.

Keywords: deterministic chaos, chaotic map, minimax filtering

Введение

Модели детерминированного хаоса и методы нелинейной динамики в настоящее время находят применение в прикладных задачах, связанных с обработкой измерений в технических системах [1], защитой информации [2, 3], диагностикой в медицине [4], анализом временных рядов в экономике [5]. В связи с этим становится актуальной разработка соответствующих алгоритмов фильтрации, оценивания параметров моделей и прогнозирования для хаотических процессов (см. например, [5–8]). Следует различать два направления исследований в этой области:

1. Моделирование "медленных" колебаний с помощью систем нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

2. Моделирование "быстрых" колебаний с помощью одномерных хаотических отображений

$$x_{k+1} = f(x_k, \boldsymbol{\lambda}), x_k \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

За последнее десятилетие большинство качественно новых результатов было получено в первом направлении (см., например, [8–10]). Прежде всего, это связано с тем, что модели вида (2) описывают временные процессы, которые по своим характеристикам близки к шумовым составляющим измерений. Такие модели также часто используются как генераторы шумовых сигналов [3]. Из-за этого задачи фильтрации, оценивания параметров

и прогнозирования для моделей вида (2) являются более сложными.

В данной работе рассматривается задача фильтрации в следующей постановке: найти оценки переменной состояния x_k в модели (2) по единственной зашумленной реализации измерений

$$y_k = x_k + \eta_k, \quad (3)$$

где η_k — ошибки измерений; вектор параметров $\boldsymbol{\lambda}$ считается известным. Для решения поставленной задачи могут быть использованы различные модификации фильтра Калмана для нелинейных моделей [11, 12]. Несмотря на недостатки этих алгоритмов [13], связанные с вероятностным описанием ошибок измерений и оценок, они широко используются на практике и позволяют получать приемлемые результаты, в том числе для моделей вида (1) [10]. Однако применение стохастических алгоритмов в рассматриваемой задаче фильтрации может привести к некорректным результатам: истинное значение переменной состояния x_k может находиться за пределами доверительного множества, полученного в результате обработки единственной реализации измерений (3). При использовании же минимаксного подхода [13–15] гарантируется, что истинное значение переменной состояния x_k будет принадлежать некоторому информационному множеству X_k . Кроме того, в этом случае не требуется выдвигать предположений о модели ошибок измерений η_k . Данная работа продолжает исследования [5, 7, 14].

Описание алгоритма фильтрации

Исходными данными для алгоритма являются множественные оценки для начального значения x_0 переменной состояния и ошибок измерений η_k :

$$x_0 \in X_0, \eta_k \in V_k. \quad (4)$$

Множественная оценка переменной состояния x_k на шаге k для системы уравнений (2), (3) и априорных исходных данных (4) определяется следующим образом (см., например, [14]):

$$x_k \in X_k = X_{k/k-1} \cap Y_k, \quad (5)$$

где X_k — информационное множество; $X_{k/k-1}$ — множество прогнозов; Y_k — множество, совместное с измерениями. Для построения множества прогнозов используется информационное множество X_{k-1} , найденное на предыдущем шаге:

$$X_{k/k-1} = \{x | x = f(t, \lambda), t \in X_{k-1}\}. \quad (6)$$

Множество, совместное с измерениями, находится исходя из множественных оценок (4) для ошибок измерений:

$$Y_k = \{x | y_k - x \in V_k\}. \quad (7)$$

Если ошибки η_k являются реализацией белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием или близки к подобным процессам, то множественную оценку для них можно задать в виде постоянного и симметричного множества:

$$\eta_k \in V = [-v; v].$$

В этом случае множество, совместное с измерениями, имеет вид

$$Y_k = [y_k - v; y_k + v].$$

Отметим, что если множество V задано неверно (например, на каком-то шаге $\eta_k \notin V$), то, как правило, это приводит к тому, что в результате операции пересечения (5) информационное множество X_k становится пустым. Это же характерно для случая, если неверно задано множество X_0 . Возможна и другая ситуация, когда множество V задано слишком большим. Это приводит к тому, что множество прогнозов регулярно оказывается внутри множества, совместного с измерениями ($X_{k/k-1} \in Y_k$).

Таким образом, выражения (5)–(7) используются для получения множественной оценки переменной состояния x_k в виде информационного множества X_k (5). Рассмотрим один из вариантов нахождения точечной оценки \hat{x}_k . Пусть \hat{x}_0 —

начальная оценка, $\hat{x}_0 \in X_0$. Оценка \hat{x}_k на шаге k находится из уравнений

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + l_k(y_k - \hat{x}_{k/k-1}), \quad (8)$$

$$\hat{x}_{k/k-1} = f(\hat{x}_{k-1}, \lambda), \quad (9)$$

$$l_k = \frac{\Delta X_{k/k-1}}{\Delta X_{k/k-1} + \Delta V}, \quad (10)$$

где $\hat{x}_{k/k-1}$ — априорная оценка; l_k — коэффициент усиления; символ Δ обозначает размер множества (длину отрезка). Если на некотором шаге оценка \hat{x}_k , вычисленная в уравнении (8), выходит за пределы информационного множества X_k , то в качестве оценки \hat{x}_k необходимо взять ближайшую точку множества X_k (одну из границ отрезка). Такая ситуация возможна, и в этом нет противоречия, так как при использовании минимаксного подхода гарантируется, что истинное значение переменной состояния $x_k \in X_k$. Приведенные же уравнения (8)–(10)

для вычисления точечной оценки \hat{x}_k выписаны по аналогии с уравнениями фильтра Калмана. Они не предполагают оптимальности найденных оценок, однако, как показали расчеты, позволяют получать более точные результаты в сравнении с распространенным в минимаксной фильтрации подходом, когда в качестве оценки выбирается точка, равноудаленная от границ информационного множества (середина отрезка).

Пример использования алгоритма

Рассмотрим квадратичное (логистическое) отображение

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda) = \lambda x_k(1 - x_k), \quad (11)$$

которое при $x_0 \in (0; 1)$ имеет хаотические решения для большинства значений параметра λ из интервала $\lambda \in (3,57\dots; 4]$. Пусть начальное значение $x_0 = 0,2$, параметр $\lambda = 3,68$, длина реализации $N = 20$ (рис. 1).

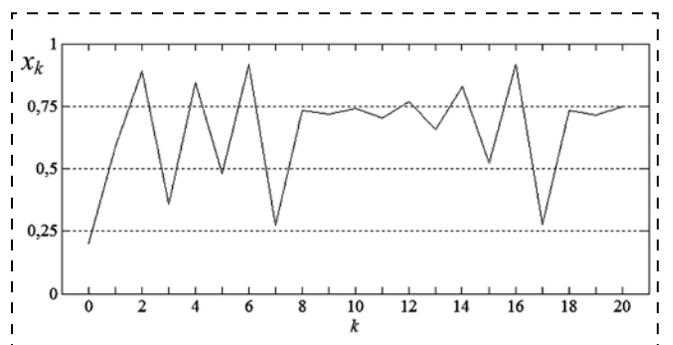


Рис. 1. Хаотический процесс, заданный квадратичным отображением

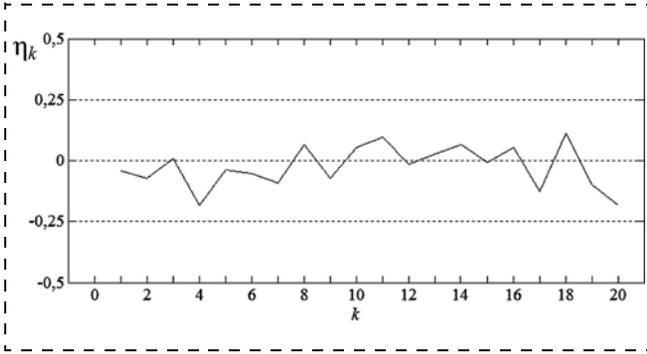


Рис. 2. Ошибки в виде реализации белого гауссовского шума

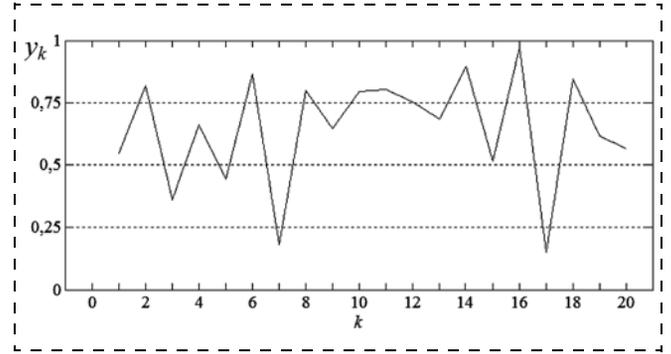


Рис. 3. Зашумленные измерения

В качестве ошибок измерений η_k возьмем реализацию белого гауссовского шума (рис. 2) с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma_0 = 0,1$ (для данной реализации шума выборочное значение $\sigma_0 = 0,0844$, отношение сигнал/шум = 18 дБ). На рис. 3 показаны измерения, которые являются исходными данными для задачи фильтрации.

Рассмотрим построение множества прогнозов (6) для квадратичного отображения (11) на фазовой плоскости $x_k(x_{k-1})$. Пусть на шаге $k-1$ информационное множество $X_{k-1} = [\alpha; \beta]$. Возможны три случая (рис. 4):

1. Если $\beta \leq \frac{1}{2}$, то $X_{k/k-1} = [\lambda\alpha(1-\alpha); \lambda\beta(1-\beta)]$.
2. Если $\alpha \geq \frac{1}{2}$, то $X_{k/k-1} = [\lambda\beta(1-\beta); \lambda\alpha(1-\alpha)]$.
3. Если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $\beta > \frac{1}{2}$, то $X_{k/k-1} = \left[\lambda t(1-t); \frac{\lambda}{4} \right]$,

где $t = \min\left\{\alpha, \frac{1}{2} - \beta\right\}$.

При задании исходных данных (4) для алгоритма фильтрации будем рассматривать наилучший слу-

чай, когда о начальном множестве X_0 не имеется никакой априорной информации. Для отображения (11) имеет место свойство:

$$f(t, \lambda) = f\left(\frac{1}{2} - t, \lambda\right),$$

поэтому положим $X_0 = [0; 0,5]$. Пусть начальная точечная оценка $\hat{x}_0 = 0,1$. Для рассматриваемой реализации шума (см. рис. 2) $\max_k |\eta_k| = 0,1846$, поэтому зададим $v = 0,2$.

Информационные множества X_k , полученные в результате фильтрации, показаны на рис. 5. Характеристикой множественных оценок является максимальная ошибка

$$\mu_k = \max_{t \in X_k} |x_k - t|. \quad (12)$$

Для квадратичного отображения (11) независимо от выбора начального значения $x_0 \in (0; 1)$ для всех $k > 0$ имеет место следующий факт:

$$x_k \in X^* = \left[\frac{\lambda^2}{16}(4 - \lambda); \frac{\lambda}{4} \right].$$

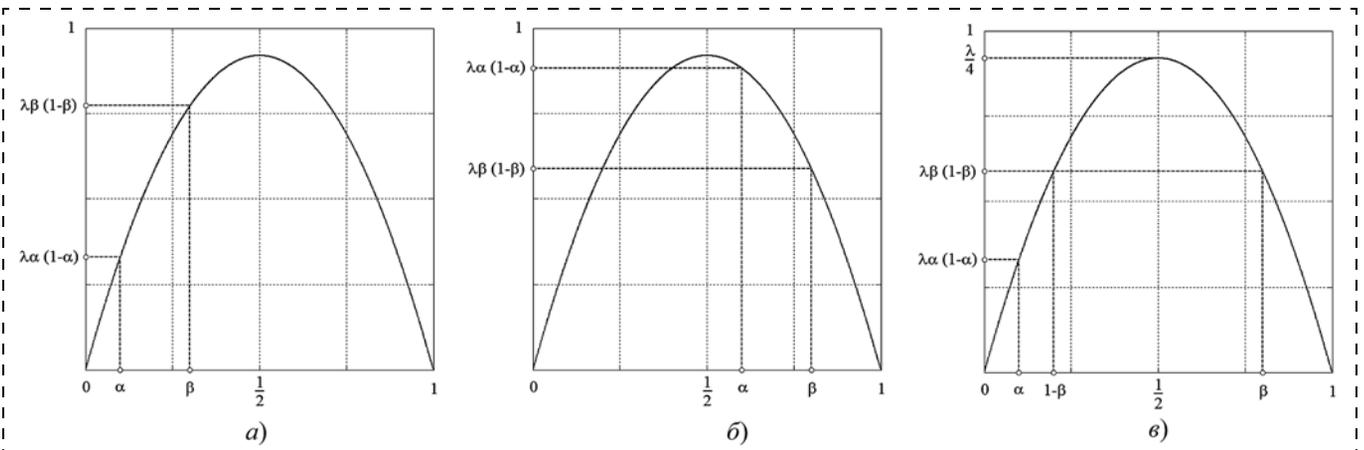


Рис. 4. Построение множества прогнозов при $\beta \leq \frac{1}{2}$ (а); $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (б); $\alpha < \frac{1}{2}$ и $\beta > \frac{1}{2}$ (в)

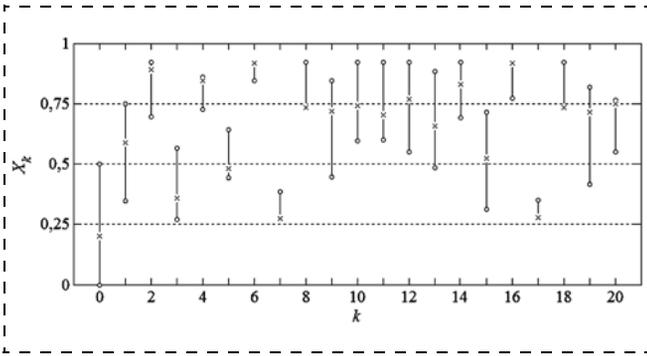


Рис. 5. Множественные оценки переменной состояния (крестиком показаны истинные значения)

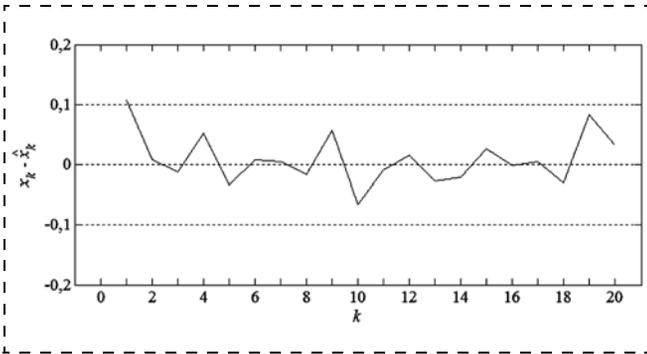


Рис. 6. Ошибки точечных оценок

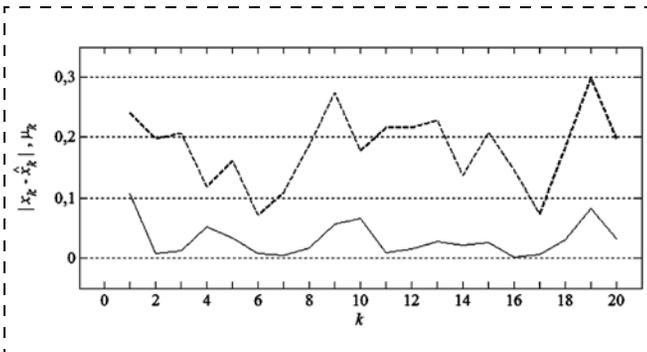


Рис. 7. Сравнение абсолютных величин ошибок оценивания (сплошная линия) и максимально возможных ошибок (штриховая линия)

Таблица 1

Характеристики множественных оценок

k	μ_k	δ_k	k	μ_k	δ_k
1	0,2410	0,5200	11	0,2162	0,3305
2	0,1970	0	12	0,2157	0,2807
3	0,2061	0,3564	13	0,2278	0,2492
4	0,1185	0,0594	14	0,1360	0,3185
5	0,1602	0,2784	15	0,2081	0,2492
6	0,0725	0	16	0,1459	0,0201
7	0,1088	0,5364	17	0,0737	0,5701
8	0,1867	0	18	0,1844	0
9	0,2734	0,2492	19	0,2990	0,2492
10	0,1776	0,1177	20	0,1980	0,1542

Таблица 2

Точечные оценки переменной состояния

k	x_k	\hat{x}_k	k	x_k	\hat{x}_k
1	0,5888	0,4822	11	0,7038	0,7128
2	0,8910	0,8831	12	0,7672	0,7522
3	0,3575	0,3698	13	0,6572	0,6853
4	0,8452	0,7935	14	0,8290	0,8509
5	0,4814	0,5151	15	0,5216	0,4957
6	0,9187	0,9106	16	0,9183	0,9200
7	0,2748	0,2708	17	0,2761	0,2708
8	0,7333	0,7502	18	0,7356	0,7658
9	0,7197	0,6628	19	0,7158	0,6333
10	0,7424	0,8088	20	0,7487	0,7160

Таким образом, при $k > 0$ множество прогнозов $X_{k/k-1} \subseteq X^*$, информационное множество $X_k \subseteq X^*$, а максимальная ошибка

$$\mu_k \leq \Delta X^* = \frac{\lambda}{4} \left(1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{4} \right) = 0,6492.$$

Для анализа работы алгоритма можно также рассматривать величину

$$\delta_k = \Delta X_{k/k-1} - \Delta X_k, \quad (13)$$

которая показывает, на сколько уменьшился размер множества прогнозов $X_{k/k-1}$ после получения информации об измерениях в виде множества Y_k . Среднее значение величины (13) на всем временном интервале равно

$$\bar{\delta} = 0,2269 \equiv \frac{1}{3} \Delta X^*.$$

При этом в четырех случаях измерения не позволили уточнить множественную оценку, т. е. $\delta_k = 0$ при $k \in \{2, 6, 8, 18\}$. Рассмотренные характеристики (12) и (13) приведены в табл. 1.

Для половины временных шагов, а именно при $k \in \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 18, 20\}$, истинное значение переменной состояния x_k лежит близко к одной из границ соответствующего информационного множества X_k (рис. 5). Следовательно, выбор середины отрезка в качестве точечной оценки не является рациональным, что уже было отмечено ранее. В табл. 2 приведены точечные оценки \hat{x}_k переменной состояния, найденные с помощью предложенного алгоритма. На рис. 6 показан график ошибок оценивания $x_k - \hat{x}_k$. Среднеквадратическая ошибка оценивания равна

$$\sigma = 0,0415 \approx \frac{1}{2} \sigma_0.$$

На рис. 7 представлено сравнение абсолютных величин ошибок $|x_k - \hat{x}_k|$ с максимально возможными

ошибками μ_k на каждом шаге. В качестве относительной ошибки оценивания рассмотрим величину

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^N \frac{|x_k - \hat{x}_k|}{\mu_k} \cdot 100 \% = 16,1 \%$$

В среднем для 100 различных реализаций ошибок измерений относительная ошибка оценивания $\varepsilon = 22,6 \%$. Если бы в качестве точечной оценки \hat{x}_k выбиралась середина отрезка, то эта величина составила бы $30,8 \%$.

Заключение

Использование моделей детерминированного хаоса при решении ряда прикладных задач [1–5] приводит к необходимости разработки соответствующих алгоритмов фильтрации для хаотических процессов. Применение модификаций фильтра Калмана для нелинейных моделей [11, 12] в этом случае может привести к некорректным результатам: истинное значение переменной состояния может находиться за пределами доверительного множества, полученного в результате обработки единственной реализации измерений. Избежать этого позволяет минимаксный подход [13–15], рассмотренный в данной статье. С помощью предложенного алгоритма минимаксной фильтрации найдены множественные (см. рис. 5) и точечные (см. табл. 2) оценки переменной состояния квадратичного отображения по зашумленным измерениям (см. рис. 3), где в качестве ошибок измерений была выбрана реализация белого гауссовского шума (см. рис. 2). В среднем для 100 различных реализаций шума относительная ошибка оценивания переменной состояния составила $22,6 \%$. Если бы в алгоритме фильтрации в качестве точечной оценки выбиралась середина отрезка, то эта величина составила бы $30,8 \%$.

Список литературы

1. Манько Н. Г., Шалимов Л. Н., Шестаков Г. В., Штыков А. Н., Ширяев В. И., Шелудько А. С. Повышение точности оценок в алгоритме обработки измерений на выходе волокон-

но-оптического гироскопа с помощью применения моделей детерминированного хаоса // Актуальные проблемы автоматизации и управления. Тр. науч.-практ. конф. Челябинск: ЮУрГУ, 2013. С. 43–46.

2. Тратас Ю. Г. Эффективная передача информации хаотическими колебаниями // Радиотехника. 2011. № 4. С. 4–11.

3. Захарченко Н. В., Радзимовский Б. К., Корчинский В. В. Случайные числа и последовательности на основе систем с динамическим хаосом // Научные труды ОНАС им. А. С. Попова. 2012. № 1. С. 8–12.

4. Антипов О. И., Захаров А. В., Неганов В. А. Особенности применения фрактальных мер детерминированного хаоса к автоматизированному распознаванию стадий сна при полисомнографии // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 5. № 3. С. 101–109.

5. О решении задач параметрической идентификации процессов с хаотической динамикой / И. В. Гришин, А. С. Шелудько, В. И. Ширяев и др. // Вестник ЮУрГУ. Сер. "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2008. № 3. С. 44–50.

6. Тратас Ю. Г. Оптимальный фильтр для неизвестного сигнала // Успехи современной радиоэлектроники. 2013. № 3. С. 84–89.

7. Шелудько А. С., Ширяев В. И. Совместное использование фильтра Калмана и минимаксного фильтра в задаче оценивания параметров модели хаотического процесса // Вестник ЮУрГУ. Сер. "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2012. № 35. С. 59–64.

8. Истомина И. А., Котляров О. Л., Лоскутов А. Ю. Расширение возможностей метода локальной аппроксимации посредством сингулярного спектрального анализа // Теоретическая и математическая физика. 2005. Т. 142. № 1. С. 148–159.

9. Никульчев Е. В. Моделирование систем с нелинейной динамикой на основании экспериментальных данных // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 5. С. 6–14.

10. Voss H. U. Nonlinear dynamical system identification from uncertain and indirect measurements // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. V. 14. № 6. P. 1905–1933.

11. Xuedong Wu, Zhihuan Song. Multi-step prediction of chaotic time-series with intermittent failures based on the generalized nonlinear filtering methods // Applied Mathematics and Computation. 2013. V. 219. № 16. P. 8584–8594.

12. Simon D. A comparison of filtering approaches for aircraft engine health estimation // Aerospace Science and Technology. 2008. Vol. 12. № 4. P. 276–284.

13. Simon D., El-Sherief H. Hybrid Kalman/minimax filtering in phase-locked loops // Control Engineering Practice. 1996. V. 4. № 5. P. 615–623.

14. Ширяев В. И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника. 2001. № 8. С. 2–5.

15. Филимонов Н. Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2003. № 2. С. 11–15.

ИНФОРМАЦИЯ

25 ноября 2014 г. в ГК "ИЗМАЙЛОВО" (г. Москва) состоится

Пятая Межотраслевая конференция

"АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА — 2014"

Конференция посвящена демонстрации новейших разработок для автоматизации предприятий энергетики, металлургии, машиностроения, химической, нефтегазовой и цементной промышленности, современных IT-технологий, ERP, MES-систем, контрольно-измерительной техники, систем мониторинга.

По всем вопросам обращаться в оргкомитет ООО "ИНТЕХЭКО":

Андроников Игорь Николаевич

тел.: +7 (499) 166-6420, +7 (916) 117-0275 факс: +7 (495) 737-7079

admin@intecheco.ru, www.intecheco.ru

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

УДК 62.50

Б. Р. Андриевский^{1, 2}, д-р техн. наук, доц., boris.andrievsky@gmail.com,
Н. В. Кузнецов², канд. физ.-мат. наук, доц., **Г. А. Леонов**^{1, 2}, чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.,
А. Ю. Погромский³, канд. техн. наук, доц.,

¹ Институт Проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург,

² Санкт-Петербургский государственный университет,

³ Технологический университет Эйндховена, Нидерланды

Распределенное управление нелинейной производственной системой¹

Рассмотрена задача управления производственной машиной, состоящая в обеспечении отслеживания с заданной точностью заранее неизвестных требований потребителя на выпуск продукции. Производственная машина описывается в работе интегрирующим звеном с насыщением входного сигнала, вызванным ограниченной производительностью машины. Для решения задачи управления при неизвестной потребной скорости выпуска продукции использована комбинированная стратегия на основе наблюдателя состояния. Показана связь предложенного метода с динамической антивиндап коррекцией. Исследовано также децентрализованное управление линией производственных машин. Приведены иллюстративные примеры, демонстрирующие обеспечение желаемого поведения системы в различных условиях.

Ключевые слова: производственная линия, автоматизация промышленности, производственный контроль, децентрализованное управление

B. R. Andrievskii, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, A. Yu. Pogromsky

Observer-Based Distributed Control of Production Line

The paper deals with the control problem for a manufacturing machine such that an unknown customer demand is tracked with a desired accuracy. To study this problem, a manufacturing machine is approximated by an integrator which is subject to input saturation as a result of the finite capacity of the machine. To solve the problem in case of unknown demand rate, an observer-based feedforward-feedback controller is proposed. The relationship between the proposed control strategy and dynamical anti-windup augmentation is revealed. The decentralized feedback control strategy for a line of manufacturing machines is also considered and examined. The illustrating examples are presented, demonstrating desired system performance for various conditions.

Keywords: manufacturing line, industry automation, production control, decentralized control

Введение

Задача управления производственными системами, которая понимается как задача обеспечения требований клиентов при сохранении низкого уровня потребных запасов, вызывает значительный интерес в течение последних десятилетий. Ранние стратегии управления, такие как планирование потребности в материалах (*material requirement planning*, MRP), система планирования ресурсов предприятия (*enterprisere source planning*, ERP) и страте-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-3384.2014.1, Санкт-Петербургского государственного университета и РФФИ, проект № 12-08-01183.

гия "точно по графику" (*just-in-time*, JIT) [1], могут обеспечить адекватное решение, если требования не очень жесткие и не нужно обеспечивать быстрое реагирование на возможные нарушения и сбои. Однако, поскольку производственные системы непрерывно усложняются, и их функционирование должно постоянно совершенствоваться для того, чтобы обеспечить конкурентоспособность в современной глобальной экономике, эти стратегии управления оказываются все менее эффективными.

Возможным способом нахождения эффективных стратегий управления является описание производственных систем так называемыми "потокowymi моделями" (*flow models*) [2]. Эти модели, основанные на обыкновенных дифференциальных

или дифференциально-разностных уравнениях, а в некоторых работах — на уравнениях в частных производных [3—5], приводят к непрерывному (по времени и по состоянию) описанию процессов в дискретных событийно-управляемых производственных системах и, следовательно, позволяют упростить задачу синтеза управления. Более того, к настоящему времени для непрерывных моделей разработано много эффективных методов управления, что является дополнительным аргументом в пользу использования таких моделей для автоматизации производственных систем.

Наибольшее число методов управления с использованием потоковых моделей производственных систем, которые представлены в литературе, используют предположение о том, что будущие потребности в продукции известны (или имеется их оценка), после чего используется некоторый оптимизационный алгоритм для определения подходящего управления (см. [6—10] и приведенные там ссылки). В непрерывной модели производственная машина обычно описывается интегрирующим звеном, у которого общее количество произведенной продукции является интегралом от производительности. Имеющиеся технологические ограничения на производительность учитываются при постановке задачи как оптимизационной. Недостатком таких стратегий управления является их зависимость от будущей потребности в продукции (которая обычно трудно поддается предсказанию, что приводит к существенным ошибкам в планировании производства), а также, как правило, значительный объем вычислений, связанный с решением оптимизационных задач.

Для отслеживания с высокой точностью производственной машиной заранее неизвестного процесса требований, поступающих на объем выпускаемой продукции, можно использовать хорошо зарекомендовавшие себя в автоматических системах типовые законы управления с введением интеграла от ошибки: пропорционально-интегральный (ПИ) или пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) законы [11, 12]. Хорошо известно, что из-за насыщения входного (управляющего) сигнала состояние интегрирующего звена в ПИ и ПИД регуляторах может "возбуждаться" (*wind up* — англ. заводится, приходит в возбужденное состояние, взвинчиваться) до чрезмерно больших значений, что приводит к ухудшению качества работы замкнутой системы управления вплоть до потери ее устойчивости [13, 14]. Обеспечение работоспособности систем управления производственными машинами с ПИ регулятором может достигаться введением антивиндап-коррекции [15, 16]. В данной работе используется другой подход, позволяющий добиться требуемой точности отслеживания задающего воздействия без введения интеграла в закон управления и, следовательно, исключаящий

явление виндапа. Показана также связь предложенного метода с результатами работ [15, 16].

Статья организована следующим образом. Комбинированный закон управления производственной машиной и его реализация на основе наблюдателя состояния представлены в разделе 1. Раздел 2 посвящен анализу нелинейной производственной машины во временной и в частотной областях. Децентрализованное управление линией производственных машин рассмотрено в разделе 3, где также рассмотрен числовой пример и приведены результаты моделирования для линии из четырех машин. Заключительные замечания и направления будущих исследований приведены в разделе 4.

1. Автоматизация управления производственной машиной

1.1. Постановка задачи

Следуя работам [16—20], для работы событийно-управляемой производственной машины используем непрерывную ("потоковую") модель. Для этого рассмотрим производственную машину как устройство, непрерывно выпускающее продукцию с некоторой скоростью (производительностью) $u_p(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Будем считать, что всегда имеется достаточное количество сырья для снабжения машины. Общее количество продукта, выпущенного машиной к данному моменту времени, обозначим $y(t) \in \mathbb{R}$. Связь этого количества со скоростью обработки $u_p(t)$ опишем следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{y}(t) = u_p(t) + f(t), \quad (1)$$

где $f(t) \in \mathbb{R}$ — неизвестное внешнее возмущение, которое, например, может описывать производственный брак или неконтролируемое изменение производительности машины. Производительность u_p не может быть отрицательной и также ограничена сверху некоторым значением $u_{p, \max}$, обусловленным технологическими характеристиками машины. Это приводит к неравенствам

$$0 \leq u_p \leq u_{p, \max}. \quad (2)$$

Неравенства (2) вводят *насыщение* в контур управления, усложняя задачу синтеза регулятора и исследование свойств системы.

Рассмотрим задачу управления, состоящую в отработке внешнего неубывающего воздействия — *требуемого количества выпущенной продукции* $y_d(t)$. В дальнейшем предполагаем, что $y_d(t)$ можно представить в виде

$$y_d(t) = y_{d,0} + v_d t + \varphi(t), \quad (3)$$

где $y_{d,0}$ обозначает желаемое значение продукции, соответствующее выбранному (произвольно) начальному моменту времени $t = 0$; $v_d \geq 0$ — постоянная

величина, представляющая усредненную желаемую скорость выпуска продукции; $\varphi(t)$ — ограниченная функция, описывающая колебания желаемого значения продукции относительно линейно-нарастающего процесса $y_d t$, вызванные, например, сезонными флуктуациями. Естественно считать, что средняя желаемая скорость выпуска продукции не превосходит максимальной производительности машины и неотрицательна, т. е. что выполнены неравенства $0 \leq v_d \leq u_{p, \max}$. Можно также предполагать, что $\varphi(t)$ имеет, в некотором смысле, "нулевое среднее" — смещение среднего значения $\varphi(t)$ можно отнести к $y_{d,0}$. Кроме того, должно выполняться неравенство $v_d + \dot{\varphi}(t) \geq 0$, означающее, что требуемое количество выпущенной продукции не убывает.

1.2. Эффект "виндапа" при ограничении сигнала управления и его компенсация

С учетом общих принципов управления очевидно [11, 12], что применение ПИ закона управления

$$u(t) = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_P e(t) + u(0), \quad e(t) = y_d(t) - y(t), \quad (4)$$

где $k_I > 0$, $k_P > 0$ — некоторые положительные параметры, к объекту (1) обеспечивает (в отсутствие насыщения) асимптотическую устойчивость замкнутой системы, астатизм второго порядка по отношению к задающему воздействию $y_d(t)$ и астатизм первого порядка — по возмущению $f(t)$, что позволяет обеспечить асимптотически точное отслеживание системой линейной составляющей $v_{d,0} + v_d t$ задающего сигнала. Структурная схема системы (1), (2), (4) с ПИ регулятором и насыщением представлена на рис. 1.

На структурной схеме отражена нелинейная зависимость между сигналом управления, подаваемым на объект, и выходом ПИ регулятора (4). Как отмечено во введении, ограничение управляющего воздействия в системах с интегралом в законе управления может привести к потере работоспособности (явление "виндапа"). В последние десятилетия задаче управления системами с насыщением во входном сигнале было уделено значительное внимание, и имеется обширное число публикаций по подавлению виндапа ("антивиндап", АИ-коррекция). Современное состояние методов АИ-коррекции отражено в монографиях [14, 21, 22] и в обзоре [23].

Во многих публикациях задача АИ-коррекции для системы ставится как задача обеспечения глобальной асимптотической устойчивости ее положения равновесия при отсутствии внешних воздействий. Данный подход является в корне неверным и опасным для приложений. Так, в работе [16] приведен пример системы второго порядка с нелинейностью типа насыщения, которая удовлетворяет критическому случаю критерия Попова [11, 24] и,

следовательно, является глобально асимптотически устойчивой при отсутствии внешнего воздействия. В то же время при наличии внешнего (периодического) воздействия в системе могут сосуществовать множественные периодические режимы. Для летательного аппарата аналогичные результаты приведены в работе [25].

В работах [15, 16, 26] предложена основанная на свойстве равномерной конвергентности [16, 27—30] процедура АИ-коррекции, обеспечивающая для определенных классов входных воздействий работоспособность систем управления производственными машинами с ПИ регулятором. Структура системы представлена на рис. 2, где k_A — выбираемый надлежащим образом параметр регулятора. Заметим, что такой способ АИ-коррекции типичен для многих работ по управлению с интегральной составляющей при насыщении управления [14, 22, 23].

В данной работе используется другой подход к задаче управления производственными машинами [17, 19, 20], связанный с исключением интегрирующего звена в законе управления и, следовательно, связанного с ним эффекта виндапа. Закон управления соответствует регулятору комбинированной структуры в форме обратной связи по рассогласованию и дополнительного сигнала от задающего воздействия в прямой цепи. При этом подходе, основываясь на предположении, что номинальная скорость выпуска продукции и возмущение постоянны, в состав регулятора включается наблюдатель состояния для оценки суммы этих величин для последующего использования при формировании сигнала управления. При отклонении процесса от требуемого выпуска продукции во времени от линей-

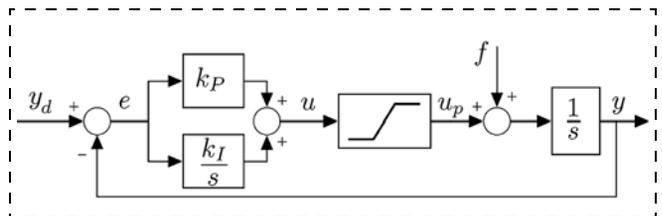


Рис. 1. Структурная схема системы (1), (2), (4) с ПИ регулятором

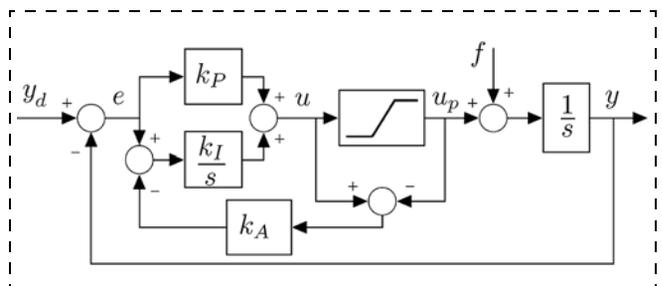


Рис. 2. Структура системы управления производственной машиной с ПИ регулятором и статической АИ-коррекцией

ного, вызванного, например, периодическими или регулярными колебаниями спроса, возникает ошибка слежения, которая для нелинейной конвергентной системы может быть исследована методом гармонического баланса [30].

Используемый в данной работе подход приводит к достаточно простым алгоритмам управления, которые могут найти применение и для управления линиями обрабатывающих машин с учетом наполнения связывающих их буферов. Пример такого рода рассмотрен далее в разделе 3.

1.3. Комбинированный закон управления

Предположим сначала, что переменные $y(t), f(t)$ и значение v_d измеряются и, следовательно, могут быть использованы при формировании сигнала управления $u_p(t)$. Используем следующий комбинированный закон управления [11, 12], включающий обратную и прямую связи:

$$u_p(t) = \text{sat}_{[0, u_{p, \max}]} (k_p(t) + v_d - f(t)), \quad (5)$$

где $e(t) = y_d(t) - y(t)$ — ошибка слежения; k_p — коэффициент пропорциональной составляющей управления по ошибке; $\text{sat}(\cdot)$ — функция насыщения:

$$\text{sat}_{[a, b]}(z) = \begin{cases} b & \text{если } z \geq b; \\ a & \text{если } z \leq a; \\ z & \text{иначе,} \end{cases} \quad (b > a). \quad (6)$$

Уравнения (1), (5) описывают замкнутую систему слежения за переменным задающим воздействием $y_d(t)$ вида (3).

1.4. Реализация комбинированного закона управления на основе наблюдателя состояния

Предположение о том, что средняя скорость задающего воздействия v_d и возмущение $f(t)$ — известные (измеряемые) сигналы, мало пригодно на практике, поэтому ниже будем полагать, что измеряется и используется в законе управления только сигнал ошибки $e(t) = y_d(t) - y(t)$. Также считаем известным сигнал управления $u_p(t)$. Заменяем в законе (5) значения v_d, f их оценками $\hat{v}_d(t), \hat{f}(t)$, вы-

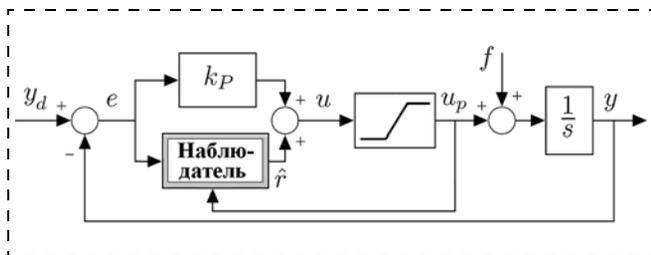


Рис. 3. Структурная схема системы управления производственной машиной с регулятором (13)—(15)

рабатываемыми наблюдателем (идентификатором состояния), который использует только доступные сигналы $e(t)$ и $u_p(t)$.

Поскольку синтез наблюдателя основывается на описании наблюдаемого процесса как выхода некоторой динамической системы, предположим на этапе синтеза, что как v_d , так и f постоянны, а задающее воздействие меняется линейно: $y_d(t) = y_{d,0} + v_d t$. Дифференцируя по времени выражение для ошибки слежения $e(t) = y_d(t) - y(t)$, получим из уравнения (1) следующую модель ошибки:

$$\dot{e}(t) = -u_p(t) + v_d - f(t). \quad (7)$$

Как видно из выражения (7), на основе измерения $e(t)$ нет возможности получить отдельно оценки f и v_d , а только их разность $r = v_d - f$. Используя приведенные выше обозначения и допущения, получим из формулы (7) следующую расширенную модель ошибки:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -u_p(t) + r(t), \\ \dot{r}(t) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Применение методов теории оценивания [31] приводит к следующему наблюдателю полного порядка:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1(t) = -l_1 \sigma_1(t) + \sigma_2(t) - u_p(t) + l_1 e(t), \\ \dot{\sigma}_2(t) = -l_2 \sigma_1(t) + l_2 e(t), \end{cases} \quad (9)$$

$$\hat{r}(t) = \sigma_2(t), \quad (10)$$

где $\hat{r}(t)$ — оценка величины r , выработанная наблюдателем (9), (10); $L = [l_1, l_2]^T \in \mathbb{R}^2$ — вектор определяемых при синтезе коэффициентов обратной связи наблюдателя, задающий динамику процесса оценивания.

Используем оценку $\hat{r}(t)$ в законе управления (5) вместо $r(t) = v_d(t) - f(t)$. Тогда сигнал управления $u_p(t)$ принимает вид

$$u_p(t) = \text{sat}_{[0, u_{p, \max}]} (k_p e(t) + \hat{r}(t)), \quad (11)$$

где $e(t) = y_d(t) - y(t)$, а $\hat{r}(t)$ вычисляется согласно (9), (10). Уравнения (9)—(11) описывают динамический регулятор второго порядка в обратной связи системы. Вырабатываемый регулятором сигнал управления $u(t) = k_p e(t) + \hat{r}(t)$ формируется на основе измерений только сигнала ошибки $e(t)$. Коэффициенты k_p, l_1, l_2 — параметры регулятора, выбираемые на основе требований к быстродействию и точности процесса управления. Структурная схема системы управления производственной машиной с регулятором (9)—(11) показана на рис. 3.

1.5. Связь с традиционной схемой АW-коррекции

Регулятор (9)–(11) представляет собой линейную динамическую систему второго порядка, входами которой являются сигнал ошибки $e(t)$ и ограниченный сигнал управления $u_p(t)$, на основе которых формируется "линейное" управление $u(t) = k_p e(t) + \hat{r}(t)$ (рис. 3). Аналогичную структуру имеет и традиционная система подавления виндапа в ПИ регуляторах (см. рис. 2), в которой на вход интегратора кроме сигнала рассогласования поступает (с некоторым коэффициентом k_A) и рассогласование между сигналами $u(t)$ и $u_p(t)$.

Установим связь между этими схемами управления. Приравняв между собой сигналы управления $u(t)$, вырабатываемые обоими регуляторами при одинаковых входах $e(t)$ и $u(t)$, получим, что при выполнении соотношений $l_1 = k_p$, $l_2 = k_I$ закон управления (9)–(11) эквивалентен представленной на рис. 4 системе с ПИ регулятором и динамическим АW-компенсатором, заданным аperiodическим звеном первого порядка с передаточной функцией

$$W_{AW}(s) = \frac{1}{s + k_p}.$$

Таким образом, показано, что предложенный метод синтеза систем комбинированного управления с наблюдателем может рассматриваться как некоторый систематический подход к построению динамических АW-компенсаторов [32, 26] определенного вида, обеспечивающих подавление виндапа в системах управления с ПИ регуляторами.

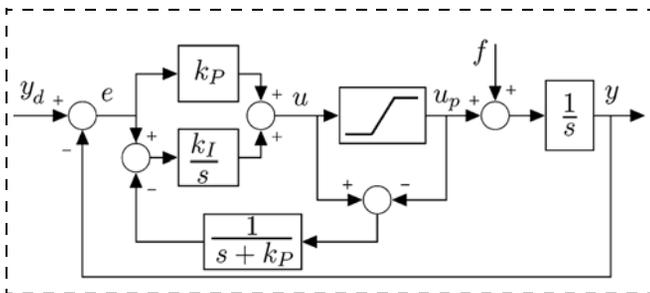


Рис. 4. Эквивалентная структура системы управления с ПИ регулятором и динамическим АW-компенсатором

2. Исследование динамики процесса управления производственной машиной

2.1. Исследование динамики линейной системы управления

Поведение замкнутой системы (1), (9)–(11) отличается от поведения идеализированной системы с регулятором (5) вследствие ошибки оценивания $\varepsilon_r(t) = r(t) - \hat{r}(t)$, вызванной как отличиями начальных условий, так и изменениями оцениваемой переменной $r(t)$ из-за флуктуаций $\varphi(t)$ процесса $y_d(t)$, непостоянством возмущений $f(t)$ и измерительных

погрешностей. Для анализа ошибки оценивания запишем уравнения системы объект — наблюдатель с учетом выражения (3) для задающего воздействия $y_d(t)$. Получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u_p(t) + f(t), \\ e(t) = y_{d,0} + v_d t + \varphi(t) - y(t), \\ \hat{r}(t) = \sigma_2(t), \\ \dot{\sigma}_1(t) = -l_1 \sigma_1(t) + \sigma_2(t) - u_p(t) + l_1 e(t), \\ \dot{\sigma}_2(t) = -l_2 \sigma_1(t) + l_2 e(t), \end{cases} \quad (12)$$

где $u_p(t)$, $f(t)$, $y_{d,0}$, v_d , $\varphi(t)$ — входные переменные. После несложных преобразований получим из (12) следующее уравнение для ошибки оценивания $\varepsilon_r(t)$:

$$\varepsilon_r(t) = \mu(t) - f(t), \quad (13)$$

где переменная $\mu(t)$ подчиняется уравнению

$$\ddot{\mu}(t) + l_1 \dot{\mu}(t) + l_2 \mu(t) = l_2(f(t) - \dot{\varphi}(t)). \quad (14)$$

Отсюда видно, что ошибка $\varepsilon_r(t)$ не зависит от $u_p(t)$, $y_{d,0}$, v_d . С учетом ошибки оценивания $\varepsilon_r(t)$ закон управления (5) принимает вид

$$u_p(t) = \text{sat}_{[0, u_{p, \max}]}(k_p e(t) + v_d - f(t) - \varepsilon_r(t)). \quad (15)$$

Таким образом, динамика замкнутой системы задается уравнениями (1), (14), (15), которые отличаются от уравнений "идеальной" системы управления с комбинированным регулятором (5) наличием "приведенного возмущения" $\varepsilon_r(t)$, зависящего, как следует из (13), (14), от флуктуаций $\varphi(t)$, $f(t)$.

Легко убедиться, что в "номинальном" линейном режиме (при отсутствии насыщения) система управления (11), (12) обладает астатизмом второго порядка по отношению к задающему воздействию $y_d(t)$ и астатизмом первого порядка по возмущению $f(t)$, как это следует из приведенных ниже передаточных функций замкнутой системы (11), (12)

по ошибкам от задающего воздействия $\Phi_{y_d}^e(s)$ и возмущения $\Phi_f^e(s)$:

$$\Phi_{y_d}^e(s) = \frac{s^2 B(s)}{A(s)}, \quad \Phi_f^e(s) = -\frac{s B(s)}{A(s)}, \quad (16)$$

где $B(s) = s + l_1$, $A(s) = (s + k_p)(s^2 + l_1 s + l_2)$, $s \in \mathbb{C}$ — аргумент преобразования Лапласа.

2.2. Исследование нелинейных систем в частотной области

При наличии флуктуаций желаемого количества выпускаемого продукта, т. е. при $\varphi(t) \neq \text{const}$, сходимость ошибки слежения $e(t)$ к нулю не может

быть обеспечена. В линейном ("номинальном") режиме анализ влияния флуктуаций и возмущений может быть легко выполнен на основе передаточных функций по ошибке (16). При возникновении насыщения проявляются нелинейные свойства системы, что существенно усложняет анализ и требует привлечения специальных методов. В этом случае как с точки зрения упрощения исследований, так и с точки зрения практического применения требуется обеспечить сходимость траекторий друг к другу для различных начальных условий при каждом заданном входном воздействии. Это свойство содержится в понятии *инкрементальной устойчивости* (*incremental stability*) [33]. Чтобы проверить наличие данного свойства у рассматриваемой системы, переписем (1), (5) в новых координатах. Введем переменную z : $z(t) = y(t) - y_{d,0} - v_d t$. Тогда выражения для выхода системы $y(t) = z(t) + y_{d,0} + v_d t$ и ошибки слежения $e(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned} e(t) &= y_d(t) - y(t) = \\ &= y_{d,0} + v_d t + \varphi(t) - y(t) = \varphi(t) - z(t). \end{aligned}$$

Запишем выражение (5) для сигнала управления u_p с использованием стандартной (симметричной) функции насыщения $\text{sat}_m(x) = \min(m, \max(-m, x))$ где $m = u_{p, \max}/2$. Введя также линейный сигнал управления $u(t) = k_p e(t) + v_d - f(t)$, получим что $u_p = \text{sat}_{[0, u_{p, \max}]}(u) = \text{sat}_m(k_p e + v_d - f - m) + m$. Дифференцируя $z(t)$ по t и принимая во внимание (1), получим $\dot{z}(t) = u_p(t) - v_d + f(t)$. Подстановка $u_p = \text{sat}_{[0, u_{p, \max}]}(u) = \text{sat}_m(k_p e + v_d - f - m) + m$ в последнее выражение дает $\dot{z}(t) = \text{sat}_m(k_p e + v_d - f - m) + m - v_d + f(t)$. Таким образом, получаем следующие уравнения системы в преобразованных координатах с симметричной нелинейностью:

$$\dot{z}(t) = \bar{u}(t) + f(t) + m - v_d; \quad (17)$$

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = \text{sat}_m(k_p e(t) + \hat{r}(t) - m); \\ e(t) = \varphi(t) - z(t); \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \hat{r}(t) = \sigma_2(t); \\ \dot{\sigma}_1(t) = -l_1 \sigma_1(t) + \sigma_2(t) - \bar{u}(t) - m + l_1 e(t); \\ \dot{\sigma}_2(t) = -l_2 \sigma_1(t) + l_2 e(t). \end{cases} \quad (19)$$

Напомним, что *конвергентные системы*, возбуждаемые ограниченным входным воздействием, имеют глобально асимптотически устойчивое установившееся решение [28, 29]. Таким образом, при произвольном заданном входном воздействии решения конвергентных систем независимо от начальных условий сходятся к единственному образом определенному предельному решению. Конвергентность системы (17)–(19), возбуждаемой ограничен-

ым входным сигналом $\varphi(t)$, может быть установлена на основе общих результатов работ [17, 19, 20, 26].

Важной особенностью конвергентных нелинейных систем, выделяющей их из нелинейных систем общего вида, является тот факт, что конвергентные системы можно исследовать почти так же, как и линейные системы. Действительно, тогда как исследование нелинейных систем в общем случае затруднено из-за возможности появления различных установившихся процессов в зависимости от начального состояния системы, конвергентные системы имеют при данном входном воздействии единственное предельное решение, и, следовательно, их предельное поведение может быть также определено единственным образом. Это, в частности, позволяет выполнять анализ таких систем в частотной области на основе изучения поведения предельного решения при гармоническом входном воздействии [30, 34]. Кроме того, поскольку предельное решение конвергентной системы зависит только от входного воздействия и не зависит от начальных условий, его можно численно находить *моделированием системы* при фиксированных начальных условиях, в то время как для нелинейных систем требуется, вообще говоря, исследовать поведение при бесконечно большом числе начальных состояний. Эти свойства конвергентных систем используются ниже для получения их функций чувствительности и анализа систем с *насыщением*.

Анализ свойств линейных систем управления (СУ) существенным образом опирается на получение частотных характеристик, таких как *функция чувствительности* $\mathcal{S}(i\omega)$ и *дополнительная функция чувствительности* $\mathcal{T}(i\omega)$ [11, 31]. В работе [35] введены обобщенные версии этих функций для нелинейных систем в форме Лурье, обладающих свойством конвергентности. Приведем основные положения.

Рассмотрим нелинейную систему вида

$$\dot{x}(t) = f(x, r), \quad y = h(x, r), \quad e(t) = r(t) - y(t), \quad (20)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; скалярные функции $y(t)$ — выход системы; $r(t)$ — задающее воздействие и $e(t)$ — ошибка слежения; $f(x, r) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ — вектор-функция системы; $h(x, r) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$ — функция выхода. Рассмотрим гармонические задающие воздействия $r(t) = a \sin(\omega t)$ с амплитудой a и частотой ω . Предположим, что система (20) *равномерно конвергентна* для воздействий этого класса. Тогда для каждого a и ω существует единственное установившееся периодическое решение $\bar{x}(t)$ (20)

с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и соответствующие ему выходной

процесс $\bar{y}(t)$ и ошибка $\bar{e}(t) = r(t) - \bar{y}(t)$ [16, 35, 36].
Функции

$$S(a, \omega) = \frac{\|\bar{e}\|_2}{\|r\|_2}, \quad T(a, \omega) = \frac{\|\bar{y}\|_2}{\|r\|_2}, \quad (21)$$

где $\|z\|_2 = \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} z(\tau)^2 d\tau \right)^{1/2}$ называются, соответ-

ственно, *обобщенной функцией чувствительности и обобщенной дополнительной функцией чувствительности* конвергентной системы (20).

Для линейных систем функции $S(a, \omega)$ и $T(a, \omega)$ совпадают с обычными амплитудно-частотными характеристиками по ошибке и по задающему воздействию (соответственно). Для нелинейных систем функции $S(a, \omega)$, $T(a, \omega)$ зависят не только от частоты внешнего воздействия ω , но также и от его амплитуды a . Обобщенные функции чувствительности можно получить численно, интегрируя уравнения (20) $N_a N_\omega$ раз при гармоническом воздействии $r(t)$ с различными амплитудами $a_i, i = 1, 2, \dots, N_a$, и частотами $\omega_j, j = 1, 2, \dots, N_\omega$. Объем вычислений можно существенно уменьшить, используя метод гармонического баланса для неавтономных конвергентных систем, имеющих форму Лурье [30] (линейная динамическая подсистема, замкнутая статической нелинейностью, см. [11, 12]). Основные положения метода гармонического баланса для неавтономных конвергентных систем Лурье приведены ниже.

Пусть система (20) представима в следующей форме Лурье:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\psi(y) + Fw(t); \quad (22)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t); \quad z(t) = Hx(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $w(t)$ — внешнее скалярное воздействие; $y(t)$ — скалярный выход системы; $\psi(y)$ — непрерывная скалярная функция; A, B, C, D, F, H — матрицы соответствующих размеров. Предполагается, кроме того, что функция $\psi(\cdot)$ при некотором конечном $\mu > 0$ удовлетворяет следующему *секторному условию роста*:

$$0 \leq \frac{\psi(y_1) - \psi(y_2)}{y_1 - y_2} \leq \mu \text{ для всех } y_1, y_2, y_1 \neq y_2. \quad (23)$$

Исследуем поведение системы (23) при гармоническом входном воздействии $w(t) = b \sin(\omega t)$ с амплитудой b и частотой ω . Согласно работам [35, 37] в установившемся режиме (по окончании переходных процессов) выход $y(t)$ может быть приближенно представлен гармоническим процессом с частотой

той ω и амплитудой a , удовлетворяющей следующему уравнению *гармонического баланса*:

$$|1 - K(a)G(i\omega)|^2 a^2 = |H(i\omega)|^2 b^2, \quad (24)$$

где $G(i\omega) = C(i\omega I_n - A)^{-1}B$, $H(i\omega) = C(i\omega I_n - A)^{-1}F + D$, $K(a)$ — коэффициент гармонической линеаризации (по другой терминологии — *описывающая функция*) для нелинейности $\psi(\cdot)$; I_n — единичная матрица порядка n .

Для нечетной нелинейности $\psi(x)$ коэффициент гармонической линеаризации $K(a)$ определяется выражением (см. также [11])

$$K(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (25)$$

2.3. Пример исследования системы управления производственной машиной

Пусть максимальная производительность машины $u_{p, \max} = 1 \text{ с}^{-1}$. Рассмотрим сначала систему управления с ПИ регулятором (4), структура которой представлена на рис. 1. Выберем следующие параметры регулятора: $k_P = 7,0 \text{ с}^{-1}$, $k_I = 25 \text{ с}^{-2}$. Пусть

$\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega t)$, где $\varphi_{\max} = 0,16$, $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ с}^{-1}$, $v_d = 0,25 \text{ с}^{-1}$, $y_{d,0} = 2$, $y(0) = 0$. Для линейной системы (без насыщения) ошибка определяется через передаточную функцию $\Phi_{y_d}^e(s) = \frac{s^2}{s^2 + k_P s + k_I}$. Система

обладает астатизмом второго порядка и, следовательно, компонента $y_{d,0} + v_d t$ не вызывает установившуюся ошибку. Амплитуда ошибки от гармонической составляющей входного сигнала в линейном случае составит $|\Phi_{y_d}^e(i\omega)|\varphi_{\max} = 0,015$. Однако,

как видно из приведенных на рис. 5, *a* результатов моделирования системы с учетом насыщения сигнала управления, она фактически неработоспособна, так как в ней совершаются колебания с амплитудой ошибки около 1,6, а управление u_p принимает только крайние значения. Для сравнения на рис. 5, *б* приведены результаты моделирования системы с предложенным законом управления (1), (13)—(15) при том же входном воздействии и коэффициентах регулятора $k_P = 5 \text{ с}^{-1}$, $l_1 = 20 \text{ с}^{-1}$, $l_2 = 100 \text{ с}^{-2}$. В системе устанавливаются колебания с такой же амплитудой ошибки, как и у линейной системы. Естественное отличие имеется в длительности переходного процесса, которая у нелинейной системы из-за ограничения управления составляет в данных условиях около 2,5 с, а у линейной — 1 с.

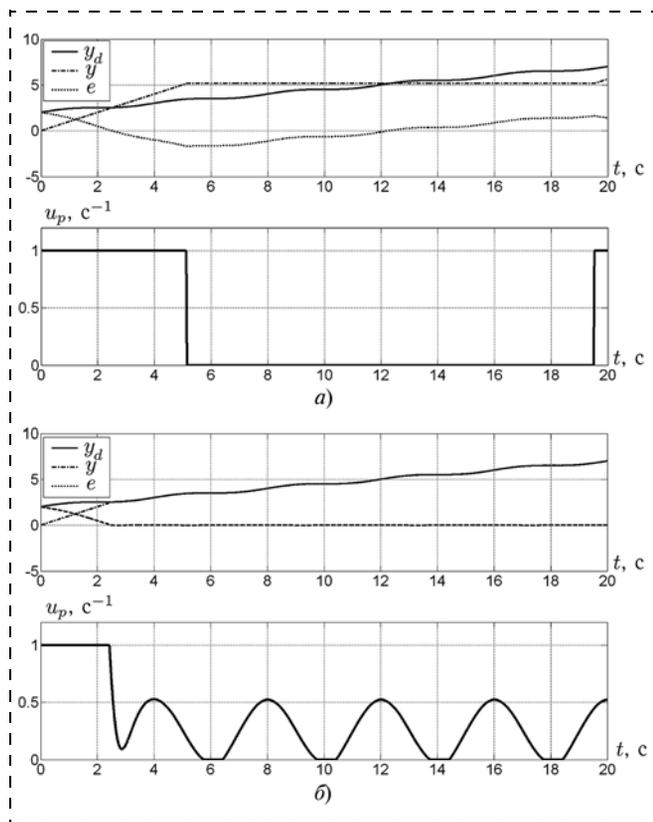


Рис. 5. Процессы в системе:
a — ПИ регулятор (4), *б* — регулятор (9)—(11) при $v_d = 0,25 \text{ с}^{-1}$, $y_{d,0} = 2$, $\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega t)$, $\varphi_{\max} = 0,16$, $\omega = \pi/2 \text{ с}^{-1}$

В приведенном примере средняя скорость задающего воздействия составляет 25 % от имеющейся производительности машины, поэтому насыщение управления проявляется только в начале процесса, а в установившемся режиме фактически не проявляется за исключением участков малой длительности, когда машина останавливается, а не производит "отрицательное количество" продукции, как это следовало бы из линейного закона управления (см. график управления на рис. 5, *б*). Результаты моделирования, приведенные на рис. 6, соответствуют воздействиям, для которых влияние ограничения управления становится существенным. Графики на рис. 6, *а* получены при $v_d = 0,50 \text{ с}^{-1}$, $y_{d,0} = 2$,

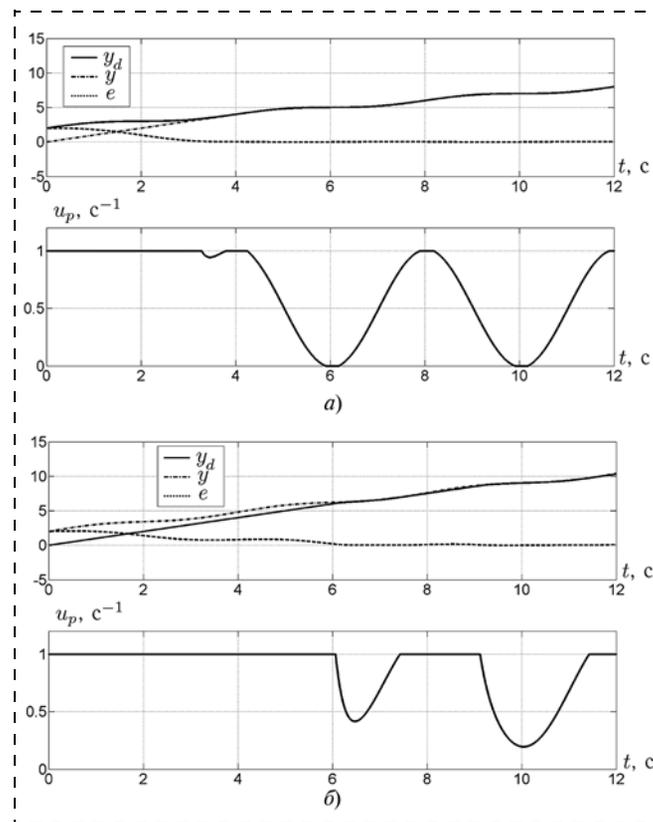


Рис. 6. Процессы в системе с регулятором (9)—(11)
 при $y_{d,0} = 2$, $\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega t)$, $\varphi_{\max} = 0,16$, $\omega = \pi/2 \text{ с}^{-1}$; *a* — $v_d = 0,50 \text{ с}^{-1}$; *б* — $v_d = 0,70 \text{ с}^{-1}$

$\varphi_{\max} = 0,30$, а на рис. 6, *б* — при $v_d = 0,70 \text{ с}^{-1}$ (остальные значения оставлены без изменений). Значения $v_d = 0,50 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_{\max} = 0,30$ являются "предельными", для которых характер установившегося процесса практически совпадает с "номинальным" (без насыщения). Амплитуда установившейся ошибки у нелинейной системы, как и у номинальной, равна 0,028. При $v_d = 0,70 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_{\max} = 0,30$ (рис. 6, *б*) в нелинейной системе устанавливаются несимметричные колебания ошибки в интервале $[-0,02, 0,15]$.

Применим изложенный выше метод обобщенных функций чувствительности для исследования точности системы управления (1), (9)—(11) (или эквивалентной ей системы (17)—(19)), подверженной гармоническому воздействию $\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega t)$ с амплитудой φ_{\max} и частотой ω . Используем приведенные выше значения параметров регулятора (13)—(15): $k_p = 5 \text{ с}^{-1}$, $l_1 = 20 \text{ с}^{-1}$, $l_2 = 100 \text{ с}^{-2}$. Будем изменять частоту ω воздействия $\varphi(t)$ в пределах $[0,2; 50] \text{ с}^{-1}$ и выполним расчет функции чувствительности $S(\varphi_{\max}, \omega)$; для $\varphi_{\max} = \{0,01; 0,1; 0,2; 0,5\}$. Результаты представлены на рис. 7.

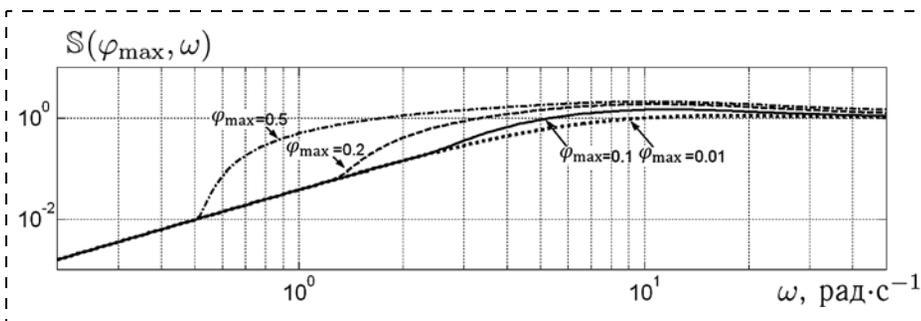


Рис. 7. Обобщенные функции чувствительности $S(\varphi_{\max}, \omega)$ нелинейной системы (17)—(19)

Как видно из полученных графиков, при $\varphi_{\max} = 0,01$ амплитуда установившейся ошибки слежения совпадает с линейным случаем. При больших амплитудах флуктуаций ошибка слежения оказывается более значительной, причем ее рост наблюдается в области все более низких частот входного сигнала.

3. Децентрализованное управление линией производственных машин

3.1. Модель линии производственных машин

Рассмотрим линию из N производственных машин M_1, M_2, \dots, M_N , разделенных буферами неограниченной емкости $B_{j-1,j}, j = 1, \dots, N$ (рис. 8). Первая машина в линии M_1 снабжается сырьем, N -я машина M_N выпускает готовую продукцию. Каждая из машин в линии M_j получает исходный продукт для обработки ("полуфабрикат", "заготовку") из своего входного буфера $B_{j-1,j}$ и помещает обработанный продукт в соответствующий выходной буфер $B_{j,j+1}$ для обработки последующей машиной в линии. Предполагаем, что на входе первой машины всегда имеется достаточно сырья для обработки, другими словами, что буфер $B_{0,1}$ никогда не опустошается.

Предполагаем, что каждая машина производит продукт непрерывно по времени $t \in \mathbb{R}$ с некоторой *производительностью* $u_j(t) \in \mathbb{R}$, где $j = 1, \dots, N$ — номер машины. Общее количество произведенного машиной продукта описывается переменной $y_j(t) \in \mathbb{R}$. Взаимодействие машин описывается через переменные $w_j(t) = \max(y_{j-1} - y_j, 0), j = 2, \dots, N$, — *содержимое* буферов. Значение $w_j(t) = 0$ соответствует отсутствию исходного материала для обработки во входном буфере j -й машины и, следовательно, остановке работы машины M_j . Указанные рассуждения приводят к следующей непрерывной (по времени и по переменным) модели производственной машины:

$$\dot{y}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + f_j(t), & \text{если } w_j(t) > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (26)$$

где $t \in \mathbb{R}$ — непрерывное время; $j = 1, \dots, N$ — номер машины; переменные $f_j(t) \in \mathbb{R}$ обозначают *внешние возмущения*. Например, f_j могут описывать производственные потери, или вариации производительности машины.

Производительности u_j не могут превосходить некоторых значений $u_{\max,j}$ вследствие технологических ограничений. В дальнейшем, не ограничивая

общность, считаем, что производительности всех машин в линии ограничены одной и той же величиной u_{\max} . Так как скорости обработки u_j также не могут быть отрицательными, значения $u_j(t)$ лежат в следующих границах:

$$0 \leq u_j(t) \leq u_{\max,j}, j = 1, \dots, N, \forall t \geq 0. \quad (27)$$

Окончательно приходим к следующей модели производственной линии:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= u_1(t) + f_1(t); \\ \dot{y}_2(t) &= (u_2(t) + f_2(t))\text{sign}(w_2(t)); \\ &\dots \\ \dot{y}_N(t) &= (u_N(t) + f_N(t))\text{sign}(w_N(t)), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2. Децентрализованная стратегия управления

Используем описанный выше закон управления (9)—(11) одной машиной для децентрализованного управления линией машин. Непосредственное использование (9)—(11) для каждой машины неудовлетворительно, так как в нем не учитывается состояние буферов, и, следовательно, возможны остановки процесса производства из-за опустошения буферов или избыточное накопление в них промежуточного продукта, что невыгодно с экономической точки зрения. Для буферов конечной емкости это может привести и к их переполнению и остановкам производства. Кроме того, с точки зрения реализации предпочтительнее иметь дело с распределенным законом управления [38, 39], в котором на каждую машину передается не заданное общее количество продукции, а требование, вырабатываемое соседней машиной (потребителем). Исходя из этих соображений, следуя [19, 20], используем децентрализованную стратегию управления, в которой управление каждой машиной осуществляется с использованием данных о работе только ближайшей машины и состоянии буфера, в котором для данной машины содержится исходный материал для обработки. Содержимое буфера также подлежит управлению через изменение производительности наполняющей его машины. Для этого введем некоторую постоянную величину $w_d > 0$ — желаемое наполнение буфера. Понятно, что с точки зрения

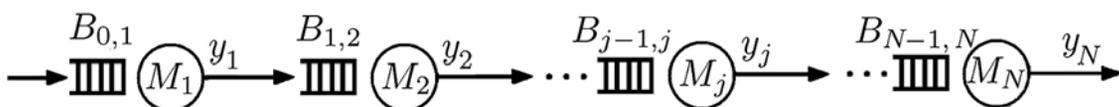


Рис. 8. Схематическое изображение линии из N производственных машин (M_j — машины, $B_{i,j}$ — буферы)

Полученные выражения дают возможность исследовать выходную реакцию каждой машины в линии и состояние буферов при различных задающих и возмущающих воздействиях, приложенных к системе. Характеристический многочлен $A(s)$ замкнутой системы, $A(s) = \det(sI - A)$, где I обозначена единичная матрица порядка $3N$, в силу ленточной формы матрицы A системы имеет вид

$$A(s) = (s + k_p)(s + k_{pw})^{N-1}(s^2 + l_1s + l_2)^N. \quad (32)$$

Очевидно, что при любых положительных параметрах регулятора замкнутая линейная система (31) асимптотически устойчива, и ее динамика определяется параметрами k_p , k_w регулятора и коэффициентами обратной связи l_1 , l_2 наблюдателя.

После несложных преобразований и сокращения общих множителей² в числителе и знаменателе, получим, что передаточные функции системы по ошибке от задающего воздействия y_d имеют вид

$$\Phi_{y_d}^{e_j}(s) = \frac{s^2(s + l_1)}{(s + k_p)(s^2 + l_1s + l_2)}, \quad (33)$$

для всех $j = 1, \dots, N$. Выражение (33) показывает, что на номинальном режиме выходы всех машин линии $y_j(t)$ отслеживают задающее воздействие $y_d(t)$ с одинаковой динамикой, определяемой параметрами k_p , l_1 , l_2 . Коэффициент передачи k_w не оказывает влияния на процесс слежения за y_d . Кроме того, из (33) видно, что при линейно-изменяющемся задании $y_d(t) = y_{d,0} + v_d t$ для каждой машины асимптотические ошибки $e_j(t)$ по y_d равны нулю: $e_j(t) \equiv y_d(t) - y_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следует учесть, что (33) характеризует составляющую ошибки, вызванную только задающим воздействием y_d . Влияние возмущений $f_j(t)$ и сигнала задатчика содержимого буферов w_d исследуются отдельно.

Из формулы (31) следует, что передаточные функции $\Phi_{f_j}^{y_i}(s)$ для выхода i -й машины от действующего на j -ю машину возмущения определяются выражениями

$$\Phi_{f_j}^{y_i}(s) = \begin{cases} \frac{k_w^{i-j} s(s + l_1)}{(s + k_p)(s^2 + l_1s + l_2)(s + k_{pw})^{i-j}}, & \text{при } i \geq j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (34)$$

Передаточная функция от задающего воздействия w_d к выходу N -й, "выпускающей конечный продукт", машины $\Phi_{w_d}^{y_N}(s)$ тождественно равна нулю,

² При положительных параметрах регулятора все полюсы системы (31) (нули многочлена (32)) устойчивы.

откуда следует, что введение задающего воздействия на содержимое буферов w_d не приводит (на номинальном режиме) к изменению выпуска продукции производственной линией.

3.4. Числовой пример. Моделирование работы линии из четырех машин

В качестве примера рассмотрим производственную линию, состоящую из четырех машин, последовательно соединенных через буферы. Используем следующие значения параметров децентрализованного закона управления (29), (30): $u_{\max} = 1,0$, $k_p = 5 \text{ с}^{-1}$, $l_1 = 20 \text{ с}^{-1}$, $l_2 = 100 \text{ с}^{-2}$, $k_w = 30 \text{ с}^{-1}$. Выберем $w_d = 0,2$.

Для указанных параметров передаточные функции по ошибке от задающего воздействия (33) имеют

$$\text{вид } \Phi_{y_d}^{e_j}(s) = \frac{s^2(s + 20)}{(s + 5)(s^2 + 20s + 100)}, \quad j = 1, \dots, 4, \text{ и со-}$$

ответствуют системе с астатизмом второго порядка и временем переходного процесса около одной секунды.

При насыщении управляющего воздействия и опустошении некоторых буферов существенным образом проявляются нелинейности в системе. Про моделируем работу линии при типовом задающем воздействии $y_d(t)$ вида (3). Примем в (3) $y_{d,0} = 2$, $v_d = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega t)$, $\varphi_{\max} = 0,3$, $\omega = \pi/2 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 9, 10 отражены процессы в системе (28)–(30) при следующих начальных условиях: $y_{1,0} = 1$, $y_{2,0} = 4$, $y_{3,0} = 3$, $y_{4,0} = 0$. Из графиков видно, что в начале процесса машины 2 и 3 не работают, так как в их выходных буферах имеются достаточное количество продукции. Машины 1 и 4 ("конечная машина") работают с полной производительностью для устранения начального рассогласования, вызванного $y_{d,0} = 2$. По мере опустошения буферов включаются в работу машины 2 и 3, и функционирование всех машин в линии осуществляется синхронно для отслеживания воздействия

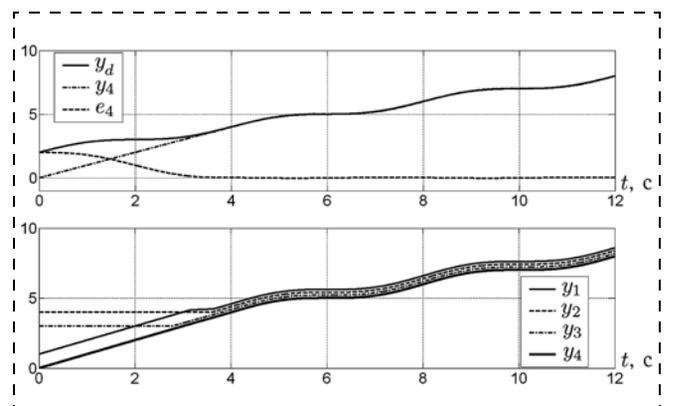


Рис. 9. Графики процессов $y_d(t)$, $e_4(t)$, $y_i(t)$ в системе (28), (29), (30) при $y_{d,0} = 2$, $v_d = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_{\max} = 0,3$, $\omega = \pi/2 \text{ с}^{-1}$

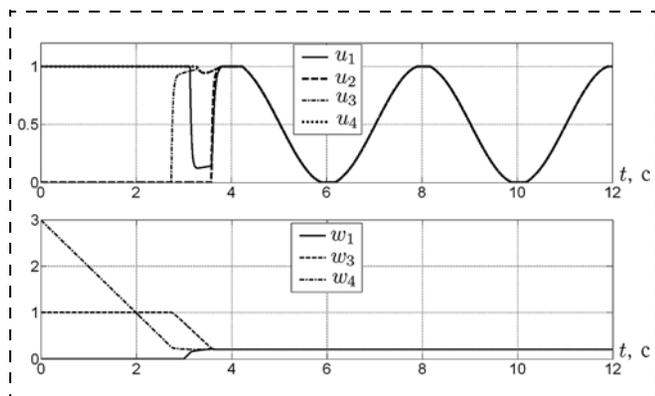


Рис. 10. Графики процессов $u_i(t)$, $w_j(t)$ в системе (28), (29), (30) при $u_{d,0} = 2$, $v_d = 0,5 \text{ c}^{-1}$, $\varphi_{\max} = 0,3$, $\omega = \pi/2 \text{ c}^{-1}$

$y_d(t)$. При этом обеспечивается превышение выхода каждой предыдущей j -й машины в линии над выходом $(j + 1)$ -й на величину w_d требуемого заполнения буфера $B_{j,j+1}$.

Заключение

В статье рассматриваются задачи управления производственными машинами, в которых требуется отслеживать потребительский спрос в предположении, что он имеет постоянную номинальную скорость с возможными флуктуациями.

Для устранения эффекта потери работоспособности, вызванного сочетанием интегральной составляющей в законе управления и насыщения сигнала управления ("виндап"), предложено использование комбинированного закона управления с наблюдателем производной от ошибки. Показана связь предложенного метода с динамической антивиндап коррекцией. Исследованы характеристики нелинейной системы управления во временной и частотной областях.

Рассмотрена задача управления линией производственных машин с буферизацией промежуточного продукта, для которой построен децентрализованный закон управления. Проведены исследования системы в линейной и нелинейной постановке. Приведены численные примеры и результаты моделирования для одной машины и линии из четырех машин, демонстрирующие обеспечение требуемого поведения системы в различных условиях.

Дальнейшие исследования предполагается посвящать задаче сетевого управления производственными машинами, организованными в более общие (древовидные или циклические) структуры.

Список литературы

1. Hopp W., Spearman M. Factory physics: Foundations of manufacturing management / 2nd ed. Irwin/McGraw-Hill, International Editions, Singapore, 2000.
2. Alvarez-Vargas R., Dallery Y., David R. A study of the continuous flow model of production lines with unreliable machines and

finite buffers // Journal of Manufacturing Systems. 1994. V. 13, N 3. P. 221–234.

3. Van den Berg R., Lefeber E., Rooda J. Modeling and control of a manufacturing flow line using partial differential equations // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2008. V. 16, N 1. P. 130–136.

4. Van den Berg R., Lefeber E., Rooda J. Modelling manufacturing systems for control: A validation study // Networks of interacting machines: production organization in complex industrial systems and biological cells. World Scientific, 2005. P. 101–126.

5. Castro J., Alvarez J., Verduzco F. Continuous approximation of the complex dynamics of a discontinuous system // Cybernetics & Physics. 2012. V. 1, N 1. P. 11–16. URL: <http://cap.physcon.ru/>

6. Gershwin S. Hierarchical flow control: A framework for scheduling and planning discrete events in manufacturing systems // Proc. IEEE. 1998. V. 77, N 1. P. 195–208.

7. Sharifnia A. Stability and performance of distributed production control methods based on continuous-flow models // IEEE Trans. Automat. Contr. 1994. V. 39, N 4. P. 725–737.

8. Vargas-Villamil F., Rivera D., Kempf K. A hierarchical approach to production control of reentrant semiconductor manufacturing lines // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2003. V. 11, N 4. P. 578–587.

9. Savkin A. Regularizability of complex switched server queueing networks modelled as hybrid dynamical systems // Systems & Control Letters. 1998. V. 35. P. 291–299.

10. Bauso D., Blanchini F., Pesenti R. Robust control strategies for multi-inventory systems with average flow constraints // Automatica. 2006. V. 42. P. 1255–1266.

11. Бесекецкий В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.

12. Первозванский А. А. Курс теории автоматического регулирования. Учеб. пособ. М.: Наука, 1986.

13. Lozier J. C. A steady-state approach to the theory of saturable servo systems // IRE Trans. Automat. Contr. 1956. May. P. 19–39.

14. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.

15. Van den Bremer W., van den Berg R., Pogromsky A., Rooda J. Anti-windup based approach to the control of manufacturing machines // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea: IFAC, 2008.

16. Van den Berg R., Pogromsky A. Y., Leonov G. A., Rooda J. E. Design of convergent switched systems // Proc. Group Coordination and Cooperative Control (Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 336. P. 291–311) / K. Y. Pettersen and J. Y. Gravadahl, Eds. Berlin: Springer, 2006.

17. Andrievsky B., Pogromsky A. Y., Rooda J. E. Observer-based production control of manufacturing machines // Proc. 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM09). Moscow, Russia: IFAC, 3–5 Jun. 2009.

18. Kommer A. G. N., Pogromsky A. Y., Andrievsky B., Rooda J. E. Discrete-event implementation of observer-based feedback control of manufacturing system // Proc. 3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC 2009). Saint Petersburg, Russia: IEEE, Jul. 8–10 2009.

19. Andrievsky B., Starkov K., Pogromsky A. Frequency and time-domain analysis on performance of a production line operated by observer-based distributed control // International Journal of Systems Science. 2013. 44 (10). P. 1885–1896.

20. Leonov G., Pogromsky A., Starkov K., Andrievsky B., Kuznetsov N., Adan I. Nonlinear problems in control of manufacturing systems // IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control (MIM'2013). June 19–21, 2013, Saint Petersburg, Russia. Plenary talk. P. 33–42. URL: <http://www.ifac-papersonline.net/>

21. Glatfelder A., Schaufelberger W. Control Systems with Input and Output Constraints. Springer-Verlag, 2003.

22. Hippe P. Windup in Control: Its Effects and Their Prevention. New York: Springer-Verlag, 2006.

23. Tarbouriech S., Turner M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems // IET Control Theory Appl. 2009. V. 3, N 1. P. 1–19.

24. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

25. Leonov G. A., Andrievsky B. R., Kuznetsov N. V., Pogromsky A. Yu. Control of aircrafts with AW-compensation // Differential Equations. 2012. V. 48. № 13. P. 1700–1720.

26. **Van den Berg R. A.** Performance analysis of switching systems / Thesis (PhD), Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2008.

27. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. Учеб. пособ. для вузов. М.: Наука, 1967.

28. **Pavlov A., Pogromsky A., van de Wouw N., Nijmeijer H.** Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich // Systems & Control Letters. 2004. V. 52. P. 257–261.

29. **Pavlov A., van de Wouw N., Nijmeijer H.** Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: A Convergent Dynamics Approach. Boston, MA: Birkhäuser, 2006.

30. **Van den Berg R., Pogromsky A., Rooda J.** Well-posedness and accuracy of harmonic linearization for Lur'e systems // Proc. 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA: IEEE, 2007.

31. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

32. **Grimm G., Hatfield J., Postlethwaite I., Teel A., Turner M., Zaccarian L.** Antiwindup for stable linear systems with input saturation: An LMI-based synthesis // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. V. 48, N 9. P. 1509–1524.

33. **Angeli D.** A Lyapunov approach to incremental stability properties // IEEE Trans. Automat. Contr. 2002. V. 47, N 3. P. 410–421.

34. **Pavlov A., v. d. Wouw N., Nijmeijer H.** Frequency response functions for nonlinear convergent systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2007. V. 52, N 6. P. 1159–1165.

35. **Pavlov A., van de Wouw N., Pogromsky A., Heertjes M., Nijmeijer H.** Frequency domain performance analysis of nonlinearly controlled motion systems // Proc. 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA: IEEE, Dec. 12–14, 2007.

36. **Pavlov A., van de Wouw N., Nijmeijer H.** Convergent systems: Analysis and design // Proc. Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems. Springer, 2005.

37. **Pogromsky A. Y., van den Berg R. A., Rooda J. E.** Performance analysis of harmonically forced nonlinear systems // Proc. 3rd IFAC Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO'07). V. 3. Saint Petersburg: IFAC, Aug. 2007.

38. **Новиков Д. А., Цветков А. В.** Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.

39. **Бурков В. Н., Кузнецов Н. А., Новиков Д. А.** Механизмы управления в сетевых структурах // АИТ. 2002. Т. 12. С. 96–115.

УДК 658.012.11

В. И. Раков, д-р техн. наук, проф., rakov2010vi@mail.ru,

О. В. Захарова, канд. техн. наук, ст. преподаватель, cvaig@mail.ru,
Государственный университет — УНПК, г. Орел

Исследование вычислительных возможностей повышения быстродействия цифровых регуляторов для приводов технологического оборудования¹ Часть 2. Ускорение вычислительных операций²

Предложена математическая модель сверхбыстродействующего арифметико-логического устройства непосредственного формирования результата (АЛУ НФ) и состав процессорного ядра АЛУ НФ с мультиклеточной организацией. Отмечен структурный переход от гибридного сигнального процессора к схеме с использованием АЛУ НФ и контекстно-связанного представления команд в цифровом контурном регуляторе.

Ключевые слова: регулятор, контроллер, производительность, арифметико-логическое устройство

V. I. Rakov, O. V. Zakharova

About Computing Opportunities of Increase of Speed of Digital Regulators for Drives of Processing Equipment. Part 2. Reduction of Time of Calculations

The mathematical model of the new high-speed arithmetic-logic device (ALU NF) and processor structure for the digital regulator is offered.

Keywords: regulator, controller, productivity, arithmetic and logic unit

2. Ускорение вычислительных операций

Представление числа в большей или меньшей степени обуславливается несколькими обстоятельствами [1]: а) *удобством* регистрации и трактовки

¹ Исследование выполнено при поддержке "Государственный университет — УНПК" по теме "Разработка программной системы поддержки процесса управления в предаварийных состояниях для восстановления нормальной работы", приказ № 7-н/26 от 23.10.13.

² Часть 1 была опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление" № 4, 2014.

как совокупности действий по формированию, приему, сохранению и передаче численных данных, например, как при использовании десятичной системы счисления; б) совокупностью подготовительных действий (преобразований) для последующего проведения вычислительной операции, например, как в системах счисления в остаточных классах с характерным соотношением преобразования двоичного числа из позиционной системы счисления в модулярное (например, в виде

формирования массивов остатков и кодов Гензеля для исходных двоичных чисел); в) способом вычисления как определенной последовательностью применения более "простых" операций или действий; г) свойствами самого процесса вычисления, выраженными в возможности полезного проведения дополнительной совокупности действий, например, как в случае Фибоначчиевых систем счисления, обеспечивающих контроль ошибок вычислительных операций и фактически возможность исправления ошибок в такте функционирования вычислителя.

Очевидно, что практически все обстоятельства (как совокупность действий для реализации) могут снижать производительность вычислителя. Однако принято считать (что и нашло свое выражение в многочисленных количественных оценках производительности), что существенное влияние оказывает способ вычисления и собственно его реализация в арифметико-логических устройствах (процессоров).

Базовая идея машинной арифметики (создание способа вычисления). В общем смысле, операция — это отображение, ставящее в соответствие одному или нескольким элементам одного множества (аргументам) другой элемент (значение) того же или другого множества. Обычно задание отображений проводят двояко:

- если конечно число значений аргументов и значений операции, то непосредственно таблицей соответствия значений аргументов и значений результатов операции с заданным числом строк и столбцов или, попросту, *таблицей соответствия*;
- если бесконечно число значений аргументов и значений операции, то *способом определения значения операции по заданным аргументам*, т. е. аналитически некоторой формулой, последовательностью исполнения правил или операций.

Задание и таблицей соответствия, и способом определения значения операции по заданным аргументам, как правило, именуют способом вычисления.

Способ определения значения операции по заданным аргументам всегда представляется в виде определенной последовательности применения более "простых" операций или композиции преобразований или действий, проводимых последовательно или последовательно-одновременно, но с обязательной взаимообусловленностью хотя бы двух преобразо-

ваний. Поэтому в методическом плане *способ определения значения операции по заданным аргументам* может иметь большее число этапов исполнения и, тем самым, быть существенно длительнее, чем работа с *таблицей соответствия*. В связи с этим в целях получения предельного ускорения проведения вычислительных операций в АЛУ в качестве базовой идеи машинной арифметики целесообразно выбрать способ вычисления как задание операции в виде таблицы соответствия.

Отсюда следует потребность решения следующих задач: 1) конкретизации способа вычисления как некой таблицы соответствия значений аргументов и значений результатов конкретных операций; 2) построения процедуры (последовательности, правила, преобразования) определения (поиска) результата в этой таблице.

Вычислительная операция как таблица соответствия. Возможность реализации вычислительных операций как неких таблиц соответствия заложена в самой "идеологии" машинной арифметики [41, 42].

Например, машинная арифметика на n разрядах

$$\{2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2^1, 2^0\} \quad (6)$$

начинается с соотношений:

$$c + d = c; \quad (7)$$

$$c = c_{n-1} \cdot 2^{n-1} + c_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + c_1 \cdot 2^1 + c_0 \cdot 2^0; \quad (8)$$

$$d = d_{N-1} \cdot 2^{N-1} + d_{N-2} \cdot 2^{N-2} + \dots + d_{n+1} \cdot 2^{n+1} + d_n \cdot 2^n + 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + \dots + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0, \quad (9)$$

$c_i, d_j \in [0, 1]$; $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $j = n, n+1, \dots, N-2, N-1$; N, n — натуральные числа, или в более выразительной и упрощенной форме:

$$c + 2^N = c, \quad (10)$$

где n — длина разрядной сетки АЛУ; $N \geq n$; c — число (без знака), представляемое в виде (8).

Соотношения (7)–(10) показывают, что результат любой "вычислительной" операции $a \Delta b$, где a, b — k -разрядные числа ($k \leq n$), Δ — операция, не выходит за рамки установленного n -разрядного формата числа (7) и уже этим самым *может быть получен не в процессе традиционного поразрядного вычисления результата с формированием соответствующих*

Таблица соответствия (на примере операции сложения при $n = k + 1$)

Строка	k -разрядное число a				k -разрядное число b				n -разрядный результат операции $c = a \Delta b$				
	a_{k-1} (2^{k-1})	...	a_1 (2^1)	a_0 (2^0)	b_{k-1} (2^{k-1})	...	b_1 (2^1)	b_0 (2^0)	c_{n-1} (2^{n-1})	c_{n-2} (2^{n-2})	...	c_1 (2^1)	c_0 (2^0)
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
...
2^k	0	0	0	0	1	1	1	1	...	1	1	1	1
...
2^{2k}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

переносов в следующие разряды, а непосредственно в виде его выбора из таблицы соответствия (например, табл. 1).

Методически для измерений это равносильно замене процесса подсчета (эталонных) единиц в испытываемом образце попросту процессом выбора эталона, точно соответствующего испытываемому образцу. Тогда само представление (7)—(10) и содержательность таблицы соответствия (табл. 1) показывают, что каждая вычислительная операция может быть представлена соответствующей таблицей истинности. Очевидно, что такое же представление возможно для всех позиционных систем счисления.

Процедура определения результата. При представлении вычислительной операции таблицей соответствия результат операции из таблицы может быть выбран:

во-первых, алгоритмически, т. е. путем сравнения операндов текущей строки в таблице соответствия с операндами, над которыми надо осуществить операцию, перебора строк в случае не совпадения заданных и текущих операндов строки и выбора результата из текущей строки при совпадении операндов. Однако алгоритмическая процедура не позволяет улучшить показатели производительности и имеет, по-видимому, только имитационную (модельную) ценность;

во-вторых, аппаратно. Таблица соответствия вычислительной операции (например, табл. 1) рассматривается как таблица истинности для логических переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0, x_2 = a_1, \dots, x_k = a_{k-1}, \\ x_{k+1} &= b_0, x_{k+2} = b_1, \dots, x_{2k} = b_{k-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

составляющих разряды операндов, а каждый разряд результата операции — как функция алгебры логики $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ от этих логических переменных:

$$\begin{aligned} c_0 &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}), \\ c_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}), \dots, \\ c_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда все эти функции алгебры логики могут быть реализованы соответствующей аппаратурой комбинационных схем (КС) как логические формы в соответствующих функционально полных системах, например, дизъюнктивных или конъюнктивных совершенных нормальных формах (СНФ):

$$\left. \begin{aligned} \text{для } c_0 &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \text{ СНФ}_0 \text{ КС}_0 \\ \text{для } c_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \text{ СНФ}_1 \text{ КС}_1 \\ &\dots \dots \dots \\ \text{для } c_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \text{ СНФ}_{n-1} \text{ КС}_{n-1} \end{aligned} \right\} (13)$$

Это, в свою очередь, снимает проблематику быстрой реализации, характерную для идеи воплощения последовательного поразрядного формирования результатов операций, в том числе и для "принципа

полусумматора", обеспечивая реализацию операции в методическом плане без задержки, т. е. методически с максимальным быстродействием (с производительностью "жесткой логики").

Поскольку таблицу соответствия и "аппаратную" процедуру определения результата операции по этой таблице соответствия назвали технологией непосредственного формирования результата вычислительной операции [1], она и может быть выбрана в качестве инструмента достижения предельного ускорения проведения вычислительных операций в АЛУ.

Модель "сверхбыстродействующего" АЛУ. Выберем совокупность вычислительных операций АЛУ

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_{m-1}, e_m\}, \quad (14)$$

среди которых, например, e_1, e_2, e_3, e_4 — соответственно операции сложения, вычитания, умножения и деления. Тогда по аналогии с (12) все вычислительные операции из (14) будут представлены совокупностью своих таблиц соответствия:

$$\begin{aligned} c_0(e_1) &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_1), \\ c_1(e_1) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_1), \dots, \\ c_{n-1}(e_1) &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_1); \\ c_0(e_2) &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_2), \\ c_1(e_2) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_2) \dots, \\ c_{n-1}(e_2) &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_2); \\ &\dots \\ c_0(e_m) &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_m); \\ c_1(e_m) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_m), \dots, \\ c_{n-1}(e_m) &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_m) \end{aligned} \quad (15)$$

и по аналогии с (13) совокупностью своих множеств комбинационных схем реализации:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } c_0(e_1) &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_1) \\ &\text{СНФ}_0 \text{ для } e_1 \text{ КС}_0 \text{ для } e_1 \\ \text{для } c_1(e_1) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_1) \\ &\text{СНФ}_1 \text{ для } e_1 \text{ КС}_0 \text{ для } e_1 \\ &\dots \dots \dots \\ \text{для } c_{n-1}(e_1) &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_1) \\ &\text{СНФ}_{n-1} \text{ для } e_1 \text{ КС}_{n-1} \text{ для } e_1; \\ \text{для } c_0(e_2) &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_2) \\ &\text{СНФ}_0 \text{ для } e_2 \text{ КС}_0 \text{ для } e_2 \\ \text{для } c_1(e_2) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_2) \\ &\text{СНФ}_1 \text{ для } e_2 \text{ КС}_0 \text{ для } e_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \text{для } c_{n-1}(e_2) &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_2) \\ &\text{СНФ}_{n-1} \text{ для } e_2 \text{ КС}_{n-1} \text{ для } e_2; \\ \text{для } c_0(e_m) &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_m) \\ &\text{СНФ}_0 \text{ для } e_m \text{ КС}_0 \text{ для } e_m \\ \text{для } c_1(e_m) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_m) \\ &\text{СНФ}_1 \text{ для } e_m \text{ КС}_1 \text{ для } e_m \\ &\dots \dots \dots \\ \text{для } c_{n-1}(e_m) &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}; e_m) \\ &\text{СНФ}_{n-1} \text{ для } e_m \text{ КС}_{n-1} \text{ для } e_m. \end{aligned} \right\} (16)$$

Полученные соотношения (15) и (16) являются математической моделью АЛУ непосредственного формирования результата (АЛУ НФ) при условии, что раскрыты соответствующие нормальные формы и детализированы соответствующие комбинационные схемы обработки функций алгебры логики для конкретных операций (рис. 1).

Оценивая (15) и (16), можно сделать два важных заключения о продуктивности реализации технологии непосредственного формирования результата вычислительной операции:

1) технология непосредственного формирования обеспечивает максимальную производительность ("жесткой логики"), поскольку происходит одновременное аппаратное формирование *всех разрядов результата* вычислительной операции;

2) технология непосредственного формирования результата обеспечивает одновременное формирование результатов *всех вычислительных операций*, для которых может быть спроектировано АЛУ;

3) технология непосредственного формирования результата позволяет обрабатывать операции в

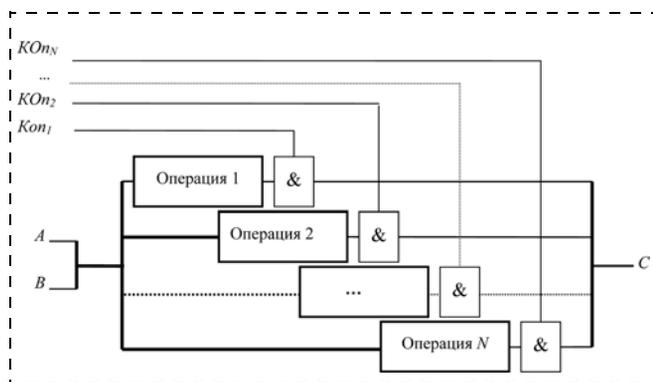
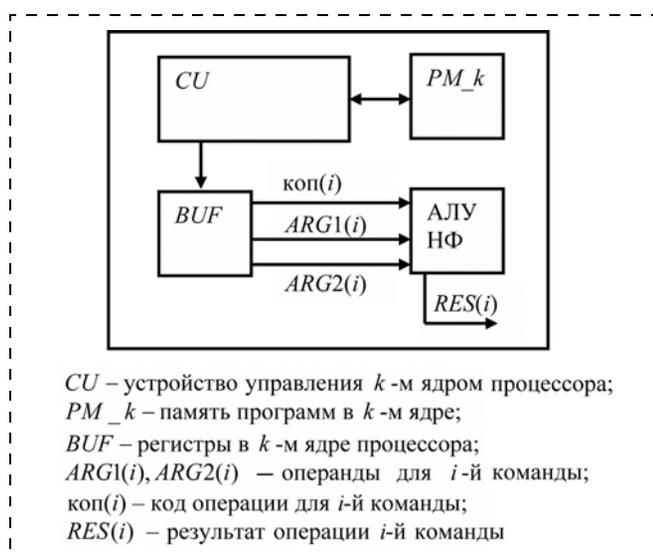


Рис. 1. Логическая структура АЛУ НФ: жирные линии означают шины сигналов (разрядов), Kop — код операции, A, B, C — операнды



CU — устройство управления k -м ядром процессора;
 PM_k — память программ в k -м ядре;
 BUF — регистры в k -м ядре процессора;
 $ARG1(i), ARG2(i)$ — операнды для i -й команды;
 $kop(i)$ — код операции для i -й команды;
 $RES(i)$ — результат операции i -й команды

Рис. 2. Процессорное ядро АЛУ НФ в мультиклеточном обрамлении

любой последовательности и при одновременном выполнении.

Итак, для создания предельно быстродействующих цифровых контурных регуляторов или, в общем, сверхбыстродействующих *вычислительных средств управления* выбраны *контекстно-связанное представление команд* в "мультиклеточной" организации работы процессора для исполнения каждой команды программы и методика *непосредственного формирования результата* для проведения вычислительных операций в АЛУ.

Как отмечалось, при контекстно-связанном представлении отпадает необходимость в дополнительных процессорных структурах для обеспечения эффективных конвейеров и предсказаний условных переходов, поскольку реализация контекстно-связанных программ гарантирует наибольшую производительность исполнения команд программы. В связи с этим процессорная структура для исполнения программ, в которой будут обрабатываться вычислительные операции в АЛУ НФ (см. рис. 1), может иметь структуру, аналогичную мультиклету [36, 37 из части 1], отличие которой состоит в том, что роль исполнительных устройств мультиклетки играют АЛУ НФ (рис. 2). При этом уже не требуются мероприятия по увеличению вычислительной производительности ни в экстенсивном, ни в интенсивном направлениях ускорения.

Поскольку и *контекстно-связанное представление команд* в программе при "мультиклеточной" организации работы процессора для исполнения каждой команды программы, и методика *непосредственного формирования результата* для проведения вычислительных операций в АЛУ обеспечивают обработку и операций, и команд за один такт задающего генератора, то можно считать, что выбран подходящий подход к построению предельно быстродействующих контурных регуляторов.

Новое представление цифрового контурного регулятора

Процесс цифровой обработки аналогового сигнала (ЦОС) $X(t)$ отражает следующую последовательность преобразований [4]:

Исходный аналоговый сигнал \Rightarrow
 \Rightarrow Исходная последовательность чисел \Rightarrow
 \Rightarrow Алгоритм преобразования в ЦП \Rightarrow
 \Rightarrow Новая последовательность чисел \Rightarrow
 \Rightarrow Результирующий аналоговый сигнал

и реализуется антиэлайсинговым фильтром (АФНЧ), аналого-цифровым преобразователем (АЦП), центральным процессором (ЦП), цифроаналоговым преобразователем (ЦАП) и сглаживающим фильтром (СФНЧ) (рис. 3). Отфильтрованный сигнал $X_{\phi}(t)$ преобразуется АЦП в пропорциональный двоичный m -разрядный код. На выходе АЦП формируется двоичное представление аналогового сигнала

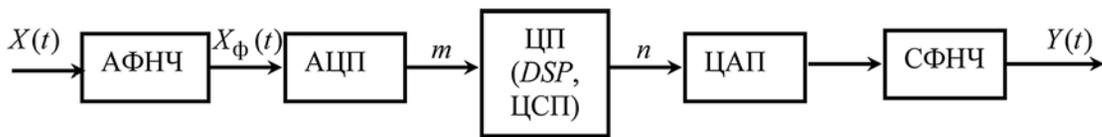


Рис. 3. Функции цифровой обработки сигнала [5]:

$X(t)$ — входной аналоговый сигнал; $X_\phi(t)$ — отфильтрованный антиэлайсинговым фильтром низких частот (АФНЧ) аналоговый сигнал $X(t)$; АЦП — аналого-цифровой преобразователь в двоичное представление m -разрядного кода; ЦП — центральный процессор с n -разрядным представлением результатов; ЦАП — цифроаналоговый преобразователь; СФНЧ — сглаживающий фильтр низких частот

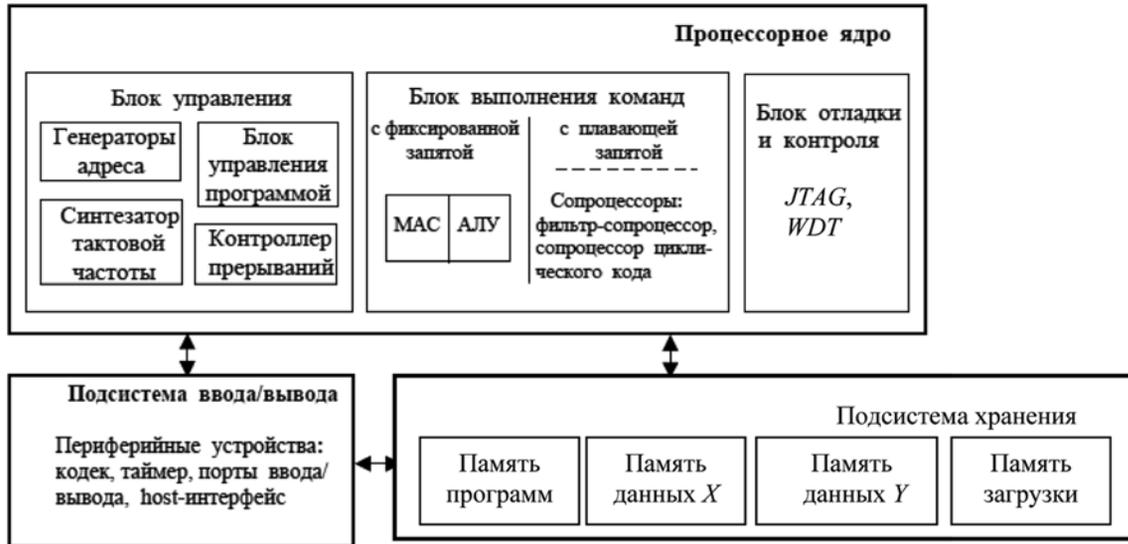


Рис. 4. Обобщенные компоненты ядра сигнального процессора [4]

ла, которое затем обрабатывается сигнальным ЦП (DSP, ЦСП).

Использование ЦОС в нижних уровнях систем автоматизации предприятия, как правило, ориентировано на реализацию, в первом случае, в специализированных ядрах процессоров для отработки соответствующих алгоритмов фильтрации (рис. 4), во втором случае — в соответствующих микроконтроллерах или высокопроизводительных многоядерных процессорах для реализации функций (законов) текущего управления (регулирования), учета и планирования.

Для *первого случая* характерна программно-аппаратная реализация двух параллельных МАС-операций (МАС — операция умножения с накоплением) с общим сомножителем, к которым можно свести многие алгоритмы фильтрации (рис. 5) [43, с. 14], когда в двух модулях МАС (МАС 1 и МАС 2) и двух аккумуляторах (АК1 и АК2), получивших данные (D_1, D_2, D_3) по трем шинам одновременно, происходит одновременное выполнение двух команд:

$$[AK1 := AK1 + D1 \cdot D2] \& [AK2 := AK2 + D1 \cdot D3].$$

Для *второго случая* характерна реализация так называемых гибридных сигнальных процессоров как структурного симбиоза микроконтроллера и

сигнального процессора [43, с. 16] (рис. 6). Именно такие гибридные структуры используются для организации систем управления электрическими двигателями и именуются *цифровыми контурными регуляторами*.

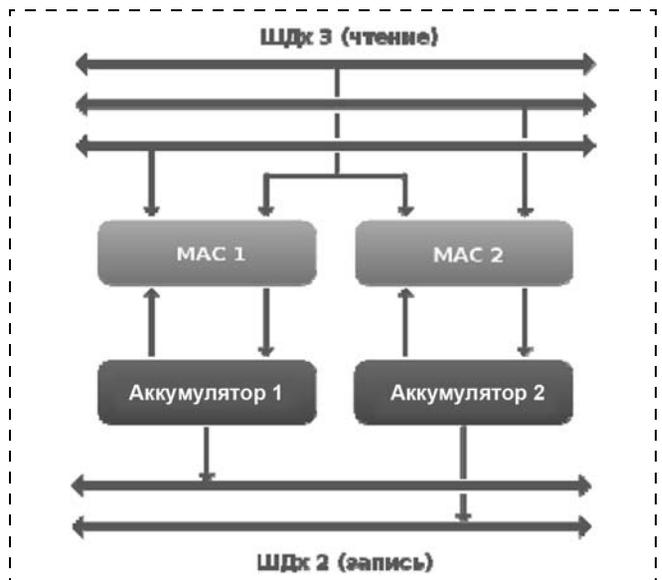


Рис. 5. Пример исполнения двух операций МАС в сигнальном процессоре TMS320C55x ("Texas Instruments") [3]: ШДх — шина данных

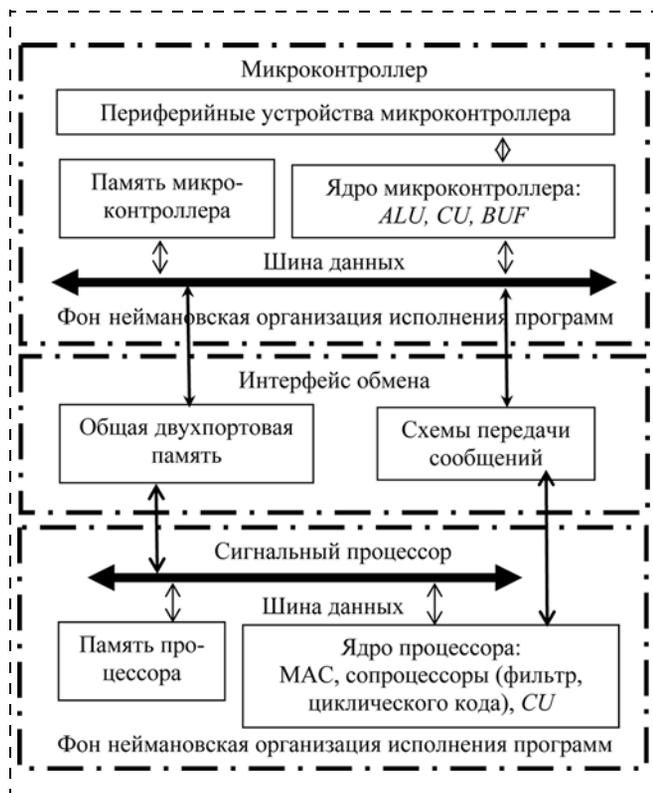


Рис. 6. Компонентный состав гибридного сигнального процессора [5]:
 ALU — АЛУ; CU — блок управления; BUF — регистры АЛУ;
 MAC — операция умножения с накоплением

Учитывая выбранный подход к построению предельно быстродействующих контурных регуляторов, т. е. использование АЛУ НФ и мультиклеточной организации исполнения программ (см. рис. 2), можно представить некоторые контуры унифицированной логической структуры сверхбыстродействующего цифрового контурного регулятора как результата трансформации традиционной структуры гибридного сигнального процессора (рис. 6, 7).

Наконец, в заключение надо отметить два момента:

1) контекстно-связанное представление команд при "мультиклеточной" организации работы процессора совместно с АЛУ НФ может обеспечить отработку и операций, и команд за один такт задающего генератора, т. е., фактически, за время, соизмеримое с временем переключения транзистора;

2) если микропроцессор выполнен на транзисторах типа Triple-Gate (*Intel Corp.*) с объемным затвором, т. е. со временем переключения 1...3 пс, то реальное быстродействие процессора контурного регулятора может находиться в границах 200...300 млрд вычислительных операций в секунду, что на два-три порядка быстрее, чем в самых быстродействующих на сегодняшний день сигнальных процессорах.

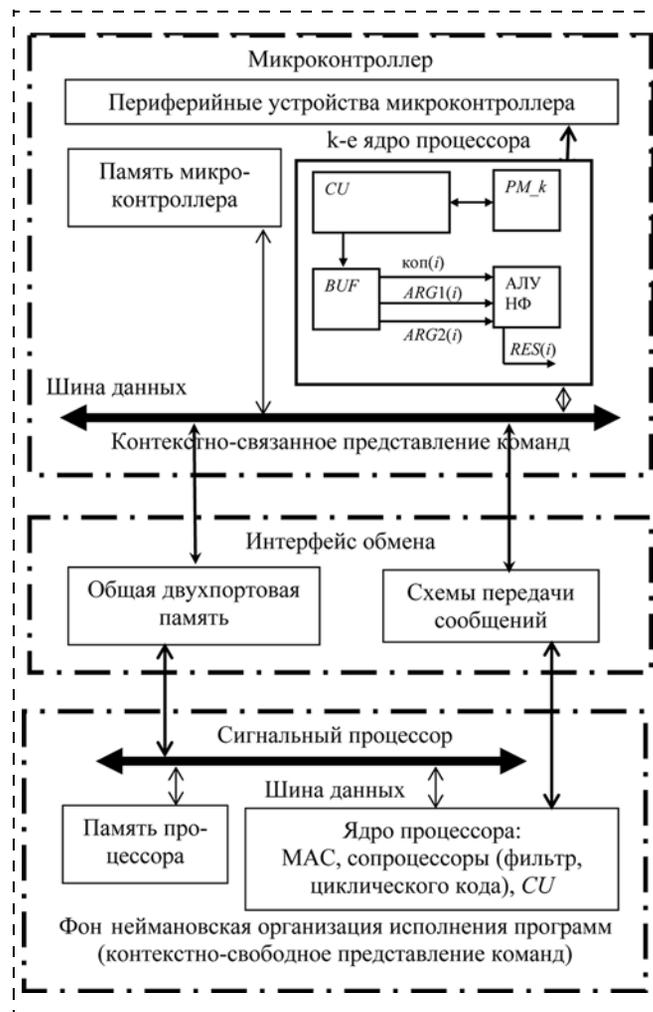


Рис. 7. Сверхбыстродействующий цифровой контурный регулятор: структурный переход от гибридного сигнального процессора к схеме с использованием АЛУ НФ и контекстно-связанного представления команд в микроконтроллере

Поэтому в таком случае можно быть уверенным, что задача регулирования привода переменного тока бурового станка в полном объеме решаемых вопросов может быть успешно решена.

Список литературы

1. Раков В. И. О новом подходе к повышению производительности промышленных контроллеров // Промышленные АСУ и контроллеры. 2011. — № 3. С. 31—42.
2. Раков В. И., Захарова О. В. Реализация быстрых вычислений посредством комбинационных структур // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2007. № 8. С. 51—55.
3. Захарова О. В. Формальные средства организации вычислительных операций для быстродействующих промышленных контроллеров // Промышленные АСУ и контроллеры. 2012. № 1. С. 51—60.
4. Шишков А. Н. Цифровые сигнальные процессоры. URL: http://frela-mk.narod2.ru/lektsii/COS_i_CSP.pdf.
5. Аксёнов В. П. Сигнальные процессоры / Владивосток: ДВГУ, 2006. 135 с.

Е. В. Денисова, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., denisova@anrb.ru,
Э. Ш. Насибуллаева, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., elvira@anrb.ru,
И. Ш. Насибуллаев, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., sp.ishn@gmail.com,
 Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

Исследование динамических процессов в элементах топливной автоматики

Проводится сравнение существующих методов моделирования элементов топливной автоматики. Предлагается новый подход, позволяющий оценить влияние конструктивных особенностей элемента на его динамические свойства уже как элемента системы автоматического управления газотурбинным двигателем.

Ключевые слова: система автоматического управления, агрегат дозирования топлива, сервопоршень, математическая модель, динамические процессы, гидродинамика

E. V. Denisova, E. Sh. Nasibullaeva, I. Sh. Nasibullayev

Investigation Method of Dynamic Processes in the Fuel Elements of Automation

In the present paper a comparison of existing methods of fuel automation elements simulation are performed. A new approach provides an influence of structural factors on the element dynamic performance already as part of the automatic control gas turbine engine.

Keywords: automatic control system, fuel metering unit, servopiston, mathematical model, the dynamic processes, hydrodynamics

Введение

Исторически сложилось так, что первые системы автоматического управления (САУ) авиационными двигателями различного назначения были гидромеханическими. Они появились и развивались вместе с объектами управления, т. е. двигателями различных транспортных средств. Появление новых поколений двигателей, введение в контур управления современных вычислительных комплексов поставило перед разработчиками САУ следующую проблему: характеристики управляющей (электронной) и исполнительской (гидромеханической) частей системы должны быть согласованы или хотя бы не противоречить друг другу.

В последнее время сложилась следующая тенденция: все внимание уделялось электронной части системы, а гидромеханический дозатор топлива, в лучшем случае, относился к двигателю и считался "неизменяемой частью САУ". Подобный подход оправдывал себя только для одной расчетной точки. В широком диапазоне условий применения и режимов работы такой подход приводил к существенным ошибкам, в основном, из-за недоучета динамики агрегата дозирования топлива (АДТ). Анализ последних публикаций позволил сделать вывод, что АДТ до сих пор не рассматривается как элемент системы управления [1, 2].

Проектирование гидромеханических исполнительных механизмов имеет ряд специфических особенностей, одна из которых заключается в тесной связи между принципиальной схемой и конструкцией. Далеко не все желаемые функции могут быть

воплощены в реальную конструкцию. Любые конструктивные решения, как правило, являются компромиссными. Оптимальных конструктивных решений, пригодных на все случаи, не существует. Каждая конструкторская схема должна быть исследована именно как элемент системы управления. При этом должны быть учтены и гидродинамические процессы, происходящие в элементах топливной автоматики. Таким образом, процессы проектирования и исследования гидромеханических агрегатов тесным образом взаимосвязаны. Решение задач подобного класса целесообразно проводить с использованием современных методов математического моделирования.

Целью данной работы является создание метода расчета гидромеханических исполнительных механизмов с учетом динамических процессов, происходящих в элементах топливной автоматики.

1. Методы моделирования статических характеристик

Обычно при моделировании АДТ использовалась нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающих баланс сил на сервопоршне дроссельной иглы как основном элементе АДТ, а также баланс расходов в полостях поршня [3]. Далее проводилась линеаризация этих уравнений с последующим разложением в ряд Тейлора и отбрасыванием всех членов выше первого порядка. Такой подход позволял получить передаточную функцию элемента в виде колебательного звена. При изменении режима работы элемента его параметры меня-

лись, что снижало качество управления двигателем и требовало изменения алгоритмов управления.

Метод применялся на предварительном этапе синтеза алгоритмов управления, в дальнейшем полученный алгоритм многократно изменялся уже на этапе стендовых испытаний двигателя.

Подобный метод дает приближенный результат и не поддается формализации. Значительный интерес представляет сетевой метод расчета гидромеханических систем (ГМС), позволяющий проводить расчеты посредством матричных операций [4], которые относительно легко формализуются и довольно просты в машинной реализации.

Суть метода в том, что принципиальная (конструкторская) схема ГМС заменяется ориентированным графом, т. е. сохраняется связь между реальной конструкцией и математическим описанием. В этом случае математическая модель АДТ описывается тремя подсистемами уравнений:

- первая подсистема уравнений — это система дифференциальных уравнений, отражающая закон изменения координаты положения подвижных элементов (поршней, причем не одного, а всех) АДТ во времени;
- вторая подсистема уравнений описывает взаимосвязь потоков в узлах и контурах сети. Ее решение позволяет определить внутренние потоки (расходы топлива) в системе;
- третья подсистема уравнений составляется по зависимости расхода жидкости от перепада давления на каждой из внутренних дуг. Решение данной подсистемы уравнений позволяет определить давления в узлах сети.

Такой подход значительно упрощает процедуру анализа ГМС и позволяет на его основе полностью автоматизировать процесс составления и решения данных систем уравнений. Более того, анализ структуры графа позволяет выявить нежелательные конструкторские решения, например, наличие тупиковых полостей, а также минимизировать число подвижных элементов (поршней и т. п.).

Метод хорошо зарекомендовал себя для расчета статических характеристик ГМС как элемента системы управления ГТД, но динамику системы просчитать достаточно сложно в силу того, что перемещение любого элемента (поршня) приводит к изменению динамических составляющих потоков жидкости, перетекающих из одной полости в другую.

2. Методы моделирования динамических процессов

Для расчета динамических процессов в сервопоршне дроссельной иглы предлагается новый подход, предложенный в работах [5, 6]. В данной статье рассмотрим, как работает данная динамическая математическая модель АДТ на примере только одного основного элемента, функционирующего в составе системы автоматического управления частотой вращения газотурбинного двигателя, —

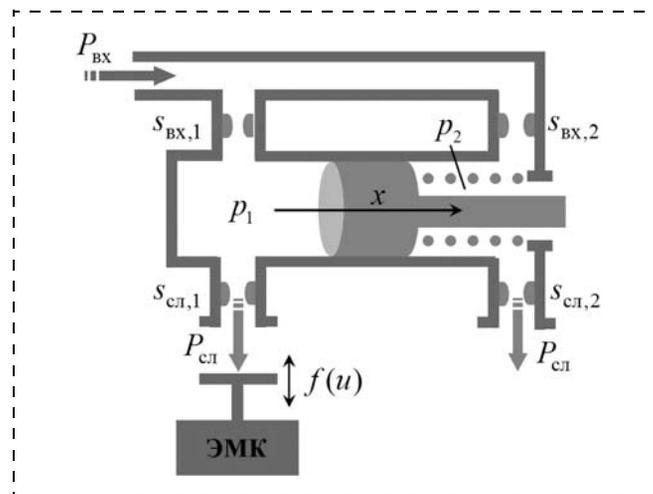


Рис. 1. Принципиальная схема основного элемента АДТ

сервопоршня. Элемент является основным, так как именно с его помощью осуществляется стыковка электронной и гидромеханической частей системы управления.

Принципиальная схема данного элемента представлена на рис. 1. Элемент работает следующим образом. От электронного регулятора режима работы двигателя поступает сигнал на электромагнитный клапан (ЭМК), который открывает или закрывает заслонку, изменяя площадь слива $s_{сл,1}$ в левой полости сервопоршня. Открытие или закрытие заслонки осуществляется в режиме широтно-импульсной модуляции. Если заслонка закрывается, то давление p_1 слева от сервопоршня начинает расти, и, начиная с некоторого критического значения давления, поршень начинает перемещаться вправо в направлении x . Таким образом, между управляющим сигналом u и перемещением сервопоршня x устанавливается однородная связь. Далее (на схеме не показано) перемещение преобразуется в расход топлива.

Система уравнений, описывающих динамику движений сервопоршня дроссельной иглы, включает в себя уравнение сил на подвижном элементе (поршне) и уравнения балансов расхода слева и справа от сервопоршня при условии, что рабочая жидкость (топливо) считается несжимаемой [6, 7]:

$$m\ddot{x} = p_1 S_{пор,1} - p_2 S_{пор,2} - cx - F_{тр} + R_{пр}; \quad (1)$$

$$Q_1 = Q_3 + \Delta Q_{13}; \quad Q_2 = Q_4 - \Delta Q_{24}, \quad (2)$$

где m — масса сервопоршня; $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ — ускорение перемещения сервопоршня; t — время; p_1 и p_2 — давления в левой и правой полостях сервопоршня соответственно; $S_{пор,1}$ и $S_{пор,2}$ — площади поршня слева и справа соответственно; c — жесткость пружины; $R_{пр}$ — сила предварительной затяжки пружины; $F_{тр}$ — сила трения, которая может быть определена двумя способами:

а) как "сухое" трение:

$$F_{\text{тр}} = \text{sign}(\dot{x}) |F_{\text{тр}}^0|, \quad (3)$$

где $F_{\text{тр}}^0 = p_1^0 S_{\text{пор},1} - p_2^0 S_{\text{пор},2} - c x_0 + R_{\text{пр}}$ (индекс "0" обозначает значение величины в начальный момент времени);

б) как "вязкое" или регуляризованное трение [8]:

$$F_{\text{тр}} = \frac{\dot{x} |F_{\text{тр}}^0|}{\varepsilon_1}, \quad (4)$$

где ε_1 — параметр регуляризации.

В уравнениях (2) расходы через жиклеры ($Q_i, i = \overline{1, 4}$) определяются следующими формулами:

$$Q_i = a \chi s_{\text{вх},i} \sqrt{P_{\text{вх}} - p_i};$$

$$Q_{2+i} = a \chi s_{\text{сл},i} \sqrt{p_i - P_{\text{сл}}}; \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где $a = \sqrt{2g/\gamma}$ — размерный коэффициент, зависящий от удельного веса топлива (жидкости) γ ; g — ускорение свободного падения; χ — коэффициент истечения, который в первом приближении можно считать постоянной величиной, хотя фактически он зависит от вида жиклера; $s_{\text{вх},i}$ ($i = 1, 2$) — площадь прохода жидкости на входе (в жиклерах); $s_{\text{сл},i}$ ($i = 1, 2$) — площадь прохода жидкости на сливе; $P_{\text{вх}}$ — давление жидкости на входе в полость сервопоршня; $P_{\text{сл}}$ — давление жидкости на выходе (сливе) из полости сервопоршня. Дополнительные составляющие ΔQ_{13} и ΔQ_{24} появляются в связи с перемещением сервопоршня и освобождением дополнительного объема (ΔQ_{13}) или его уменьшением (ΔQ_{24}) и определяются следующими формулами:

$$\Delta Q_{13} = S_{\text{пор},1} \dot{x}; \quad \Delta Q_{24} = S_{\text{пор},2} \dot{x}. \quad (6)$$

В отличие от первого метода моделирования, рассмотренного в пункте 1, в дальнейшем исследуются нелинейные уравнения, а не проводится линеаризация уравнений (1), (2). В этом случае из уравнений (2) получаются формулы для определения давлений p_1 и p_2 слева и справа от сервопоршня:

$$p_i = \frac{s_{\text{вх},i}^2 P_{\text{вх}} + s_{\text{сл},i}^2 P_{\text{сл}}}{s_{\text{вх},i}^2 + s_{\text{сл},i}^2} +$$

$$+ \frac{S_{\text{пор},i} \dot{x} (-S_{\text{пор},i} \dot{x} (s_{\text{вх},i}^2 - s_{\text{сл},i}^2) \pm 2s_{\text{вх},i} s_{\text{сл},i} \sqrt{D_i})}{a^2 \chi^2 (s_{\text{вх},i}^2 + s_{\text{сл},i}^2)^2};$$

$$D_i = (P_{\text{вх}} - P_{\text{сл}}) a^2 \chi^2 (s_{\text{вх},i}^2 + s_{\text{сл},i}^2) - S_{\text{пор},i}^2 \dot{x}^2, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Управляющий сигнал $u = (\tau/T) \cdot 100\%$ определяет ту часть периода в %, когда слив закрыт, и является входным параметром. Здесь $T = 1/\nu$ — период; ν —

частота изменения управляющего сигнала; τ — часть периода, когда слив закрыт. Тогда значение жиклера $s_{\text{сл},1}$ в (7) заменяется на функцию $s_{\text{сл},1}^{\text{new}}$, значение которой в разные моменты времени t задается следующей формулой:

$$s_{\text{сл},1}^{\text{new}} = \begin{cases} s_{\text{сл},1}, & kT \leq t \leq kT + \tau; \\ s_{\text{сл},1} \sin^2 \frac{\pi(t - \tau - T(k - 1/20))}{T/10}; & kT + \tau < t < kT + \tau + T/20; \\ 0, & kT + \tau + T/20 \leq t \leq kT + 19T/20; \\ s_{\text{сл},1} \sin^2 \frac{\pi(t - T(k + 19/20))}{T/10}; & kT + 19T/20 < t < (k + 1)T. \end{cases} \quad (8)$$

3. Результаты численных расчетов

Систему уравнений (1), (7) численно решали методом Рунге—Кутты по формулам Дормана—Принса [9]. Был написан программный код на языке Fortran 90 с использованием библиотеки для параллельных вычислений OpenMP [10].

Были использованы следующие значения физических и геометрических параметров системы:

$$m = 0,05 \text{ кг}; \quad S_{\text{пор},1} = \pi(0,01/2)^2 \text{ м}^2;$$

$$S_{\text{шт}} = \pi(0,005/2)^2 \text{ м}^2; \quad S_{\text{пор},2} = S_{\text{пор},1} - S_{\text{шт}};$$

$$s_{\text{вх},1} = \pi(0,5/2)^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; \quad s_{\text{вх},2} = \pi(0,3/2)^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$s_{\text{сл},1} = \pi(0,7/2)^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; \quad s_{\text{сл},2} = \pi(0,5/2)^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$P_{\text{вх}} = 15 \text{ ат}; \quad P_{\text{сл}} = 3 \text{ ат}; \quad c = 0,5 \text{ кг/м}^2; \quad R_{\text{пр}} = 3 \text{ Н};$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2; \quad \gamma = 780 \text{ кг/(м}^2\text{с}^2); \quad \chi = 0,75; \quad \nu = 40 \text{ Гц}.$$

На рис. 2 приведено сравнение результатов численных расчетов по предложенной математической модели с экспериментальными данными при различных значениях жиклеров. На данном рисунке представлено отклонение сервопоршня от начального положения $\Delta x/x_0$ в зависимости от управляющего сигнала u при заданных значениях жиклеров $s_{\text{вх},i}, s_{\text{сл},i}$ ($i = 1, 2$) (кривая 1) и при их одновременном уменьшении в 2,5 (кривая 2) и 4 (кривая 3) раза, а также экспериментальные зависимости, полученные при исследовании элемента на полунатурном стенде (круги) [11].

Изменение площади жиклера (и других конструктивных параметров) может проводиться целенаправленно на испытательном стенде, что позволяет выбрать наиболее приемлемую статическую характеристику элемента. Однако подобное изменение может произойти и случайно, например, при попадании механической частицы в рабочую жидкость, что крайне нежелательно. В процессе работы элемента достаточно часто происходит выкрашивание поверхностей поршня и обечайки в результате трения. Также возможны и кавитационные разрушения рабочих поверхностей. Это утверждение подтверждается экспериментальными данными [12].

Следует отметить тот факт, что изменение проливов (площадей) регулировочных жиклеров также

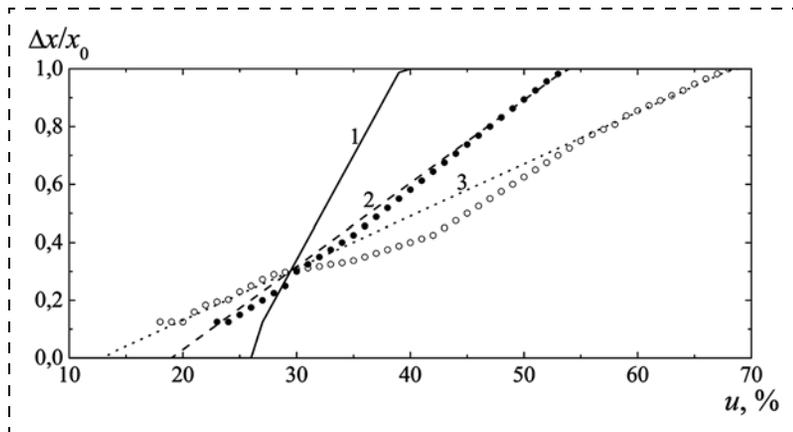


Рис. 2. Отклонение сервопоршня от начального положения $\Delta x/x_0$ в зависимости от управляющего сигнала u для различных значений жиклеров $s_{вх,i}/\alpha$, $s_{сл,i}/\alpha$ ($i = 1, 2$):

1 — $\alpha = 1$; 2 — $\alpha = 2.5$, 3 — $\alpha = 4$, полученные при численных расчетах (линии) и экспериментально (круги)

приводит к появлению параметрической неопределенности, в том числе и к появлению так называемой "метелки" (см. рис. 2) — расслоению статических характеристик, что в принципе недопустимо. Ранее, при использовании линеаризованных моделей, не удалось получить подобные статические характеристики, а вот при исследовании АДТ на стендах эти зависимости проявлялись на всех типах агрегатов. Подобное изменение проливов может возникнуть в процессе функционирования топливного агрегата как из-за попадания микрочастиц от корпусных деталей в силу их старения, так и из-за появления "воздушных" пробок в топливе. Эти утверждения нуждаются в дополнительной проверке как на стенде, так и теоретически на модели.

На данном этапе исследований сравнительный анализ экспериментальных и расчетных данных можно проводить лишь на качественном уровне, поскольку экспериментально снималась зависимость "расход топлива — управляющий сигнал" в составе двигателя. Для большей чистоты эксперимента топливный дозатор должен быть исследован автономно на динамическом стенде [13]. Тем не менее,

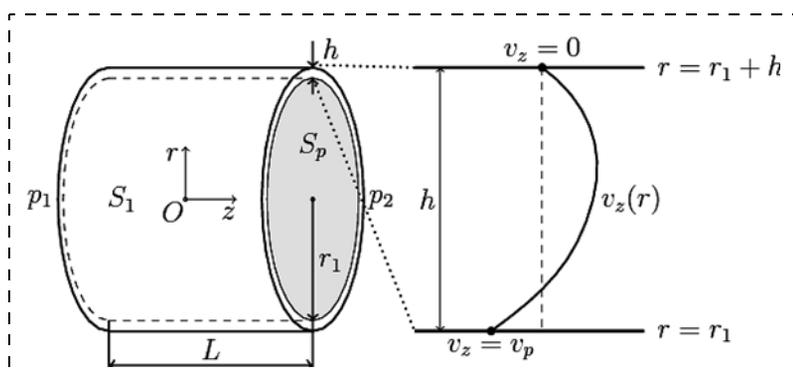


Рис. 3. Геометрия задачи в цилиндрических координатах

даже качественный анализ полученных расчетных и экспериментальных зависимостей показывает, что при определенно подобранных значениях величин жиклеров можно получить достаточно хорошее количественное согласование результатов.

Заметим, что значение трения покоя $F_{тр}^0$ в формулах (3), (4) определялось в предположении, что в начальный момент времени вся система находится в состоянии покоя при заданных значениях других сил, действующих на сервопоршень. Однако данное предположение вносит погрешность в вычисления, поскольку сама сила трения должна определяться из физических соображений, а сила предварительной затяжки пружины $R_{пр}$ должна определяться уже из состояния системы в начальный момент времени. В целях

повышения результативности расчетов в дальнейшем используется подход, основанный на методах трибологии для учета влияния силы трения на движение основного элемента АДТ.

4. Исследование влияния силы трения на движение поршня в трубе

С точки зрения трибологии выделяют различные виды трения, прежде всего, *сухое* и *вязкое* трение. Трение между твердыми элементами определяется коэффициентом сухого трения — коэффициентом пропорциональности между силой трения и силой нормальной реакции на границе элементов (закон Амонтона—Кулона). При наличии жидкой фазы необходимо учитывать вязкое трение через коэффициент динамической вязкости, связывающий силу вязкого трения и произведение площади контакта и нормального градиента скорости вблизи поверхности.

Рассмотрим движение поршня радиуса r_1 и массой m внутри цилиндра радиуса r_2 , заполненного жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ . Если зазор между поршнем и цилиндром обозначить h , то радиус внешнего цилиндра будет равен $r_2 = r_1 + h$. Система приводится в движение за счет перепада давления $\Delta p = p_1 - p_2$, где $p_1 = p_1(t)$ и $p_2 = p_2(t)$ — значения давлений слева и справа от поршня, соответственно, определяемые по формуле (7).

В данной геометрии целесообразно использовать цилиндрическую систему координат, начало которой располагается на оси в центре цилиндра (рис. 3). Координаты в радиальном, окружном и осевом направлениях обозначим r , φ и z соответственно, а компоненты скорости течения жидкости — v_r , v_φ и v_z . Скорость движе-

ния поршня имеет только одну компоненту v_p вдоль оси z .

Уравнение движения поршня описывается вторым законом Ньютона:

$$mv_{p,t}(t) = S_p \Delta p - k_p z_p(t) - F(v_p) - \mu S_1 v_{z,r}(r, t)|_{r=r_1}, \quad (9)$$

где введено обозначение для частной производной $f_{,x} = \partial f / \partial x$; S_p — площадь поперечного сечения поршня; $S_1 = 2\pi r_1 L$ — площадь внешней поверхности поршня; L — длина поршня; k_p — жесткость пружины; z_p — отклонение пружины от равновесного состояния. Сила сухого трения равна $F(v_p) = F_0 \text{sign}(v_p)$, где F_0 — модуль силы трения. Последнее слагаемое уравнения (1) описывает силу вязкого трения:

$$F(v_p) = \tau S_1 = \mu S_1 \left. \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_1},$$

где τ — напряжение поршня на поверхности.

Координата поршня z_p описывается уравнением

$$\frac{dz_p(t)}{dt} = v_p(t).$$

В начальный момент времени поршень покоится: $v_p(0) = 0$.

Отметим, что уравнение (9) является модификацией уравнения (1), в котором сила трения учитывается в другой форме.

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости и уравнением Навье—Стокса [14]:

$$\nabla v = 0, \quad \rho(v_{,t} + (v\nabla)v) = -\nabla p + \mu \Delta v, \quad (10)$$

где ∇ — оператор набла; Δ — оператор Лапласа; ∇p — градиент давления.

Пренебрегая краевыми эффектами, получим $v_z = v_z(r, t)$. Поскольку течение является осесимметричным и не рассматривается осевое вращение поршня, компонента скорости $v_\varphi = 0$. Из уравнения неразрывности получим, что $v_r = 0$. Таким образом, рассматриваемое течение жидкости соответствует нестационарному параллельному течению. Уравнение Навье—Стокса (10) запишется в виде

$$\rho v_{z,t} = -p_{,z} + \mu \left(v_{z,rr} + \frac{1}{r} v_{z,r} \right),$$

где градиент давления $p_{,z} = (\Delta p / L) g(t)$.

Граничные условия на поверхности поршня ($r = r_1$) и цилиндра ($r = r_2 = r_1 + h$) определяются из условия залипания:

$$v_z(t, r_1) = v_p(t), \quad v_z(t, r_2) = 0. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (10) с граничными условиями (11) записывали с помощью метода конечных разностей и решали численно методом Ньютона. Погрешность вычислений не превышала 1 % при раз-

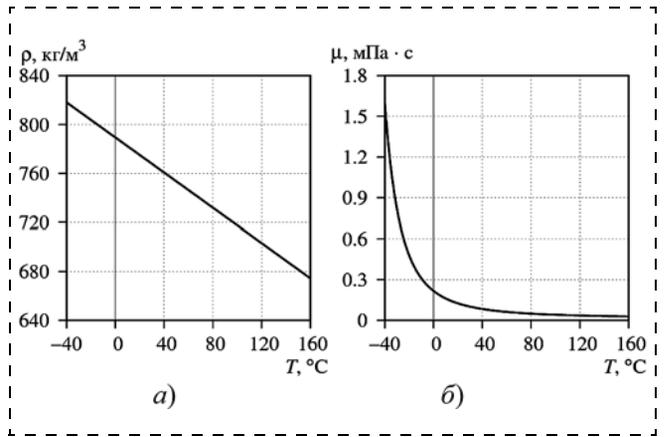


Рис. 4. Зависимость плотности ρ (а) и динамической вязкости μ (б) керосина от температуры T

биении сетки по координате на 50 узлов и 10^5 шагов по времени за 1 с. Численная схема была реализована на языке Fortran 90 с использованием библиотек BLAS и LAPACK.

Расчеты проводили для диаметра трубы $2r_1 = 10^{-2}$ м, ширины зазора $h = r_1/50$ и длины поршня $L = 10^{-2}$ м. Параметры для материала поршня (алюминий) и жидкости (авиационный керосин ТС-1) были взяты при температуре $T = 20^\circ\text{C}$: плотность поршня $\rho_p = 2700$ кг/м³; плотность жидкости $\rho = 780$ кг/м³; вязкость жидкости $\mu = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Па·с; упругость пружины $k = 1 \dots 5$ кН/м.

Технические устройства должны сохранять работоспособность во всей рабочей области температур. Изменение температуры значительно влияет на плотность жидкости и динамическую вязкость жидкости (рис. 4). Плотность ρ зависит от температуры T линейно [15]: $\rho = \rho_{T_0} - c_1(T - T_0)$, где ρ_{T_0} — плотность при температуре T_0 ; c_1 — подгоночный параметр, определяемый из эксперимента (для керосина ГОСТ РТ [16] $c_1 \approx 0,72$). Зависимость динамической вязкости μ от температуры T сильно нелиней-

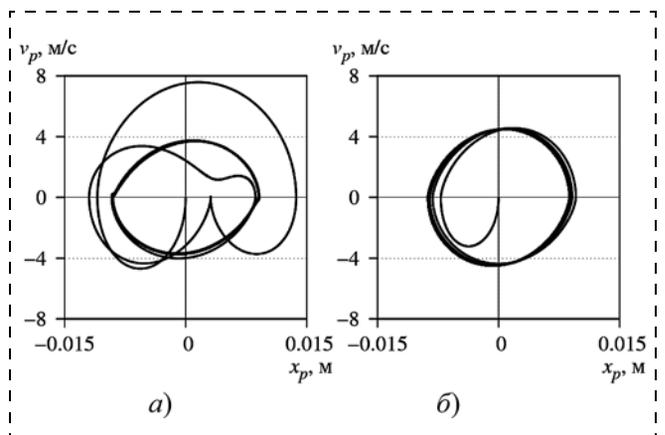


Рис. 5. Фазовая диаграмма движения поршня при $k_p = 1000$ Н/м, $F_0 = 1$ Н (а), $F_0 = 3$ Н (б)

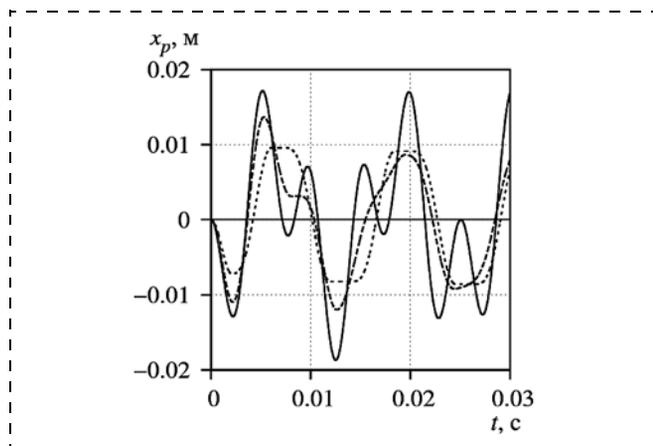


Рис. 6. Зависимость координаты поршня x_p от времени t при $k_p = 1000$ Н/м:

$F_0 = 0$ Н (—), $F_0 = 1$ Н (---), $F_0 = 3$ Н (···)

ная [15]: $\lg(\mu(T)) = \frac{c_2}{(1 + T/c_3)^{c_4}} - c_5$, где c_2, \dots, c_5 —

подгоночные параметры (для керосина ГОСТ РТ [16] $c_2 \approx 1,43$, $c_3 \approx 135$, $c_4 \approx 1,36$, $c_5 \approx 4,2$). Таким образом, учет влияния температуры является необходимым для корректного моделирования динамики ГМС.

На рис. 5 показано влияние сухого трения на динамику движения поршня. С ростом силы сухого трения амплитуда и скорость движения поршня уменьшаются, также уменьшается число периодов установления периодического движения. Отметим, что в промежутки периода, когда достигается значение силы сухого трения $F_0 \geq S_p \Delta p$, поршень останавливается, и, следовательно, на какой-то момент времени происходит потеря управляемости элементом.

На рис. 6 показаны динамические процессы в поршне. Их анализ позволяет утверждать, что динамика САУ в целом существенно зависит от динамики АДТ.

Заключение

Проведенный анализ существующих и предлагаемого методов позволяет сделать вывод, что при проектировании САУ целесообразно использовать все возможности каждого метода, а именно:

- в первом приближении — линеаризованный подход, который позволит достаточно просто синтезировать алгоритмы управления;
- при анализе конструкций — сетевой метод, позволяющий минимизировать наличие подвижных элементов, тупиковых полостей;
- при расчете динамических процессов — новый подход, предложенный в данной работе.

Следует отметить, что в данной статье был рассмотрен только один подвижной элемент, а их в кон-

струкции всегда несколько. Динамика АДТ в целом будет достаточно сложной, многочастотной, что целесообразно учитывать при синтезе и анализе САУ. Работа в данном направлении будет продолжаться.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-97019-р_поволжье_а, 14-08-97027-р_поволжье_а) и Программы № 1 фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН "Научные основы робототехники и мехатроники".

Список литературы

1. Некрасов Б. Б. Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах: учебник. М.: ЭКОЛИТ, 2011. 368 с.
2. Шишмарев В. Ю. Типовые элементы систем автоматического управления. М.: Издательский центр "Академия", 2011. 304 с.
3. Черкасов Б. А. Автоматика и регулирование воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1988. 360 с.
4. Проблемы проектирования и развития систем автоматического управления и контроля ГТД / С. Т. Кусимов, В. И. Васильев, Б. Г. Ильясов, Е. В. Денисова и др. М.: Изд. Машиностроение, 1999. 609 с.
5. Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш. Моделирование задачи функционирования агрегата дозирования топлива // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып. 7 / Под ред. С. Ф. Урманчеева. Уфа: Гилем, 2010. С. 118—128.
6. Насибуллаева Э. Ш., Денисова Е. В. Динамическая модель агрегата дозирования топлива в силовую установку беспилотного летательного аппарата // Вестник РФФИ. 2012. № 2—3 (74—75). С. 60—68.
7. Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш. Динамическая модель гидромеханического исполнительного механизма // Матер. Междунар. науч.-техн. конф. "Мехатроника, автоматизация, управление". Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. С. 280—282.
8. Уткин В. И., Орлов Ю. В. Теория бесконечномерных систем управления на скользких режимах. М.: Наука, 1990. 133 с.
9. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
10. Свидетельство о регистрации программы № 2011610327 от 11.01.2011: Моделирование агрегата дозирования топлива, содержащего три подвижных элемента (АДТ), автор Насибуллаева Э. Ш., 2011.
11. Исследование насоса-регулятора на полунатурном стенде / Ю. С. Белкин, А. Д. Шаров, Е. В. Денисова и др. Технический отчет. М.: ЦИАМ, 1986.
12. Ильясов Б. Г., Костюкова Л. П., Денисова Е. В. Анализ функционирования гидромеханических САУ ВРД // Летные испытания установок ЛА. М.: НТК, ЛИИ им. М. М. Громова. 1992. С. 150—161.
13. Управление динамическими системами в условиях неопределенности / С. Т. Кусимов, Б. Г. Ильясов, В. И. Васильев и др. М.: Наука, 1998. 452 с.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 736 с.
15. Paleu V., Nelias D. On kerosene lubrication of hybrid ball bearings // International Conference on Diagnosis and Prediction in Mechanical Engineering System (DIPRE'07). Galati, Romania, 2007. P. 50—56.
16. Топлива для реактивных двигателей. Технические условия. Издание официальное. ФГУП "Стандартинформ", Москва, 2008 г. Межгосударственный стандарт топлива для реактивных двигателей. ГОСТ-10227—86.

УДК 62-1

В. Г. Градецкий¹, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., **И. Л. Ермолов**², д-р техн. наук, доц.,
М. М. Князьков¹, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., **Е. А. Семёнов**¹, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
А. Н. Суханов^{1,2}, инженер, аспирант, sukhانov-artiom@yandex.ru,

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,

² Московский государственный технологический университет "СТАНКИН"

Кинематическая модель экзоскелета руки человека и определение ошибки позиционирования¹

Описана математическая модель экзоскелета руки человека, для которой решены прямая и обратная задачи кинематики, а также определена погрешность позиционирования устройства в пространстве, зависящая от линейной и угловой погрешностей.

Ключевые слова: экзоскелет, робототехнические устройства, математическая модель, многосвязные системы, параметрический анализ, пневматические приводы

V. G. Gradetsky, I. L. Ermolov, M. M. Knyazkov, E. A. Semyonov, A. N. Sukhanov

The Kinematic Model of the Human Arm Exoskeleton and Determination of Positioning Errors

This paper describes a kinematic model of a human arm exoskeleton for which direct and inverse kinematics are solved. In addition, the positioning errors of the exoskeleton arm are defined as a function of the linear and angular tolerances.

Keywords: exoskeleton, kinematic model, robotic device, parametric analysis, multilink system, pneumatic drives

Введение

Современные разработки в области исследования механики и систем управления экзоскелетами открывают широкие перспективы создания на их основе устройств для применения в различных областях человеческой деятельности, таких как медицина, спорт, космические исследования, технологии виртуальной реальности. Особый интерес представляют разработки, связанные с управлением экзоскелетами различных конечностей тела человека, и исследование влияния конструкции на физические возможности оператора. Конструкция экзоскелета чаще всего представляет собой многосвязную систему, обеспечивающую разгрузку [1], либо дополнительную управляемую нагрузку [2] при использовании. Конструктивно такие экзоскелетные системы разделены на две группы: стационарные и автономные. Стационарные системы не требуются к массогабаритным параметрам источника питания, но не обладают мобильностью, а автономные экзоскелеты размещаются непосредственно на теле оператора и позволяют ему совершать перемещения, не ограниченные элементами крепления и конструкции. Управляемая нагрузка на

оператора со стороны экзоскелета используется для очувствления при взаимодействии с виртуальными предметами [3, 4] или для изучения влияния силомоментной нагрузки от компонентов конструкции устройства на оператора [5]. Такие экзоскелетные системы чаще всего являются стационарными и используются для реабилитации пациентов после травм или для дистанционного управления манипуляторами. Автономные конструкции актуальны в условиях, связанных с высокой мобильностью оператора. Наряду с механико-математическим моделированием многосвязных устройств важную роль при разработке экзоскелетов играет выбор системы управления, который во многом зависит от технических параметров устройства и его области применения. Наиболее перспективным интерфейсом взаимодействия оператора и экзоскелета является управление приводами устройства посредством считывания электромиографических импульсов с мускулов оператора. Результаты исследования возможности такого типа управления описаны во многих научных трудах [6–10]. Разработчики часто используют мускульную модель Хилла, которая позволяет предсказывать силу, развиваемую мускулом человека, как функцию от оценки уровня нейроактивности. Для построения модели системы управления и ее оптимизации обычно используют генетические алгоритмы.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-00537 А.

Еще одно направление — телеуправление. Экзоскелеты используют как задающие устройства, управляющие копирующими манипуляторами, находящимися на расстоянии от оператора [11]. Такие разработки важны для медицины, космических исследований и спецслужб.

Проектирование, создание и применение экзоскелетов невозможно без детального исследования кинематики основных модулей и оценки погрешности позиционирования. Эти вопросы рассматриваются в данной работе.

Математическая модель экзоскелета руки человека

Актуальным вопросом в изучении работы экзоскелетных систем и при отработке программы заданного оператором движения является определение точности позиционирования данных устройств в пространстве. Оценивать погрешность позиционирования экзоскелета необходимо исходя из погрешности ввода обобщенных координат и первичных ошибок, зависящих от типа приводных систем, интегрированных в конструкцию, преобразователей движения, материалов, использованных при создании экзоскелета. Первичные ошибки — это отклонения линейных и угловых размеров звеньев от заданных значений, а погрешность ввода обобщенных координат (1) вызвана погрешностью ра-

боты системы управления и двигателей и приведена к выходному валу преобразователя движения:

$$\Delta q_j = \frac{\Delta \varphi_j}{U_j}, \quad (1)$$

где $\Delta \varphi_j$ — погрешность двигателя, U_j — передаточное число преобразователя движения.

Целью данной работы является описание математической модели экзоскелета руки человека, а также вычисление погрешности позиционирования данного устройства в пространстве.

В качестве объекта изучения была выбрана модель экзоскелета руки, обладающая четырьмя степенями свободы, разработанная в лаборатории робототехники и мехатроники Института проблем механики РАН. Кинематическая схема предлагаемой системы представлена на рис. 1.

Графическая модель экзоскелета рук человека с рассматриваемой кинематической схемой конструкции изображена на рис. 2.

Для описания математической модели исследуемой экзоскелетной системы необходимо рассмотреть прямую и обратную задачи кинематики для определения зависимости между обобщенными координатами и координатами конечной точки устройства. Решение прямой задачи кинематики сводится к нахождению матрицы ориентации и вектора положения рассматриваемого манипулятора при известных обобщенных координатах (углах).

Для нахождения матрицы ориентации и вектора положения воспользуемся методом матриц 4×4 . Воспользуемся правилом расположения локальных систем координат (рис. 1, б): для совмещения $(i - 1)$ -й системы координат $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ с i -й системой координат $O_iX_iY_iZ_i$ необходимо выполнить следующую последовательность операций:

1) поворот вокруг оси Z_{i-1} на угол q_i (оси X_{i-1} и X_i должны быть параллельны);
 2) сдвиг вдоль оси Z_{i-1} на d_i (оси X_{i-1} и X_i совпадают);
 3) сдвиг вдоль оси X_{i-1} на a_i (начала координат O_{i-1} и O_i должны совпасть);
 4) поворот вокруг оси X_{i-1} на угол α_i (системы координат $O_iX_iY_iZ_i$ и $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ должны совпасть).

Воспользуемся матрицей 4×4 перехода из i -й системы координат в $(i - 1)$ -ю:

Воспользуемся матрицей 4×4 перехода из i -й системы координат в $(i - 1)$ -ю:

Воспользуемся матрицей 4×4 перехода из i -й системы координат в $(i - 1)$ -ю:

$$A_{i, i-1} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\cos \alpha_i \sin q_i & \sin q_i \sin \alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos \alpha_i \cos q_i & -\cos q_i \sin \alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Найдем матрицы преобразования по каждому узлу конструкции, приняв $C_i = \cos \varphi_i$, $S_i = \sin \varphi_i$:

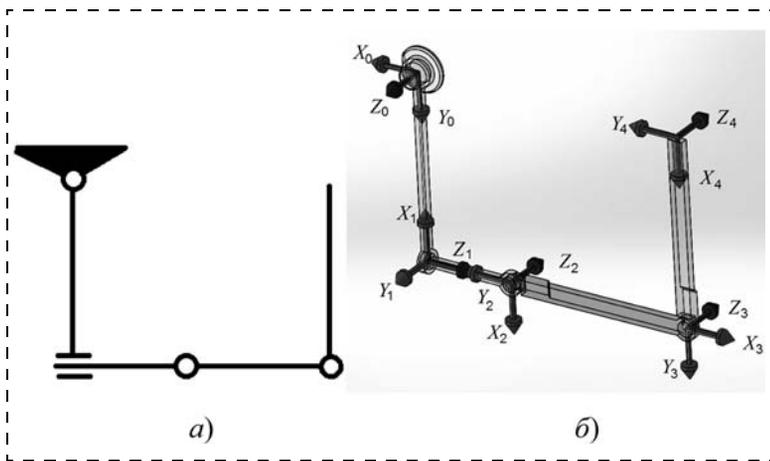


Рис. 1. Предлагаемая схема манипулятора: а — кинематическая схема; б — расстановка локальных систем координат

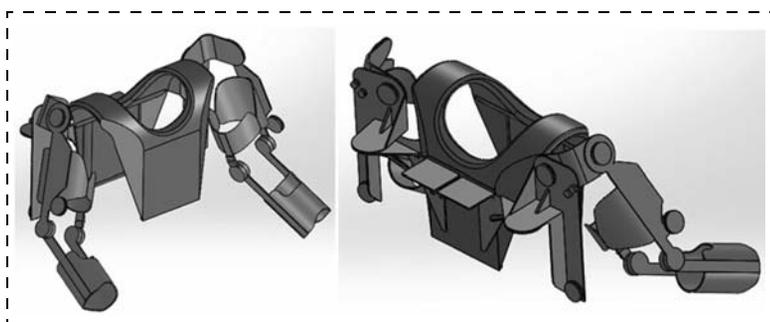


Рис. 2. Графическая модель экзоскелета рук человека

$$\begin{cases}
 \mathbf{A}_{0A} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & L_1 C_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & L_1 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{A}_{AB} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{A}_{BC} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{A}_{CD} = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & L_4 C_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & L_4 S_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{cases} \quad (3)$$

Для нахождения итоговой матрицы преобразования систем координат необходимо перемножить полученные матрицы:

$$\mathbf{A}_{0D} = \mathbf{A}_{0A} \mathbf{A}_{AB} \mathbf{A}_{BC} \mathbf{A}_{CD}, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_{0D} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & X_D \\ n_y & s_y & a_y & Y_D \\ n_z & s_z & a_z & Z_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{rot}} & \mathbf{b}^T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где \mathbf{T}_{rot} — матрица ориентации рабочего органа. Вектор $\mathbf{b} = (X_D \ Y_D \ Z_D)$ — радиус-вектор, определяющий положение конечной точки рабочего органа.

$$\mathbf{T}_{\text{rot}} = \begin{bmatrix} C_4(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) - S_4(C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3) & -S_4(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) + C_4(C_1 C_2 C_3 + S_1 C_3) & -S_2 C_1 \\ C_4(S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) - S_4(S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3) & -(S_4(S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) + C_4(S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3)) & -S_2 S_1 \\ C_4 S_2 C_3 - S_4 S_2 S_3 & -S_4 S_2 C_3 + C_4 S_2 S_3 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Координаты точки D :

$$\begin{cases}
 X_D = L_4(C_4(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) - S_4(C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)) + \\
 + L_3(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) + L_2 S_1 + L_1 C_1; \\
 Y_D = L_4(C_4(S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) - S_4(S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3)) + \\
 + L_3(S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) - L_2 C_1 + L_1 S_1; \\
 Z_D = L_4(C_4 S_2 C_3 - S_4 S_2 S_3) + L_3 S_2 C_3.
 \end{cases} \quad (7)$$

Полученные матрица ориентации (6) и координаты конечной точки D (7) есть решение прямой задачи кинематики.

Решение обратной задачи кинематики состоит в нахождении обобщенных координат (углов) при заданном положении конечной точки манипулятора и ориентации рабочего органа. Имея матрицу поворота (6) и координаты точки D (7), можем найти углы φ_i :

$$\begin{cases}
 \varphi_1 = \text{arctg}\left(\frac{a_y}{a_x}\right); \\
 \varphi_2 = \text{arctg}\left(\frac{-a_x}{a_z \cos \varphi_1}\right); \\
 \varphi_3 = \arccos\left(\frac{(L_4 n_z - z_D) \cos \varphi_1}{L_3 a_x}\right); \\
 \varphi_4 = \text{arctg}\left(\frac{s_z \cos \varphi_3 - n_z \sin \varphi_3}{s_z \sin \varphi_3 - n_z \cos \varphi_3}\right).
 \end{cases} \quad (8)$$

Данная система описывает решение обратной задачи кинематики.

Определение погрешности позиционирования

Разность между действительным и расчетным положениями рабочего органа называют погрешностью позиционирования механизма.

Радиус-вектор идеальной схемы представим в виде функции от линейных и угловых параметров:

$$\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_D(L_i, \varphi_i). \quad (9)$$

Для реальной ситуации радиус-вектор вычисляется как

$$\mathbf{r}_{D'} = \mathbf{r}_D(L_i + \Delta L_i, \varphi_i + \Delta \varphi_i) = \mathbf{r}_D + \Delta \mathbf{r}_D. \quad (10)$$

Разложим функцию (10) в ряд Тейлора, полагая все линейные погрешности ΔL_i и все линейные погрешности $\Delta \varphi_i$ равными между собой, т. е. $\Delta L_i = \Delta L$, $\Delta \varphi_i = \Delta \varphi$ для всех i :

$$\mathbf{r}_{D'} = \mathbf{r}_D + \Delta L \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial L_i} + \Delta \varphi \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial \varphi_j}. \quad (11)$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{r}_D = \Delta L \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial L_i} + \Delta \varphi \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial \varphi_j}. \quad (12)$$

Применительно к рассматриваемой схеме манипулятора:

$$\begin{cases}
 \Delta X_D = \Delta L \sum_{i=1}^4 \frac{\partial X_D}{\partial L_i} + \Delta \varphi \sum_{j=1}^4 \frac{\partial X_D}{\partial \varphi_j}; \\
 \Delta Y_D = \Delta L \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Y_D}{\partial L_i} + \Delta \varphi \sum_{j=1}^4 \frac{\partial Y_D}{\partial \varphi_j}; \\
 \Delta Z_D = \Delta L \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Z_D}{\partial L_i} + \Delta \varphi \sum_{j=1}^4 \frac{\partial Z_D}{\partial \varphi_j}.
 \end{cases} \quad (13)$$

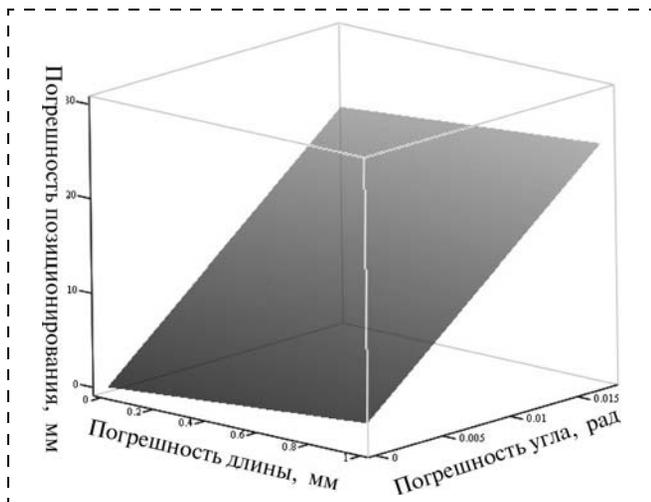


Рис. 3. График погрешности позиционирования экзоскелета руки от заданных параметров

Ошибка позиционирования будет определяться как

$$|Err_D| = \sqrt{(\Delta X_D)^2 + (\Delta Y_D)^2 + (\Delta Z_D)^2}. \quad (14)$$

Зададимся угловыми и линейными параметрами манипулятора и рассчитаем погрешность позиционирования:

$L_1 = 0,1$ м, $L_2 = 0,1$ м, $L_3 = 0,35$ м, $L_4 = 0,3$ м, где L_i — длина i -го звена;

$\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$, $\varphi_3 = -50^\circ$, $\varphi_4 = 0^\circ$ — обобщенные координаты;

$\Delta L \in [0, 1]$ мм, $\Delta\varphi \in [1''; 3600'']$ — линейная и угловая погрешности.

Зависимость ошибки позиционирования от изменения линейной и угловой погрешностей была смоделирована в программе MathCad (рис. 3).

Данный график (рис. 3) наглядно показывает, что в рассматриваемой кинематической схеме основное влияние на погрешность позиционирования имеет угловая погрешность. Применяя люф-

товыбирающие устройства в конструкции экзоскелета руки человека, можно существенно снизить значение погрешности позиционирования данного устройства.

Получившиеся значения ошибки позиционирования:

$$Err_{D_{\min}} = Err_D(\Delta L_{\min}, \Delta\varphi_{\min}) = 0,238 \text{ мм};$$

$$Err_{D_{\max}} = Err_D(\Delta L_{\max}, \Delta\varphi_{\max}) = 23,742 \text{ мм}.$$

Лабораторные испытания экзоскелета

В лаборатории робототехники и мехатроники Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН ведутся работы по созданию физической модели экзоскелета рук человека, оснащенной пневматической приводной системой. Локтевой сустав конструкции показан на рис. 4.

Созданная конструкция основана на стандартном отрезе руки, который оснащен двумя пневматическими цилиндрами в качестве приводной системы. При испытании конструкции измерялось время отработки поворота звеньев относительно друг друга на определенный угол в отсутствие нагрузки и при подъеме груза. Результаты испытаний представлены ниже.

Масса устройства, кг	4,1
Масса груза, кг	10
Давление воздуха в системе, атм	6
Угол сгибания в суставе, °	120
Время исполнения движения без груза, с . . .	1,5
Время исполнения движения с грузом, с . . .	3,2

Перспективы дальнейших исследований

В дальнейшем планируется разработать систему управления приводом, которая обеспечивает разгрузку руки человека-оператора, использующего экзоскелет при манипулировании внешними объектами. Для осуществления перемещения конечного звена экзоскелета руки оператор задает вектор перемещения посредством рукояти, закрепленной на конечном звене конструкции. Модуль и направление вектора перемещения определяются силой и направлением воздействия кисти руки оператора на силомоментные датчики, встроенные в рукоять. Исходя из текущего положения и вектора перемещения программно рассчитывается следующее положение контрольной точки экзоскелета руки, в которое эта точка должна прийти в следующий момент времени T . Для этого решается прямая задача кинематики по нахожде-



Рис. 4. Модуль локтевого сустава и поднятие груза оператором

нию координат контрольной точки и матрицы ориентации конечного звена экзоскелета руки по измененным углам в сочленениях конструкции. По истечении заданного времени T необходимо решить обратную задачу кинематики по определению углов в сочленениях конструкции по уже известной матрице ориентации и рассчитанным координатам. Сравнивая результаты рассчитанных и измеренных углов, можно их корректировать в пределах угловой погрешности и судить о том, было ли воздействие со стороны внешних сил за время $\Delta T = T - T_0$.

Заключение

В работе описана математическая модель экзоскелета руки человека, для которой решены прямая и обратная задачи кинематики, а также определена погрешность позиционирования устройства в пространстве в зависимости от линейной и угловой погрешностей. В дальнейшем планируется интеграция [12] модуля экзоскелета рук в разработанный [13, 14] модуль экзоскелета ног человека и формирование программы их работы с учетом интеграции.

Список литературы

1. Ward J., Sugar Th., Standeven J., Engsborg Ja. R. Stroke Survivor Gait Adaptation and Performance After Training on a Powered Ankle Foot Orthosis // 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage Convention District, May 3—8, 2010, Anchorage, Alaska, USA.
2. Alan Sledd Marcia, K. O'Malley. Performance Enhancement of a Haptic Arm Exoskeleton // Mechanical Engineering and Materials Science, Rice University, Houston TX USA 77005.
3. Frisoli A., Salsedo F., Bergamasco M., Rossi B., Carboncini M. C. A force-feedback exoskeleton for upper-limb rehabilitation

tion in virtual reality // Applied Bionics and Biomechanics. June 2009. V. 6, N 2. P. 115—126.

4. Frisoli A., Rocchi F., Marcheschi S., Dettori A., Salsedo F., Bergamasco M. A new force-feedback arm exoskeleton for haptic interaction in virtual environments // WHC 2005. P. 195—201.
5. Mistry M., Mohajerian P., Schaal S. Arm Movement Experiments with Joint Space Force Fields using an Exoskeleton Robot // Proc. of the 2005 IEEE, 9th International Conference on Rehabilitation Robotics June 28—July 1. 2005. Chicago, IL, USA.
6. Ettore E. Cavallaro, Jacob Rosen, Joel C. Perry and Stephen Burns, Real-Time Myoprocessors for a Neural Controlled Powered Exoskeleton Arm // IEEE transactions on biomedical engineering. 2006. V. 53, N 11.
7. Muye Pang, Shuxiang Guo, Zhibin Song. Study on the sEMG Driven Upper Limb Exoskeleton Rehabilitation Device in Bilateral Rehabilitation // Journal of Robotics and Mechatronics. 2012. V. 24, N. 4.
8. Hidalgo M., Sanchez A., Tene G. Fuzzy Control of a Robotic Arm Using EMG Signals // Department of Automatization and Industrial Control. 2005.
9. Jain R. K., Datta S., Majumder S. Design and Control of an EMG Driven IPMC Based Artificial Muscle Finger // Second International Conference on Innovative Computing Technology (INTECH 2012) September 18—20, 2012 Casablanca, Morocco. P. 363—390.
10. Saponas T. S., Tan D. S., Morris D., Balakrishnan R. Demonstrating the feasibility of using forearm electromyography for muscle-computer Interfaces // CHI 2008, April 5—10, Florence, Italy.
11. King H. H., Hannaford B., Ka-Wai Kwok et al. Plugfest 2009: Global Interoperability in Telerobotics and Telemedicine.
12. Gradetsky V., Kalinichenko S., Kravchuk L., Lopashov V. Modular Design and Mechatronic Approaches to the Exoskeleton System. Lecture Notes of the ICB Seminars Biomechanics, Biomechanics of the Musculoskeletal System Medical Robotics, Polska Akademia Nauk, Warsaw. 2000. P. 260—269.
13. Gradetsky V. G., Knyazkov M. M., Semyonov E. A., Ermolov I. L., Sukhanov A. N. The Designing Of The Exoskeleton Leg With Pneumatic Drives // Proc. of the 16th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for mobile Machines, July 2013. P. 19—27.
14. Gradetsky V. G., Knyazkov M. M., Semyonov E. A., Ermolov I. L., Kryukova A. A., Sukhanov A. N. Motion Control Algorithms For The Exoskeleton Equipped With Pneumatic Drives // Proc. of the 16th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for mobile Machines, July 2013. P. 27—34.

УДК 621.865.8

И. Г. Жиденко, студент, И. М. Кутлубаев, д-р техн. наук, проф., ptmr74@mail.ru,
МГТУ им. Г. И. Носова, г. Магнитогорск

Методика определения сигналов управления антропоморфным манипулятором

Рассмотрен вопрос определения обобщенных координат руки оператора для формирования сигналов управления движением антропоморфного манипулятора.

Ключевые слова: задающее устройство, антропоморфный манипулятор, оператор, обобщенные координаты

I. G. Zhidenko, I. M. Kutlubayev

Technique of Definition of Control Signals Anthropomorphic Manipulator

The question of determination of generalized coordinates of operator's hand with the purpose of development of anthropomorphic manipulator's movement control signals was considered.

Keywords: setting device, anthropomorphic manipulator, generalized coordinates

Введение

Очередным этапом развития механических систем, позволяющих заменить действия человека, являются роботы, воспроизводящие структуру и кинематику тела человека. Из многочисленных известных и широко демонстрируемых решений следует отметить те, что используются для практических целей — это, в первую очередь, "Eurobot" [1], "Robonaut 2" [2].

В подобных робототехнических системах управление исполнительным комплексом может осуществляться за счет реализации одного из подходов:

- предварительного программирования движения звеньев;
- автономного формирования алгоритмов движения на основе анализа текущей обстановки;
- формирования управляющих сигналов оператором.

Область использования первого подхода крайне ограничена — он используется при изначально детерминированных и неизменяемых условиях в рабочем пространстве. Реализация второго подхода возможна только после создания эффективной системы, условно определяемой как *искусственный интеллект*. Третий подход в настоящее время является наиболее эффективным.

Активные исследования в области управления антропоморфными манипуляторами, осуществляемого непосредственно оператором, ведутся специалистами института робототехники и мехатроники DLR (Германия) [3, 4]. По мнению руководителя института Prof. Dr. AlinAlbu-Schäffer, долгосрочной целью является создание нового поколения роботов, способных выполнять работу совместно, а также использовать технологию дистанционного управления *telerobotics*.

Одним из возможных вариантов реализации третьего подхода является формирование управляющих сигналов непосредственно за счет движений в суставах оператора.

Терминология

Развитие робототехники сопряжено с появлением новых технических объектов, а также совершенствованием и видоизменением известных. Для их понимания и однозначного толкования необходимо согласовать определяющие термины, ввести соответствующие условные обозначения. Наиболее целесообразным в этой ситуации видится представление и обсуждение данных аспектов в уважаемом журнале в специальном разделе. Терминология, принятая в результате публичного обсуждения специалистами будет иметь более аргументированный и близкий к сути характер.

В статье используется понятие "антропоморфный" и ряд связанных с ним. На данный момент нет общепринятого единого их определения. Счи-

таем целесообразным высказать предложения по их толкованию. Предлагаемые термины сформулированы с максимальным использованием понятий, принятых в теории механизмов и машин.

Антропоморфный — подобный* по построению телу человека и обладающий аналогичными кинематическими характеристиками.

Антропоморфный робот — многодвигательный рычажный механизм, имеющий кинематическую схему, подобную скелету человека.

Антропоморфный манипулятор — многодвигательный рычажный механизм, имеющий кинематическую схему, подобную руке человека.

Антропоморфный захват — рычажный механизм, состоящий из трех и более параллельных исполнительных групп звеньев.

Исполнительная группа звеньев — простая незамкнутая кинематическая цепь звеньев, каждое из которых является выходным.

Исполнительный механизм — механизм, в котором два и более тела, его образующих, имеют самостоятельное функциональное назначение.

Кинематическая зависимость движения звеньев — изменение обобщенной координаты одного механизма, обусловленное (вызываемое) изменением обобщенной координаты иного механизма, имеющего общие с ним звенья.

Маневренность в общем случае характеризуется реализуемым телесным (плоским) углом поворота $(i - 1)$ -го звена относительно i -го при неизменном положении последнего. Для оценки маневренности следует использовать коэффициент маневренности k , определяемый как отношение реализуемого угла поворота $\Delta\theta_p$ $(i - 1)$ -го звена относительно i -го к фактическому углу θ_d при неподвижном i -м звене:

$$K = \Delta\theta_p / \theta_d.$$

Реализуемый угол $\Delta\theta_d$ может представлять собой сумму несопряженных секторов.

Маневренность манипулятора — возможность изменять обобщенные координаты, определяющие положения звеньев манипулятора, при неизменном положении захвата.

Задающее устройство — совокупность механизма, формирующего сигналы системы управления, и приборов, их фиксирующих (регистрирующих).

Система управления копирующего типа — система, в которой входной сигнал формируется с использованием задающего устройства, кинематика которого подобна кинематике управляемого механизма.

Важным в предлагаемых определениях является адресация к кинематической, а не структурной

*В ряде случаев подобие может быть не абсолютным. В частности, это относится к распределенной подвижности позвоночника человека, эквивалентом которой могут выступать сосредоточенные степени свободы робота, но обеспечивающие при этом близкую кинематику корпуса.

схеме, так как совпадение числа звеньев, вида, класса и последовательности размещения кинематических пар недостаточно для достижения кинематических характеристик, аналогичных тем, что реализуются человеком.

Предлагаемые термины не входят в число терминов, определенных ГОСТ 25686—85, и не следуют из них прямым образом, а по сути, являются дополнением, отражающим развитие данного направления техники.

Кроме развития терминологии существует потребность в совместном обсуждении ГОСТ 2.770—68 "Обозначения условные графические в схемах. Элементы кинематики". Последние редакции ГОСТ содержат явные противоречия, например: 35. Передатки зубчатые (цилиндрические): а) внешнее зацепление (общее обозначение без уточнения типа зубьев); 38. Передатки зубчатые реечные: а) общее обозначение без уточнения типа зубьев. Число замечаний достаточно значительно и может быть предметом отдельного разговора.

Крайне актуальным в настоящий момент является введение графического представления гибких звеньев. В практику возвращается использование канатных передач, а их условное обозначение не предусмотрено в принципе. Предлагается для обозначения гибких звеньев использовать символ, изображенный на рис. 1.

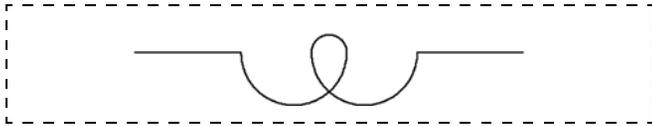


Рис. 1. Условное обозначение гибкого звена на кинематических схемах

Из ГОСТ исключено условное обозначение блока канатной передачи. Предлагается на кинематических схемах для представления блока канатной передачи применять символ, показанный на рис. 2.

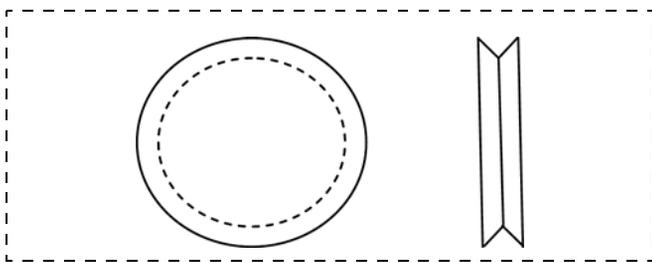


Рис. 2. Условное обозначение блока канатной передачи

Антропоморфный манипулятор

Промышленные роботы являются неотъемлемой частью многих производственных процессов, успешно заменяя собой человека. Основное усло-

вие их использования — практическая неизменность условий функционирования. Актуальной областью применения многодвигательных механических систем остается замена действий человека в неблагоприятной среде с изначально неопределенной или быстро меняющейся внешней обстановкой. Это характерно для работ, выполняемых в чрезвычайных или в потенциально опасных (космос, горячие зоны реакторов и т. п.) условиях. При работе требуется обеспечить определенную траекторию не только захвата, но и звеньев исполнительного механизма — манипулятора. Возможности уже реализованных систем контроля и управления манипуляторами, промышленными роботами в этих условиях недостаточны. Наиболее перспективным в данных обстоятельствах является управление движением звеньев манипулятора, осуществляемое оператором. Это позволяет непосредственно использовать его профессиональные навыки и интеллект для принятия решений, адекватных реальной обстановке.

Манипулятор должен иметь не менее семи степеней свободы. Только в этом случае реализуются требуемые движения захвата в рабочих зонах, содержащих препятствия, с достаточной степенью маневренности. Наиболее приемлемыми в этом случае являются антропоморфные манипуляторы (рис. 3). В силу сложности технической реализации движения в сферической паре (аналогте плечевого сустава) подвижности выполняются в виде разнесенных вращательных пар: B_1, A_1, B_2 . Важным аспектом применения именно антропоморфных манипуляторов является их адаптированность к инфраструктуре, изначально ориентированной на взаимодействие с рукой человека.

Антропоморфный манипулятор с системой управления копирующего типа является наиболее эффективным для перечисленных выше условий

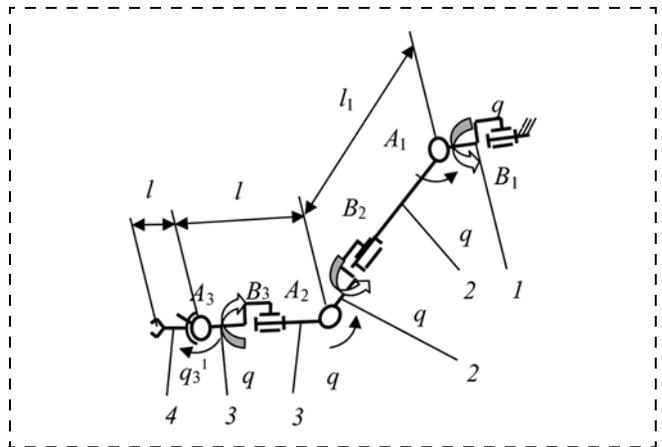


Рис. 3. Кинематическая схема антропоморфного манипулятора: A_1, A_2, A_3 — вращательные пары с поперечным положением оси вращения; B_1, B_2, B_3 — с продольной осью вращения (ротация)

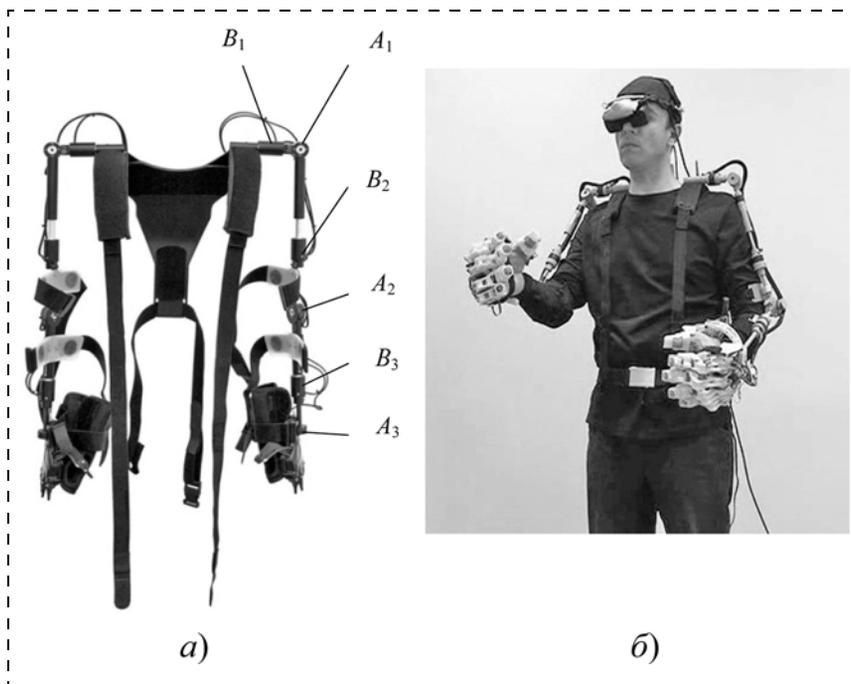


Рис. 4. Задающее устройство копирующего типа ОАО "НПО Андронидная техника": а — общий вид; б — надетое на оператора

работы. Кинематическая схема манипулятора выполняется аналогично руке человека, а сигналы управления приводом манипулятора формируются задающим устройством, надеваемым на оператора.

Применение системы управления копирующего типа обеспечивает:

- одновременное формирование сигналов управления по всем степеням свободы манипулятора;

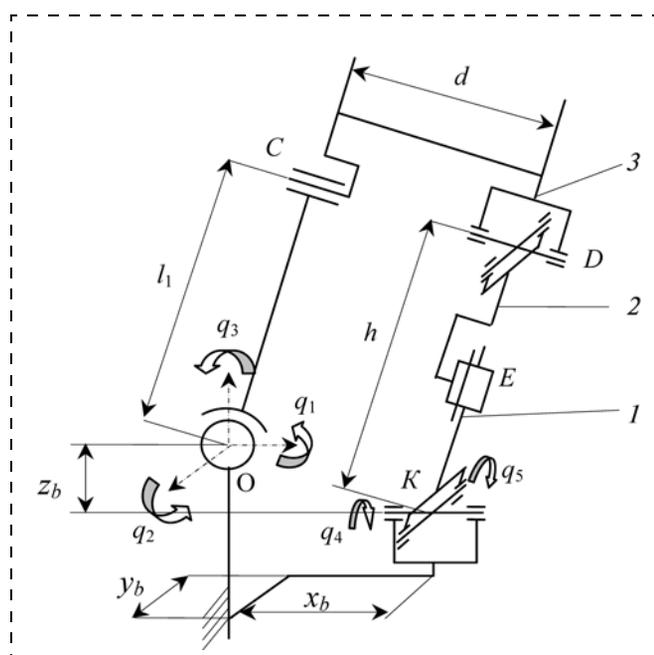


Рис. 5. Кинематическая схема части руки человека и задающего устройства

- формирование траектории движения звеньев манипулятора и захвата, соответствующих профессиональной подготовке оператора.

Применяемые в настоящее время задающие устройства имеют структурную схему, близкую к руке человека (рис. 4) [5]. Звенья задающего устройства накладываются и фиксируются на корпусе, плече, предплечье и кисти оператора. Длины звеньев регулируются под параметры руки оператора. Все вращательные кинематические пары задающего устройства оснащены энкодерами. Это позволяет фиксировать значение относительного угла поворота звеньев.

К задающему устройству предъявляются повышенные требования по комфортности и точности определения движений в суставах человека. Относительно просто данные вопросы решаются с локтевым суставом, который является вращательной парой.

Сложнее определить изменения обобщенных координат в плечевом и кистевом суставах, являющихся сферическими парами. Существующие конструкции реализуют тактику прямых измерений углов относительного поворота. В результате "параллельного" положения руки оператора и задающего устройства имеет место смещение осей вращения в суставах и кинематических парах и, как следствие, расхождение значений углов поворота.

Неточность формируемых через задающее устройство сигналов системы управления компенсируется навыками оператора и непрерывным контролем движения звеньев. Имеет место субъективный фактор, влияние которого следует исключить.

Конструкция задающего устройства

Для определения углов поворота в суставах оператора предлагается использовать способ непрямых замеров.

Для его реализации используется новое задающее устройство со схемой, представленной на рис. 5 [6]. Звено 1 соединено со стойкой (корпус оператора) через универсальный шарнир K , а с ползуном 2 — через цилиндрическую пару E . Ползун 2 соединен со звеном 3 через универсальный шарнир D . Одна из осей шарнира D и локтевого сустава C соосны. Положение центра универсального шарнира K относительно плечевого сустава (точка O) определяется постоянными параметрами x_b , y_b , z_b . Задающее устройство закрепляется на корпусе оператора. Звено 3 жестко соединяется с предплечьем оператора. Три степени свободы задающего устройства

не ограничивают исходную подвижность руки оператора в плечевом суставе. При этом обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 , определяющие относительные движения плеча, можно выразить через обобщенные координаты задающего устройства q_4, q_5, h .

Алгоритм определения углов поворота в плечевом суставе

Координаты точки D можно определить из условия принадлежности руке оператора через углы поворота q_1, q_2, q_3 и через обобщенные координаты q_4, q_5, h , определяющие относительные движение звеньев 1 и 2 вследствие принадлежности задающему устройству.

Для получения уравнений кинематики используется метод преобразования координат, в соответствии с которым матрицы преобразования переноса и поворота имеют размерность 4×4 .

Плечевой сустав. Положение точки D , принадлежащей звену 3, в системе координат, связанной с точкой O , определяется четырехмерным радиус-вектором r_O^D , а в системе координат, связанной с точкой C , — радиус-вектором r_C^D , которые связаны между собой соотношением

$$r_O^D = M_1 r_C^D, \quad (1)$$

где

$$r_C^D = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица M_1 отражает переход от системы координат, связанной со стойкой (точка O), к системе координат, связанной с точкой C , и представляет собой произведение матриц, отражающих поворот по каждой из обобщенных координат и перенос вдоль оси Z_O :

$$M_1 = M_{q1} M_{q2} M_{q3} M_{l1},$$

где

$$M_{q1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M_{q2} = \begin{pmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{q3} = \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M_{l1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задающее устройство. Положение точки D в системе координат, связанной с точкой O , определяется четырехмерным радиус-вектором r_O^D , а в системе координат, связанной с точкой K , — радиус-вектором r_K^D соответственно, которые связаны между собой соотношением

$$r_O^D = M_2 r_K^D, \quad (2)$$

где

$$r_K^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица M_2 отражает переход от системы координат, связанной со стойкой (точка O), к системе координат, связанной с точкой K , и представляет собой произведение матриц:

$$M_2 = M_{XYZ} M_{q4} M_{q5},$$

где M_{XYZ} — матрица переноса вдоль осей x_b, y_b, z_b :

$$M_{XYZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_b \\ 0 & 1 & 0 & y_b \\ 0 & 0 & 1 & z_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M_{q4} — матрица поворота вокруг X_O :

$$M_{q4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M_{q5} — матрица поворота вокруг Y_O :

$$M_{q5} = \begin{pmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы и записав уравнения (1) и (2) в скалярной форме, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_b + h \sin q_5 &= l_1 \sin q_2 + d \cos q_2 \cos q_3; \\ y_b - h \sin q_4 \cos q_5 &= \\ &= -l_1 \sin q_1 \cos q_2 + d \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 + d \cos q_1 \sin q_3; \\ z_b + h \cos q_4 \cos q_5 &= \\ &= l_1 \cos q_1 \cos q_2 - d \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 + d \sin q_1 \sin q_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Числовые значения q_4 , q_5 , h , фиксируются датчиками угла поворота (энкодерами) и линейных перемещений. Значения x_b , y_b , z_b , h , d , l_1 являются константами.

Из совместного решения уравнений (3) определяются значения q_1 , q_2 , q_3 , являющиеся входными сигналами системы управления антропоморфного манипулятора.

Заключение

Применение новой конструкции задающего устройства и методики определения сигналов управления позволяют:

- качественно повысить точность формирования сигналов управления антропоморфным манипулятором;
- повысить комфортность работы оператора;
- упростить процедуру адаптации задающего устройства к антропометрическим параметрам оператора.

1. URL: <http://www.esa.int/esaCP/index.html>
2. URL: <http://www.nasa.gov/audience/foreducators/robotics/home/index.htm>
3. Hertkorn K., Hulin T., Kremer, Philipp, Preusche C., Hirtzinger G. Time Domain Passivity Control for Multi-Degree of Freedom Haptic Systems with Time Delay // Proc. IEEE/ICRA International Conference on Robotics and Automation. May 3–8, 2010, Anchorage, Alaska.
4. Schmirgel V., Zimmermann Uwe E., Yechiam E., Hulin T., Preusche C. Comprehension of Operating a Robot by Enactive Learning: Exemplary Approaches with Programming-by-Demonstration // Proc. of the SKILLS09 International Conference on Multimodal Interfaces for Skills Transfer, Dec. 2009, Bilbao, Spain.
5. Богданов А. А., Сычков В. Б., Жиденко И. Г., Кутлубаев И. М. Создание и исследование робототехнической системы с интерактивным управлением // Решетневские чтения: матер. XVI Междунар. науч. конф., посвящ. акад. М. Ф. Решетнева (7–9 нояб. 2012, г. Красноярск): в 2 ч. / Под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2012. Ч. 1. С. 230–231.
6. Патент ПМ № 135956 Российская Федерация, МПК⁷ B25J 3/00 Полезная модель Копирующий манипулятор / Богданов А. А., Жиденко И. Г., Кутлубаев И. М., Кияткин Д. В., Пермяков А. Ф.; заявитель и патентообладатель научно-производственное объединение "Андроидная техника" — № 2013122162; заявл. 14.05.13.

ИНФОРМАЦИЯ

1–2 октября 2014 г. в Санкт-Петербурге состоится очередная, 25-я юбилейная конференция "Экстремальная робототехника (ЭР-2014)", и в этом году ее проведение запланировано в формате международного мероприятия.

Бессменным организатором конференции по экстремальной робототехнике выступает ГНЦ России "Центральный научно-исследовательский и опытно-конструкторский институт робототехники и технической кибернетики" (ЦНИИ РТК, Санкт-Петербург). История возникновения конференции и превращения ее в ежегодное мероприятие объективно связана с историей отечественной робототехники. После аварии на Чернобыльской АЭС и ликвидации ее последствий возникла новая актуальная проблематика в робототехнике, получившая название *экстремальная робототехника*. С тех пор ЦНИИ РТК как родоначальник и головная организация отечественной робототехники проводит регулярные всероссийские и международные выставки и конференции, посвященные данному направлению.

Ежегодно конференция "Экстремальная робототехника" собирает ведущих российских специалистов, молодых ученых в области робототехники. Сегодня, когда экстремальная робототехника стала авангардом научно-технического развития робототехники в целом, значение проводимой ЦНИИ РТК конференции соответственно возросло, и к ней сейчас привлечено внимание многих зарубежных специалистов, занимающихся разработками в области робототехнических систем и средств безопасности. Именно поэтому конференция "ЭР-2014" пройдет в формате международного мероприятия с участием зарубежных ученых и представителей известных международных ассоциаций и программ по развитию робототехники.

Традиционно тематика конференции по экстремальной робототехнике охватывает широкий круг концептуальных вопросов, связанных с необходимостью создания робототехнических систем нового поколения, осуществляющих все более сложные операции для работы в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях, в том числе при борьбе с терроризмом, пожаротушении, решении оборонных задач, задач по освоению космоса и глубин Мирового океана, проблем атомной энергетики и опасных производств, медицины. Работа конференции, как обычно, запланирована в форме пленарных и секционных заседаний, дискуссий, посвященных актуальным проблемам и задачам в сфере робототехнических средств безопасности.

Международная конференция "ЭР-2014" открыта для всех желающих, а их организатор — ЦНИИ РТК — всегда рад новым участникам и гостям.

Подробную информацию о конференции см. на сайте: <http://er.rtc.ru/>

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах



Главный редактор:
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Ответственный секретарь:
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.
БАРАНОВ Л. А.
БЕЛОКОНОВ И. В.
БУКОВ В. Н.
ВАСИЛЬЕВ В. И.
ГОДУНОВ В. А.
ГУРЕВИЧ О. С.
ГУРСКИЙ Б. Г.
ЕФИМОВ В. В.
ЗАЙЦЕВ А. В.
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
НЕСТЕРОВ В. А.
ОХТИЛЕВ М. Ю.
ПАНКРАТОВ В. М.
РАСПОПОВ В. Я.
САБО Ю. И.
СТЕПАНОВ О. А.
СОЛДАТКИН В. М.
ФИЛИМОНОВ Н. Б.
ХИМЕНКО В. И.
ЧЕБУРАХИН И. Ф.
ШИРЯЕВ В. И.
ШКОЛИН В. П.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Кабанов С. А., Кабанов Д. С.

Оптимальное управление разворотом самолета по различным критериям. 48

Фирсов С. Н.

Обеспечение функциональной устойчивости системы стабилизации и ориентации малогабаритного автономного летающего изделия 54

Лебедев Г. Н., Зо Мин Тайк.

Синтез оптимального управления боковым движением воздушных или речных судов при пересечении их маршрутов под произвольным углом 61

Чувашева Е. С., Чувашев С. Н.

Математическое моделирование возможности обнаружения высокоскоростных летательных аппаратов в полете по инфракрасному излучению 69

С. А. Кабанов, д-р техн. наук, проф., kaba-sa@mail.ru,
Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова,
Д. С. Кабанов, канд. техн. наук, старший преподаватель, kabanovds@mail.ru,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Оптимальное управление разворотом самолета по различным критериям

Исследуется задача оптимального управления по различным критериям на примере разворота самолета. Рассматриваются алгоритмы последовательной оптимизации управления по иерархии из двух критериев и коррекции параметров структуры управления, вид которой определяется из принципа максимума. Коррекция параметров может проводиться из условия минимума как функционала с дополнительной интегральной частью, включающей затраты на управление, с применением принципа максимума, так и критерия Красовского с использованием алгоритма с прогнозирующей моделью.

Ключевые слова: принцип максимума, структура управления, прогнозирующая модель

S. A. Kabanov, D. S. Kabanov

Optimal Control of Aircraft Banked Turn Using Various Criteria

A problem of optimal control using various criteria in the case of an aircraft making a banked turn is considered. Algorithms of control sequential optimization for two criteria hierarchy and correction of control structure parameters are investigated. The control's structure is obtained from the solution based on Pontryagin's maximum principle. The correction of control structure parameters is optimized by minimization either of the two functionals. The first one is a functional with an additional integral cost of control using maximum principle. The second one is a Krasovsky's criterion using the algorithm with a forecasting model.

Keywords: pontryagin's maximum principle, control's structure, forecasting model

Введение

Построение оптимального управления с использованием методов вариационного исчисления, принципа максимума Л. С. Понтрягина, динамического программирования Р. Беллмана и др. [1—4] связано с решением двухточечной краевой задачи и для нелинейных систем (в частности, при управлении разворотом самолета) требует высоких вычислительных затрат, препятствующих реализации этих методов в процессе полета. Это является существенным недостатком классических методов синтеза управления. В результате получается программное управление, которое нуждается в уточнении при изменении параметров исходной системы и условий ее функционирования. Для самолета предпочтительными являются алгоритмы управления с малым объемом вычислений, способные формировать управление на борту в изменяющихся условиях полета. Это повышает уровень безопасности полета. К таким методам управления относится оптимизация по функционалу Красовского [4—7]. Здесь задание требований на конечное состояние выполняется путем подбора соответствующей части критерия качества и приводит к компромиссному результату. В этом методе вместо двухточечной краевой задачи решаются уже задачи Коши. Использование подхода, изложенного в работе [8], с рассмотрением иерархии критериев Красовского позволило получить эффективные в вычислительном отношении алгоритмы управления [9—15]. Они

сводятся к решению иерархической дифференциальной игры. В упрощенном варианте алгоритма проводится последовательная оптимизация с вычислением управлений, минимизирующих соответствующие критерии в иерархии. Его применение для различных технических задач позволило получить высокую конечную точность. Это решение можно трактовать как оптимизацию по одному критерию Красовского при фиксированном конечном значении части компонент вектора состояния. Эти требования содержатся в критерии первого уровня иерархии. Задачу оптимизации можно также решить с помощью алгоритма с коррекцией параметров структуры управления [16—19], полученной из принципа максимума.

В данной статье дается решение задачи управления разворотом самолета при наличии ограничений на состояние и управление с использованием алгоритмов последовательной оптимизации и с коррекцией параметров структуры управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления разворотом самолета на заданный угол курса. Предположим, что выполняются следующие условия: 1) боковая аэродинамическая сила, необходимая для разворота, создается креном без скольжения; 2) изменения угла наклона траектории в процессе маневра невелики; 3) скорость полета не меняется $v = \text{const}$. В этом

случае сложный процесс разворота самолета можно описать следующими уравнениями [3, 5, 6]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, Y, t), \quad \dot{Y} = u, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{X}^T Y)^T, \quad \mathbf{X} = (\varphi \ \gamma \ \omega)^T, \quad \mathbf{F} = \left(\frac{g}{v} \operatorname{tg} \gamma \ \omega \ M^\omega \omega + M^\delta \delta \right)^T.$$

Здесь \mathbf{X} — вектор состояния; Y — управляющее воздействие (угол отклонения рулей $Y = \delta$); u — управление; M^ω и M^δ — производные аэродинамического момента самолета по ω и γ соответственно, отнесенные к его моменту инерции относительно продольной оси; g — ускорение свободного падения; v — скорость полета; ω — угловая скорость; φ — угол курса; γ — угол крена.

Начальное положение самолета в момент $t_0 = 0$ известно: $\varphi_0 = \gamma_0 = \omega_0 = \delta_0 = 0$. Требуется развернуть самолет в конечный момент времени t_f (t_f неизвестен) на заданный угол φ_f при малых значениях γ , ω , δ . Ограничения на состояние и управление имеют вид $|\gamma| \leq \gamma_m$, $|\omega| \leq \omega_m$, $|\delta| \leq \delta_m$, $|\dot{\delta}| \leq \dot{\delta}_m$. Таким образом, рассматривается наиболее сложный случай одновременной оптимизации углового и траекторного движений самолета.

Запишем уравнения (1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad (2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, t)u,$$

$$\mathbf{f}_1 = \left(\frac{g}{v} \operatorname{tg} \gamma \ \omega \ M^\omega \omega + M^\delta \delta \ 0 \right)^T, \quad \mathbf{f}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T.$$

На управление накладывается ограничение $u(t) \in U$. Требуется минимизировать функционал

$$I = V_f(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(\mathbf{x}, t) dt, \quad (3)$$

где $V_f(\mathbf{x}, t_f) = \Delta \mathbf{x}_f^T \rho \Delta \mathbf{x}_f$, $\Delta \mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f$, $\rho = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, \mathbf{x}_f — заданный терминальный вектор состояния. Ограничения на вектор состояния можно учесть посредством введения в целевой критерий функций штрафа:

$$Q(\mathbf{x}, t) = Q_1(\mathbf{x}, t) + Q_2(\mathbf{x}, t) + Q_3(\mathbf{x}, t),$$

$$Q_1 = \begin{cases} a_1(\gamma - \gamma_m), & \gamma > \gamma_m; \\ 0, & |\gamma| \leq \gamma_m; \\ a_2(\gamma + \gamma_m), & \gamma < -\gamma_m; \end{cases}$$

$$Q_2 = \begin{cases} b_1(\omega - \omega_m), & \omega > \omega_m; \\ 0, & |\omega| \leq \omega_m; \\ b_2(\omega + \omega_m), & \omega < -\omega_m; \end{cases}$$

$$Q_3 = \begin{cases} c_1(\delta - \delta_m), & \delta > \delta_m; \\ 0, & |\delta| \leq \delta_m; \\ c_2(\delta + \delta_m), & \delta < -\delta_m; \end{cases}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — достаточно большие коэффициенты, соответствующие штрафным переменным и характеризующие строгость границ (полагаем $a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0; a_2 = -a_1, b_2 = -b_1, c_2 = -c_1$).

Из принципа максимума следуют канонические уравнения [1, 3]

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}^T, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}^T, \quad (4)$$

где $H = \mathbf{p}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) = \mathbf{p}^T [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, t)u] = H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + H_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)u$ — гамильтониан; $H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t)$, $H_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}^T \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, t)$, \mathbf{p} — n -мерный вектор сопряженных переменных ($n = 5$), $H_{\mathbf{x}} = \partial H / \partial \mathbf{x}$, $H_{\mathbf{p}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$, уравнение для выбора управления

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u_0, t) = \inf_{u \in U} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u, t), \quad (5)$$

откуда следует

$$u = \begin{cases} -u_m \operatorname{sign} H_2, & H_2 \neq 0, \\ u_{\text{ос}}, & H_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

и условия трансверсальности в граничных точках

$$\left[\left(\frac{\partial V_f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p}^T \right) \delta \mathbf{x} + \left(H + \frac{\partial V_f}{\partial t} \right) \delta t \right]_{0, f} = 0, \quad (7)$$

из которых определяются граничные условия для вектора состояния, сопряженных переменных (задача со свободным правым концом) $\mathbf{p}^T(t_f) = \frac{\partial V_f}{\partial \mathbf{x}}$ и

$H + \frac{\partial V_f}{\partial t} = 0$ для нахождения значения t_f . Здесь $u_{\text{ос}}$ — особое управление [1, 3, 4].

До настоящего времени нет универсального алгоритма решения двухточечной краевой задачи (3)—(6). Основная трудность здесь связана не с объемом вычислений, а с необходимостью выбора начального приближения, обеспечивающего сходимость итерационных процедур нахождения управления. Однако из попыток численного решения представленной основной задачи оптимизации можно выявить структуру оптимального управления [2].

2. Алгоритм последовательной оптимизации

Рассмотрим упрощенный вариант алгоритма последовательной оптимизации [6, 9] для задачи управления разворотом самолета на заданный угол курса. Для определения конечного момента времени t_f добавим к системе (1) уравнение $\dot{t}_f = w$. Тогда $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}$, $\mathbf{Y}_0 = (Y^T \ t_f)^T$, $\mathbf{U} = (u \ w)^T$ — вектор управления.

В соответствии с этим рассматривается иерархия из двух критериев оптимальности

$$\begin{aligned} I_1 &= V_{f1}(\mathbf{X}_f, Y_f, t_f); \\ I_2 &= V_{f2}(\mathbf{X}_f, Y_f, t_f) + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left[Q(\mathbf{X}, Y, t) + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_2^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_{2o}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{U}_{2o}) \right] dt,$$

где $V_{f1} = \frac{1}{2} \rho_1 \gamma^2(t_f)$, $V_{f2} = \frac{1}{2} \rho_2 (\varphi(t_f) - \varphi_f)^2 + \frac{1}{2} \rho_3 \omega^2(t_f) + \frac{1}{2} \rho_4 \delta^2(t_f)$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$,

$$Q_4 = \begin{cases} d_1(\dot{\delta} - \dot{\delta}_m), \dot{\delta} > \dot{\delta}_m; \\ 0, & |\dot{\delta}| \leq \dot{\delta}_m; \mathbf{k}^{-2} = \text{diag}(k_\delta^{-2}, k_t^{-2}), \\ d_2(\dot{\delta} + \dot{\delta}_m), \dot{\delta} < -\dot{\delta}_m; \end{cases}$$

Q_1, Q_2, Q_3 — функции штрафа, представленные в разделе 1; d_1, d_2 — достаточно большие коэффициенты ($d_1 > 0; d_2 = -d_1$); $\rho_i, i = \overline{1, 4}, k_\delta, k_t$ — заданные коэффициенты.

В алгоритме последовательной оптимизации принимается $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$, где \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 минимизируют критерии I_1 и I_2 соответственно; \mathbf{U}_{1o} и \mathbf{U}_{2o} — оптимальные значения управлений \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 для воздействия на систему.

В соответствии с алгоритмом последовательной оптимизации на первом этапе определяется управление $u_{1o} = \Delta \delta \bar{\delta}(t)$, $\bar{\delta}(t)$ — дельта-функция Дирака; $\mathbf{U}_{1o} = (u_{1o} \ 0)^T$. Величина $\Delta \delta$ вычисляется итерационным путем из решения системы (1) при условии, что $\dot{\mathbf{Y}}_0 = 0$ и обеспечивается минимум критерия I_1 в (2). Тогда управление $u_{1o} = 0$ при угле отклонения рулей $\delta_1 = \delta(t) + \Delta \delta$ обеспечивает $\min_{\Delta \delta} I_1$.

На втором этапе запишем гамильтониан системы

$$\begin{aligned} H_2 &= H_{2m} + p_\delta u_2 + p_t w + \\ &+ \frac{1}{2} (u_2^2 + u_{2o}^2) k_\delta^{-2} + \frac{1}{2} (w^2 + w_o^2) k_t^{-2}, \end{aligned}$$

$$H_{2m} = \mathbf{p}_x^T \mathbf{F} + Q + p_\delta u_{1o}.$$

Здесь $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_x^T \ \mathbf{p}_y^T)^T$, $\mathbf{p}_x = (p_\varphi \ p_\gamma \ p_\omega)^T$, $\mathbf{p}_y = (p_\delta \ p_t)^T$; H_{2m} — гамильтониан модели системы при $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{2o} = 0$, $\mathbf{U}_2 = (u_2 \ w)^T$. Равенство $H_{2m} = H_2$ обеспечивается не только при $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{2o} = \mathbf{0}$, но и при оптимальных управлениях $u_{2o} = -k_\delta^2 p_\delta$, $w_o = -k_t^2 p_t$, определяемых из условий минимума гамильтониана. С учетом штрафной функции получим $\mathbf{U}_o = \mathbf{U}_{1o} + \mathbf{U}_{2o} + \mathbf{U}_s$, $\mathbf{U}_s = [-k_\delta^2 (\partial Q_4 / \partial u) \ 0]^T$. Потребные для

вычисления управлений значения вектора сопряженных переменных $\mathbf{p}_y = (p_\delta \ p_t)^T$ можно найти из системы канонических уравнений прогнозирующей модели при $\mathbf{U}_2 = \mathbf{0}$, полученной дифференцированием функции H_{2m} по \mathbf{p} и \mathbf{x} :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, Y, t), \dot{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{U}_{1o}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_x &= - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \mathbf{p}_x - \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{X}} \right]^T; \\ \dot{p}_\delta &= - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} \right]^T \mathbf{p}_x - \left[\frac{\partial Q}{\partial \delta} \right]^T; \mathbf{p}(t_f) = \left[\frac{\partial V_{f2}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T. \end{aligned} \quad (10)$$

В поэлементном виде система (9), (10) представляется следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \frac{g}{v} \text{tg} \gamma; \dot{\gamma} = \omega; \dot{\omega} = M^\omega \omega + M^\delta \delta; \dot{\delta} = u_{1o}; \dot{t}_f = 0;$$

$$\dot{p}_\varphi = 0; \dot{p}_\gamma = -p_\varphi \frac{g}{v \cos^2 \gamma} - \frac{\partial Q_1}{\partial \gamma};$$

$$\dot{p}_\omega = -p_\gamma - p_\omega M^\omega - \frac{\partial Q_2}{\partial \omega}; \dot{p}_\delta = -p_\omega M^\delta - \frac{\partial Q_3}{\partial \delta};$$

$$\begin{aligned} p_\varphi(t_f) &= \rho_2 (\varphi(t_f) - \varphi_f); p_\gamma(t_f) = 0; \\ p_\omega(t_f) &= \rho_3 \omega(t_f); p_\delta(t_f) = \rho_4 \delta(t_f). \end{aligned}$$

Момент времени t_f находится из уравнения [1, 6]

$$p_t(t) = H_{2m}[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}(t_f), \mathbf{U}(t_f), t_f] + \frac{\partial V_{f2}}{\partial t_f} = 0. \quad (11)$$

Это уравнение можно решить алгоритмически с помощью соотношения $\dot{t}_f = w = -k_t^2 p_t(t)$, полученного выше. По завершении переходного процесса $t_f(t)$ имеем $w = 0$, что соответствует уравнению (11).

Таким образом, управление $\mathbf{U}_{2o} = (u_{2o} \ w_o)^T$ находится с учетом \mathbf{U}_{1o} , полученного на первом этапе.

Алгоритм управления включает в себя выполнение следующих операций:

1) параметр $\Delta \delta$ выбирается из условия $V_{f1} = 0$. Необходимые для вычисления V_{f1} значения вектора состояния $\mathbf{x}(t_f)$ определяются интегрированием уравнений системы (9) с $\mathbf{U}_{1o} = \mathbf{0}$, $\delta_1(t) = \delta(t) + \Delta \delta$ в прямом времени от t до t_f . Полученные значения $\mathbf{x}(t)$, соответствующие выбранному δ_1 , запоминаются;

2) граничные условия для сопряженных переменных $\mathbf{p}_x(t_f)$ определяются из соотношений (10). Вектор $\mathbf{p}_y(t)$ вычисляется путем численного интегрирования уравнений (10) в обратном времени от t_f до t с использованием запомненных значений $\mathbf{x}(t)$ (или, при ограниченной памяти бортового вычислителя, без запоминания $\mathbf{x}(t)$ интегрируются уравнения (9), (10) на том же интервале);

3) вычисляются управления \mathbf{U}_{2o} , \mathbf{U}_o на следующий шаг управления;

4) интегрируется исходная система (1) в прямом времени с постоянным управлением U_0 на очередном шаге управления.

Далее процесс вычислений повторяется для следующего шага.

Интегрирование уравнений (9), (10) в прямом и обратном времени может проводиться в ускоренном масштабе (например, равном 10) для уменьшения вычислительных затрат.

Рассмотрим пример решения задачи управления разворотом гипотетического самолета при наличии ограничений на состояние по алгоритму последовательной оптимизации. В этом случае параметр $\Delta\delta$ выбирается из условия $V_{f1} = 0$ ($\gamma(t_f) = 0$) с использованием аналитического решения линейных второго и третьего уравнений исходной системы при $\delta_1 = \text{const}$ в виде

$$\Delta\delta = \frac{\gamma_t M^\omega - \omega_t (1 - e^{M^\omega(t_f-t)})}{M^\delta [t_f - t + (1 - e^{M^\omega(t_f-t)}) / M^\omega]} - \delta_t$$

Здесь $\gamma_t = \gamma(t)$, $\omega_t = \omega(t)$, $\delta_t = \delta(t)$. Зададим начальные условия и параметры исходной системы: $\varphi(t_0) = 0$, $\gamma(t_0) = 0$, $\omega(t_0) = 0$, $\delta(t_0) = 0$; $t_f(t_0) = 10$ с, $g = 9,81$ м/с², $v = 288$ м/с, $M^\omega = -1,8$ с, $M^\delta = -22,9$ с⁻², $\gamma_m = 1,4$, $\omega_m = 0,87$ с⁻¹, $\delta_m = 0,2$, $\dot{\delta}_m = 0,4$ с⁻¹. Выберем параметры критерия качества: $\rho_2 = 4000$, $\rho_3 = 0,01$ с², $\rho_4 = 0,1$, $k_\delta^2 = 0,0001$ с, $k_t^2 = 1$ с⁻¹.

Результаты решения задачи при $\varphi_f = 1,0$ и шаге интегрирования $\Delta t = 0,01$ с следующие: $\varphi(t_f) = 1,000$, $\gamma(t_f) = -0,71 \cdot 10^{-3}$, $t_f(t_f) = 9,94$ с. Здесь $\gamma(t)$ достигает максимального значения 1,55. При учете ограничений по γ ($a_1 = -a_2 = 2 \cdot 10^5$) и ω ($b_1 = -b_2 = 1 \cdot 10^9$) при $k_\delta^2 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ с, $k_t^2 = 0,1$ с⁻¹ получено: $\varphi(t_f) = 0,945$, $\gamma(t_f) = -0,317 \cdot 10^{-2}$, $t_f(t_f) = 10,0$ с. В этом случае пришлось изменить значения коэффициентов k_δ^2 ,

k_t^2 для сглаживания резких изменений управления на участках срабатывания функций штрафа ($\gamma(t)$ не превышает введенного ограничения 1,4). Терминальная точность по углу γ на несколько порядков выше точности по остальным переменным состояниям, что соответствует принятой иерархии целевых функционалов. При $t_f(t_0) = 5$ с, тех же значениях весовых коэффициентов ρ_i ($i = \overline{1,4}$), $k_\delta^2 = 0,001$ с, $k_t^2 = 0,1$ с⁻¹ моделированием получено при $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$: $\varphi(t_f) = 1,0$, $\gamma(t_f) = -0,563 \cdot 10^{-2}$, $t_f(t_f) = 4,98$ с ($\gamma(t)$ достигает значения 1,55); при $a_1 = -a_2 = 2 \cdot 10^4$ и $b_1 = -b_2 = 5 \cdot 10^4$: $\varphi(t_f) = 0,512$,

$\gamma(t_f) = 0,038$ ($\gamma(t)$ достигает значения 1,44). Здесь за 5 с затруднительно обеспечить заданные терминальные условия, не нарушив ограничений.

Аналогичные результаты моделирования при оптимизации управления по одному критерию Красовского [4], объединяющего требования к системе, отраженные в критериях (8), приводят к компромиссному результату по точности приведения по углам φ и γ . Например, при $t_f(t_0) = 10$ с и значениях параметров критерия $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 100$, $\rho_3 = 0,01$ с², $\rho_4 = 0,1$, $k_\delta^2 = 1 \cdot 10^{-5}$ с, $k_t^2 = 1 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹ в этом случае получено: $\varphi(t_f) = 0,995$, $\gamma(t_f) = 1,56$. При введении функции штрафа ($a_1 = -a_2 = 2 \cdot 10^3$ и $b_1 = -b_2 = 1 \cdot 10^4$) и тех же значениях весовых коэффициентов ρ_i ($i = \overline{1,4}$), k_δ^2 , k_t^2 получено: $\varphi(t_f) = 0,374$, $\gamma(t_f) = 1,40$.

3. Оптимизация разворота самолета с коррекцией параметров структуры управления

Для того чтобы обеспечить решение основной задачи оптимизации из раздела 1, рассмотрим следующую вспомогательную задачу оптимального управления. В общем случае можно рассмотреть структуру управления, зависящую от некоторых параметров, в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{G}, t),$$

где \mathbf{G} — вектор размерности r , состоящий из параметров (коэффициенты, моменты переключения управления, уровни ограничения сигналов) структуры [4].

Предположим, что в результате рассмотрения основной задачи оптимального управления определена структура управления и сформирован вектор $\mathbf{G} = \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор моментов времени переключения управления. Представим управление системой (1) в виде [16]

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \Delta \mathbf{u}^T(t) \mathbf{l}(t, \boldsymbol{\tau}), \quad (12)$$

где $\Delta \mathbf{u}^T = (\Delta \mathbf{u}_1 \Delta \mathbf{u}_2 \dots \Delta \mathbf{u}_r)$, $\mathbf{l}^T(t, \boldsymbol{\tau}) = [l(t, \tau_1) l(t, \tau_2) \dots l(t, \tau_r)]$, $\Delta \mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_{i+1}(t)$; $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t)$ при $t < \tau_1$.

Здесь $i = \overline{1, r}$, i — номер участка структуры управления (слева направо по шкале времени); r — число переключений управления в структуре; \mathbf{u}_i и \mathbf{u}_{i+1} — управления на предыдущем и последующем участках этой структуры относительно τ_i соответственно, а $l(t, \tau_i)$ — функции вида

$$l(t, \tau_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(c(t - \tau_i)),$$

где c — коэффициент, при неограниченном возрастании которого функция $l(t, \tau_i)$ приближается к единичной функции [5].

К системе (1) добавим уравнения

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{w}, \quad (13)$$

где \mathbf{w} — вектор новых переменных, принимаемых за дополнительные управления.

В качестве критерия оптимальности можно выбрать как функционал

$$I = V_f(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[Q(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} \right] dt, \quad (14)$$

где \mathbf{k}^{-2} — матрица весовых коэффициентов, так и функционал обобщенной работы [4—7, 16—19]

$$I = V_f(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[Q(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} + \mathbf{w}_o^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_o) \right] dt. \quad (15)$$

Здесь $V_f = \frac{1}{2} \rho_1 (\varphi(t_f) - \varphi_f)^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \gamma^2(t_f) + \frac{1}{2} \rho_3 \omega^2(t_f) + \frac{1}{2} \rho_4 \delta^2(t_f)$. Исследования показали [15, 17—20], что использование функционала обобщенной работы (15) по сравнению с критерием (14) приводит к существенно более простым в реализации алгоритмам с прогнозирующей моделью. Поэтому рассмотрим этот целевой функционал.

Как известно [4], при $\mathbf{w} = \mathbf{w}_o$ (\mathbf{w}_o — оптимальное значение \mathbf{w}) гамильтониан H_b вспомогательной задачи оптимизации

$$H_b = \mathbf{p}_b^T \mathbf{f}_b = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}_\tau^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_o^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_o$$

равен гамильтониану прогнозирующей модели при $\mathbf{w} = \mathbf{0}$

$$H_M = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t),$$

совпадающего с гамильтонианом основной задачи.

Здесь $\mathbf{f}_b^T = (\mathbf{f}^T \mathbf{w}^T)$.

Из условия $\partial H_b / \partial \mathbf{w} = 0$ имеем

$$\mathbf{w}_o = -\mathbf{k}^2 \mathbf{p}_\tau. \quad (16)$$

Вектор $\mathbf{p}_\tau(t)$ находится из двух задач Коши для уравнений прогнозирующей модели со структурой управления (12):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \quad \tau(t_0) = \tau_0;$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -(\partial H / \partial \mathbf{x})^T, \quad \mathbf{p}(t_f) = (\partial V_f / \partial \mathbf{x})^T; \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_\tau = -(\partial H / \partial \tau)^T, \quad \mathbf{p}_\tau(t_f) = \mathbf{0},$$

где

$$\begin{aligned} (\partial H_b / \partial \tau)^T &= \mathbf{u}_\tau^T (\partial H_b / \partial \mathbf{u})^T = \\ &= \mathbf{u}_\tau^T H_2^T = \mathbf{u}_\tau^T \mathbf{f}_\mathbf{u}^T \mathbf{p} = \delta^T(t, \tau) \Delta \mathbf{u} \mathbf{f}_\mathbf{u}^T \mathbf{p}; \\ \mathbf{f}_\mathbf{u} &= \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u} = \mathbf{f}_2; \quad \mathbf{u}_\tau = \partial \mathbf{u} / \partial \tau = \Delta \mathbf{u}^T \delta(t, \tau); \\ \partial \mathbf{u} / \partial \tau_i &= \Delta \mathbf{u}_i \delta(t, \tau_i); \\ \delta^T(t, \tau) &= [\delta(t, \tau_1) \delta(t, \tau_2) \dots \delta(t, \tau_r)]; \\ \delta(t, \tau_i) &= \frac{\partial l(t, \tau_i)}{\partial \tau_i} = -\frac{c}{\pi [1 + c^2 (t - \tau_i)^2]}. \end{aligned}$$

При начальных условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ решается задача Коши для системы (17) на интервале $[t_0, t_f]$ и определяются конечные значения вектора состояния. Затем вычисляются граничные условия $\mathbf{p}^T(t_f) = \partial V_f / \partial \mathbf{x}$. Далее решается задача Коши для системы (17), (18) и находятся значения $\mathbf{p}_\tau(t)$, необходимые для вычисления управления (16) для системы (1), (12), (13). В данном случае $\mathbf{p}_{\tau_i}(t) = \mathbf{p}_{\tau_i}(\tau_i)$.

По завершении переходных процессов $\tau(t)$ имеем

$$\lim_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{0}} \min_{\mathbf{w}} H_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, t) = \inf_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t).$$

Решение по критерию Красовского можно сопоставить с решением (по критерию (14)) двухточечной краевой задачи методом Ньютона при включении τ_0 в параметры функции невязки. В первом случае алгоритм с прогнозирующей моделью обеспечивает переходной процесс $\tau(t)$ с выходом на оптимальное значение τ_{opt} , во втором — это значение τ_{opt} вычисляется по рекуррентной формуле с использованием матрицы Якоби.

Для данной задачи уравнения (16), (17) примут вид

$$\dot{\varphi} = \frac{g}{v} \operatorname{tg} \gamma, \quad \dot{\gamma} = \omega, \quad \dot{\omega} = M^\omega \omega + M^\delta \delta, \quad \dot{\delta} = u,$$

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \quad \dot{t}_f = 0,$$

$$\dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{p}_\gamma = -p_\varphi \frac{g}{v \cos \gamma} - \frac{\partial Q_1}{\partial \gamma},$$

$$\dot{p}_\omega = -p_\gamma - p_\omega M^\omega - \frac{\partial Q_2}{\partial \omega}, \quad \dot{p}_\delta = -p_\omega M^\delta - \frac{\partial Q_3}{\partial \delta},$$

$$\dot{p}_{\tau_2} = -p_\delta \Delta u_2 \bar{\delta}(\tau_2, t), \quad \dot{p}_{\tau_4} = -p_\delta \Delta u_4 \bar{\delta}(\tau_4, t),$$

$$p_\varphi(t_f) = \rho_2 (\varphi(t_f) - \varphi_f), \quad p_\gamma(t_f) = \rho_1 \gamma(t_f),$$

$$p_\omega(t_f) = \rho_3 \omega(t_f), \quad p_\delta(t_f) = \rho_4 \delta(t_f),$$

$$p_{\tau_2}(t_f) = 0, \quad p_{\tau_4}(t_f) = 0.$$

Момент времени t_f находится из уравнения [1, 6]

$$\dot{t}_f = w_t = -k_t^2 p_t(t),$$

где

$$p_f(t) = p_\varphi \frac{g}{v} \operatorname{tg} \gamma + p_\gamma \omega + p_\omega (M^\omega \omega + M^\delta \delta) \Big|_{t_f}.$$

Здесь структура управления принята в виде (12), где при $\varphi_f > 0$: $u_1(t) = -\dot{\delta}_m$, $\Delta u_1 = \dot{\delta}_m$, $\Delta u_2 = \dot{\delta}_m$, $\Delta u_3 = -\dot{\delta}_m + u_{oc}$, $\Delta u_4 = -u_{oc} + \dot{\delta}_m$, $\Delta u_5 = -\dot{\delta}_m$, $\Delta u_6 = -\dot{\delta}_m$, причем моменты переключения с номерами 1, 3, 5, 6 вычисляются с учетом принятых ограничений на δ и $\dot{\delta}$ в виде $\tau_1 = \delta_m / \dot{\delta}_m = 0,5$ с, $\tau_3 = \tau_2 + \tau_1$, $\tau_5 = \tau_4 + \tau_1$, $\tau_6 = t_f - \tau_1$. Особое управление $u_{oc} = -M^\omega (M^\omega \omega + M^\delta \delta) / M^\delta$ (определялось из условия $\frac{d^6}{dt^6} H_u = 0$). Таким образом, управляемые переключения определяют длительности 1-го и 2-го участков с предельными значениями углов отклонения рулей и длительность участка с особым управлением. Тогда уравнение (13) имеет вид: $\dot{\tau}_2 = w_1$, $\dot{\tau}_4 = w_2$, $\dot{t}_f = w_f$. Для принятых в разделе 3 начальных и конечных условий и при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$, $\rho_3 = 1$ с², $\rho_4 = 1$, $k_{\delta 1}^2 = 1 \cdot 10^{-3}$ с, $k_{\delta 2}^2 = 0,1$ с, $k_t^2 = 1 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, $\tau_2(t_0) = 0,8$ с, $\tau_4(t_0) = 1,7$ с, $t_f(t_0) = 3,0$ с результаты моделирования имеют вид: $\varphi(t_f) = 0,991$, $\gamma(t_f) = -0,0498$, $\tau_2(t_f) = 0,755$ с, $\tau_4(t_f) = 1,58$ с, $t_f(t_f) = 3,01$ с.

Как видно, рассмотренный алгоритм позволяет осуществить разворот самолета за меньшее время по сравнению с алгоритмом последовательной оптимизации. Однако алгоритм последовательной оптимизации существенно более устойчив к изменению граничных условий, поскольку алгоритм с коррекцией параметров структуры управления, максимально используя предельные возможности управления, более чувствителен к заданию начальных значений этих параметров. Алгоритм коррекции параметров структуры управления может служить как основным средством для получения оптимального по критерию Красовского (15) управления разворотом самолета, так и вспомогательным — для нахождения начальных значений сопряженных переменных при решении двухточечной краевой задачи принципа максимума с критерием (14) методом Ньютона [17—20].

Заключение

Приведено решение задачи управления разворотом самолета при наличии ограничений на состояние с использованием алгоритмов последовательной оптимизации по иерархии из двух критериев и с коррекцией параметров структуры управления. Результаты численного решения показали, что рассмотренные алгоритмы позволяют обеспечить вы-

сокую конечную точность по углу разворота. При этом вычислительные затраты на управление сравнительно невелики, что допускает реализацию алгоритмов в реальном времени. Представленные алгоритмы относятся к эффективным инструментам для вычисления оптимального управления в нелинейных динамических системах. Они могут быть использованы для управления самолетом на различных участках целенаправленного маневрирования.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.
3. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
5. Буков В. Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 232 с.
6. Кабанов С. А. Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.
7. Ким П. Д. К синтезу оптимальной линейной системы управления по критерию обобщенной работы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 4. С. 7—10.
8. Dolezal J. Hierarchical solution concept for decision problems with several objectives // Problems of Control and Inform. Theory. 1980. V. 9/5. P. 339—345.
9. Кабанов С. А. Алгоритм последовательной оптимизации управления нелинейной системой по критерию обобщенной работы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 8. С. 41—49.
10. Кабанов С. А. Алгоритм последовательной оптимизации со спиральным прогнозом для управления спускаемым аппаратом // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 4. С. 141—147.
11. Кабанов С. А., Меньков Л. Ю. Оптимизация траектории полета КА у поверхности Луны с использованием алгоритма последовательной оптимизации // Космические исследования. 1998. Т. 36, № 4. С. 417—422.
12. Wang H. M., Kabanov S. A. Optimal Control of the Return of a Flying Object on the Hierarchy of Criterion of Quality // Proc. 2002 FIRA Robot World Congress. Seoul, Korea. 2002. P. 187—190.
13. Kabanov D., Kabanov S. Application of algorithm of forecasting model to the optimal control of nuclear reactor // Proc. 4th MATHMOD Vienna. V. 2 Full Papers CD. 2003. P. 1466—1471.
14. Анисимов В. Н., Кабанов С. А. Управление траекторией движения летательного аппарата при облете препятствий с применением методов аналитической механики // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 3—10.
15. Кабанов С. А. Оптимизация динамики систем при действии возмущений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 200 с.
16. Кабанов С. А. Управление системами с оптимальной коррекцией параметров прогнозирующей модели // Матер. докл. междунар. конф. "Седьмые Окуневские чтения". Балт. гос. техн. ун-т. СПб. 2011. С. 237—239.
17. Малышев В. В., Кабанов Д. С. Оптимальное выведение на глубину автоматического подводного аппарата с коррекцией параметров структуры управления // Вестник МАИ. 2012. № 4. С. 88—96.
18. Малышев В. В., Кабанов Д. С. Алгоритм коррекции структуры управления автоматическим подводным аппаратом для построения области достижимости // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 7. С. 21—27.
19. Кабанов Д. С. Алгоритм синтеза оптимального программно-позиционного управления многорежимным автоматическим подводным аппаратом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 60—66.
20. Кабанов С. А., Никулин Е. Н., Якушев Б. Э., Якушева Д. Б. Оптимальное управление перемещением груза мостовым краном // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 5. С. 56—65.

С. Н. Фирсов, канд. техн. наук, доц., докторант, sn.firsov@gmail.com,
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского "ХАИ", г. Харьков

Обеспечение функциональной устойчивости системы стабилизации и ориентации малогабаритного автономного летающего изделия

Представлен один из возможных вариантов решения научно-прикладной задачи обеспечения функциональной устойчивости систем стабилизации и ориентации малогабаритных летательных аппаратов.

Ключевые слова: малогабаритный летательный аппарат, акселерометр, датчик угловых скоростей, дозволотивные скорости, отказ

S. N. Firsov

Ensuring the Functional Stability of the Stabilization and Orientation System for Small-Sized Autonomous Flying Object

One of the possible solutions to scientific and applied task of providing the functional stability of stabilization and orientation systems for the small aircraft is proposed.

Keywords: small-sized aircraft, accelerometer, angular rate sensor, before control speed, failure

Введение

Успешность целевого применения малогабаритного автономного летающего изделия (МАЛИ) во многом определяется качеством работы его систем как в номинальных (штатных) условиях работы, так и при наличии аномальных (нештатных) ситуаций [1–3]. Способность системы выполнять требуемые функции в течение заданного времени с допустимым качеством при наличии нештатных ситуаций называют *функциональной устойчивостью* [4–6].

Обеспечение функциональной устойчивости перспективных МАЛИ определяется в первую очередь тем, что в их аэродинамической компоновке для создания подъемной силы и эффективных управляющих аэродинамических моментов используют как известные аэродинамические эффекты [7–8], так и мало изученные [9–11], а в системе стабилизации и ориентации (ССО) применяются малогабаритные элементы с нестабильными параметрами. Сочетание этих факторов, с одной стороны, упрощает конструкцию МАЛИ и позволяет повысить маневренность, а с другой — порождает необходимость разработки моделей и методов обеспечения функциональной устойчивости ССО МАЛИ. Функциональная устойчивость ССО МАЛИ, в первую очередь, позволяет получать достоверную информацию при проведении летных испытаний для решения задач идентификации аэродинамических характеристик МАЛИ, а также, в последующем, успешно выполнять целевую задачу МАЛИ. Именно поэтому обеспечение функциональной устойчивости систем стабилизации и ориентации МАЛИ в условиях неопределенности, обусловленных

наличием различных малоизученных аэродинамических эффектов и различными видами отказов, является актуальной научно-прикладной задачей.

Постановка задачи

На всех режимах от взлета до посадки управление полетом МАЛИ осуществляется автоматической системой управления, составной частью которой является ССО. Применение современных МАЛИ в закрытых пространствах (помещениях), где высока вероятность столкновения корпуса МАЛИ с препятствиями, а также введение в структуру ССО элементов с нестабильными параметрами определяют необходимость решения задачи оперативного восстановления работоспособности ССО располагаемыми бортовыми аппаратно-программными средствами в режиме реального времени в целях обеспечения выполнения целевой задачи беспилотным комплексом.

В рамках сформировавшегося направления обеспечения отказоустойчивости сложных систем функциональная устойчивость ССО достигается введением в ее состав избыточных структурных элементов. Перспективные МАЛИ из-за ограниченности габаритных размеров оборудуются малогабаритными элементами, число которых может быть неограниченно, но увеличение числа потенциальных потребителей приводит к повышению весовых и энергетических затрат, а также к неоправданному усложнению алгоритмической обработки избыточной информации и увеличению временного интервала на формирование управления. Именно это определяет необходимость поиска простых и эффективных путей обеспечения функциональной устойчи-

ности ССО МАЛИ, приемлемых для условий применения в закрытых и открытых пространствах.

Состав функционально устойчивой ССО МАЛИ

Схема, отражающая структуру функционально устойчивой ССО МАЛИ, а также взаимосвязи элементов объекта автоматического управления (ОАУ) и блоков диагностирования и восстановления, изображена на рис. 1.

Вектор сигналов управления u с устройства автоматического управления (УАУ) поступает на блок сервопривода (БСП), который отклоняет орган управления на угол $\tilde{\delta}_{\text{БСП}}(t)$, что обеспечивает создание аэродинамических сил и моментов, приложенных к МАЛИ. Угловые скорости вращения $\tilde{\omega}_{\text{МАЛИ}}(t)$ и углы положения $\tilde{\varphi}_{\text{МАЛИ}}(t) \in \{\vartheta(t), \gamma(t), \psi(t)\}$ МАЛИ определяются с помощью блока измерений (БИ), представляющего собой бесплатформенную инерциальную навигационную систему, и используются в дальнейшем для нахождения параметров движения центра масс МАЛИ и угловых параметров движения относительно центра масс. На функциональные элементы ОАУ в процессе его функционирования воздействуют внешние возмущения $f_i, i = \overline{1, 3}$, а также отказы различных видов из множеств $D_{\text{БСП}}, D_{\text{БИНС}}$ и $D_{\text{МАЛИ}}$, приводящие к многочисленным нештатным ситуациям в процессе полета. На основе сигналов управления, а также доступных измеренных сигналов с БСП ($u_{\text{БСП}}$) и БИНС ($u_{\text{БИНС}}$) блок диагностирования решает задачи диагностирования ОАУ и вырабатывает сигналы, характеризующие момент обнаружения отказа \hat{t}_i , его принадлежность определенному месту \hat{m}_i ,

классу $\hat{\alpha}_i$ и виду \hat{d}_i . Полученные значения передаются в блок восстановления, который осуществляет выбор средства парирования обнаруженного вида отказа и формирует соответствующие сигналы $u_{\text{В}i}, i = \overline{1, 3}$, на УАУ и функциональные элементы ОАУ в целях восстановления его работоспособности.

Для управления угловым движением МАЛИ необходимо создавать управляющие силы и моменты путем отклонения аэродинамических поверхностей по определенному закону. Отклонение рулей МАЛИ реализуют с помощью электрических приводов. Конструкция сервоприводов (СП) позволяет отслеживать управляющие воздействия, но не позволяет контролировать обработку этого управления. Для устранения этого недостатка в СП введены два дополнительных потенциометра (рис. 2).

На микроконтроллерный вычислитель (МК) поступает сигнал управления u , связанный функциональной зависимостью с угловой скоростью вращения МАЛИ. На основе этого сигнала, а также сигнала $u_{\text{БСП}}$ МК формирует сигнал управления u_k . Управление СП построено таким образом, что зависимость между входным и выходным сигналами линейна.

Для обеспечения пространственной управляемости МАЛИ даже в случае полного отказа производного СП или датчика БИ необходимо использовать избыточные схемы установки этих элементов, а это требует решения задачи выбора схемы и

УАУ

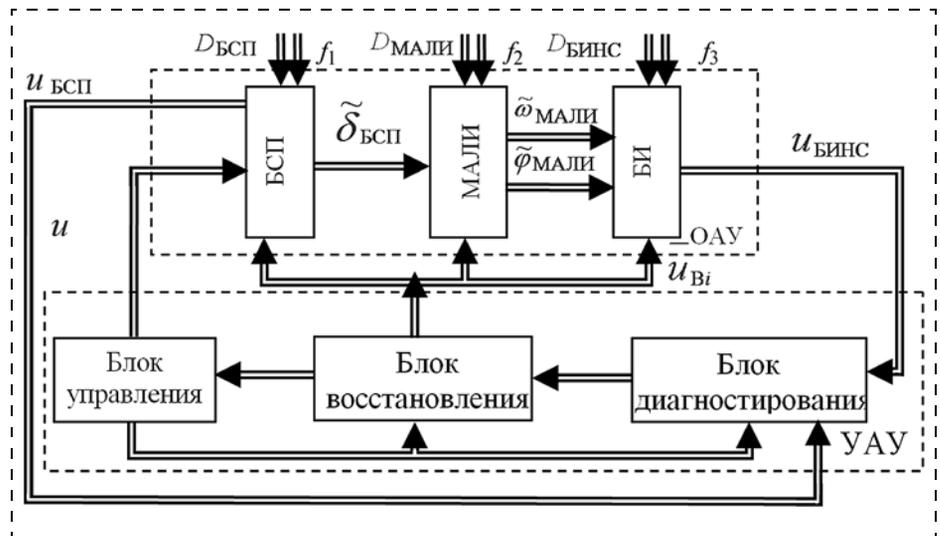


Рис. 1. Функционально устойчивая ССО МАЛИ

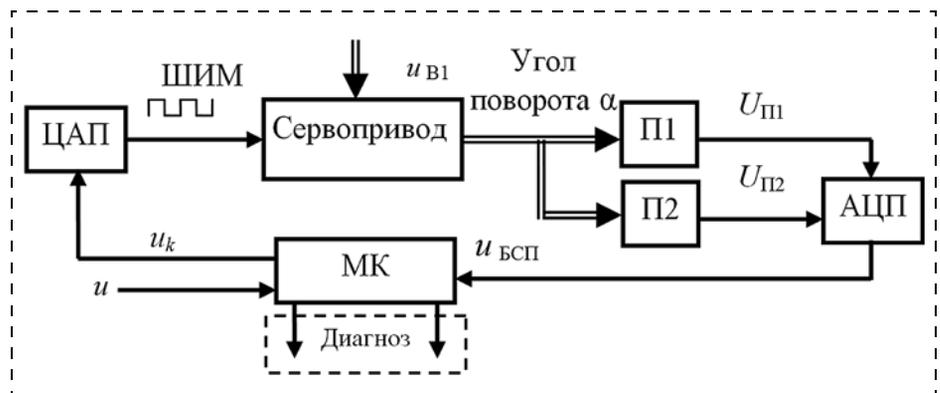


Рис. 2. Управление сервоприводом с двумя потенциометрами (П1 и П2)

определения установки элементов, которые наилучшим образом позволяют использовать структурную избыточность для обеспечения функциональной устойчивости ССО МАЛИ.

Компоновка МАЛИ с избыточными аэродинамическими поверхностями

При создании МАЛИ актуальным является вопрос выбора способа создания подъемной силы и потока, огибающего органы управления. Решение этого вопроса определяет конструкцию МАЛИ, а в последующем и законы управления ориентацией и стабилизацией корпуса МАЛИ. Для подобных аппаратов применимы способы создания подъемной силы, которые основываются на применении несущего винта с импеллером (защищенный несущий винт). Отметим, что такой подход к формированию подъемной силы приемлем и при реализации малоизученных аэродинамических эффектов, например эффекта Коанда [10].

Требования к компоновке и числу управляющих аэродинамических поверхностей во многом определяются множеством значений управляющих моментов $|M_y(t)| \geq M_{y,T}$, которые необходимо формировать для перевода МАЛИ из произвольного начального состояния $x_0 \in R^n$ в требуемое $x(t) \in G_1$ с определенными показателями качества в течение ограниченного временного интервала t ($M_{y,T}$ — требуемые значения управляющих моментов, а M_y — создаваемые аэродинамические моменты). Таким образом, изменение вектора $M_y(t)$ в указанной области, в соответствии с реализуемыми в ССО МАЛИ законами управления, должно обеспечивать требуемое управление параметрами движения аппарата. Очевидно, что независимо от числа и компоновки аэродинамических управляющих поверхностей МАЛИ необходимо обеспечить выполнение условия $M_{y,T} \subset M_y(t)$. Выполнение сформированного условия позволит утверждать в первом приближении, что значение суммарного управляющего момента M_y обеспечит изменение ориентации корпуса МАЛИ с требуемыми угловыми параметрами в требуемом направлении. Таким образом, при выборе компоновки МАЛИ необходимо выбирать параметры и располагать аэродинамические поверхности таким образом, чтобы для области действительных значений результирующего аэродинамического момента выполнялось условие

$$M_{y,T} \subset M_y. \quad (1)$$

Построение области множества создаваемых органами управления значений управляющих моментов представляет собой более сложную задачу. От числа и расположения поверхностей относительно осей инерции МАЛИ зависит форма области управления. Выбирая эти параметры, можно получить наиболее соответствующую имеющимся

моментам инерции область управления как при работоспособных, так и при неработоспособных органах управления. При этом они должны обеспечивать формирование проекций управляющих моментов на оси связанной системы координат.

Полная управляемость МАЛИ достигается при наличии всех трех проекций. Кроме того, очевиден тот факт, что наличие проекций управляющего момента на любые две оси связанной системы координат не обеспечивает полную пространственную управляемость МАЛИ. Иными словами, для обеспечения полной управляемости МАЛИ при отказах (потерях) аэродинамических поверхностей необходимо располагать дополнительными органами управления, при этом остается открытым вопрос о вариантах их расположения. Для ответа на этот вопрос сформируем критерии расположения дополнительных аэродинамических поверхностей. Предполагаем при этом, что объект не имеет существенных перекрестных аэродинамических связей, что вполне допустимо для рассматриваемых аппаратов.

Совокупность аэродинамических поверхностей МАЛИ должна позволять формировать вектор управляющего момента M^* , проецируемый на все оси связанной системы координат. Обозначим m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) единичный вектор, параллельный вектору управления i -й компоновки. За начало всех векторов m_i выберем точку O — начало связанной системы координат. Совокупность векторов m_i определяет компоновку управляющих аэродинамических поверхностей. Изменением значений управляющих моментов $-M^* \leq M_i \leq M^*$ формируется замкнутая область результирующего вектора управляющего момента, под которой понимается геометрическое место возможных положений результирующего вектора $M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n M_i m_i$.

Форма области M_y зависит от компоновки аэродинамических поверхностей, а ее размеры — от значения M^* . Размеры и форма $M_{y,T}$ определяются тактико-техническими требованиями к динамике МАЛИ. Кроме того схема установки и величина M^* должны обеспечивать выполнение условия (1).

Теорема 1. Избыточная система компоновки различных органов управления обеспечивает управляемость объектом при возникновении в ней отказов тогда и только тогда, когда компоновка формирует управление, удовлетворяющее условию (1) и векторному неравенству

$$(m_i \times m_j)m_k \neq 0. \quad (2)$$

Доказательство.

Докажем необходимое условие теоремы 1. Воспользуемся доказательством от противного. Предположим, что условие, определяющее некомпла-

нальность результирующих управляющих векторов соответствующих компонок (2), ложно. Следовательно, формирование пространственного положения результирующего управляющего вектора возможно при выполнении условия $(m_i \times m_j)m_k = 0$, которое соответствует тому, что все три вектора находятся в одной плоскости и изменение результирующего вектора возможно только в этой плоскости. Необходимое условие доказано.

Достаточное условие является очевидным. Для обеспечения углового движения аппарата (в рассматриваемом случае МАЛИ) с требуемыми параметрами при располагаемых моментах инерции требуется, чтобы значение результирующего управляющего момента было соизмеримо или больше с требуемым. Достаточное условие доказано.

Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема позволяет оценить способность органов управления обеспечить пространственное изменение управляющего момента как в номинальном режиме, так и при полных отказах. В качестве примера на рис. 3 представлена компоновка маневренного автономного летающего изделия вертикального взлета и посадки.

Принцип работы МАЛИ заключается в следующем. Несущий винт 2, приводимый во вращение бесконтактным двигателем 3, создает в воздуховоде импеллера воздушный поток. При этом скорость потока воздуха регулируется частотой вращения двигателя, что позволяет обеспечивать управляемый полет на всех режимах. В режимах взлета, посадки и висения МАЛИ работает как вертолет, т. е. подъемная сила создается вращающим винтом. В горизонтальном полете корпус МАЛИ поддерживается на малых углах атаки для обеспечения устойчивого преодоления доэволютивных скоростей и появления аэродинамических подъемных сил.

Для компенсации крутящего момента винта в конструкции МАЛИ предусмотрены поверхности 5

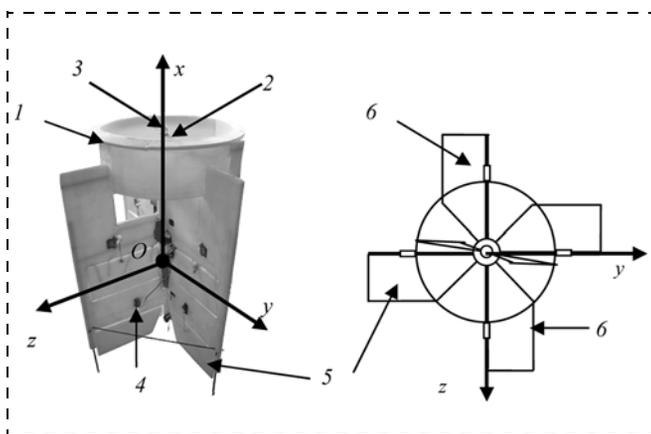


Рис. 3. Аэродинамическая компоновка МАЛИ:
1 — импеллер; 2 — несущий винт; 3 — бесконтактный двигатель; 4 — сервопривод; 5 — аэродинамическая поверхность управления тангажом; 6 — аэродинамическая поверхность управления креном

и 6, размещенные симметрично относительно корпуса МАЛИ, отклонение которых в дифференциальном режиме парирует реактивный момент двигателя, а также обеспечивает целенаправленное изменение положения корпуса относительно продольной оси. Для изменения пространственного положения центра масс МАЛИ в конструкции предусмотрены две аэродинамические поверхности управления тангажом 5 и две аэродинамические поверхности управления креном 6, которые работают не только в дифференциальном, но и в синхронном режиме. При этом изменение угла крена осуществляется при дифференциальном отклонении поверхностей, а угла тангажа — в синхронном. Для вывода МАЛИ с режима доэволютивных скоростей в устойчивый горизонтальный полет, а также для решения задачи стабилизации угла тангажа в конструкции изделия предусмотрены аэродинамические органы управления высотой 5, 6.

Такая компоновка аэродинамических органов управления МАЛИ позволяет ССО обеспечивать управление углами, компенсацию крутящего момента винта, переходы МАЛИ от вертикального полета или висения в горизонтальный полет и обратно, а также выполнять полеты в заданном направлении по требуемым траекториям. Кроме того, избыточная компоновка аэродинамических органов управления позволяет обеспечивать их устойчивость к отказам, а их число и расположение определены теоремой 1.

Формирование функционально устойчивых измерительных блоков

Измерители параметров движения МАЛИ принадлежат к объектам диагностирования с неизвестным входом. Полная диагностируемость таких объектов достигается введением структурной избыточности. Одним из примеров введения структурной избыточности является мажоритарная схема включения одноосных измерителей в БИНС — по три акселерометра и три датчика угловых скоростей по каждой оси связанной с МАЛИ системы координат. Но несмотря на то, что указанная схема обеспечивает полную диагностируемость измерительных блоков вплоть до вида отказа, введение чрезмерного числа одноосных датчиков приводит к увеличению массы, габаритных размеров и энергопотребления блока. Подобное ограничение определяет актуальность задачи проектирования БИ МАЛИ с минимальной структурной избыточностью, позволяющей обеспечивать структурную диагностируемость блока вплоть до вида отказа.

Доказано, что минимально необходимое число одноосных измерителей ускорения при пространственном движении равно $N = 5$ [13]. Так как на выходе акселерометра формируется напряжение, пропорциональное проекции ускорения на его ось

чувствительности, то при единичном коэффициенте передачи

$$U(t) = a_x(t)\cos\alpha + a_y(t)\cos\beta + a_z(t)\cos\gamma - R_0\{\omega^2(t) - [\omega_x(t)\cos\alpha + \omega_y(t)\cos\beta + \omega_z(t)\cos\gamma]^2\},$$

где $U(t)$ — напряжение на выходе акселерометра; R — расстояние от начала координат до акселерометра; α, β, γ — углы, характеризующие расположение оси чувствительности одноосного акселерометра относительно связанной системы координат; $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ — проекции кажущихся ускорений на ось чувствительности акселерометра; $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t), \omega^2(t)$ — проекции вектора угловой скорости вращения на соответствующие оси измерительной системы координат и ее абсолютное значение.

Для случая пяти датчиков система уравнений, не учитывающая произведения $\omega_x\omega_y, \omega_x\omega_z, \omega_y\omega_z$, примет следующий вид:

$$\tilde{U}_1(t) = a_x(t)\cos\alpha_1 + a_y(t)\cos\beta_1 + a_z(t)\cos\gamma_1 - R_1[\{\omega_x^2(t)\sin^2\alpha_1 + \omega_y^2(t)\sin^2\beta_1 + \omega_z^2(t)\sin^2\gamma_1\};$$

$$\tilde{U}_2(t) = a_x(t)\cos\alpha_2 + a_y(t)\cos\beta_2 + a_z(t)\cos\gamma_2 - R_2[\{\omega_x^2(t)\sin^2\alpha_2 + \omega_y^2(t)\sin^2\beta_2 + \omega_z^2(t)\sin^2\gamma_2\};$$

$$\tilde{U}_3(t) = a_x(t)\cos\alpha_3 + a_y(t)\cos\beta_3 + a_z(t)\cos\gamma_3 - R_3[\{\omega_x^2(t)\sin^2\alpha_3 + \omega_y^2(t)\sin^2\beta_3 + \omega_z^2(t)\sin^2\gamma_3\};$$

$$\tilde{U}_4(t) = a_x(t)\cos\alpha_4 + a_y(t)\cos\beta_4 + a_z(t)\cos\gamma_4 - R_4[\{\omega_x^2(t)\sin^2\alpha_4 + \omega_y^2(t)\sin^2\beta_4 + \omega_z^2(t)\sin^2\gamma_4\};$$

$$\tilde{U}_5(t) = a_x(t)\cos\alpha_5 + a_y(t)\cos\beta_5 + a_z(t)\cos\gamma_5 - R_5[\{\omega_x^2(t)\sin^2\alpha_5 + \omega_y^2(t)\sin^2\beta_5 + \omega_z^2(t)\sin^2\gamma_5\},$$

где $U_i(t), i = \overline{1, 5}$, — напряжение на выходе i -го акселерометра; R_i — расстояние от начала координат до акселерометра; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1, 5}$, — углы, характеризующие расположение оси чувствительности i -го одноосного акселерометра относительно связанной системы координат.

В векторно-матричном виде уравнения полученной системы примут вид

$$U(t) = CA(t) - R\Omega(t),$$

где $U(t) = [U_1(t) U_2(t) U_3(t) U_4(t) U_5(t)]^T$;

$$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 \\ \cos\alpha_5 & \cos\beta_5 & \cos\gamma_5 \end{bmatrix}; A(t) = [a_x(t) a_y(t) a_z(t)]^T;$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1\sin^2\alpha_1 & R_1\sin^2\beta_1 & R_1\sin^2\gamma_1 \\ R_2\sin^2\alpha_2 & R_2\sin^2\beta_2 & R_2\sin^2\gamma_2 \\ R_3\sin^2\alpha_3 & R_3\sin^2\beta_3 & R_3\sin^2\gamma_3 \\ R_4\sin^2\alpha_4 & R_4\sin^2\beta_4 & R_4\sin^2\gamma_4 \\ R_5\sin^2\alpha_5 & R_5\sin^2\beta_5 & R_5\sin^2\gamma_5 \end{bmatrix};$$

$$\Omega(t) = [\omega_x^2(t) \omega_y^2(t) \omega_z^2(t)]^T.$$

В результате выполнения ряда преобразований с векторно-матричными уравнениями сформированы условия установки избыточного числа акселерометров, обеспечивающих глубокое диагностирование соответствующего БИ:

$$B_1R_1\sin^2\alpha_1 + B_2R_2\sin^2\alpha_2 + B_3R_3\sin^2\alpha_3 = DR_4\sin^2\alpha_4;$$

$$B_1R_1\sin^2\beta_1 + B_2R_2\sin^2\beta_2 + B_3R_3\sin^2\beta_3 = DR_4\sin^2\beta_4;$$

$$B_1R_1\sin^2\gamma_1 + B_2R_2\sin^2\gamma_2 + B_3R_3\sin^2\gamma_3 = DR_4\sin^2\gamma_4;$$

$$C_1R_1\sin^2\alpha_1 + C_2R_2\sin^2\alpha_2 + C_3R_3\sin^2\alpha_3 = DR_5\sin^2\alpha_5;$$

$$C_1R_1\sin^2\beta_1 + C_2R_2\sin^2\beta_2 + C_3R_3\sin^2\beta_3 = DR_5\sin^2\beta_5;$$

$$C_1R_1\sin^2\gamma_1 + C_2R_2\sin^2\gamma_2 + C_3R_3\sin^2\gamma_3 = DR_5\sin^2\gamma_5,$$

где

$$D = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \cos\alpha_4(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2) + \cos\beta_4(\cos\alpha_3\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3) + \cos\gamma_4(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\beta_2\cos\alpha_3);$$

$$B_2 = \cos\alpha_4(\cos\gamma_1\cos\beta_3 - \cos\beta_1\cos\gamma_3) + \cos\beta_4(\cos\alpha_1\cos\gamma_3 - \cos\gamma_1\cos\alpha_3) + \cos\gamma_4(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\beta_2\cos\alpha_3);$$

$$B_3 = \cos\alpha_4(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + \cos\beta_4(\cos\alpha_2\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2) + \cos\gamma_4(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2);$$

$$C_1 = \cos\alpha_5(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2) + \cos\beta_5(\cos\alpha_3\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3) + \cos\gamma_5(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\beta_2\cos\alpha_3);$$

$$C_2 = \cos\alpha_5(\cos\gamma_1\cos\beta_3 - \cos\beta_1\cos\gamma_3) + \\ + \cos\beta_5(\cos\alpha_1\cos\gamma_3 - \cos\gamma_1\cos\alpha_3) + \\ + \cos\gamma_5(\cos\beta_1\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1\cos\beta_3);$$

$$C_3 = \cos\alpha_5(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + \\ + \cos\beta_5(\cos\alpha_2\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2) + \\ + \cos\gamma_5(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2).$$

Выполнение полученных тождеств позволяет формировать компоновку пяти измерителей БИ, обеспечивающую диагностируемость блока, а также сформулировать требования по определению минимально необходимого числа измерителей:

1. Минимально необходимое число одноосных измерителей определяется выражением $N = n + 2$, где n — число степеней свободы по измеряемому параметру; N — минимально необходимое число измерителей, обеспечивающих глубокое диагностирование при n степенях свободы.

2. Измерители необходимо компоновать относительно осей измерительной системы координат таким образом, чтобы выполнялись условия: $L = N$ и $\Delta_i \neq 0, \forall i = 1, \overline{C_N^2}$, где L — число линейно независимых строк матрицы K ; K — матрица направляющих косинусов расположения датчиков относительно связанной системы координат; Δ_i — определитель i -й матрицы, выделенной из K ; $C_N^2 = \frac{N!}{2!(N-2)!}$.

3. Оси чувствительности $(n - 1)$ -го измерителя должны быть коллинеарны соответствующим осям базовой системы координат.

Выполнение полученных утверждений позволяет сформировать множество вариантов расположения измерителей в блоке, обеспечивающих их функциональную устойчивость. Выбор варианта компоновки измерителей из сформированного множества определяется удобством применения того или иного способа или другими дополнительными ограничениями.

Полученные результаты справедливы не только для акселерометров, но и для других измерителей, например, датчиков угловых скоростей (ДУС). Покажем это на примере. Значения выходных сигналов избыточного блока ДУС представим в виде выходного вектора напряжений $\tilde{U}(t)$ и входного вектора угловой скорости $\Omega(t) = [\omega_x(t) \ \omega_y(t) \ \omega_z(t)]^T$:

$\tilde{U}(t) = K\Omega(t)$, где K — матрица направляющих косинусов измерительных осей ДУС. Одновременно сигналы угловой скорости можно однозначно определить по сигналам каждого датчика: $\Omega(t) = K^T \tilde{U}(t)$. Работа диагностического обеспечения блока измерителей заключается в следующем: при работе системы N работоспособных ДУС ($N > 3$) сигнал каждого ДУС можно определить по сигналам остальных

$(N - 1)$ датчиков, т. е. оценочные значения формируются следующим образом: $\hat{U}(t) = K_1 \tilde{U}(t)$, где K_1 — матрица преобразования вектора сигнала с нулевой главной диагональю. Отклонения показаний ДУС от оценочных значений равны $\Delta U(t) = \tilde{U}(t) - \hat{U}(t) = I\tilde{U}(t) - K_1 \tilde{U}(t)$, где I — единичная матрица.

Следовательно, $\Delta U(t) = (I - K_1) \tilde{U}(t)$. Анализ полученного тождества показывает, что в матрице $(I - K_1)$ диагональные элементы должны быть единичными.

Матрицу K_1 можно представить в виде KK^T , однако при этом главная диагональ матрицы $I - KK^T$ не будет единичной, так как в общем случае главная диагональ матрицы KK^T не нулевая. Представим матрицу $I - KK^T$ в виде $I - KK^T = K_{\Pi}(I - KK^T)$, где K_{Π} — диагональная матрица, обеспечивающая приведение к единичным диагональным элементам матрицы $I - KK^T$. Выполнив ряд преобразований, с учетом того, что $(I - KK^T)\Omega(t) = 0$, получим: $\Delta U(t) = K_{\Pi}(I - K_1)U_D(t)$.

Для определения матрицы K_1 разобьем исходную систему уравнений на две подсистемы:

$$\tilde{U}_n(t) = K_n\Omega(t); \tilde{U}_n(t) = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(t) \\ \tilde{U}_2(t) \\ \tilde{U}_3(t) \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{U}_{N-n}(t) = K_{N-n}\Omega(t),$$

$$\tilde{U}_{N-n}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{U}_4(t) \\ \tilde{U}_5(t) \end{bmatrix}; K_n \text{ состоит из первых трех строк,}$$

а K_{N-n} — из двух остальных строк матрицы K . Тогда

$$\Omega(t) = D\tilde{U}_n(t), D = K_n^{-1}, \hat{U}_{N-n}(t) = K_{N-n}D\tilde{U}_n(t).$$

Полученное тождество представляет собой оценки сигналов ДУС₄ и ДУС₅ по сигналам остальных ДУС.

Тогда $\Delta U_{N-n}(t) = \tilde{U}_{N-n}(t) - \hat{U}_{N-n}(t) = \tilde{U}_{N-n}(t) -$

$$- B\tilde{U}_n(t), \text{ где } B = K_{N-n}D; B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}. \text{ Анали-}$$

зируя полученные соотношения, получаем, что для обеспечения функциональной устойчивости избыточного блока ДУС (изначально было пять датчиков) необходимо выполнение первых двух условий и расположение дополнительных датчиков таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\frac{C_1}{B_1} \neq \frac{C_2}{B_2} \neq \frac{C_3}{B_3}.$$

Заключение

В результате проведенного исследования получен один из возможных вариантов решения научно-прикладной задачи обеспечения функциональной

устойчивости систем стабилизации и ориентации МАЛИ. Проанализировали тенденции развития, создания и применения МАЛИ вертикального взлета и посадки, а также особенности управления такими аппаратами на доэволютивных скоростях. Выявлены преимущества использования МАЛИ для исследования эффектов управления на доэволютивных скоростях малогабаритного летательного аппарата вертикального взлета и посадки, которые позволяют проводить эксперименты как в лабораторных условиях, так и на открытом пространстве из-за его устойчивости к столкновениям с вертикальными и горизонтальными препятствиями, а также способности осуществлять взлет и посадку на произвольной горизонтальной поверхности. В целях повышения достоверности получаемой информации из измерительных модулей и гарантированного формирования требуемого управляющего воздействия на аэродинамические органы управления объекта необходимо располагать определенными видами избыточностей. Для этого была разработана методика определения избыточных элементов в измерительной и исполнительной частях объекта автоматического управления. Синтезирован метод определения требуемой ориентации осей чувствительности измерителей в избыточном блоке, применение которого дало возможность формировать избыточные измерители, обеспечивающие полную диагностируемость.

Следует указать, что по результатам исследования разработан аппаратно-программный комплекс, позволяющий проводить полунатурное моделирование работы систем объекта автоматического управления, при этом имеется возможность корректировки некоторых параметров, а также быстрого изменения алгоритмов и программ управления и стабилизации при проведении испытаний. Этот комплекс дает возможность отражать реальные процессы, протекающие в контурах управления изделия, визуально и программно контролировать состояние систем, случайным образом вводить типовые виды отказов и отслеживать их парирование. Частично полученные результаты внедрены в практику проектирования систем украинских предприятий и в учебный процесс ХАИ.

Список литературы

1. **Распопов В. Я.** Концепция построения и проектирования авионики малоразмерных беспилотных летательных аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. Управление и информатика в авиакосмических системах. 2008. № 10. С. 2—6.

2. **Распопов В. Я., Телухин С. В., Малютин Д. М., Аладуев Р. В., Шведов А. П., Кузнецов Я. С., Ладочкин А. В.** Автопилот мини-беспилотного летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. Управление и информатика в авиакосмических системах. 2008. № 10. С. 19—23.

3. **Аладуев Р. В., Иванов Ю. В., Матвеев В. В., Распопов В. Я., Шведов А. П.** Бесплатформенная система ориентации и навигации мини-беспилотного летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. Управление и информатика в авиакосмических системах. 2008. № 10. С. 14—18.

4. **Фирсов С. Н.** Методология обеспечения функциональной устойчивости спутниковых систем ориентации и стабилизации // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2013. № 1 (60). С. 76—85.

5. **Нгуен Ван Тхинь, Буй Суан Кхоа, Фирсов С. Н., Резникова О. В.** Комплексный синтез системы автоматического управления малогабаритного летательного аппарата вертикального взлета и посадки // *Исследование наук и технологии*. Вьетнам, Ханой, 2013. № 4 (24). С. 19—26.

6. **До Куок Туан, Фирсов С. Н., Пищухина О. А.** Построение отказоустойчивого блока датчиков угловой скорости системы управления многоцелевого самолета // *Наука і техніка повітряних сил Збройних сил України*. 2013. № 2 (11). С. 84—87.

7. **Телухин С. В., Матвеев В. В.** Беспилотный летательный аппарат как объект управления // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. Управление и информатика в авиакосмических системах. 2008. № 10. С. 7—10.

8. **Парамонов П. П., Сабо Ю. И., Шукалов А. В., Матвеев В. В., Распопов В. Я.** Интегрированная навигационная система для малоразмерного летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 10. С. 60—67.

9. **Firsov S. N., Plavynska N., Rudenko K.** Hardware and Software Package for Search, Detection and First Aid Means Delivery in Rough Terrain on Basis of a Three Rotor Unmanned Aerial Vehicle // *II International Symposium of Young Researchers Transport Problems 2013*, 24th June 2013. P. 501—505.

10. **Кулик А. С., Фирсов С. Н., Ван Тхинь Нгуен.** Исследование системы управления малогабаритного летательного аппарата вертикального взлета и посадки // *Авиационно-космическая техника и технология*. 2012. № 2 (89). С. 66—70.

11. **Кулик А. С., Фирсов С. Н., Ван Тхинь Нгуен.** Малогабаритный летательный аппарат вертикального взлета и посадки нетрадиционной аэродинамической схемы // *Матер. 10-й междунар. конф. Иранского аэрокосмического общества*, 1—3 марта 2011 г. Иран, Тегеран, 2011. С. 21—22.

12. **Фирсов С. Н., Ван Тхинь Нгуен, Данченко А. В.** Управление малогабаритным летательным аппаратом вертикального взлета и посадки при переходе от одного режима полета в другой // *Авиационно-космическая техника и технология*. 2012. № 3 (90). С. 56—61.

13. **Малютин Д. М.** Исследование динамики рулевого привода беспилотного малоразмерного летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. Управление и информатика в авиакосмических системах. 2008. № 10. С. 10—14.

14. **Сабо Ю. И., Ларкин Е. В.** Отказоустойчивость авионики с иерархической структурой // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. Управление и информатика в авиакосмических системах. 2006. № 12. С. 2—7.

15. **Фирсов С. М., Туан Куок До, Гуш Р. М., Данченко О. В.** Особливості конструкції та системи автоматичного керування беспілотного літального апарату нетрадиційної аеродинамічної схеми вертикального зльоту та посадки // *Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК*. 2009. Вип. 87. С. 123—125.

Г. Н. Лебедев, д-р техн. наук, зам. зав. кафедрой, kaf301@mai.ru,
 Зо Мин Тайк, аспирант, zawminhtike147@gmail.com,
 Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Синтез оптимального управления боковым движением воздушных или речных судов при пересечении их маршрутов под произвольным углом¹

Предложена процедура разбиения движения судов на попутное, встречное и поперечное и для каждого из них рассмотрен способ бокового маневрирования и изменения попутной скорости. Найден уточненный алгоритм координированного управления двух судов при пересечении их курсов под произвольным углом.

Ключевые слова: контроль безопасности, оптимальное управление, летательные аппараты, динамическое программирование, функция риска

G. N. Lebedev, Zaw Min Htike

Synthesis of Optimal Control of the Lateral Movement for Aircraft and Sea Vessels Crossing their Routes at Any Angle

The procedure of splitting the traffic on the climb, and a counter-cross, and for each one-way lateral passing maneuvers and changes of speed. Found an updated algorithm coordinated control of two ships crossing their courses at any angle.

Keywords: security control, optimal control, aircraft, dynamic programming, the risk function

Введение

При поперечном движении любого транспорта, в том числе воздушных и речных судов, весьма важно предпринять особые координированные действия по устранению угрозы их столкновения. Так же, как при встречном движении нужно поворачивать каждому судну в одну сторону, а при попутном движении — одному судну тормозить, а другому повышать скорость, при поперечном движении нужна своя логика поведения.

Поскольку заданные курсы движения двух судов могут пересекаться под любым углом, понятие поперечного движения является более общим, чем попутное и встречное, и необходимо как-то указать области принадлежности каждому из трех классов. В данной работе сделана попытка определить границы этих областей и для каждой из них назначить первоочередные меры по изменению положения и скорости каждого из двух судов при маневрировании.

Кроме того, если встречаются не два, а группа судов, то прежде всего нужно решить задачу определения для каждого из них того второго судна, столкновение с которым в первую очередь нужно избежать. При этом в сигналы управления первого и второго судна должна быть внесена уточняющая поправка, зависящая от угла пересечения курсов, нахождению которой посвящена данная работа.

¹ Работа выполнена при материальной поддержке гранта РФФИ № 13-08-00182.

Постановка задачи

Дано:

1. Задана группа подвижных управляемых объектов (воздушных или речных судов) с известными в текущий момент времени земными координатами местоположения и заданным курсовым углом ψ_i движения с заданной постоянной попутной скоростью V . Процесс регулирования скорости в работе не рассматривается. Из рассмотрения также исключены объекты, маршруты которых не пересекаются с основным маршрутом первого, главного объекта, стратегию управления которым необходимо синтезировать.

2. Курс движения основного объекта с координатами x_1, x_2, x_3 совпадает с осью x_3 , как показано на рис. 1, т. е. угол $\psi_0 = 0$, а курсовые углы сближающихся остальных объектов с координатами y_{1j}, y_{2j}, y_{3j} отсчитываются в каждой точке пересечения их линий пути против часовой стрелки. Таким образом, курсовые углы ψ_j лежат в широком диапазоне $0 < \psi_j < 360^\circ$, как показано на рис. 1.

3. Не вызывающие угрозу безопасности объекты, которые при попадании в точку встречи основного объекта оказываются от него на расстоянии, большем заданной безопасной дистанции d , не рассматриваются.

4. Весь процесс управления движением основного объекта при встрече с другими объектами может быть представлен последовательностью координированного взаимодействия пар — основного объ-

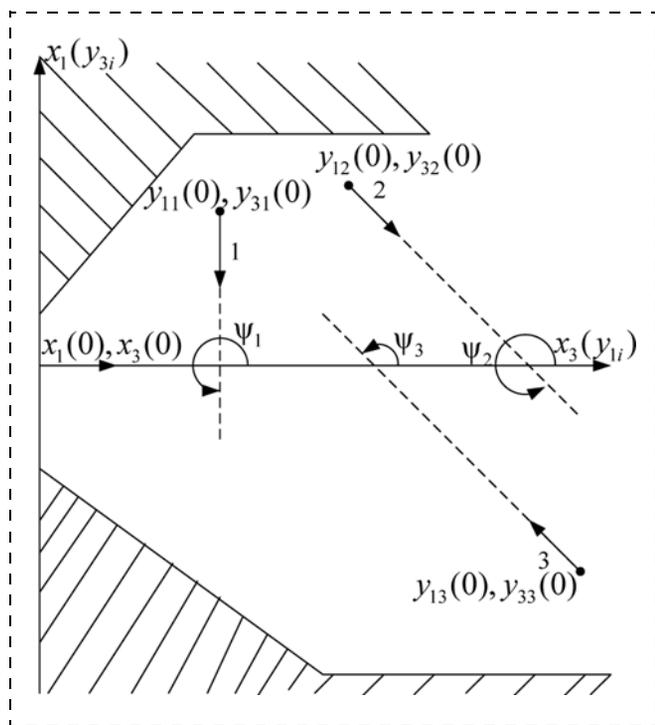


Рис. 1. Картина на плане местности движения судов по заданным пересекающимся курсам

екта с первым, вторым и т. д. при их сближении, очередность которых предстоит установить.

5. В качестве основной меры отклонения от аварийного сближения очередной пары в данной работе рассматривается боковое движение одного или двух судов одновременно при постоянной попутной скорости.

6. Динамические свойства сближающихся судов примерно одинаковы, и движение основного судна по заданной линии пути m_0 описывается упрощенной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + bu_0; \\ \dot{x}_3 &= V; \\ x_1(0) &= m_0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_1 — линейная координата бокового движения, x_2 — боковая скорость, a и b — заданные динамические параметры, u_0 — синтезируемый сигнал управления, x_3 — координата попутного движения.

Поперечное движение другого i -го сближающегося судна по заданной линии пути m_i при пересекающемся курсе ψ_i аналогично описывается своими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1i} &= y_{2i} - V \sin(270 - \psi_i); \\ \dot{y}_{2i} &= -ay_{2i} + bu_i \cos(270 - \psi_i); \\ \dot{y}_{3i} &= V_1 = -V \cos(270 - \psi_i); \\ y_{1i}(0) &= m_i(0), y_{2i}(0) = 0, y_{3i}(0) = M - m_0 = 0; i \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где y_{1i} — линейная координата бокового движения другого судна, двигающегося поперечно основному; y_{2i} — боковая скорость; u_i — синтезируемый сигнал координированного управления другим судном; y_{3i} — координата попутного движения; V_1 — скорость, равная $(-V)$, если судно приближается к основному слева под углом $\psi_i = 270^\circ$ (см. объект 1 на рис. 1), либо равная V , если судно приближается справа под углом $\psi_i = 90^\circ$ (см. объект 3 на рис. 1).

7. Считается, что на борту каждого судна имеются необходимые измерительные средства, позволяющие получить параметры собственного движения и встречающихся судов с необходимой точностью.

8. Интегральный штраф за снижение безопасности движения каждой пары судов при их сближении описывается заданным минимизируемым функционалом J :

$$\begin{aligned} J = \int_0^T f_0 dt = \int_0^T & \left[\frac{\tau_0}{2} (u_0^2 + u_1^2) + \frac{\tau_1}{2} [(x_1 - m_i)^2 + \right. \\ & \left. + (x_3 - m_i)^2] + \frac{\tau_2}{2} (x_2^2 + y_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_3}{1 + (x_1 + x_3 + d)^2 k + k(y_1 + y_3 + d)^2} \right] dt, \quad (3) \end{aligned}$$

где $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ — весовые коэффициенты значимости штрафов соответственно за расходимую мощность, отклонения от заданных линий пути, отклонения по боковой скорости и штрафа за опасное сближение по сравнению с заданной величиной d безопасной дистанции.

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении f_0 в формуле (3) определяет растущий риск столкновения по мере приближения судов друг к другу.

Требуется:

- сформировать процедуру альтернативного выбора первоочередного объекта, сближающегося с основным, для организации взаимодействия пары при их безопасном сближении;

- провести классификацию сближения объектов при его отнесении к попутному, встречному или поперечному движению, чтобы для каждого из них указать основной способ избежания столкновения объектов друг с другом;

- на основе динамического программирования [1–3] синтезировать закон оптимального координированного управления боковым движением сближающейся пары объектов для обеспечения необходимой безопасности.

**Процедура приоритетного выбора
первоочередной пары взаимодействующих объектов
при их сближении**

При оценке приоритетности в выборе наиболее опасного из встречаемых объектов, пересекающих заданную линию пути основного объекта, необходимо учитывать два фактора. Главным является спрогнозированная минимальная дальность R_{\min} при сближении — чем она меньше, тем опаснее объект. Другим фактором является имеющееся время для осуществления основным объектом дополнительного маневра, определяемое при постоянной попутной скорости расстоянием L между текущим положением основного объекта и ожидаемой точкой встречи. Значимость этих факторов в общем случае неодинакова, да и их вклад в общую свертку ζ оценки безопасности неаддитивен. В ряде технических задач успешно используется свертка в виде суммы аддитивной и мультипликативной форм, которую применительно к данной задаче можно записать в виде

$$\theta_i = C_1 L_i + C_2 R_{\min} + \frac{C_3 L_i R_{\min}}{d}, \quad (4)$$

где θ_i — коэффициент безопасности сближения с i -м объектом; L_i — оставшееся расстояние до i -го объекта; R_{\min} — минимальная дальность в месте сближения; $C_1 \leq C_2 \leq C_3$ — коэффициенты относительной важности, которые для простоты можно взять равными единице.

Последнее слагаемое в формуле (4) подчеркивает повышенную опасность при одновременно малых L_i и R_{\min} , а знаменатель d необходим для получе-

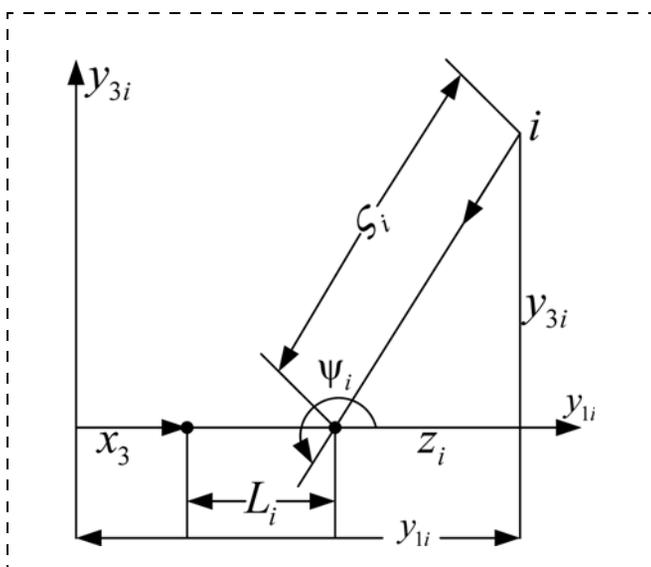


Рис. 2. Картина сближения пары объектов при пересекающихся курсах

ния этого слагаемого в тех же физических единицах, что и первые два.

Чтобы пояснить необходимые вычисления L_i и R_{\min} , представим фрагмент сближения основного объекта и сближающегося i -го объекта на рис. 2, пользуясь обозначениями координат, принятыми в уравнениях (1) и (2).

Согласно рис. 2 длина пути ζ_i движения i -го объекта к точке встречи равен гипотенузе

$$\zeta_i = \sqrt{y_{3i}^2 + z_i^2}. \quad (5)$$

При этом катет z_i (возможно любого знака) вычисляется по формуле

$$z_i = -y_{3i} \operatorname{tg}(270^\circ - \psi_i). \quad (6)$$

Длина пути L_i движения i -го объекта к точке встречи равна

$$L_i = y_{1i} - (x_3 + z_i). \quad (7)$$

Заметим, что при $L_i < 0$ i -й объект уже опасности не представляет. Зная L_i и ζ_i , можно оценить дальность R_{\min} через модуль их разности:

$$R_{\min} = |L_i - \zeta_i|. \quad (8)$$

Объединяя формулы (4) и (8) при $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, можно получить

$$\theta_i = L_i + |L_i - \zeta_i| \left(1 + \frac{L_i}{d}\right), \quad (9)$$

где L_i , ζ_i , z_i вычисляются по формулам (5)–(7), в которых текущие координаты движения y_{1i} , x_3 , ψ_i , y_{3i} измеряются либо вычисляются при интегрировании дифференциальных уравнений (1) и (2) при $u_0 = u_i = 0$, а именно

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= V; \\ \dot{y}_{1i} &= -V \sin(270^\circ - \psi_i); \\ \dot{y}_{3i} &= -V \cos(270^\circ - \psi_i). \end{aligned} \quad (10)$$

Это позволяет провести вычисление текущих оценок безопасности встречи с объектами в ближайшем окружении и из их общего числа K выбрать тот, у которого значение θ_i минимально. Блок-схема алгоритма приоритетного выбора первоочередной пары взаимодействующих объектов представлена на рис. 3.

Использование алгоритма на рис. 3 для представленного на рис. 1 примера при $y_{11} = 150$; $y_{31} = 160$; $y_{12} = 500$; $y_{32} = 400$; $y_{13} = 450$; $y_{33} = -100$ позволило получить следующие графики поведения оценок

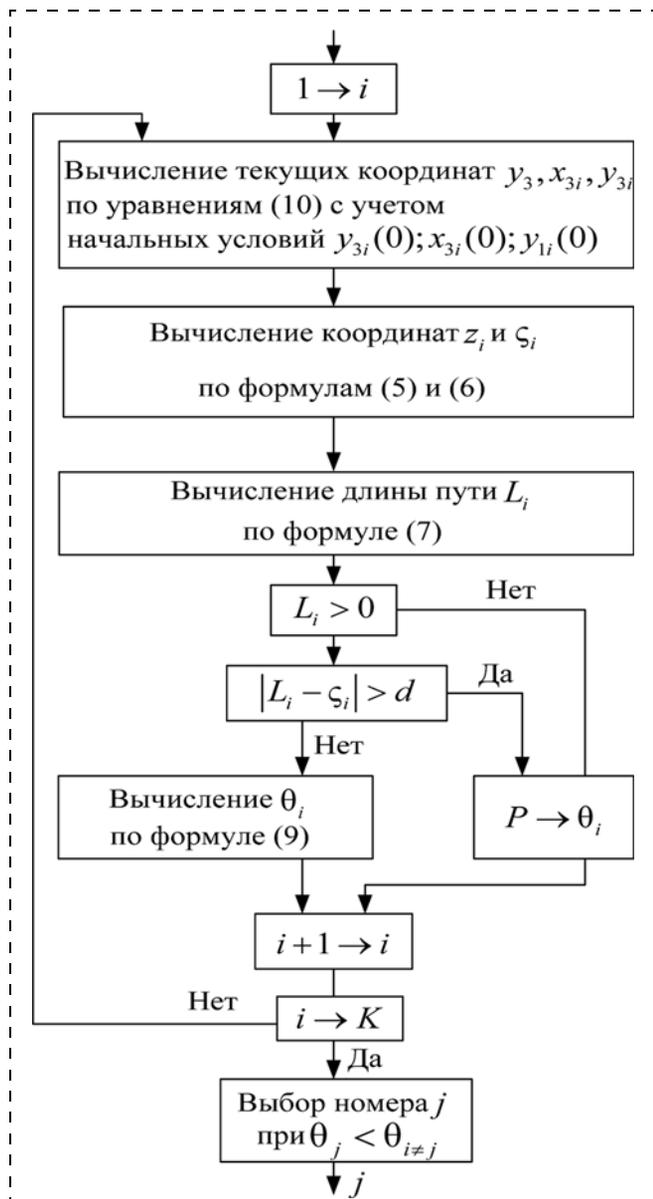


Рис. 3. Блок-схема алгоритма приоритетного выбора первоочередной пары взаимодействующих объектов

безопасности $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ при прямолинейном движении основного объекта (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что вначале нужно разойтись на безопасном расстоянии с объектом 1, затем — с объектом 3 и в завершение — с объектом 2.

Классификация типов движения сближающихся объектов для определения предупредительных мер избежания их столкновения

При назначении способа дополнительного маневрирования взаимодействующих объектов необходимо различать тип их относительного движения. Дело в том, что при встречном движении обычно используется боковое движение каждого объекта в одинаковом направлении (либо оба вправо, либо оба влево относительно своего курса) [4]. В част-

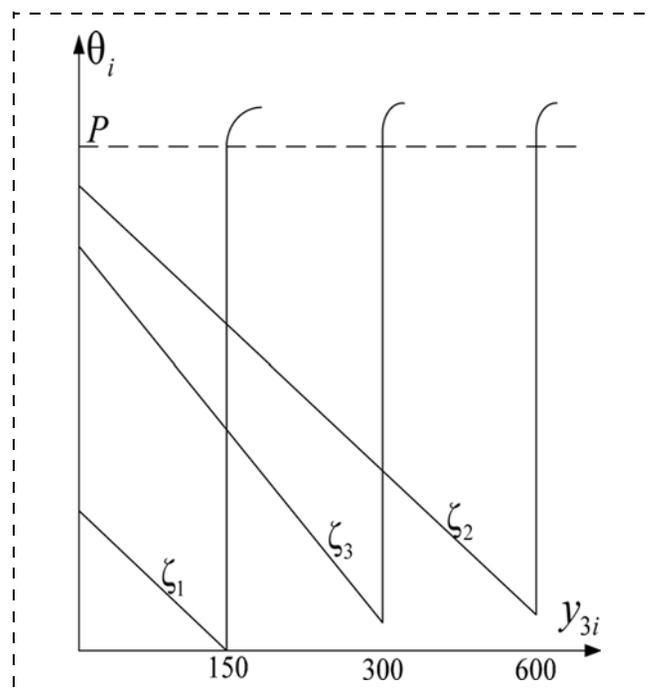


Рис. 4. Графики изменения оценок безопасности сближения с тремя объектами при разных пересекающихся курсах

ности, в России речное и автомобильное правостороннее движение предписывает поворачивать в опасных ситуациях вправо. При попутном движении сначала, как правило, регулируется скорость (один тормозит, другой повышает скорость), а затем при необходимости каждый объект должен поворачивать в разные стороны — один влево, другой вправо [5].

Как было показано в работе [6], при идеальном поперечном движении при пересекающихся под углом 90° курсах необходимо так же, как при встречном движении, обоим объектам поворачивать в одну сторону. Однако, если встречаемый объект приближается слева к основной трассе, то нужно поворачивать вправо, а если приближается справа — то влево. Таким образом, принимаемые меры в разных случаях неодинаковы.

Идеальные направления курсов сближающихся объектов для попутного, встречного и двух вариантов поперечного движения можно представить (рис. 5) четырьмя исходящими из общего центра линиями, для которых известны способы дополнительного маневрирования (штриховые линии на рис. 5).

Все остальное множество направлений образует показанную на рис. 5 область, которую нужно разбить на четыре сектора.

В качестве простого решения предлагается представить эти сектора в виде одинаковых конусов, в каждом из которых возможные направления курсов отличаются по модулю от идеального направления не более, чем на 45° . Таким образом, возможны четыре типа движения:

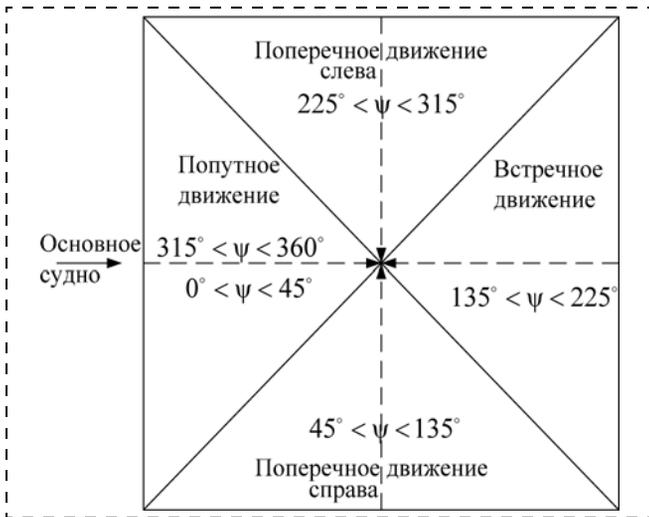


Рис. 5. Диаграмма направлений движения сближающихся судов при различных курсах

1) встречное движение при $135^\circ < \psi_i < 225^\circ$: боковое маневрирование — оба вправо;

2) попутное движение при $0^\circ < \psi_i < 45^\circ$ и $315^\circ < \psi_i < 360^\circ$: изменение попутных скоростей, если необходимо — боковое маневрирование — один вправо, другой — влево;

3) левое поперечное движение при $225^\circ < \psi_i < 315^\circ$: боковое маневрирование — оба вправо; если встречное судно не достигнет прогнозируемой точки встречи; в противном случае — оба влево;

4) правое поперечное движение при $45^\circ < \psi_i < 135^\circ$: боковое маневрирование — оба влево, если встречное судно не достигнет прогнозируемой точки встречи; в противном случае — оба вправо.

Так как в данной работе исследуется синтезируемое оптимальное управление поперечным движением, при моделировании будут использоваться способы, указанные для секторов 3 и 4.

Синтез оптимального управления боковым движением пары объектов, сближающихся на поперечных курсах

Согласно методу динамического программирования [1], условию оптимальности управления движением соответствует уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \min_{u_0, u_i} \left\{ f_0(x, u_0, u_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \dot{x}_i(u_1, u_i) \right\}, \quad (11)$$

где x — n -мерный вектор.

Функцию Беллмана ε нужно представить степенным полиномом второго порядка, как показано в работах [2, 3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 y_1 + \beta_4 y_2 + 0,5\gamma_1 x_1^2 + 0,5\gamma_2 x_2^2 + \\ & + 0,5\gamma_3 y_1^2 + 0,5\gamma_4 y_2^2 + \phi_{12} x_1 x_2 + \phi_{13} x_1 y_1 + \\ & + \phi_{14} x_1 y_2 + \phi_{23} x_2 y_1 + \phi_{24} x_2 y_2 + \phi_{34} y_1 y_2, \end{aligned}$$

после чего уравнение Беллмана (11), в том числе его правую часть $F(x, y, u_0, u_i)$, где y — n -мерный вектор, можно представить, обозначив для упрощения в уравнениях (2)

$$\begin{aligned} V \sin(270^\circ - \psi_i) &= P, \quad \cos(270^\circ - \psi_i) = q; \\ m_i &= m_i(0) - qt, \end{aligned} \quad (12)$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & \min_{u_0, u_i} \{ f_0(x, y, u_0, u_i) + (\beta_1 + \gamma_1 x_1 + \\ & + \phi_{12} x_2 + \phi_{13} y_1 + \phi_{14} y_2) x_2 + (\beta_3 + \gamma_3 y_1 + \phi_{34} y_2 + \\ & + \phi_{13} x_1 + \phi_{23} x_2) (y_2 + P) + (\beta_2 + \gamma_2 x_2 + \phi_{12} x_1 + \\ & + \phi_{23} y_1 + \phi_{24} y_2) (b u_0 - a_1 x_2) + (\beta_4 + \gamma_4 y_2 + \\ & + \phi_{34} y_1 + \phi_{14} x_1 + \phi_{24} x_2) (b q u_i - a_2 y_2) \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно принятой методике аналитического конструирования оптимальных регуляторов [3] с учетом квадратичной зависимости f_0 в формуле (3) от управлений u_0 и u_i получим при $\tau_0 = 1$ следующее оптимальное управление:

$$u_{0 \text{ опт}} = -b(\beta_2 + \gamma_2 x_2 + \phi_{12} x_1 + \phi_{23} y_1 + \phi_{24} y_2);$$

$$u_{i \text{ опт}} = -bq(\beta_4 + \gamma_4 y_2 + \phi_{34} y_1 + \phi_{14} x_1 + \phi_{24} x_2). \quad (14)$$

Для окончательного определения оптимального управления необходимо найти входящие в него девять коэффициентов. Чтобы это сделать, нужно представить левую и правую части уравнения (13) степенным полиномом одинакового вида, для чего, во-первых, нужно заменить дробную функцию штрафа за опасное сближение, входящего в f_0 , на степенной полином

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_3}{1 + k(x_1 + x_3 + d)^2 + k(y_1 + y_3 + d)^2} \approx \\ & \approx \tau_3 - k\tau_3(x_1 + x_3 + d)^2 - k\tau_3(y_1 + y_3 + d)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Во-вторых, необходимо подставить полученные в (14) значения u_0 и u_i оптимального управления в правую часть F уравнения Беллмана (12) в слагаемые, их содержащие:

$$\begin{aligned} & 0,5u_0^2 + b u_0(\beta_2 + \gamma_2 x_2 + \phi_{12} x_1 + \phi_{23} y_1 + \phi_{24} y_2) + \\ & + 0,5u_i^2 + b q u_i(\beta_4 + \gamma_4 y_2 + \phi_{34} y_1 + \phi_{14} x_1 + \phi_{24} y_2) = \\ & = -0,5b^2(\beta_2 + \phi_{12} x_1 + \gamma_2 x_2 + \phi_{23} y_1 + \phi_{24} y_2)^2 - \\ & - 0,5b^2 q^2(\beta_4 + \phi_{34} y_1 + \gamma_4 y_2 + \phi_{14} x_1 + \phi_{24} x_2)^2. \end{aligned}$$

После подстановок полученных выражений левая и правая части уравнения (13) представляют степенной полином, имеющий 14 слагаемых с разными степенями по x_1, x_2, y_1, y_2 . Это позволяет для

установившегося состояния при $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$ получить следующие 14 алгебраических нелинейных уравнений относительно искомых коэффициентов $\beta_i, \gamma_i, \psi_{ik}$:

- 1) $\tau_1 m_0 + k\tau_3(x_3 + d) + b^2\beta_2\phi_{12} + q^2b^2\phi_{14}\beta_4 - \phi_{13}p = 0;$
- 2) $\beta_1 - a\beta_2 - b^2\beta_2\gamma_2 - q^2b^2\beta_4\phi_{24} + \phi_{13}p = 0;$
- 3) $\tau_1 m_i - k\tau_3(y_3 + d) - b^2\phi_{12}^2 + q^2b^2\phi_{14}^2 = 0;$
- 4) $0,5\tau_2 + \phi_{12} - a\gamma_2 - 0,5b^2\gamma_2^2 - 0,5q^2b^2\phi_{24}^2 = 0;$
- 5) $\tau_1 m_i + k\tau_3(y_3 + d) + b^2\beta_2\phi_{23} + q^2b^2\phi_{34}\beta_4 - \gamma_3p = 0;$
- 6) $\beta_3 - a\beta_4 - b^2\beta_2\phi_{24} - q^2b^2\beta_4\gamma_4 + \phi_{34}p = 0;$
- 7) $\tau_1 - k\tau_3 - b^2\phi_{23}^2 - q^2b^2\phi_{34}^2 = 0;$ (16)
- 8) $0,5\tau_2 + \phi_{34} - a\gamma_4 - 0,5b^2\phi_{24}^2 - 0,5q^2b^2\gamma_4^2 = 0;$
- 9) $\gamma_1 - a\phi_{12} - b^2\phi_{12}\gamma_2 - q^2b^2\phi_{14}\phi_{24} = 0;$
- 10) $\gamma_3 - a\phi_{34} - b^2\phi_{23}\phi_{24} - q^2b^2\gamma_4\phi_{34} = 0;$
- 11) $b^2\phi_{12}\phi_{23} + q^2b^2\phi_{14}\phi_{34} = 0;$
- 12) $2a\phi_{24} + b^2\gamma_2\phi_{24} + q^2b^2\gamma_4\phi_{24} - \phi_{14} - \phi_{23} = 0;$
- 13) $\phi_{13} - (a + b^2\gamma_4q^2)\phi_{14} - b^2\phi_{12}\phi_{24} = 0;$
- 14) $\phi_{13} - (a + b^2\gamma_2)\phi_{23} - q^2b^2\phi_{34}\phi_{24} = 0.$

Очевидно, что найти строгое аналитическое решение системы (16) невозможно, поэтому нужно принять ряд допущений. В качестве первого приближения допустим, что $bq \approx b$, так как величина q при максимальных отклонениях поперечного курса ψ_i от идеального не превосходит 45° , и поэтому минимальное значение $q = 0,7$, а максимальное — единица. Тогда анализ уравнений 3, 7, 11, 13 системы (16) показывает, что если принять $\phi_{12} = \phi_{34}$, то

$$\phi_{14} = \phi_{23} = 0, \quad (17)$$

а из уравнений 3 и 7 можно получить

$$\phi_{12} = \phi_{34} \cong \frac{\sqrt{\tau_1 - k\tau_3}}{b} = N. \quad (18)$$

Уравнения 1 и 5 позволяют получить предварительные формулы для коэффициентов β_2 и β_4 :

$$\beta_2 = -\frac{[\tau_1 m_0 + k\tau_3(y_{3i} + d) - \phi_{13}p]}{b^2 N},$$

$$\beta_4 = -\frac{[\tau_1 m_i + k\tau_3(x_3 + d) - \gamma_3 p]}{q^2 b^2 N}. \quad (19)$$

Чтобы найти коэффициенты γ_2, γ_4 и ψ_{24} , нужно проанализировать уравнения 4, 8 и 12 системы (16). Становится ясно, что $\gamma_2 = \gamma_4$, а для определения γ_2 и ψ_{24} нужно иметь в виду уравнения 4 и 12 в виде

- 4) $0,5\tau_2 + N - a\gamma_2 - 0,5b^2\gamma_2^2 - 0,5q^2b^2\phi_{24}^2 = 0;$
- 12) $(2a + b^2(1 + q^2)\gamma_2)\phi_{24} = 0.$

Если допустить, что $\phi_{24} \neq 0$, то из уравнения 12 получим

$$\gamma_2 = -\frac{2a}{b^2(1 + q^2)} < 0,$$

что противоречит физическому смыслу процесса управления. В частности, при управлении одним судном знак коэффициента γ_2 положителен. Значит, надо положить $\phi_{24} = 0$ и решить квадратное уравнение 4 относительно коэффициента γ_2 . Численный анализ различных корней этого уравнения при $\frac{a}{b^2} \geq 1$ показал, что лучшим решением является

приближенный ответ

$$\gamma_2 = \gamma_4 \cong -\frac{a}{b^2} + \frac{\sqrt{\tau_2 + 2N}}{b} \approx \frac{N}{a}, \quad (20)$$

Остается доопределить коэффициенты ϕ_{13} и γ_3 . Согласно уравнению 10 величина γ_3 приближенно равна

$$\gamma_3 = N(a + b^2\gamma_2), \quad (21)$$

а в соответствии с уравнениями 13 и 14 при $\phi_{24} = \phi_{14} = \phi_{23} = 0$ коэффициент $\phi_{13} = 0$. Поэтому, используя полученные формулы (17)–(21), можно сформировать оптимальное управление (14) в квадратурах. В частности, при $\psi_i = 90^\circ$ и $\psi_i = 270^\circ$ можно записать

$$u_{0\text{опт}} = bN \left[\frac{\tau_1 m_0 + k\tau_3(y_{3i} + d)}{b^2 N^2} - x_1 \right] - \left(\sqrt{\tau_2 + 2N} - \frac{a}{b} \right) x_2; \quad (22)$$

$$u_{i\text{опт}} = bNq \left[\frac{\tau_1 m_i + k\tau_3(x_3 + d) - N(a + b^2\gamma_2)p}{b^2 q^2 N^2} - y_1 \right] - \left(\sqrt{\tau_2 + 2N} - \frac{a}{bq} \right) y_2.$$

Полученное управление обладает теми недостатками, что весовые коэффициенты у двух асимптот $x_3 + d$ и m_i для y_1 , а также у асимптот $y_{3i} + d$ и m_0 для x_1 неизменны и в общем случае неодинаковы.

Это вызвано тем, что приближение (15) дробной функции было слишком неточно.

Между тем логика удачного управления указывает на то, что вдали от места сближения объектам нужно стремиться к асимптотам m_0 и m_i , а в районе возможного столкновения — к асимптотам $y_{3i} + d$ и $x_3 + d$. Как было показано в работе [4], удачным приемом является возвращение вида дробной функции в формуле самого управления, с переменными коэффициентами $\frac{\varphi}{1 + \theta \frac{R^{2n}}{d^{2n}}}$ при асимптотах

$x_3 + d$ и $y_{3i} + d$, где с увеличением расстояния R между объектами

$$R = \sqrt{(x_1 - y_{3i})^2 + (x_3 - y_{1i})^2}$$

роль этих асимптот падает. Дополнительные параметры φ , θ , n подбираются таким образом, чтобы скорость изменения важности менялась надлежащим образом. В частности, можно принять $\theta \approx 1$, $n = 2$, а значение φ выбрать как

$$\varphi = \frac{b^2 N^2 (1 + \theta)}{k \tau_3}.$$

Тогда можно получить вместо формул (22) новый промежуточный результат для $\psi_i = 90^\circ$ и $\psi_i = 270^\circ$:

$$u_{0\text{опт}} = bN \left[\frac{\tau_1}{b^2 N^2} m_0 + \frac{(1 + \theta)(y_{3i} + d)}{1 + \theta \left(\frac{R^2}{d^2}\right)^n} - x_1 \right] - \left(\sqrt{\tau_2 + 2N} - \frac{a}{b} \right) x_2;$$

$$u_{i\text{опт}} = qbN \left[\frac{\tau_1}{b^2 q^2 N^2} m_2 + \frac{(1 + \theta)(x_3 + d)}{1 + \theta \left(\frac{R^2}{d^2}\right)^n} - y_1 \right] - \left(\sqrt{\tau_2 + 2N} - \frac{a}{bq} \right) y_2 - \frac{ap}{bq}.$$

Эффект переключения с одних асимптот на другие по мере поступательного движения можно усилить, если ввести также переменные коэффициенты для асимптот m_1 и m_2 . Тогда координация взаимодействия в месте сближения достигнет максимума, а оптимальное управление (22) примет следующий окончательный вид, если вернуть обо-

значениям (12) их первоначальное написание при произвольном курсовом угле ψ_i :

$$u_{0\text{опт}} = bN \left[\frac{\frac{\tau_1 \theta}{b^2 N^2} \left(\frac{R^{2n}}{d^{2n}} - 1\right) m_0 + (1 + \theta)(y_{3i} + d)}{\left[1 + \theta \left(\frac{R^2}{d^2}\right)^n\right]} - x_1 \right] - \left(\sqrt{\tau_2 + 2N} - \frac{a}{b} \right) x_2; \quad (23)$$

$$u_{i\text{опт}} = bN \cos(270^\circ - \psi_i) \times \left[\frac{\frac{\tau_1 m_i \theta}{b^2 N^2} \left(\frac{R^{2n}}{d^{2n}} - 1\right) + (1 + \theta)(x_3 + d)}{1 + \theta \frac{R^{2n}}{d^{2n}}} - y_1 \right] - \frac{a}{b} V \operatorname{tg}(270^\circ - \psi_i) - \left(\sqrt{\tau_2 + 2N} - \frac{a}{b \cos(270^\circ - \psi_i)} \right) y_2;$$

$$m_i = m_i(0) - V t \cos(270^\circ - \psi_i),$$

где $N = \frac{\sqrt{\tau_1 - k \tau_3}}{b_2}$; $R^2 = (x_1 - y_{3i})^2 + (x_3 - y_{1i})^2$, ψ_i — заданный угол поперечного курса, $x_1, x_2, x_3, y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}$ — текущие координаты движения судов. При этом координаты x_3 и y_{3i} соответствуют кратчайшим расстояниям до заданной линии пути от подвижного "препятствия" — сближающегося поперечным курсом встречного судна.

Комментируя формулы (23), можно заметить, что вдали от места сближения при $R^2 > d^2$ при специальных выбранных параметрах $\theta = 1$ и $n = 2$ боковое движение встречного и основного судов будет стабилизировано относительно своих заданных линий

пути m_2 и m_1 . Но при $\frac{R^2}{d^2} \leq 1$ целью управления станет безопасное уклонение судов с помощью асимптот $x_3 + d$ и $y_{3i} + d$. Кроме того, в сигнале $u_{i\text{опт}}$ управления встречным судном присутствуют поправки в передаточных числах регулятора для m_2 и y_1 и постоянное дополнительное слагаемое. Эти поправки исчезают при $\psi_i = 90^\circ$ или 270° .

Результаты моделирования поперечного движения судов с повышенной безопасностью

Моделирование движения четырех речных судов проводилось в среде MATLAB при следующих

условиях. Суда движутся с постоянной попутной скоростью $V = 4$ м/с, их динамические параметры заданы: $a = 0,25$ 1/с, $b = 0,5$ 1/с. Значение безопасной дистанции $d = 30$ м.

Первое встречающееся с основным судно имеет поперечный курс $\psi_1 = 270^\circ$, а его координаты в начальном состоянии при $x_3(0) = 0$ таковы: $y_{31} = 160$ м; $y_{11} = 150$ м.

Вычисленный коэффициент θ_1 безопасности у него невелик, поскольку из-за высокого берега оно обнаружено слишком поздно, и поэтому располагаемая дистанция L_1 до точки встречи с ним весьма мала. Условие $(y_{31} - y_{11}) > 0$ указывает, что обоим судам нужно срочно поворачивать вправо, а также принимается решение повысить скорость хода основного судна до $V = 6$ м/с, чтобы избежать опасной близости при встрече. Оказалось, что этих мер достаточно, чтобы минимальное расстояние $R_{\min} = 35$ м превысило заданный порог $d = 30$ м.

Вторым по приоритету опасности оказалось судно 3, имеющее согласно классификации на рис. 5 встречный курс $\psi_3 = 135^\circ$ с начальными координатами при $t = 0$

$$y_{33} = -100 \text{ м}; y_{13} = 450 \text{ м}.$$

При этом основное судно после уклонения от судна 1 к моменту сближения с судном 3 перемещается на дистанцию $x_3 = 150$ м. Прогноз прямолинейного движения судна 3 показал, что при этом оно пройдет вперед через планируемую точку встречи на 5 м. Поэтому хотя встречное судно 3 приближается вправо, оба судна должны также поворачивать вправо. Этот маневр обеспечил безопасность их взаимодействия при $R_{\min} = 40$ м.

Последним встречным судном является судно 2, курс которого равен $\psi_2 = 315^\circ$ при следующих начальных координатах $y_{32} = 400$ м, $y_{12} = 600$ м.

Основное судно после уклонения от двух судов 1 и 3 перемещается при сближении с судном 2 на дистанцию $x_3 = 400$ м. Судно 2 так же, как и судно 3, при неуправляемом движении пройдет через планируемую точку встречи вперед, то так как оно

приближается слева, обоим судам нужно поворачивать влево без изменения скорости попутного движения.

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Сформирована процедура приоритетного выбора очередной пары взаимодействующих судов при пересечении их маршрутов, которая позволяет указать наиболее опасное встречное судно и принять необходимые меры.

2. Предложенная классификация типов взаимного движения двух судов обеспечивает выбор нужных способов дополнительного маневрирования для устранения угрозы их столкновения.

3. Уточненный синтез координированного оптимального управления боковым движением двух сближающихся судов учитывает, под каким углом пересекаются их курсы, и предписывает вдали от точки встречи стабилизацию относительно заданных линий пути, а в локальном месте сближения — уклонение друг от друга на заданную безопасную дистанцию.

4. Моделирование на ЭВМ подтвердило эффективность предложенного подхода.

Список литературы

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1961.
2. Теория оптимальных систем / Г. Н. Лебедев и др. М.: Изд-во МАИ, 1993.
3. Лётов А. М. Динамика полета и управления. М.: Наука, 1964.
4. Лебедев Г. Н., Чан Ван Туен, Китаев А. Н. Совместное управление и контроль безопасности полета воздушных судов при их сближении // Вестник МАИ. 2011. Т. 18, № 3. С. 29–35.
5. Лебедев Г. Н., Тин Пхон Чжо, Чан Ван Туен. Решение задачи динамического программирования при безопасном попутном движении воздушных судов // Труды МАИ, 2012. № 54.
6. Лебедев Г. Н., Тин Пхон Чжо, Зо Мин Тайк, Хахулин Г. Ф., Малыгин В. Б. Оптимальное управление и контроль безопасности поперечного движения речных и воздушных судов при пересечении их маршрутов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 12. С. 50–55.

Е. С. Чувашева, ассистент, chuvashevalena@gmail.com,
С. Н. Чувашев, д-р физ.-мат. наук, проф., snchuv@mail.ru,
 "МАТИ" — РГТУ им. К. Э. Циолковского

Математическое моделирование возможности обнаружения высокоскоростных летательных аппаратов в полете по инфракрасному излучению

С помощью разработанной прикладной программы, реализующей комплексную модель, описывающую разнородные физические процессы в узлах высокоскоростных летательных аппаратов, исследуются условия обнаружения аппарата по его собственному ИК излучению, анализируется эффективность мер по снижению температуры наиболее нагретых участков поверхности, изучается влияние траектории и режима полета.

Ключевые слова: высокоскоростные летательные аппараты, инфракрасное излучение, динамика полета, комплексные модели

E. S. Chuvashева, S. N. Chuvashев

Mathematical Modeling of Detection of High Speed Vehicle in Flight with Infrared Cameras

The previously described mathematical model is used which accounts for a number of physical processes in the main units of a high speed air breathing vehicle. Conditions of detection of a high speed vehicle in flight with infrared cameras are considered. The effectiveness of measures of chilling of the most heated parts of the vehicle's surface is analyzed. The influence of differences in trajectory and regime of flight is studied.

Keywords: high speed vehicles, infrared radiation, flight dynamics, complex mathematical model

Высокоскоростные летательные аппараты (ЛА) при полете испытывают значительный нагрев. Тепловое излучение горячих поверхностей таких ЛА может использоваться для их обнаружения. Это становится особенно актуально, если радиолокационный канал обнаружения испытывает затруднения, например, в результате мер по ослаблению отраженного сигнала [1—4].

Для определения условий обнаружения ЛА по его собственному ИК излучению и оценки необходимости и эффективности мер для снижения температуры различных участков поверхности целесообразно применить математическое моделирование.

Математическая модель обнаружения

В данной работе предложена математическая модель, позволяющая анализировать дальность регистрации высокоскоростных ЛА по их ИК излучению с учетом различных факторов в течение полета. Предложенная модель является развитием комплексной модели ЛА, подробно описанной в работе [5]. Динамика полета в ней рассчитывается на основе системы уравнений для трехмерного движения твердого тела. Геометрия поверхности ЛА и двигателя может содержать участки круговых цилиндров, конусов, торов, плоскостей, острые кромки предполагаются закругленными. Предполагается ударно-волновая структура обтекания, близкая (с точностью до больших участков течения) к получающейся в

результате трехмерного математического моделирования. Характеристики потока за ударными волнами и в течении Прандтля—Майера находятся с помощью известных аналитических соотношений. Для описания гиперзвукового обтекания носовых частей ЛА как частей затупленного тела и вычисления локальных тепловых потоков в окрестностях критических точек и линий применяются полуэмпирические соотношения. В пограничном слое учитываются как ламинарный, так и турбулентный режимы течения и ламинарно-турбулентный переход с учетом сжимаемости. Рассчитывается нестационарный нагрев внутренних структур аппарата, например, "внешнего слоя" оборудования и приборов, на который падает излучение со стенки, и "внутренних частей", заэкранированных этим слоем. При расчете внутреннего теплопереноса учитываются теплопроводность и тепловое излучение. Предусмотрена возможность активного охлаждения стенок двигателя. При описании процессов в двигателе применяется канальное приближение с учетом малости поперечных градиентов параметров ядра течения и с пограничными, соответствующими начальному и основному участкам течения в кольцевом канале с переменными диаметрами, с поступлением массы топлива и энерговыделением, распределенным в заданном объеме камеры сгорания. Приток массы и энергии определяется по расходу горючего; в программе предусмотрены возможности задания различных закономерностей инжекции горючего и

положения рулевых поверхностей, определяющих угол атаки, в том числе возможность ручного управления в режиме реального времени.

В течение полета ЛА определялась мощность излучения в полосе частот ν_1, \dots, ν_2 регистрации ИК приемников, расположенных стационарно на поверхности Земли. В расчетах принималось, что каждый наблюдатель i с ИК приемником с заранее заданными координатами X_i и Y_i (высота над землей $Z_i = 0$) сканирует с заданной частотой заданную часть горизонта. Считалось, что гиперзвуковой ЛА (ГЛА) обнаружен, если в момент осмотра соответствующей части горизонта мощность приходящего излучения в спектральной полосе приемника (частоты от ν_1 до ν_2) превышала пороговое значение. Последнее оценивалось по характеристикам современных приборов ночного видения 3-го поколения с коэффициентом усиления света от 60 000 до 100 000, которые позволяют увидеть человека на расстоянии примерно 1 км.

Поток энергии теплового излучения с малого участка поверхности с температурой T в спектральной полосе ν_1, \dots, ν_2 [6] можно представить в виде

$$S_b = \alpha_r \int_1^2 (2\pi h \nu^3 / c^2) / (\exp(h\nu / (k_B T)) - 1) d\nu,$$

где α_r — степень черноты (от 0 до 1); h — постоянная Планка; c — скорость света; k_B — постоянная Больцмана. Приближенно для достаточно узкой полосы, т. е. при $2(\nu_2 - \nu_1) / (\nu_1 + \nu_2) \ll 1$, интеграл по ν можно заменить выражением

$$S_b \approx \alpha_r (2\pi h \nu_m^3 / c^2) / (\exp(h\nu_m / (k_B T)) - 1) (\nu_2 - \nu_1),$$

$$\nu_m = (\nu_1 + \nu_2) / 2.$$

Точность такого упрощения для характерных случаев около 0,2 %, что заведомо лучше точности определения исходных величин.

Поток излучения в полосе при изотропной диаграмме направленности с участка поверхности, наклоненного к наблюдателю под углом θ , при $\cos\theta > 0$ равен

$$S_{b\theta} = S_b \cos\theta.$$

Значение θ для данной точки вычисляется как угол θ между нормалью к поверхности и направлением визирования на наблюдательный пункт.

Если поверхность излучает в противоположном от наблюдателя направлении, то соответствующий поток отсутствует:

$$\cos\theta \leq 0 \Rightarrow S_{b\theta} = 0.$$

Если аппарат находится за горизонтом, то поток также отсутствует:

$$\Delta L \geq (2R_E Z + Z^2)^{1/2} \Rightarrow S_{b\theta} = 0.$$

Здесь ΔL — расстояние от аппарата до наблюдателя, $R_E = 6371$ км — радиус Земли, Z — высота полета.

Для определения суммарного потока, излучаемого ЛА в направлении наблюдателя (интенсивности излучения аппарата в данном направлении), надо проинтегрировать по поверхности ЛА F . Плотность потока энергии излучения в заданной спектральной полосе на приемнике на расстоянии R от ГЛА равна

$$S'_b = (\int S_{b\theta} dF) / (\pi R^2).$$

Для вычисления потоков излучения применяли данные по геометрии и неравномерному нестационарному полю температур поверхности ЛА при полете, определяемые с помощью вышеописанной комплексной модели.

Результаты моделирования

Некоторые характерные результаты вычислений представлены на рис. 1, 2, на рис. 3, 4 (см. вторую сторону обложки), рис. 5 для следующего варианта: масса ЛА 506 кг, масса топлива при запуске 1289 кг, длина 6,1 м, диаметр его цилиндрической части 0,9 м, горючее — гептан. Двигатель ЛА включался на высоте 30 км при скорости 2 км/с. В данном варианте ЛА осуществляется охлаждение двигателя с помощью эндотермической реакции разложения горючего. Для снижения теплового потока, приходящего к баку с горючим и приборам от двигателя, между верхней стенкой двигателя и узлами над двигателем расположен экран с коэффициентом

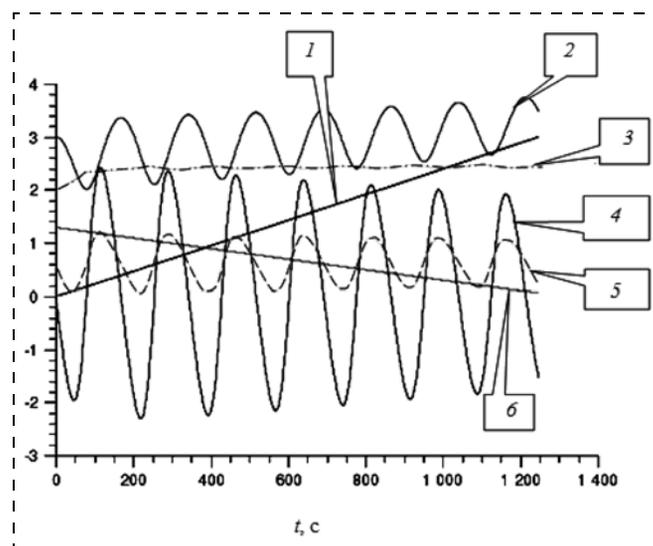


Рис. 1. Временные зависимости характеристик полета:
 1 — дальность полета, 10^6 м; 2 — высота полета, 10^4 м; 3 — горизонтальная составляющая скорости, 10^3 м; 4 — вертикальная составляющая скорости, 10^2 м; 5 — тангаж, 10^2 °; 6 — масса топлива, 10^3 кг

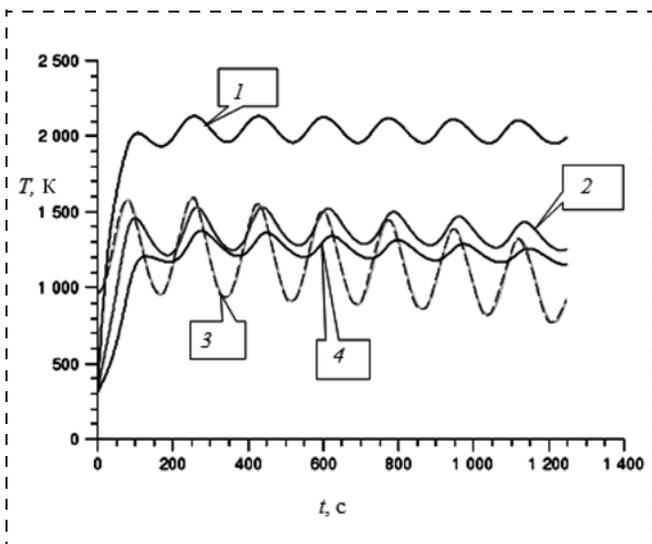


Рис. 2. Усредненные по площади температуры наиболее нагреваемых частей:
 1 — нижняя поверхность ЛА без теплоизоляции (вариант *A*);
 2 — воздухозаборник без охлаждения (*A*, *B*); 3 — рулевые поверхности без охлаждения (*A*, *B*); 4 — нижняя поверхность ЛА с теплоизоляцией от двигателя (*B*, *C*)

отражения 95 %. В охлаждении двигателя участвует 50 % горючего. Полоса регистрируемого излучения 3,4...4,1 мкм. Остальные параметры соответствуют указанным в примере, приведенном в работе [5].

В представленных ниже расчетах применялся закон управления, при котором полет происходит с постоянным углом атаки (6°). При различных высотах, но при примерном постоянстве скорости полета это соответствует сохранению геометрии ударно-волновой структуры перед двигателем. В этом случае безо всяких дополнительных средств управления структурой ее легко сделать оптимальной для работы прямоточного двигателя, что позволяет обеспечить высокую тяговую эффективность без усложнения конструкции. Предполагалось, что расход горючего пропорционален расходу воздуха через двигатель, чтобы был постоянен коэффициент избытка воздуха (в данном случае равный 1,5), что также способствует оптимизации рабочих процессов.

Задавали пять позиций регистрации ИК излучения: приемник 1 — на расстоянии 250 км от точки старта по курсу аппарата; приемник 2 — на расстоянии 500 км по курсу и со смещением влево от него на 150 км; приемник 3 — на расстоянии 750 км по курсу и со смещением на 100 км вправо; приемник 4 — на расстоянии 1000 км по курсу и со смещением на 450 км влево; приемник 5 — на расстоянии 1250 км по курсу.

Рассмотрены три варианта: *A* — без дополнительных мер по снижению потока ИК излучения; *B* — с теплоизоляцией нижней поверхности ЛА от двигателя посредством установки экрана (коэффициент отражения 99 %); *C* — с теплоизоляцией двигателя и активным охлаждением воздухозаборника и рулевых поверхностей до 400 К.

Из результатов расчетов видно, что полет происходит по периодической траектории (см. рис. 1), т. е. происходят колебания высоты и других кинематических характеристик. Дальность полета составляет приблизительно 3 тыс. км. Горизонтальная составляющая скорости в начале полета незначительно возрастает, а затем практически не меняется.

На рис. 2 приведены графики зависимости от времени для усредненных по площади температур наиболее сильно нагреваемых частей. Видно, что наиболее сильно нагревается двигатель в области критического сечения; его теплоизоляция снижает среднюю температуру нижней поверхности ЛА более чем на 500 К, после чего наиболее интенсивное излучение поступает с последней ступени воздухозаборника и рулевых поверхностей. Охлаждение их приводит к дальнейшему снижению суммарных тепловых потоков.

На рис. 3 и 4 (см. вторую сторону обложки) представлены распределения по нижней, наиболее горячей поверхности аппарата значений температуры и интегральной по спектру плотности энергии излучения. Видна значительная неравномер-

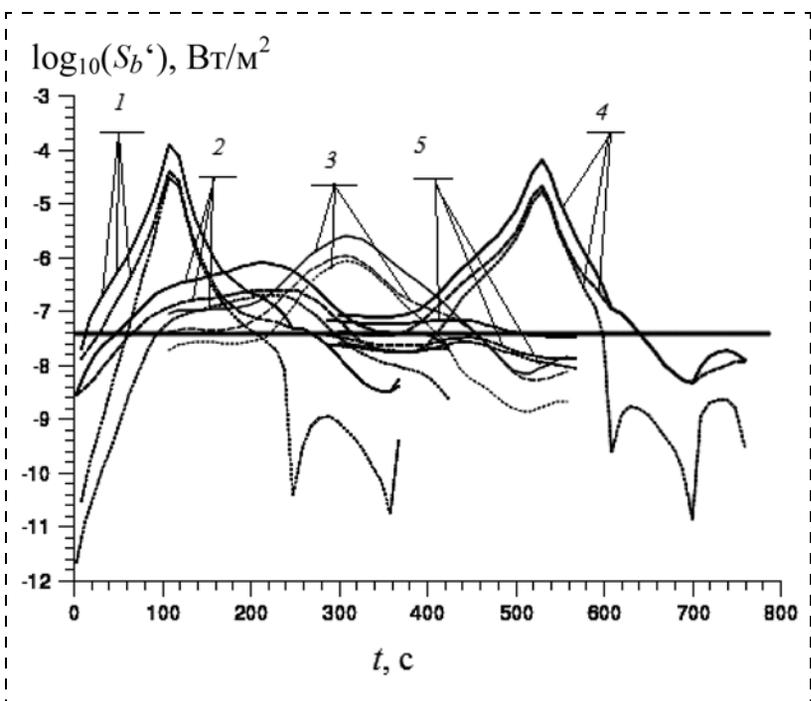


Рис. 5. Плотность потока излучения (в логарифмическом масштабе) в заданном ИК диапазоне с различных точек (указаны цифрами на графиках). Сплошные линии — режим *A* (без изоляции и охлаждения), штриховые — режим *B* (теплоизоляция двигателя), пунктирные — режим *C* (теплоизоляция двигателя и охлаждение воздухозаборника и крыльев). Горизонтальная линия — граница регистрации ИК приемником 3-го поколения

ность нагрева, требующая учета при определении интенсивности регистрируемого инфракрасного излучения.

На рис. 5 показаны временные зависимости ИК сигналов, поступающих в точки регистрации при полете аппарата при различных мерах по снижению температуры. В таблице сведены данные по дальности обнаружения ЛА с учетом заданного уровня чувствительности и режима сканирования. При режиме *A* в точках 3,4,5 ЛА обнаруживается сразу после появления из-за горизонта, а в точках 1 и 2 — позже; расстояние регистрации в точке 1 значительно меньше, чем в точке 5, хотя обе они находятся прямо по курсу аппарата. Частично это объясняется тем, что при подлете к точкам 1 и 2 поверхность ЛА еще не успела нагреться.

Дальность обнаружения ЛА, км

Вариант	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4	Точка 5
<i>A</i>	213	415	522	559	554
<i>B</i>	171	373	499	—	362
<i>C</i>	105	310	248	—	265

При режимах *B* и *C* тепловые потоки значительно ниже, чем при режиме *A*; в результате приемники 1, 2, 3 и 5 зарегистрировали аппарат значительно позже, а приемник 4 не зарегистрировал вообще — он расположен слишком далеко от курса ЛА.

Разница в регистрации аппарата связана также с тем, что существенным для дальности обнаружения оказалось то, на какой фазе полета аппарат подходит к среднестатистической границе регистрации. На фазе подъема, когда аппарат нагрелся в нижних слоях атмосферы и повернулся к данному ИК приемнику своей нижней наиболее горячей

частью, дальность обнаружения минимальна. На фазе спуска, когда аппарат несколько охладился, а его нижняя часть скрыта от приемника, дальность обнаружения максимальна. Таким образом, подбирая соответствующую фазу полета при приближении к данному приемнику, можно значительно затянуть момент обнаружения.

Имеет значение также расстояние от приемника до курса аппарата: кроме большего удаления от аппарата, играет роль тот факт, что боковые поверхности относительно холодные и излучают меньше, а нагретые нижние части видны под более острыми углами.

Из приведенных данных также следует эффективность вышеописанных мер по снижению ИК излучения аппарата (теплоизоляция двигателя, охлаждение воздухозаборников и рулевых поверхностей).

Таким образом, снижение дальности обнаружения аппарата по собственному ИК излучению может достигаться как специальными техническими решениями, так и выбором траектории и режима полета.

Список литературы

1. **Коротеев А. С.** О возможном использовании неравновесной плазмы для снижения радиовидимости летательных аппаратов // Полет. 2000. № 12. С. 3—6.
2. **Головин А. И., Бармин А. А.** О применении неравновесного плазменного образования как средства изменения эффективной поверхности рассеяния объекта // Полет. 2005. № 9. С. 23—27.
3. **Haffa R. P., Patton J. H.** Analogs of Stealth // Comparative Strategy. V. 10, N 3. P. 257—271.
4. **Yue T.** Detection of the B-2 Stealth Bomber and a Brief History on "Stealth" // The Tech. 2001. V. 121, Iss. 63: Friday, November 30. P. 7.
5. **Чувашева Е. С., Чувашев С. Н., Зорина И. Г.** Комплексная математическая модель для концептуального проектирования высокоскоростных летательных аппаратов // Информационные технологии. 2012. № 11 (195). С. 10—14.
6. **Теплотехника** / А. М. Архаров, С. И. Исаев, И. А. Кожин и др. Под ред. В. И. Крутова. М.: Машиностроение, 1986. 426 с.

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.*

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Т. В. Пчелкина.*

Сдано в набор 26.02.2014. Подписано в печать 15.04.2014. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН514. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".

119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.