

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 2 (155)

Февраль

2014

## Редакционный совет:

АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.  
КАЛЯЕВ И. А., чл.-корр. РАН, проф.  
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.  
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.  
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.  
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.  
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.  
СИРОТКИН О. С., чл.-корр. РАН, проф.  
СОЙФЕР В. А., чл.-корр. РАН, проф.  
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.  
ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

## Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

## Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.  
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.  
ЮЩЕНКО А. С., д. т. н., проф.

## Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

## Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.  
АНТОНОВ Б. И.  
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.  
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.  
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.  
ВОСТРИКОВ А. С., д. т. н., проф.  
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В., д. т. н., проф.  
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.  
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.  
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.  
КУЗЬМИН Н. Н., к. т. н., доц.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.  
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.  
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.  
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс., с. н. с.  
ТИМОФЕЕВ А. В., д. т. н., проф.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.  
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.  
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.  
ШАЛОБАЕВ Е. В., к. т. н., доц.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

## Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Барабанов А. Т.** Метод А. Н. Крылова в задаче построения модели линейной системы в области изображений . . . . . 3
- Ахметсафин Р. Д., Ахметсафина Р. З.** О реализации линейризующего компенсатора для одного класса нелинейных моделей . . . . . 14
- Кириллов Н. П.** Метод комбинированного концептуального моделирования технических систем . . . . . 18
- Хорошавин В. С., Зотов А. В., Иштуinov Д. В.** Исследование эффективности систем управления нелинейным динамическим объектом второго порядка с экстремальной статической характеристикой . . . . . 23

### ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ, ДИАГНОСТИКИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

- Жернаков С. В., Равилов Р. Ф.** Вычисление параметров масляной системы авиационного ГТД на основе технологии нейронных систем . . . . . 29
- Самигулина Г. А., Самигулина З. И.** Сбор данных с реального объекта и организация информационного обмена с интеллектуальной системой управления на основе искусственных иммунных сетей . . . . . 35

### ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

- Герман-Галкин С. Г., Загашвили Ю. В.** Энергосберегающие стенды для комплексных испытаний электроприводов . . . . . 39

### ЭРГАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Матюшев Т. В., Дворников М. В., Кукушкин Ю. А., Богомолов А. В.** Управление длительностью десатурации членов экипажа пилотируемых космических объектов с использованием математического моделирования . . . . . 45

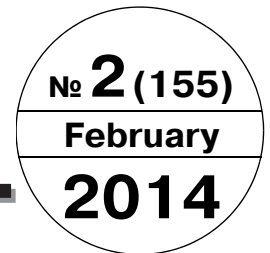
### Журнал в журнале "УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

- Лавров А. О., Петров В. В., Федунев Б. Е.** Оперативное конструирование двумерной траектории выхода подвижного объекта в заданную точку с заданным курсом. Часть 1 . . . . . 54
- Правило М. Н., Нестеров В. А., Беляев А. Н.** Анализ адаптивной замкнутой системы отделения авиационных средств поражения. Часть 1 . . . . . 60
- Старовойтов Е. И., Савчук Д. В.** Использование геометрических искажений изображения, формируемого КМОП-фотоприемником, для контроля скорости сближения космических аппаратов . . . . . 66
- Жук А. С.** Численно-аналитический метод построения области достижимости движения судна . . . . . 69

*Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 ANSHAKOV G. P., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 BOLOTNIK N. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 VASILYEV S. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 KALYAEV I. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 KRASNEVSKIY L. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 KUZNETSOV N. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 LEONOV G. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 MATVEENKO A. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 MIKRIN E. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 PESHEKHONOV V. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 REZCHIKOV A. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SEBRYAKOV G. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SIGOV A. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 SIROTKIN O. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SOJFER V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SOLOVJEV V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SOLOMENTSEV Yu. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 FEDOROV I. B., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 CHENTSOV A. G., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 CHERNOUSKO F. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 SCHERBATYUK A. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 YUSUPOV R. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.

**Editor-in-Chief:**

FILIMONOV N. B., Dr. Sci. (Tech.), prof.

**Deputy Editor-in-Chief:**

PODURAEV Yu. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 PUTOV V. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 YUSCHENKO A. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ALEXANDROV V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 ANTONOV B. I.  
 ARSHANSKY M. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 BUKOV V. N., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 VITTIKH V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 VOSTRIKOV A. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 GOLUBYATNIKOV I. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 GRADETSKY V. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 IVCHENKO V. D., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 ILYASOV B. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 KOLOSOV O. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 KOROSTELEV V. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 KUZMIN N. N., Cand. Sci. (Tech.), ass. prof.  
 LEBEDEV G. N., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 LOKHIN V. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 PAVLOVSKY V. E., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.  
 PROKHOROV N. L., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 RAPOPORT E. Ya., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SERGEEV S. F., Dr. Sci. (Psychol.), prof.  
 TIMOFEEV A. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 FILARETOV V. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 FRADKOV A. L., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 FURSOV V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.  
 SHALOBAYEV E. V., Cand. Sci. (Tech.), ass. prof.  
 YUREVICH E. I., Dr. Sci. (Tech.), prof.

**Editorial Staff:**

GRIGORIN-RYABOVA E.V.

### CONTENTS

#### METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Barabanov A. T.** Academician Krylov Method in the Problem of Linear Model Construction in the Region of Images . . . . . 3  
**Akhmetsafin R. D., Akhmetsafina R. Z.** Linearization for a Class of Nonlinear Models . . . . . 14  
**Kirillov N. P.** Method of the Combined Conceptual Modelling of Technical Systems . . . . . 18  
**Khoroshavin V. S., Zotov A. V., Ishutinov D. V.** Research of Efficiency of Control Systems of Nonlinear Second-Order Dynamic Objects with Extreme Static Characteristic . . . . . 23

#### INTELLECTUAL TECHNOLOGIES IN THE PROBLEM OF CONTROL, DIAGNOSTICS AND INFORMATION PROCESSING

- Zhernakov S. V., Ravilov R. F.** Calculation of Oil System Parameters of Aviation GTE on the Basis of Neural Network Technology . . . . . 29  
**Samigulina G. A., Samigulina Z. I.** Data Collection from Real Object and the Organization of the Peering with the Intellectual Control System on the Basis of Artificial Immune Systems . . . . . 35

#### EXECUTORY ELEMENTS OF THE MECHATRONIC SYSTEMS

- German-Galkin S. G., Zagashvili J. V.** Energy-saving stands for integrated test drives. . . 39

#### ERGATIC SYSTEMS

- Matyushev T. V., Dvornikov M. V., Kukushkin Yu. A., Bogomolov A. V.** Managing the Duration of Desaturation Crew Manned Space Objects Using Mathematical Modeling. . . 45

#### Journal within journal

#### "CONTROL AND INFORMATICS IN THE AEROSPACE AND MARINE SYSTEMS"

- Lavrov A. O., Petrov V. V., Fedunov B. E.** The operative design of the trajectory on the plane for the leaving of the object in the given point with the given course. Part 1 . . . . . 54  
**Pravidlo M. N., Nesterov V. A., Belyaev A. N.** The Analysis of the Adaptive Closed-Loop Ejection System of Stores. Part 1 . . . . . 60  
**Starovoitov E. I., Savchuk D. V.** Using of the Geometric Distortion of the Image, Generated by the CMOS-Photodetectors for Evaluation of Speed of Approach of Space Vehicles. . . 66  
**Zhuk A. S.** Construction of Reachable Sets of Ship's Movement . . . . . 69

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtek.ru](mailto:mech@novtek.ru)

УДК 62-50

**А. Т. Барабанов**, д-р техн. наук, проф., atbarabanov@gmail.com,  
Севастопольский национальный технический университет

## Метод А. Н. Крылова в задаче построения модели линейной системы в области изображений

*Рассматривается задача представления изображений решений линейной стационарной системы с помощью минимальных многочленов пространства ее состояний. На этой основе предлагается обобщение метода А. Н. Крылова, позволяющее в бездетерминантной форме получить полное описание собственных движений и реакций системы. В сочетании с эффективной процедурой построения минимальных многочленов предлагаемый подход расширяет возможности исследований систем большой размерности, в особенности с применением компьютерных технологий.*

**Ключевые слова:** вековой определитель, минимальный многочлен, преобразование Лапласа, полная модель системы, аннулирующая редукция

**A. T. Barabanov**

## Academician A. N. Krylov Method in the Problem of Linear Model Construction in the Region of Images

*The problem of image representation of solutions of the linear stationary system with minimal polynomials of the state space is considered. On this basis, a generalization of the A. N. Krylov, allowing in the non determinant form of a complete description of eigen-movements and reactions of the system. In combination with an effective procedure for constructing the minimal polynomials of the proposed approach extends the possibilities of large-scale systems research in particular with the application of computer technology.*

**Keywords:** age-old determinant, minimal polynomial, Laplace transform, complete model of the system, diriment reduction

### Введение

Пусть рассматривается линейная стационарная система, заданная во временной области уравнениями состояния и выходов

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  — вектор состояния,  $u(t) \in R^m$  — вектор входов (управляющих или возмущающих воздействий),  $y(t) \in R^l$  — вектор выходов,  $A$  —  $(n \times n)$ -мерная заданная матрица коэффициентов,  $B$  —  $(n \times m)$ -мерная матрица распределения входов,  $C$  —  $(l \times n)$ -мерная матрица выходов.

Преобразование Лапласа системы (1) приводит в области изображений к соотношению

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}v(s), \quad v(s) = Bu(s) + x_0. \quad (2)$$

Формирование представления для обратной матрицы

$$(sI - A)^{-1} = P(s)/\Delta(s), \quad (3)$$

где  $\Delta(s) = \det(sI - A)$  — характеристический определитель системы, а  $P(s)$  — присоединенная (многочленная) матрица системы, представляет собой основную часть дальнейшей задачи построения изображения  $y(s)$ .

Вычисление элементов представления (3) выполняется либо с помощью миноров характеристической матрицы, включая характеристический определитель (формулы Крамера), либо методом Фаддеева—Леверье. С повышением размерности системы сложность вычислений быстро возрастает. К тому же задача усложняется при необходимости устранения общих нулей числителя и знаменателя представления (3), т. е. приведения его к виду

$$P(s)/\Delta(s) = \Pi(s)/D(s), \quad (4)$$

где  $\Pi(s)$  — приведенная присоединенная матрица,  $D(s)$  — минимальный многочлен матрицы  $A$ .

Сказанное мотивирует поиск новых подходов к решению задачи, в частности, и к решению задачи преобразования и вычисления характеристического определителя.

В связи с этим отметим, что задача преобразования определителя характеристической матрицы  $(sI - A)$  ("векового" определителя) и ее миноров в соответствующие многочлены давно привлекала внимание исследователей [1–3].

Академик А. Н. Крылов [1] указал удобную для вычислений форму векового определителя. В основе его метода — преобразование системы линейных дифференциальных уравнений: первое (или какое-нибудь другое) уравнение системы последовательно дифференцируется с исключением производных в

правых частях в силу уравнений системы. В операционной форме эта процедура, рассмотренная в работе [2], выглядит следующим образом. Для наглядности примем  $n = 3$  (общий случай рассматривается аналогично). Пусть исходная система записана в виде

$$\begin{aligned} sx_1(s) &= a_{11}x_1(s) + a_{12}x_2(s) + a_{13}x_3(s) + X_1(s), \\ sx_2(s) &= a_{21}x_1(s) + a_{22}x_2(s) + a_{23}x_3(s) + X_2(s), \\ sx_3(s) &= a_{31}x_1(s) + a_{32}x_2(s) + a_{33}x_3(s) + X_3(s). \end{aligned} \quad (5)$$

Умножая на  $s$  первое уравнение и используя для произведений  $sx_1(s)$ ,  $sx_2(s)$ ,  $sx_3(s)$  правые части исходной системы, получим второе уравнение преобразованной системы. Поступая с этим уравнением таким же образом, получим третье уравнение преобразованной системы. В итоге будем иметь следующие уравнения преобразованной системы:

$$\begin{aligned} sx_1(s) &= a_{11}^{(1)}x_1(s) + a_{12}^{(1)}x_2(s) + a_{13}^{(1)}x_3(s) + X_1^{(1)}(s), \\ s^2x_1(s) &= a_{11}^{(2)}x_1(s) + a_{12}^{(2)}x_2(s) + a_{13}^{(2)}x_3(s) + X_1^{(2)}(s), \\ s^3x_1(s) &= a_{11}^{(3)}x_1(s) + a_{12}^{(3)}x_2(s) + a_{13}^{(3)}x_3(s) + X_1^{(3)}(s). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= a_{11}, \quad a_{12}^{(1)} = a_{12}, \quad a_{13}^{(1)} = a_{13}; \\ a_{1j}^{(k)} &= a_{11}^{(k-1)}a_{1j} + a_{12}^{(k-1)}a_{2j} + a_{13}^{(k-1)}a_{3j}, \\ &k = 2, 3; j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Определитель А. Н. Крылова преобразованной системы имеет вид

$$\Delta^*(s) = \begin{vmatrix} s - a_{11}^{(1)} & -a_{12}^{(1)} & -a_{13}^{(1)} \\ s^2 - a_{11}^{(2)} & -a_{12}^{(2)} & -a_{13}^{(2)} \\ s^3 - a_{11}^{(3)} & -a_{12}^{(3)} & -a_{13}^{(3)} \end{vmatrix}.$$

В отличие от определителя  $\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  и его миноров параметр  $s$  входит только в элементы первого столбца. Поэтому построение многочлена  $\Delta^*(s)$  сводится к вычислению числовых определителей разложением определителя  $\Delta^*(s)$  по элементам первого столбца.

Эффективную алгебраическую интерпретацию метода А. Н. Крылова предложил Ф. Р. Гантмахер [3]. Вычисление определителя А. Н. Крылова реализуется в виде построения минимального многочлена вектора с помощью циклического преобразования последнего матрицей  $\mathbf{A}$  коэффициентов системы. Если степень минимального многочлена выбранного вектора совпадает со степенью характеристического многочлена (так называемый регулярный случай), то все три многочлена — минимальный, характеристический и А. Н. Крылова — тождественно совпадают. В противном же случае минимальный многочлен оказывается лишь одним из делителей характеристического и, естественно, не позволяет его определить.

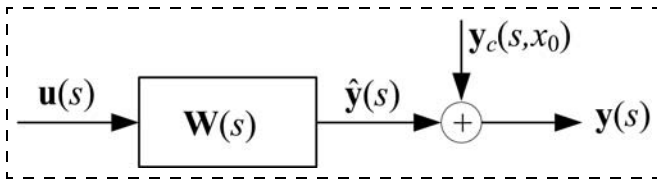
Ф. Р. Гантмахер заключает, что метод Д. К. Фаддеева более общий, поскольку позволяет определить характеристический многочлен в любом случае. С этим нельзя не согласиться, если речь идет о методах построения характеристического многочлена. Однако в более общей задаче анализа линейной динамической системы такое заключение можно принять не в полной мере.

Поясним это на примере рассмотренной выше системы. Нерегулярность случая при ее анализе может проявиться в том, что числовые столбцы определителя (второй и третий)  $\Delta^*(s)$  окажутся линейно зависимыми. В этом случае  $\Delta^*(s)$  тождественно равен нулю. В уравнения преобразованной системы некоторые переменные входят в одной и той же линейной комбинации и могут быть исключены из части уравнений (см. далее раздел 6). В представлениях для изображений переменных оказываются многочлены (знаменатели рациональных функций) степеней, меньших порядка системы. Таким образом, в этом случае представление решений системы (изображений) может быть получено и без характеристического многочлена<sup>1</sup>. Его роль выполняют в этом случае другие многочлены. Можно ожидать в соответствии с известными положениями (см. например, [3]), что ими будут некоторые минимальные или аннулирующие многочлены векторов и матриц системы. Для конструктивных заключений необходим соответствующий формализм, определяющий роль минимальных многочленов в представлениях изображений решений системы. В методе А. Н. Крылова подобный общий формализм практически не указан, хотя, по-видимому, имелся в виду. Не указывается он и в работе [2], хотя в ней и рассматривается задача построения изображений решения системы с особенностью  $\Delta^*(s) \equiv 0$  для примера А. Н. Крылова, а также и в работе [3].

## 1. Постановка задачи

В данной работе ставится и решается задача построения такого формализма, причем без матрично-матричных операций, как в алгоритме Фаддеева—Леверрье, в сочетании с эффективным алгоритмом построения реализующих его минимальных многочленов. Благодаря этому определенные совокупности минимальных многочленов (например, базисных векторов пространства состояний или векторов-столбцов матрицы распределения входов) становятся фундаментальными элементами представления любых процессов в системе (собственного и вынужденного движений), а методы построения и анализа минимальных многочленов — эффективными методами анализа линейных динамических систем. Поскольку эти методы свободны от необ-

<sup>1</sup> Представления, основанные на характеристическом многочлене, сохраняют, конечно, силу, становясь избыточными — они содержат общие множители в числителях и знаменателях соответствующих рациональных функций.



Полная модель системы в изображениях

ходимости детерминантных преобразований, их можно охарактеризовать как бездетерминантные.

Конечной целью построений является полная модель в области изображений системы (1), показанная на рисунке, где

$$\hat{y}(s) = W(s)u(s) \quad (7)$$

— реакция системы на воздействие  $u(s)$  (процесс при ненулевом воздействии и нулевых начальных условиях  $x_0 = 0$ );

$$y_c(s, x_0) = Y(s)x_0 \quad (8)$$

— собственное движение системы (процесс при нулевом воздействии  $u = 0$  и ненулевых начальных условиях).

Таким образом, построение модели, представленной на рисунке, заключается в определении рациональных функций  $W(s)$ ,  $Y(s)$  — передаточных функций системы по воздействиям и начальным возмущениям, точнее, матричных функций размерности  $l \times m$  и  $l \times n$  соответственно.

Наряду с изображением (2) заданного выхода будем рассматривать также изображение  $x(s)$  вектора состояния

$$x(s) = (sI - A)^{-1}v(s), \quad v(s) = Bu(s) + x_0, \quad (9)$$

а также изображение  $R(s)$  переходной матрицы системы  $\Phi(t) = \exp At$ . В силу уравнений

$$d\Phi(t)/dt = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I \quad (10)$$

имеем

$$R(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (11)$$

Рациональную матрицу  $R(s)$  называют резольвентой системы (точнее резольвентным оператором). Для нее справедливо равенство

$$AR(s) = R(s)A. \quad (12)$$

Его легко получить в силу экспоненциального представления переходной матрицы, следующего из (10), а также рассматривая матрицу

$$X(s) = (sI - A)^{-1}A - A(sI - A)^{-1}.$$

Домножением равенства слева и справа на  $(sI - A)$  находим  $X(s) = 0$  для  $\forall s \neq \lambda$ , где  $\lambda$  — корень характеристического многочлена  $\det(sI - A)$  матрицы  $A$ .

В силу (11) для резольвенты имеет место равенство

$$sR(s) = R(s)A + I. \quad (13)$$

Будем рассматривать также подобное равенство для изображения вектора состояния

$$sx(s) = Ax(s) + v(s), \quad v(s) = Bu(s) + x_0. \quad (14)$$

Изображения (9), (11) являются "скрытой" частью модели (см. рисунок) и входят в поставленную задачу построения полной модели системы (1) в области изображений.

Отметим нетривиальность задачи, обусловленную тем, что ее решение по постановке не должно содержать определителей и матрично-матричных операций умножения и сложения.

## 2. Полиномиальные тождества для изображений решений системы

Напомним определения и отметим необходимые для дальнейшего изложения свойства аннулирующих и минимальных многочленов [3]. Пусть рассматривается пространство состояний системы  $R^n$  с базисом  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**Определение 1.** Многочлен

$$\delta(s) = s^p + \delta_1 s^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} s + \delta_p \quad (15)$$

называют аннулирующим многочленом матрицы  $A$  (аннулирующим многочленом пространства  $R^n$  относительно матрицы  $A$ ), если

$$\delta(A) = A^p + \delta_1 A^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} A + \delta_p I = 0, \quad (16)$$

где  $I$  — единичная матрица. Многочлен  $D(s)$  минимальной степени в множестве аннулирующих многочленов матрицы  $A$  называют минимальным многочленом матрицы  $A$ .

*Замечание 1.* Характеристический многочлен  $\Delta(s) = \det(sI - A)$  матрицы  $A$  является ее аннулирующим многочленом (теорема Кели — Гамильтона).

**Определение 2.** Пусть  $\ell \in R^n$  и  $\ell^k = A\ell^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ ;  $\ell^0 = \ell$ . Условимся в обозначении для многочлена (15)

$$\delta(\ell) = \ell^p + \delta_1 \ell^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} \ell + \delta_p \ell = \delta(A)\ell. \quad (17)$$

Многочлен (15) называют аннулирующим многочленом вектора  $\ell$  (относительно матрицы  $A$ ), если  $\delta(\ell) = \delta(A)\ell = 0$ . Многочлен минимальной степени во множестве аннулирующих многочленов вектора  $\ell$  называют его минимальным многочленом.

*Замечание 2.* Пусть определены минимальные многочлены  $\delta_1(s), \delta_2(s), \dots, \delta_n(s)$  базисных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $R^n$  соответственно. Тогда их наименьшее общее кратное (НОК) является минимальным многочленом  $D(s)$  матрицы  $A$ :

$$D(s) = \text{НОК}(\delta_1(s), \dots, \delta_n(s)).$$

*Замечание 3.* Пусть  $\delta(s)$  — минимальный многочлен вектора  $\ell \in R^n$ . В тройке многочленов

$$\Delta(s), D(s), \delta(s)$$

последующий многочлен является делителем предшествующих.

*Замечание 4.* Аннулирующий многочлен матрицы  $A$  является также и аннулирующим многочленом вектора  $\ell \in R^n$ .

Теперь перейдем к основному вопросу раздела.

**Утверждение 1.** Для всякого многочлена (15) имеют место тождества

$$\sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(\mathbf{A})s^k \quad (18)$$

и

$$\sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\ell^k = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(\ell)s^k, \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(s) &= s^{p-1} + \delta_1 s^{p-2} + \dots + \delta_{p-2} s + \delta_{p-1}, \\ \delta_2(s) &= s^{p-2} + \delta_1 s^{p-3} + \dots + \delta_{p-3} s + \delta_{p-2}, \\ \dots & \dots \\ \delta_k(s) &= s^{p-k} + \delta_1 s^{p-k-1} + \dots + \delta_{p-k-1} s + \delta_{p-k}, \\ \dots & \dots \\ \delta_{p-1}(s) &= s + \delta_1, \\ \delta_p(s) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Тождество (18) (см. (16)) проверяется перегруппировкой слагаемых, причем принимается  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ ,  $\delta_p(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Тождество (19) следует из соотношений (17) и (18) в силу равенства  $\ell^k = \mathbf{A}^k \ell$ .

Многочлены (20) будем называть сопутствующими многочленами к  $\delta(s)$ .

Далее с помощью соотношения (14) запишем следующие равенства:

0.  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s)$ .
1.  $s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{v}(s)$ .
2.  $s^2\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(s) + (\mathbf{A} + s\mathbf{I})\mathbf{v}(s)$ .
- .....
- p.  $s^p\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}^p\mathbf{x}(s) + (\mathbf{A}^{p-1} + s\mathbf{A}^{p-2} + \dots + s^{p-2}\mathbf{A} + s^{p-1}\mathbf{I})\mathbf{v}(s)$ .

Умножая равенства в обозначенном порядке на  $\delta_p, \delta_{p-1}, \delta_{p-2}, \dots, \delta_0 = 1$  соответственно, складывая левые и правые части и принимая во внимание (18), получим полиномиальное тождество для вектора состояния системы (1)

$$\begin{aligned} \delta(s)\mathbf{x}(s) &= \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\mathbf{A}^k\mathbf{v}(s) + \delta(\mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(\mathbf{A})s^k\mathbf{v}(s) + \delta(\mathbf{A})\mathbf{x}(s). \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогичным образом с помощью соотношения (13) получаем полиномиальное тождество для резольвенты

$$\begin{aligned} \delta(s)\mathbf{R}(s) &= \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\mathbf{A}^k + \mathbf{R}(s)\delta(\mathbf{A}) = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(\mathbf{A})s^k + \mathbf{R}(s)\delta(\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (22)$$

*Замечание 5.* В силу соотношения (12) имеем  $\mathbf{A}^2\mathbf{R}(s) = \mathbf{A}\mathbf{R}(s)\mathbf{A} = \mathbf{R}(s)\mathbf{A}^2, \dots$ , в силу чего имеет место соотношение

$$\delta(\mathbf{A})\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}(s)\delta(\mathbf{A}). \quad (23)$$

### 3. Построение полной модели системы (1) в области изображений по ее минимальным многочленам

**3.1. Резольвента системы.** Для начала заметим следующее. Пусть  $\ell \in R^n$  и  $\delta(s) = s^p + \delta_1 s^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} s + \delta_p$  — минимальный многочлен вектора  $\ell$ . Тогда согласно определению 2

$$\delta(\ell) = \ell^p + \delta_1 \ell^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} \ell^1 + \delta_p \ell^0 = 0,$$

где

$$\ell^k = \mathbf{A}\ell^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, p-1; \quad \ell^0 = \ell. \quad (24)$$

Векторы  $\ell^0, \ell^1, \dots, \ell^{p-1}$  линейно независимы (в противном случае имели бы минимальный многочлен степени  $< p-1$ ).

Имеет место следующее общее положение.

**Лемма.** Пусть  $\delta(s)$  — минимальный многочлен вектора  $\ell \in R^n$ ,  $\delta_k(s), k = 1, 2, \dots, p$ , — его сопутствующие многочлены (20), по которым согласно (24) определен векторный многочлен

$$\Psi(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\ell^k \quad (25)$$

с компонентами  $\Psi_1(s), \Psi_2(s), \dots, \Psi_n(s)$ .

Тогда

- 1) взаимно проста совокупность многочленов  $\Psi_1(s), \Psi_2(s), \dots, \Psi_n(s)$ ;
- 2) взаимно проста также и совокупность многочленов  $\delta(s), \Psi(s)$ .

*Замечание 6.* Здесь и далее совокупность многочленов называем взаимно простой, если она не имеет нетривиального общего делителя.

*Доказательство.* Если утверждение 1 не верно, то существует общий делитель этих многочленов. Пусть  $\zeta$  — какой-либо корень многочлена-делителя. Тогда  $\Psi(\zeta) = 0$ . Но в правой части равенства (25) сопутствующие многочлены при всяком  $s$  не обращаются все вместе в нуль (хотя бы потому, что  $\delta_p(s) \equiv 1$ ). Следовательно, по правой части  $\Psi(\zeta) \neq 0$ , так как векторы (24) линейно независимы. Это противоречие доказывает утверждение 1 леммы. Наконец, к этому можно добавить, что также и для всякого корня  $\lambda$  многочлена  $\delta(s)$  будем иметь  $\Psi(\lambda) \neq 0$ , что доказывает справедливость утверждения 2.

Лемма доказана.

**Теорема 1.** Справедливы следующие утверждения.

- 1) пусть

$$D(s) = s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_{r-1} s + a_r, \quad r \leq n$$

— минимальный многочлен матрицы  $\mathbf{A}$ , и  $D_k(s), k = 1, 2, \dots, r$ , — его сопутствующие многочлены (в (20) положим  $\delta = D$ ).

Тогда имеет место следующее представление для резольвенты системы (11):

$$D(s)\mathbf{R}(s) = \sum_{k=0}^{r-1} D_{k+1}(s)\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{r-1} D_{k+1}(\mathbf{A})s^k; \quad (26)$$

2) пусть  $\mathbf{e}_j = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T, j = 1, 2, \dots, n$ , — единичный вектор в  $R^n$ , и пусть  $\delta^j(s) = s^{P_j} + \delta_1^j s^{P_j-1} + \dots + \delta_{P_j-1}^j s + \delta_{P_j}^j$  — его минимальный многочлен с сопутствующими многочленами  $\delta_k^j(s), k = 1, 2, \dots, p$ .

Тогда для  $j$ -го вектор-столбца резольвенты

$$\mathbf{R}(s) = [\mathbf{R}_1(s)|\mathbf{R}_2(s)|\dots|\mathbf{R}_n(s)] \quad (27)$$

имеет место представление

$$\delta^j(s)\mathbf{R}_j(s) = \sum_{k=0}^{P_j-1} \delta_{k+1}^j(s)\mathbf{e}_j^k = \sum_{k=0}^{P_j-1} \delta_{k+1}^j(\mathbf{e}_j)s^k, \quad j \in \overline{1, n}; \quad (28)$$

3) пусть согласно (28) вектор-столбец резольвенты записан в виде

$$\mathbf{R}_j(s) = \mathbf{E}_j(s)/\delta^j(s), \quad (29)$$

где вектор-столбец многочленов  $\mathbf{E}_j(s)$  определен как

$$\mathbf{E}_j(s) = \sum_{k=0}^{P_j-1} \delta_{k+1}^j(s)\mathbf{e}_j^k = \sum_{k=0}^{P_j-1} \delta_{k+1}^j(\mathbf{e}_j)s^k \quad (30)$$

с компонентами  $\varepsilon_j^1(s), \varepsilon_j^2(s), \dots, \varepsilon_j^n(s)$ .

Тогда: 1) взаимно проста совокупность многочленов  $\varepsilon_j^1(s), \varepsilon_j^2(s), \dots, \varepsilon_j^n(s)$ ;

2) взаимно проста совокупность многочленов  $\delta^j(s), \mathbf{E}_j(s)$ .

*Доказательство.*

По п. 1 теоремы. Положим в (22)  $\delta(s) = D(s)$ . Тогда, поскольку  $D(\mathbf{A}) = 0$ , с учетом (23) получаем (26).

По п. 2 теоремы. Положим в (22)  $\delta(s) = \delta^j(s)$  и умножим равенства справа на вектор  $\mathbf{e}_j$ . Тогда, поскольку  $\delta^j(\mathbf{A})\mathbf{e}_j = \delta^j(\mathbf{e}_j) = 0$  (см. определение 2) и  $\mathbf{R}(s)\mathbf{e}_j = \mathbf{R}_j(s)$ , учитывая (19), получаем соотношение (28).

По п. 3 теоремы. Утверждение следует из леммы. Теорема 1 доказана.

*Замечание 7.* Из (4), (11) и (26) следует, что

$$\mathbf{\Pi}(s) = \sum_{k=0}^{r-1} D_{k+1}(s)\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{r-1} D_{k+1}(\mathbf{A})s^k$$

— приведенная присоединенная матрица системы (1). Действительно, заметим, что  $\sum_{k=0}^{r-1} c_k \mathbf{A}^k = 0$

тогда и только тогда, когда  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . Иначе бы существовал минимальный многочлен матрицы  $\mathbf{A}$  степени меньшей, чем  $r$  в исходной ссылке. Далее, как отмечено в лемме, сопутствующие многочлены при всяком  $s$  не обращаются все вместе

в нуль. В силу этого  $\mathbf{\Pi}(s) \neq 0$  при всяком  $s$ , т. е. множество всех элементов матрицы  $\mathbf{\Pi}(s) = \{\mathbf{\Pi}_{ij}(s)\}_1^n$  взаимно просто. Наконец, матрица  $\mathbf{\Pi}(s)$  и многочлен  $D(s)$  также взаимно просты, поскольку для всякого корня  $\lambda$  этого многочлена  $\mathbf{\Pi}(\lambda) \neq 0$ .

*Замечание 8.* Поскольку (см. замечание 2)

$$D(s) = \text{НОК}(\delta^1(s), \delta^2(s), \dots, \delta^n(s)),$$

то

$$D(s) = c^j(s)\delta^j(s), j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $c^j(s)$  — многочлены, формируемые при построении НОК.

Тогда из (27), (29) следует

$$\mathbf{R}(s) = \frac{1}{D(s)} [c^1(s)\mathbf{E}_1(s)|c^2(s)\mathbf{E}_2(s)|\dots|c^n(s)\mathbf{E}_n(s)].$$

Таким образом, имеет место представление приведенной присоединенной матрицы

$$\mathbf{\Pi}(s) = [c^1(s)\mathbf{E}_1(s)|c^2(s)\mathbf{E}_2(s)|\dots|c^n(s)\mathbf{E}_n(s)].$$

Здесь совокупность многочленов  $c^k(s), k = 1, 2, \dots, n$ , также взаимно проста.

**3.2. Реакция одномерной системы на воздействие** ( $\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{x}_0 = 0$ ). Обратимся сначала к случаю одномерной модели

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}, \mathbf{b} \in R^n, \mathbf{c} \in R^n; \mathbf{x} \in R^n, u \in R^1, y \in R^1$ , и рассмотрим задачу представления реакции по переменным состояниям в изображениях

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{W}_x(s)u(s).$$

Другими словами, рассмотрим задачу построения вектора передаточных функций по переменным состояниям системы (31).

**Теорема 2.** Пусть определен минимальный многочлен вектора  $\mathbf{b}$

$$\delta(s) = s^p + \delta_1 s^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} s + \delta_p, p \leq n, \quad (32)$$

а также векторы

$$\mathbf{b}^k = \mathbf{A}\mathbf{b}^{k-1}, k = 1, 2, \dots, p-1; \mathbf{b}^0 = \mathbf{b}. \quad (33)$$

Тогда: 1) для вектора передаточных функций справедливо представление

$$\mathbf{W}_x(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\mathbf{b}^k/\delta(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(\mathbf{b})s^k/\delta(s), \quad (34)$$

где  $\delta_{k+1}(s), k = 0, 1, \dots, p-1$ , — сопутствующие многочлены (20) к многочлену (32);

2) совокупность компонент векторного многочлена

$$\mathbf{\beta}(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s)\mathbf{b}^k \quad (35)$$

$\beta_1(s), \beta_2(s), \dots, \beta_n$  взаимно проста;

3) также взаимно проста совокупность многочленов (32), (35);

4) для передаточной функции выхода (7)

$$y(s) = W(s)u(s)$$

справедливо представление

$$w(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s) \mathbf{c}^T \mathbf{b}^k / \delta(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{c}^T \delta_{k+1}(\mathbf{b}) s^k / \delta(s). \quad (36)$$

*Доказательство.* Обратимся к тождеству (21) с  $x_0 = 0$ , т. е. при  $v(s) = bu(s)$ .

Поскольку  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{b}u(s)$ , то  $\delta(\mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \delta(\mathbf{A})\mathbf{R}(s)\mathbf{b}u(s) = \mathbf{R}(s)\delta(\mathbf{A})\mathbf{b}u(s)$ . Но  $\delta(\mathbf{A})\mathbf{b} = 0$ , так как  $\delta(s)$  — минимальный многочлен вектора  $\mathbf{b}$  (см. определение 2). Тогда из (21) получаем

$$\delta(s)\mathbf{x}(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(s) \mathbf{A}^k \mathbf{b} u(s) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{k+1}(\mathbf{A}) s^k \mathbf{b} u(s). \quad (37)$$

Поскольку в силу (33)  $\mathbf{A}^k \mathbf{b} = \mathbf{b}^k$ , из этого с учетом (17) следует (34).

Далее, утверждения п. 2 и п. 3 теоремы следуют из п. 1 и п. 2 леммы соответственно. Наконец, соотношение (36) следует из (34) после умножения равенства на  $\mathbf{c}^T$ .

Теорема 2 доказана.

### 3.3. Реакция многомерной системы на воздействие.

Теперь рассмотрим случай многих входов и выходов. Пусть  $\mathbf{u} \in R^m$  и  $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ . Пусть  $\mathbf{b}_j, j = 1, 2, \dots, m$ , — столбцы матрицы  $\mathbf{B}$ . Тогда можно записать

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{b}_1 u_1 + \mathbf{b}_2 u_2 + \dots + \mathbf{b}_m u_m, \quad (38)$$

где  $u_j, j = 1, 2, \dots, m$ , — компоненты вектора  $\mathbf{u}$ . В силу (38) для изображения вектора состояния  $\mathbf{x}(s)$  аналогично (37) будет иметь место представление

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{R}(s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \sum_{j=1}^m \mathbf{R}(s)\mathbf{b}_j u_j(s) = \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbf{W}_x^j(s) u_j(s) = \mathbf{W}_x(s)\mathbf{u}(s). \end{aligned} \quad (39)$$

Вектор-столбцы в (39)

$$\mathbf{W}_x^j(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{b}_j, j = 1, 2, \dots, m, \quad (40)$$

составляют матрицу передаточных функций системы по состоянию

$$\mathbf{W}_x(s) = [\mathbf{W}_x^1(s) | \mathbf{W}_x^2(s) | \dots | \mathbf{W}_x^m(s)].$$

*Следствие 1.* Пусть  $\delta^j(s)$  — минимальный многочлен вектора  $\mathbf{b}^j$ . Согласно теореме 1, для всякого вектор-столбца матрицы передаточных функций (40) имеет место представление (см. доказательство п. 1 теоремы)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_x^j(s) &= \sum_{k=0}^{p_j-1} \delta_{k+1}^j(s) \mathbf{b}_j^k / \delta^j(s) = \\ &= \sum_{k=0}^{p_j-1} \delta_{k+1}^j(\mathbf{b}^j) s^k / \delta^j(s), j \in \overline{1, m}, \end{aligned}$$

и утверждения, аналогичные п. 2, п. 3 теоремы.

Наконец, для всякого вектор-столбца матрицы передаточных функций выхода (7)

$$\mathbf{W}(s) = [\mathbf{W}_1(s), \mathbf{W}_2(s), \dots, \mathbf{W}_m(s)]$$

имеет место представление

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j(s) &= \mathbf{C}\mathbf{W}_x^j(s) = \sum_{k=0}^{p_j-1} \delta_{k+1}^j(s) \mathbf{C}\mathbf{b}_j^k / \delta^j(s) = \\ &= \sum_{k=0}^{p_j-1} \mathbf{C}\delta_{k+1}^j(\mathbf{b}^j) s^k / \delta^j(s), j \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

**3.4. Собственное движение системы.** Исходим из соотношения для переменных состояния системы (1):

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{x}_0. \quad (41)$$

Тогда для собственного движения на выходе системы получаем представление

$$\mathbf{y}_c(s, \mathbf{x}_0) = \mathbf{C}\mathbf{R}(s)\mathbf{x}_0. \quad (42)$$

Следовательно, искомая в постановке задачи рациональная функция в формуле (8) имеет вид

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{R}(s). \quad (43)$$

Остается заметить, что формулы (41), (42), (43) при необходимости могут быть записаны в развернутом виде по представлениям резольвенты, полученным в разделе 3.1.

## 4. Построение минимального многочлена по производящему вектору А. Н. Крылова [4] пространства состояний системы

Далее производящим вектором будем называть вектор  $\ell \in R^n$ , который выбран для построения элементов модели системы в разделах 3.1—3.3.

Для завершения решения задачи, поставленной в разделе 1, теперь необходимо указать практически эффективный способ построения минимального многочлена производящего вектора.

Итак, пусть рассматривается задача о построении минимального многочлена

$$\delta(s) = s^p + \delta_1 s^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} s + \delta_p \quad (44)$$

заданного вектора  $\ell \in R^n$  относительно матрицы  $\mathbf{A}$ .

По определению  $p$  — наименьшая степень в множестве аннулирующих многочленов вектора  $\ell$ . Это означает, что в силу определения

$$\delta(\ell) = \ell^p + \delta_1 \ell^{p-1} + \dots + \delta_{p-1} \ell^1 + \delta_p \ell = 0, \quad (45)$$

т. е. векторы  $\ell, \ell^1 = \mathbf{A}\ell, \dots, \ell^p = \mathbf{A}^p \ell^{p-1}$  являются линейно независимыми, причем

$$\ell, \ell^1 = \mathbf{A}\ell, \dots, \ell^{p-1} = \mathbf{A}^{p-2} \ell \quad (46)$$

— линейно независимые векторы. В противном случае существовал бы аннулирующий многочлен степени  $p-1$ .

**4.1. Детерминантная форма построения минимального многочлена вектора.** Вследствие того, что векторы  $\ell, \ell^1, \dots, \ell^{p-1}$  — линейно независимы,



в матрице, составленной из компонентов векторов по строкам,

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \\ \ell_1^1 & \ell_2^1 & \dots & \ell_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_1^{p-1} & \ell_2^{p-1} & \dots & \ell_n^{p-1} \end{pmatrix}$$

найдется не равный нулю минор  $p$ -го порядка, скажем

$$M_p = \begin{pmatrix} \ell_{i_1} & \ell_{i_2} & \dots & \ell_{i_p} \\ \ell_{i_1}^1 & \ell_{i_2}^1 & \dots & \ell_{i_p}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_{i_1}^{p-1} & \ell_{i_2}^{p-1} & \dots & \ell_{i_p}^{p-1} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (47)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_p$  — индексы столбцов матрицы, образующих ненулевой минор.

Рассмотрим в координатной форме соотношение (45), выделяя лишь координаты с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_p$ . Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} -\delta_p \ell_{i_1} - \delta_{p-1} \ell_{i_1}^1 - \dots - \delta_1 \ell_{i_1}^{p-1} &= \ell_{i_1}^p, \\ -\delta_p \ell_{i_2} - \delta_{p-1} \ell_{i_2}^1 - \dots - \delta_1 \ell_{i_2}^{p-1} &= \ell_{i_2}^p, \\ \dots & \dots \\ -\delta_p \ell_{i_p} - \delta_{p-1} \ell_{i_p}^1 - \dots - \delta_1 \ell_{i_p}^{p-1} &= \ell_{i_p}^p. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Определитель системы (48) не равен нулю в силу (47) (поскольку  $\det \mathbf{X}^T = \det \mathbf{X}$ ), поэтому коэффициенты минимального многочлена  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$  могут быть найдены как ее решение, например, по формулам Крамера.

Для получения детерминантного представления всего многочлена  $\delta(s)$  вводится [3] дополнительное "неизвестное"  $\delta_0 = 1$ , и равенство (44) присоединяется к системе (48). В результате образуется система

$$\left. \begin{aligned} \ell_{i_1} \delta_p + \ell_{i_1}^1 \delta_{p-1} + \dots + \ell_{i_1}^{p-1} \delta_1 + \ell_{i_1}^p \delta_0 &= 0, \\ \ell_{i_2} \delta_p + \ell_{i_2}^1 \delta_{p-1} + \dots + \ell_{i_2}^{p-1} \delta_1 + \ell_{i_2}^p \delta_0 &= 0, \\ \dots & \dots \\ \ell_{i_p} \delta_p + \ell_{i_p}^1 \delta_{p-1} + \dots + \ell_{i_p}^{p-1} \delta_1 + \ell_{i_p}^p \delta_0 &= 0, \\ 1\delta_p + s\delta_{p-1} + \dots + s^{p-1}\delta_1 + (s^p - \delta(s))\delta_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

однородных уравнений относительно переменных  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p$ .

Система (49) имеет заведомо ненулевое решение ( $\delta_0 = 1, \delta_1, \dots, \delta_p$ ), а значит, равный нулю определитель. Из этого условия, расщепляя последний столбец определителя и представляя его в виде

суммы определителей, после транспонирования находим соотношение

$$M_p \delta(s) = \begin{vmatrix} \ell_{i_1} & \ell_{i_2} & \dots & \ell_{i_p} & 1 \\ \ell_{i_1}^1 & \ell_{i_2}^1 & \dots & \ell_{i_p}^1 & s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_{i_1}^{p-1} & \ell_{i_2}^{p-1} & \dots & \ell_{i_p}^{p-1} & s^{p-1} \\ \ell_{i_1}^p & \ell_{i_2}^p & \dots & \ell_{i_p}^p & s^p \end{vmatrix} \neq 0. \quad (50)$$

Если  $p = n$ , имеем так называемый регулярный случай, т. е. случай линейной независимости векторов  $\ell, \ell^1, \dots, \ell^{n-1}$ . Его идентифицирует неравенство (47) при  $p = n$  и  $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n$ . В этом случае минимальный многочлен вектора  $\ell$  и пространства (матрицы  $\mathbf{A}$ ) тождественно совпадают с характеристическим многочленом матрицы  $\mathbf{A}$ . Таким образом, имеет место равенство

$$M_n \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n & 1 \\ \ell_1^1 & \ell_2^1 & \dots & \ell_n^1 & s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_1^{n-1} & \ell_2^{n-1} & \dots & \ell_n^{n-1} & s^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (51)$$

Тождество (51) представляет собой преобразование А. Н. Крылова характеристического ("векового") определителя системы в интерпретации Ф. Р. Гантмахера. Построение характеристического многочлена (на основе этого тождества) значительно упрощается. Его коэффициенты могут быть определены прямо по правой части (51) как алгебраические дополнения элементов последнего столбца (числовые определители). В общем (нерегулярном) случае действует соотношение (50), определяющее минимальный многочлен заданного вектора. Конечно, заранее число  $p$  неизвестно. Для практического использования этого соотношения необходимо последовательно формировать матрицы из строк  $\ell^T, \ell^{1T}, \dots, \ell^{pT}, \dots$ , сопровождая эту процедуру вычислением всех миноров сначала второго порядка пары строк  $\ell^T, \ell^{1T}$ , затем третьего — строк  $\ell^T, \ell^{1T}, \ell^{2T}$  и т. д. Если на  $(p-1)$ -м шаге хотя бы один минор  $p$ -го порядка не равен нулю, а на следующем  $p$ -м шаге миноры  $(p+1)$ -го порядка все равны нулю, то процедура заканчивается. Она определяет число  $p$  линейно независимых строк и сами эти строки. Как видно, описанная процедура требует вычисления большого числа определителей нарастающего порядка. Для  $p = n$  это число при вычислениях от второй до последней строки равно

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^{n-1} - 1.$$

В матрично-векторной форме  $[\mathbf{A}, \ell]$  построение характеристического многочлена рассматривается в работе [4].

**4.2. Алгоритм аннулирующей редукции.** Альтернативой (в практическом отношении предпочтительной) вычисления большого числа определителей является применение метода исключения Гаусса к системе уравнений для коэффициентов минимального многочлена. Решение уравнений можно заменить поиском обращаемой в нуль линейной комбинации векторов (46) при минимальном их числе  $p + 1$ . Используя этот подход и рекомендации в работе [3], указанную линейную комбинацию будем искать с помощью формирования вспомогательных векторов  $\mathbf{e}_0 = \ell, \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^r, \dots$ , образованных последовательными линейными комбинациями

$$\mathbf{e}^r = \mathbf{Ae}^{r-1} + \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k^r \mathbf{e}^k, \quad r = 1, 2, \dots, p \leq n. \quad (52)$$

Коэффициенты линейных комбинаций (52) будем выбирать последовательно на каждом шаге  $r = 1, 2, \dots$  по условиям обнуления назначенных координат очередного вектора. Для этого, начиная алгоритм, выделим в векторе  $\ell$  элемент, например, с номером  $m$ , такой что

$$\ell_m \neq 0. \quad (53)$$

Составляя линейную комбинацию (52) при  $r = 1$  (первый шаг редукции)

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{A}\ell + \gamma_0^1 \ell,$$

выберем ее коэффициент  $\gamma_0^1$  так, чтобы выполнялось условие

$$e_m^1 = 0.$$

Таким образом, коэффициент  $\gamma_0^1$  определим равенством

$$\gamma_0^1 = -(\mathbf{A}\ell)_m / \ell_m.$$

В векторе  $\mathbf{e}^1$  отметим теперь элемент  $e_{m_1}^1$ , например, с номером  $m_1 \neq m$ , такой что

$$e_{m_1}^1 \neq 0. \quad (54)$$

Составляя линейную комбинацию вида (52) при  $r = 2$  (второй шаг редукции)

$$\mathbf{e}^2 = \mathbf{Ae}^1 + \gamma_0^2 \ell + \gamma_1^2 \mathbf{e}^1,$$

выберем ее коэффициенты так, чтобы выполнялись условия

$$e_m^2 = 0, \quad e_{m_1}^2 = 0.$$

С учетом неравенств (53), (54) найдем

$$\gamma_0^2 = -(\mathbf{Ae}^1)_m / \ell_m,$$

$$\gamma_1^2 = -[(\mathbf{Ae}^1)_{m_1} + \gamma_0^2 \ell_{m_1}] / e_{m_1}^1.$$

Эту процедуру выбора коэффициентов в целях расширения множества нулевых элементов при переходе от вектора к вектору вида (52) можно продолжить.

Введем для удобства обозначение

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{Ae}^{r-1}. \quad (55)$$

Для вектора с номером  $r$  (произвольный шаг редукции)

$$\mathbf{e}^r = \mathbf{f}^r + \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k^r \mathbf{e}^k \quad (56)$$

запишем соотношения для координат с индексами  $m, m_1, \dots, m_{r-1}$ :

$$\begin{aligned} e_m^r &= f_m^r + \gamma_0^r \ell_m, \\ e_{m_1}^r &= f_{m_1}^r + \gamma_0^r \ell_{m_1} + \gamma_1^r e_{m_1}^1, \\ &\dots \\ e_{m_k}^r &= f_{m_k}^r + \gamma_0^r \ell_{m_k} + \gamma_1^r e_{m_k}^1 + \dots + \gamma_k^r e_{m_k}^k, \\ &\dots \\ e_{m_{r-1}}^r &= f_{m_{r-1}}^r + \gamma_0^r \ell_{m_{r-1}} + \gamma_1^r e_{m_{r-1}}^1 + \dots + \gamma_{r-1}^r e_{m_{r-1}}^{r-1}. \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь  $m_k \in \overline{1, n}, k = 0, 1, \dots, r-1, m_0 = m$  и

$$\ell_m \neq 0, \quad e_{m_1}^1 \neq 0, \dots, e_{m_{r-1}}^{r-1} \neq 0.$$

Теперь назначим условия выбора коэффициентов

$$e_m^r = 0, \quad e_{m_1}^r = 0, \dots, e_{m_k}^r = 0, \dots, e_{m_{r-1}}^r = 0. \quad (58)$$

Тогда из соотношений (57) в силу (58) найдем

$$\begin{aligned} \gamma_0^r &= -f_m^r / \ell_m, \\ \gamma_1^r &= -(f_{m_1}^r + \gamma_0^r \ell_{m_1}) / e_{m_1}^1, \\ &\dots \\ \gamma_k^r &= -(f_{m_k}^r + \gamma_0^r \ell_{m_k} + \gamma_1^r e_{m_k}^1 + \dots + \gamma_{k-1}^r e_{m_k}^{k-1}) / e_{m_k}^k, \quad (59) \\ &\dots \\ \gamma_{r-1}^r &= -(f_{m_{r-1}}^r + \gamma_0^r \ell_{m_{r-1}} + \gamma_1^r e_{m_{r-1}}^1 + \dots + \\ &+ \gamma_{r-2}^r e_{m_{r-1}}^{r-2}) / e_{m_{r-1}}^{r-1}, \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad m_0 = m. \end{aligned}$$

В результате построения линейной комбинации (56) с указанным выбором коэффициентов (59) получаем вектор  $\mathbf{e}^r$ , у которого  $r$  элементов с номерами  $m, m_1, m_2, \dots, m_{r-1}$  все равны нулю ( $r$ -й шаг редукции).

Пусть при  $r = p \leq n$  окажется, что все элементы вектора  $\mathbf{e}^p$  — нулевые. Это будет последний аннулирующий шаг редукции (будем говорить "прямого хода алгоритма"). Покажем что при этом векторы  $\ell, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{p-1}$  будут линейно независимыми. Для этого введем в рассмотрение вектор  $\hat{\ell}$ :

$$\hat{\ell} = c_0 \ell + c_1 \mathbf{e}^1 + \dots + c_k \mathbf{e}^k + \dots + c_{p-1} \mathbf{e}^{p-1}.$$

Этот вектор обращается в нуль тогда и только тогда, когда все коэффициенты  $c_k, k = 0, 1, \dots, p-1$ , равны нулю. Действительно, если  $\hat{\ell} = 0$ , то

$$\hat{\ell}_m = 0, \hat{\ell}_{m_1} = 0, \dots, \hat{\ell}_{m_{p-1}} = 0.$$

По построению  $e_m^i = 0, i = 1, 2, \dots, p-1$ , а  $\ell_m \neq 0$ . Значит, из условия  $\hat{\ell}_m = c_0 \ell_m = 0$  следует, что  $c_0 = 0$ .

Пусть доказано, что  $c_0 = 0, c_1 = 0, \dots, c_{k-1} = 0$ . Тогда  $m_k$ -я координата вектора  $\hat{\ell}$  оказывается равной  $\hat{\ell}_{m_k} = c_k e_{m_k}^k$ , поскольку  $e_{m_k}^i = 0, i = k+1, \dots, p-1$ , и из условия  $\hat{\ell}_{m_k} = 0$  следует  $c_k = 0$ , так как  $e_{m_k}^k \neq 0$ . По индукции наше утверждение о коэффициентах  $c_k$  доказано. Из него следует, что векторы  $\ell, e_1, \dots, e^{p-1}$  линейно независимы.

Теперь перейдем к обратному ходу алгоритма. Каждый из векторов  $e^r, r = 1, 2, \dots$  может быть представлен (см. ниже) в виде линейной комбинации векторов  $\ell, \ell^1, \dots, \ell^r$  вида

$$e^r = \ell^r + \delta_1^r \ell^{r-1} + \delta_2^r \ell^{r-2} + \dots + \delta_{r-1}^r \ell^1 + \delta_r^r \ell. \quad (60)$$

Соотношения для коэффициентов комбинаций (60) приведем ниже, а здесь заметим, что при  $r = p$  будем иметь равенство

$$\ell^p + \delta_1^p \ell^{p-1} + \delta_2^p \ell^{p-2} + \dots + \delta_{p-1}^p \ell^1 + \delta_p^p \ell = 0, \quad (61)$$

из которого следует, что многочлен

$$\delta(s) = s^p + \delta_1 s^{p-1} + \delta_2 s^{p-2} + \dots + \delta_{p-1} s + \delta_p \quad (62)$$

с коэффициентами

$$\delta_1 = \delta_1^p, \delta_2 = \delta_2^p, \dots, \delta_{p-1} = \delta_{p-1}^p, \delta_p = \delta_p^p \quad (63)$$

является минимальным многочленом вектора  $\ell$ . Действительно, нетрудно показать, что векторы  $\ell, \ell^1, \dots, \ell^{p-1}$  линейно независимы.

Об этом, например, говорит соотношение

$$\text{rank}[\ell|\ell^1|\dots|\ell^{p-1}] = \text{rank}[\ell|e^1|\dots|e^{p-1}] \neq 0,$$

в котором столбцы матриц образованы указанными векторами. Равенство справедливо, так как в силу (60) столбцы матрицы в его правой части являются линейными комбинациями столбцов матрицы в левой части. Неравенство же следует из линейной независимости векторов  $\ell, e^1, \dots, e^{p-1}$  (см. выше).

Наконец заметим, что многочлен (62) в силу (61) является аннулирующим многочленом вектора  $\ell$ . Из линейной независимости векторов  $\ell, \ell^1, \dots, \ell^{p-1}$  теперь следует, что он является минимальным многочленом этого вектора.

Получив коэффициенты линейных комбинаций  $\gamma_k^r, k = 0, 1, \dots, r-1; r = 1, 2, \dots, p$ , далее можно вычислить коэффициенты линейных комбинаций (60). Для этого надо подставить выражения (60)  $r = 1, 2, \dots$  в соотношения (52) и приравнять коэф-

фициенты при векторах  $\ell^{r-1}, \ell^{r-2}, \dots, \ell^1$  в левой и правой частях равенства. Тогда найдем, что

$$\begin{aligned} \delta_1^r &= \delta_1^{r-1} + \gamma_{r-1}^r, \\ \delta_2^r &= \delta_2^{r-1} + \gamma_{r-1}^r \delta_1^{r-1} + \gamma_{r-2}^r, \\ &\dots \\ \delta_k^r &= \delta_k^{r-1} + \gamma_{r-1}^r \delta_{k-1}^{r-1} + \gamma_{r-2}^r \delta_{k-2}^{r-2} + \\ &+ \dots + \gamma_{r-k+1}^r \delta_1^{r-k+1} + \gamma_{r-k}^r, \\ &\dots \\ \delta_{r-1}^r &= \delta_{r-1}^{r-1} + \gamma_{r-1}^r \delta_{r-2}^{r-1} + \gamma_{r-2}^r \delta_{r-3}^{r-2} + \\ &+ \dots + \gamma_2^r \delta_1^2 + \gamma_1^r, \\ \delta_r^r &= 0 + \gamma_{r-1}^r \delta_{r-1}^{r-1} + \gamma_{r-2}^r \delta_{r-2}^{r-2} + \\ &+ \dots + \gamma_2^r \delta_2^2 + \gamma_1^r \delta_1^1 + \gamma_0^r. \end{aligned} \quad (64)$$

Полагая последовательно  $r = 1, 2, \dots, (\delta_1^0 = 0)$  будем получать

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \delta_1^1 &= \gamma_0^1; \\ r = 2: \quad \delta_1^2 &= \delta_1^1 + \gamma_1^2, \\ \delta_2^2 &= 0 + \gamma_1^2 \delta_1^1 + \gamma_0^2; \\ r = 3: \quad \delta_1^3 &= \delta_1^2 + \gamma_2^3, \\ \delta_2^3 &= \delta_2^2 + \gamma_2^3 \delta_1^2 + \gamma_1^3, \\ \delta_3^3 &= 0 + \gamma_2^3 \delta_2^2 + \gamma_1^3 \delta_1^2 + \gamma_0^3 \end{aligned}$$

и т. д. вплоть до  $r = p$ . Последние соотношения дадут коэффициенты минимального многочлена (63).

Обратный ход алгоритма аннулирующей редукции образует соотношения для векторов  $\ell, \ell^1, \dots, \ell^{p-1}$ , которые вместе с минимальным многочленом определяют конструкции полной модели системы в п. 4. Они следуют из (60) в рекуррентной форме

$$\ell^r = e^r - \delta_1^r \ell^{r-1} - \delta_2^r \ell^{r-2} - \dots - \delta_{r-1}^r \ell^1 - \delta_r^r \ell, \quad r = 1, 2, \dots, p-1. \quad (65)$$

Кроме того соотношения (60) индуцируют многочлены

$$\begin{aligned} \delta^r(s) &= s^r + \delta_1^r s^{r-1} + \dots + \delta_{r-1}^r s + \delta_r^r, \\ r &= 0, 1, \dots, p; \delta^0(s) = 1, \end{aligned} \quad (66)$$

коэффициенты которых определены равенствами (64). Можно показать, что их связывают рекуррентные соотношения

$$\delta^r(s) = s \delta^{r-1}(s) + \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k^r \delta^k(s), \quad r = 1, 2, \dots, p. \quad (67)$$

Заметим также, что согласно (60), (66) можно записать

$$e^r = \delta^r(\mathbf{A})\ell, \quad r = 0, 1, \dots, p. \quad (68)$$

Тогда из (52), (68) в силу произвольности вектора  $\ell$  следует равенство

$$\delta^r(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\delta^{r-1}(\mathbf{A}) + \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k^r \delta^k(\mathbf{A}). \quad (69)$$

### 5. Пример

В качестве примера, иллюстрирующего метод А. Н. Крылова и предлагаемый метод построения заданного решения системы (1), рассмотрим систему с указанными начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 5x_1 + 30x_2 - 48x_3, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 + 14x_2 - 24x_3, \quad x_2(0) = 0, \\ \frac{dx_3}{dt} &= 3x_1 + 15x_2 - 25x_3, \quad x_3(0) = x_{10}. \end{aligned} \quad (70)$$

Сначала рассмотрим решение задачи методом преобразования А. Н. Крылова. Записав систему (70) в области изображений (см. (5)), выполним преобразование (6). Опуская громоздкие выкладки, запишем результат:

$$\begin{aligned} (5-s)x_1(s) + 30x_2(s) - 48x_3(s) &= -x_{10}, \\ (-29-s^2)x_1(s) - 5[30x_2(s) + 48x_3(s)] &= -(s+5)x_{10}, \\ (125-s^3)x_1(s) + 630x_2(s) - 1008x_3(s) &= -(s-24)x_{10} \end{aligned} \quad (71)$$

с определителем

$$\Delta(s) = -30 \cdot 48 \cdot \begin{vmatrix} 5-s & 1 & 1 \\ -29-s^2 & -5 & -5 \\ 125-s^3 & 21 & 21 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, здесь имеет место нерегулярный случай.

А. Н. Крылов предлагает следующий подход для построения решения системы (71). Вводится новая переменная

$$x_2^*(s) = 30x_2(s) - 48x_3(s). \quad (72)$$

Это позволяет выделить в (71) независимую подсистему

$$\begin{aligned} (5-s)x_1(s) + x_2^*(s) &= -x_{10}, \\ -(29+s^2)x_1(s) - 5x_2^*(s) &= -(s+5)x_{10} \end{aligned} \quad (73)$$

с определителем

$$\Delta^*(s) = \begin{vmatrix} 5-s & 1 \\ -(29+s^2) & -5 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 4. \quad (74)$$

Решение системы (73) имеет вид

$$x_1(s) = \frac{s+10}{s^2+5s+4} x_{10}, \quad x_2^*(s) = -\frac{54}{s^2+2s+4} x_{10}.$$

Далее по (71), (72) находим

$$x_2(s) = x_3(s) = \frac{3}{s^2+5s+4} x_{10}.$$

Решим теперь задачу предлагаемым методом. Согласно (43), а также (27), (29) будем иметь  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{e}_1 x_{10} = x_{10}\mathbf{E}_1(s)/\delta^1(s)$ , где  $\delta^1(s)$  — минимальный многочлен вектора  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$ , а  $\mathbf{E}_1(s)$  вычисляется по (30),  $j = 1$ .

Далее выполняем вычисления с исходными данными

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}, \quad \ell = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_0 = \ell.$$

1. Вычисления прямого хода по (55), (56), (59) дают

$$\begin{aligned} r = 1, \quad m = 1; \quad \mathbf{f}^1 &= [5, 3, 3]^T, \quad \gamma_0^1 = -5; \\ \mathbf{e}^1 &= [5, 3, 3]^T - 5[1, 0, 0]^T = [0, 3, 3]^T; \\ r = 2, \quad m_1 = 2; \quad \mathbf{f}^2 &= [-54, -30, -30]^T, \\ \gamma_0^2 &= 54; \quad \gamma_1^2 = 10; \quad \mathbf{e}^2 = [0, 0, 0]^T, \end{aligned}$$

следовательно  $p = 2$ .

2. Вычисления обратного хода по (64), (65), (66) дают

$$\delta_1^1 = -5; \quad \delta_1^2 = -5 + 10 = 5, \quad \delta_2^2 = -50 + 54 = 4;$$

$$\delta^1(s) = s^2 + 5s + 4; \quad \delta_1^1(s) = s + 5, \quad \delta_2^1(s) = 1; \quad (75)$$

$$\ell^1 = [0, 3, 3]^T - (-5)[1, 0, 0]^T = [5, 3, 3]^T. \quad (76)$$

В (75)  $\delta^1(s)$  — минимальный многочлен вектора  $\mathbf{e}_1$  с сопутствующими многочленами. По (30), (75), (76) далее находим

$$\mathbf{E}_1(s) = \delta_1^1(s)\ell + \delta_2^1(s)\ell^1 = (s+5) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{x}(s) = \begin{bmatrix} s+10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+5s+4} x_{10},$$

т. е. получаем те же  $x_1(s)$ ,  $x_2(s)$ ,  $x_3(s)$ , что выше по методу А. Н. Крылова.

Заметим, что второй определитель А. Н. Крылова (74) оказывается минимальным многочленом вектора  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$  (см. (74), (75)).

Заметим также, что алгоритмы построения элементов модели системы (1) в области изображений выполняются непосредственно по данным описания (1) и независимо от особенностей системы.

**Заключение.** Работа акад. А. Н. Крылова [1] привлекает внимание ученых, прежде всего, благодаря предложенной в ней оригинальной форме векового определителя. Последующие исследователи ([2, 3] и др.) в основном сосредоточились на анализе этой формы и ее связи с характеристическим многочленом системы.

Вместе с тем, в работе [1] рассматривались более общие задачи построения заданного решения системы линейных дифференциальных уравнений.

А. Н. Крылов искал конструкцию представления решения, которая опиралась бы на "удобный" для вычислений определитель. Преобразованием дифференциальных уравнений этот определитель был сформирован так, что символьный параметр входил только в его первый столбец. Таким образом, построение характеристического многочлена сводилось в регулярном случае к вычислению только числовых определителей — миноров элементов первого столбца.

Этот эффект упрощения проблемы характеристического определителя и интерпретация Ф. Р. Гантмахера — определитель А. Н. Крылова есть минимальный многочлен вектора (матрицы) — побуждает пойти дальше, т. е. искать представление решения системы (1) вообще без определителей. Несколько парадоксально, но по существу — обратиться к другой его форме. Полученные в настоящей работе результаты такого поиска мы представляем в задаче построения решения как дальнейшее развитие ме-

тогда А. Н. Крылова, направление которого было определено в разделе 1. Поставленная в нем задача построения полной математической модели системы (1) в области изображений полностью решена. Отметим, что представления вынужденного и собственного движений системы свободны от ограничений, а алгоритм вычисления элементов представления — минимальных многочленов и порождающих их циклических векторов — работает при любых входных данных (А, В, С).

#### Список литературы

1. **Крылов А. Н.** О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем // Изв. АН СССР. Сер. физ.-матем. 1931. С. 491—539.
2. **Лурье А. И.** Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
3. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
4. **Подчукаев В. А.** Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.

## Александр Трифионович Барабанов — известный русско-украинский ученый

**А. Т. Барабанов** — д-р техн. наук, профессор Севастопольского национального технического университета. Уроженец г. Севастополя (1928 г.), выпускник Ленинградского военно-механического института (ЛВМИ) по специальности инженер-механик (1952 г.), Ленинградского государственного университета (мат.-мех. ф-т) по специальности механик (математик) (1958 г.), д-р техн. наук (ВАК, 1965), профессор (ВАК, 1967), член Американского математического общества.

*Трудовая деятельность.* 1959—1968 гг. Ленинград. Начальник лаборатории, отдела, отделения теоретических исследований и моделирования НИИ—49 (с 1973 г. ЛНПО "Гранит"), зам. главного конструктора бортовой аппаратуры системы управления противокорабельной крылатой ракеты П-6 по динамике управления. 1968—2003 гг. Севастополь. Севастопольский национальный технический университет. Заведующий кафедрой технической кибернетики; подготовка специалистов по автоматике и телемеханике, компьютеризированным системам управления и автоматике; подготовка научно-педагогических кадров; выполнение научно-исследовательских работ. 2003 г. — по настоящее время — профессор кафедры технической кибернетики.

#### Научные достижения:

- ♦ методы анализа возмущений при разрыве голономных связей управляемого твердого тела; методы оптимизации законов теленаведения по лучу с упреждением (минимум нормального ускорения объекта в точке встречи с целью); общая теория линейных систем самонаведения как существенно нестационарных систем

с регулярной особой точкой (коэффициент усиления в цепи обратной связи  $\frac{1}{(t_f - t)}$ ,  $t_f \rightarrow t$ );

- ♦ методы представления и анализа решений непрерывно-дискретных систем управления (дифференциальные и конечно-разностные уравнения); линейно-квадратическая (LQ) и линейно-квадратически-гауссова (LQG) оптимизация непрерывно-дискретных систем; полиномиальный подход в анализе предельной и абсолютной устойчивости; локализация частотных критериев как замена частотного годографа конечной совокупности вещественных корней критериальных многочленов; полиномиальный подход в анализе автоколебаний;
  - ♦ полное решение общей проблемы Рауса—Гурвица в теории систем; модифицированный регулярный (невыврождающийся) алгоритм Рауса—Гурвица анализа распределения всех корней многочлена на комплексной плоскости; применения в задачах алгебраического анализа систем;
  - ♦ метод резольвенты матрицы Гамильтона построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати (СРАУР) как главного элемента конструкции решения задач LQ, LQG,  $H^2$ -,  $H^\infty$ -оптимизаций и робастной устойчивости стационарных систем; общая теория и алгоритмы линейной редукции АУР в задаче построений СРАУР.
- Научная школа.* Основал научную школу "Нестационарные и функционально сложные системы и процессы", играющую большую роль в подготовке научных кадров и выполнении научно-исследовательских работ как коллективного научного творчества.

**Р. Д. Ахметсафин**, канд. техн. наук, доц., зам. начальника управления геолого-технологического мониторинга и супервайзинга процесса строительства скважин, akhmetsafinrd@mail.ru, ООО "Георесурс" (ДО ОАО "Газпром"),  
**Р. З. Ахметсафина**, канд. техн. наук, доц., rakhmetsafina@hse.ru, НИУ "ГУ ВШЭ"

## О реализации линеаризующего компенсатора для одного класса нелинейных моделей

*Предложена схема реализации линеаризующего компенсатора для нелинейных объектов управления, которые описываются параллельной моделью Гаммерштейна (фильтр Заде), допускающей рекуррентное оценивание параметров при текущей идентификации, что позволяет говорить об адаптивной линеаризации.*

**Ключевые слова:** линеаризация, синтез компенсатора, параллельная модель Гаммерштейна

R. D. Akhmetsafin, R. Z. Akhmetsafina

## Linearization for a Class of Nonlinear Models

*This paper considers a scheme of linearizing compensator for parallel Hammerstein model. The compensator exactly linearizes the system via the internal feedback without truncation of Volterra series. Using the compensator with online identification determines adaptive linearization.*

**Keywords:** linearization, compensator, parallel hammerstein model

### Введение

Одной из задач синтеза систем на основе нелинейных динамических моделей объектов управления является задача линеаризации [2, 3]. Удобными для описания статических и динамических свойств, идентификации и последующего анализа являются так называемые блочно-ориентированные модели, состоящие из нелинейных (полиномиальных) статических и линейных динамических блоков [3]. Наиболее известными моделями этого класса являются модели Винера и Гаммерштейна [3, 6, 11, 15]. Вход-выход таких моделей описывается отрезком функционального ряда Вольтерра [3], т. е. представляется нелинейным оператором.

Линеаризующая компенсация в прямой цепи предполагает формирование обратного оператора. Компенсатор представляет собой физическую реализацию оператора, описывающего последовательное соединение желаемой системы (представленной линейным оператором) и обратной системы (представленной обратным нелинейным оператором).

Существуют два подхода по реализации компенсатора. Первый — приближенный, он предполагает разложение оператора компенсатора в функциональный ряд с последующим усечением для его физической реализации [5, 7]. В этом случае зависимость вход-выход компенсатора явная, что позволяет исследовать его фильтрационные свойства как во временной, так и в частотной областях. Однако усечение функционального ряда, естественно, ограничивает как статический, так и динамический диапазоны линеаризации. Отметим, что такой подход применяется и для расширения линейного статического и динамического диапазонов Hi-Fi акустических систем [6, 10], а также для компенсации в высокоскоростных оптических телекоммуникационных системах [9].

Второй подход предполагает, что обратный оператор может быть представлен системой с внутренней обратной связью [2, 3]. При этом, как правило, не удастся получить явную зависимость вход-выход компенсатора, что затрудняет исследование его свойств и физическую реализацию. В отдельных частных случаях может быть получена некоторая трансцендентная зависимость вход-выход. Так, для непрерывных нелинейных систем физически реализовать "полный" компенсатор удастся только для модели Гаммерштейна за счет внутренней безынерционной функциональной обратной связи [12]. Однако модель Гаммерштейна (как, впрочем, и модель Винера) не предполагает независимой настройки статических и динамических свойств.

### Постановка задачи

Рассматриваются нелинейные цифровые модели объектов управления, структура которых представлена на рис. 1. Модель была предложена Л. Заде [16], а название "фильтр Заде" она получила позже [13]. Сейчас ее называют параллельной моделью Гаммерштейна [8, 14]. Вход/выход модели описывается уравнением

$$y(k) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^n b_{j,i} u^j(k-d-i) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + b_0$$

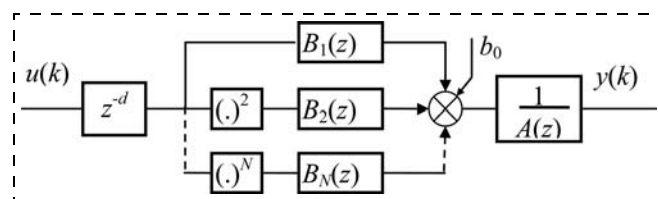


Рис. 1. Структурная схема объекта управления

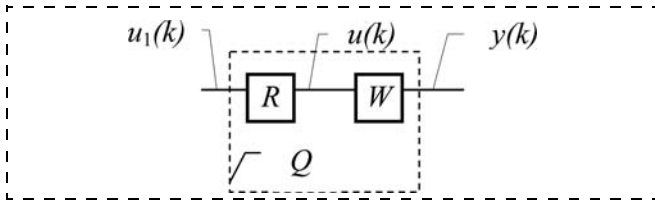


Рис. 2. Структурная схема компенсации в прямой цепи

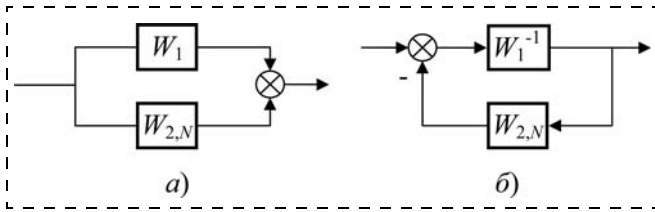


Рис. 3. Структуры нелинейных операторов: а — исходный; б — обратный

где  $y(k)$ ,  $y(k-i)$  — текущий выход модели и выход модели на предыдущих шагах соответственно;  $u(k)$  — текущий вход модели;  $N$  — порядок нелинейности модели;  $n$  — порядок линейных подсистем;  $a_i$  и  $b_{j,i}$  — параметры модели;  $d$  — запаздывание линейных подсистем;  $b_0 = \text{const}$ .

Параллельная модель Гаммерштейна является простейшей блочно-ориентированной нелинейной динамической моделью и имеет привлекательные свойства:

- возможность рекуррентного оценивания параметров модели [1, 4, 11, 14, 15] при решении задачи идентификации (псевдолинейная регрессия);
- возможность в некоторой степени независимой настройки статических и динамических свойств модели [14].

В данной работе рассматривается "полная" (без усечения) линеаризующая компенсация в прямой цепи (рис. 2) для параллельной модели Гаммерштейна. Компенсатор реализуется с внутренней обратной связью (рис. 3, б).

Представим нелинейный оператор параллельной модели Гаммерштейна  $W$  (см. рис. 2) в виде суммы двух операторов  $W = W_1 + W_{2,N}$  (рис. 3, а), где первый оператор — линейный, и ему соответствует передаточная функция в  $Z$ -области

$$W_1 = W_1^*(z) = \frac{B_1(z)}{A(z)} z^{-d} = \frac{\sum_{i=0}^n b_{1,i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} z^{-d}.$$

Оператор  $W_{2,N}$  — составной:

$$W_{2,N} = \sum_{j=2}^N W_j,$$

и в нотации рядов Вольтерра [3] представляет совокупность многомерных эквивалентных передаточных функций

$$W_j(z_1, z_2, \dots, z_j) = W_j^*(z_1 z_2 \dots z_j), j = \overline{2, N},$$

где

$$W_j^*(z) = \frac{B_j(z)}{A(z)} z^{-d} = \frac{\sum_{i=0}^n b_{j,i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} z^{-d}, j = \overline{2, N},$$

— передаточные функции линейных подсистем модели.

В качестве желаемой системы  $Q$  (см. рис. 2)  $Q = R^*W$  выберем линейную часть оператора  $W$  (или  $Q = W_1$ ). Это не ограничивает возможности метода в плане выбора желаемой системы. Мы решаем задачу синтеза линеаризующего компенсатора, а уже линеаризованную систему можно компенсировать еще раз известными методами. Используя алгебру операторов, описание компенсатора можно представить в виде  $R = Q^*W^{-1}$ .

### Синтез линеаризующего компенсатора

Известно [2], что обратный оператор  $W^{-1}$  может быть реализован с внутренней обратной связью по схеме, изображенной на рис. 3, б. Для задачи реализации нелинейного компенсатора явная зависимость вход-выход в операторной форме совсем не обязательна (она нужна для задачи анализа и оценки показателей качества систем управления или исследования статических и динамических свойств самого компенсатора).

**Реализация обратного нелинейного оператора посредством внутренней обратной связи.** С учетом реализации обратного оператора посредством внутренней обратной связи оператор компенсатора может быть представлен в виде, показанном на рис. 4. В результате структурных преобразований схема компенсатора упрощается (рис. 5). Однако в таком виде компенсатор является физически нереализуемым из-за прямой передачи сигнала в цепи обратной связи, т. е. имеет место алгебраический контур.

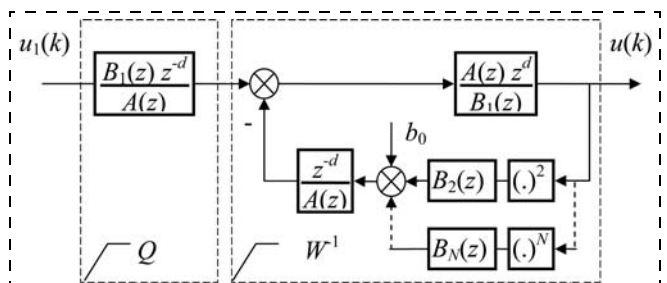


Рис. 4. Структура оператора компенсатора

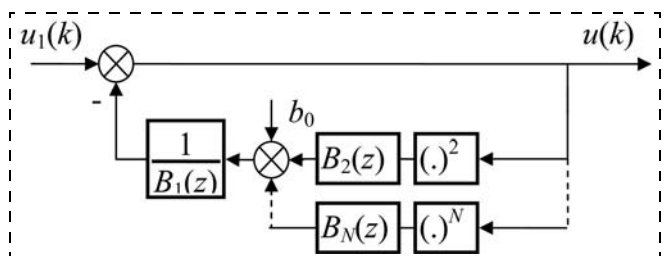


Рис. 5. Схема компенсатора после структурного преобразования

Параметры модели объекта управления и компенсатора

Параметр	Пример 1	Пример 2
Модель объекта управления		
$d$	1	1
$A(z)$	$1,0 - 1,5459z^{-1} + 0,5698z^{-2}$	$1,0 - 1,5459z^{-1} + 0,5698z^{-2}$
$B_1(z)$	$0,0799 + 0,0141z^{-1} - 0,0510z^{-2}$	$0,3737 - 0,0579z^{-1} - 0,2728z^{-2}$
$B_2(z)$	$-0,0206 - 0,0174z^{-1} + 0,0094z^{-2}$	$-0,3144 + 0,0546z^{-1} + 0,2312z^{-2}$
$B_3(z)$	$0,0232 + 0,0018z^{-1} - 0,0154z^{-2}$	$0,0939 - 0,0155z^{-1} - 0,0688z^{-2}$
Статическая характеристика	Нелинейная, выпуклая кверху (рис. 8,а)	
Характер переходных процессов	$t_n$ уменьшается (рис. 8,б)	
Компенсатор		
$B_1(z)$	$1,0 + 0,1763z^{-1} - 0,6391z^{-2}$	$1,0 - 0,1551z^{-1} - 0,7301z^{-2}$
$D_2(z)$	$-0,1723 - 0,0473z^{-1}$	$0,0157 + 0,0043z^{-1}$
$D_3(z)$	$-0,0287 - 0,0079z^{-1}$	$-0,0026 - 0,0007z^{-1}$
$f(u(k), \varepsilon(k)) = 0$	$0,2903u^3(k) - 0,2579u^2(k) + u(k) - \varepsilon(k) = 0$	$0,2513u^3(k) - 0,8414u^2(k) + u(k) - \varepsilon(k) = 0$
Статическая характеристика с компенсатором	Линейная (рис. 9,а)	
Характер переходных процессов с компенсатором	Неизменный (рис. 9,б)	

**Физическая реализация линеаризующего компенсатора.** Выделим алгебраический контур (рис. 6), для чего запишем

$$\frac{B_i(z)}{B_1(z)} = c_i + \frac{D_i(z)}{B_1(z)} z^{-1}, i = \overline{2, N}; c_0 = \frac{b_0}{B_1(1)}.$$

Контур заменим алгебраическим функциональным блоком  $F[\cdot]$  (рис. 7), определяющим решение алгебраического уравнения замыкания

$$u(k) = \varepsilon(k) - \left( c_0 + \sum_{i=2}^N c_i u^i(k) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} c_{N-i} u^{N-i}(k) + (c_0 - \varepsilon(k)) = 0 \quad (c_1 \equiv 1);$$

$$f(u(k), \varepsilon(k)) = 0 \Rightarrow u(k) = F[\varepsilon(k)]. \quad (1)$$

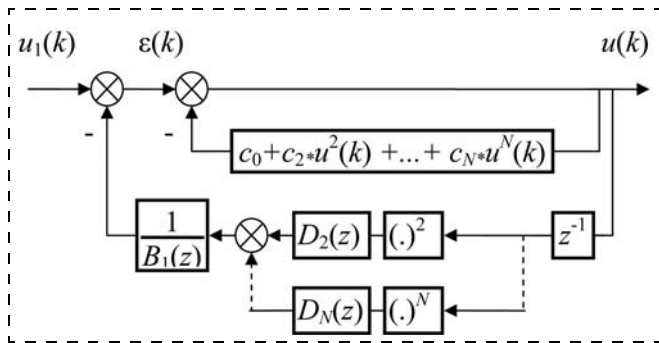


Рис. 6. Схема компенсатора с выделенным алгебраическим контуром

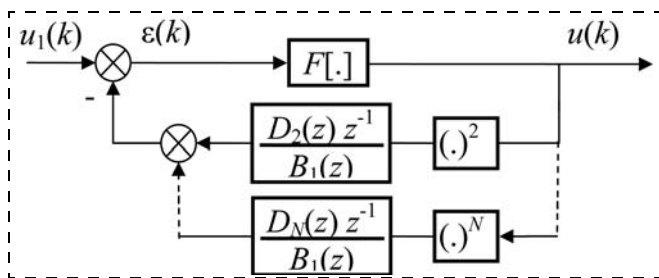


Рис. 7. Приведенная структура компенсатора

Теперь линеаризующий компенсатор (рис. 7) легко реализуется на цифровых процессорах обработки сигналов (ЦПОС) — он уже не содержит алгебраического контура, а при численном решении алгебраического уравнения (1) (например, методом Ньютона) в качестве начального приближения для искомого управления  $u(k)$  удобно принимать значение на предыдущем такте  $u(k-1)$ .

**Примеры**

В табл. 1, 2 приведены примеры параметров моделей объектов управления и компенсаторов (в примерах рассматривалась выпуклая кверху статическая характеристика объектов управления, что характерно для большинства энергетических систем). Примерами мы постарались раскрыть возможность

Таблица 2

Параметры модели объекта управления и компенсатора

Параметр	Пример 3	
Модель объекта управления		
$d$	1	
$A(z)$	$1,0 - 2,7192z^{-1} + 2,5269z^{-2} - 0,7991z^{-3}$	
$B_1(z)$	$0,3069 - 0,4896z^{-1} + 0,1093z^{-2} + 0,0890z^{-3}$	
$B_2(z)$	$-0,2230 + 0,3622z^{-1} - 0,0841z^{-2} - 0,0654z^{-3}$	
$B_3(z)$	$0,0672 - 0,1101z^{-1} + 0,0265z^{-2} + 0,0199z^{-3}$	
Статическая характеристика	Нелинейная, выпуклая кверху (рис. 12,а)	
Характер переходных процессов вдоль статической характеристики	От колебательного до аperiodического (рис. 12,б)	
Компенсатор		
$B_1(z)$	$1,0 - 1,5953z^{-1} + 0,3560z^{-2} + 0,2899z^{-3}$	
$D_2(z)$	$0,0211 - 0,0155z^{-1} - 0,0026z^{-2}$	
$D_3(z)$	$-0,0096 + 0,0084z^{-1} + 0,0013z^{-2}$	
$f(u(k), \varepsilon(k)) = 0$	$0,2189u^3(k) - 0,7265u^2(k) + u(k) - \varepsilon(k) = 0$	
Статическая характеристика с компенсатором	Линейная (рис. 13,а)	
Характер переходных процессов с компенсатором	Неизменный (рис. 13,б)	



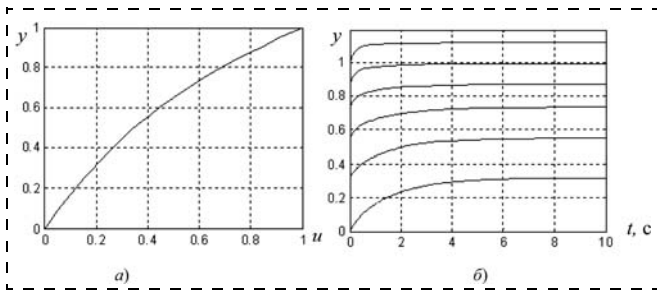


Рис. 8. Статическая характеристика и переходные процессы до компенсации (пример 1)

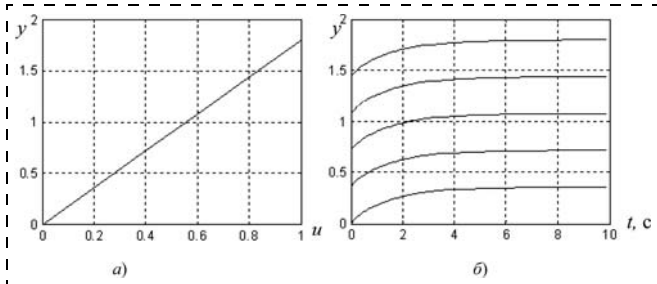


Рис. 9. Статическая характеристика и переходные процессы после компенсации (пример 1)

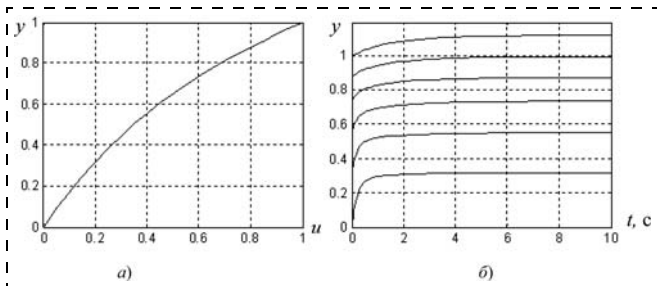


Рис. 10. Статическая характеристика и переходные процессы до компенсации (пример 2)

в некоторой степени независимой настройки статических и динамических свойств параллельной модели Гаммерштейна. На рис. 8—13 приведены статические и динамические свойства до и после компенсации. Динамические свойства представлены переходными процессами вдоль статической характеристики с амплитудой входного воздействия  $a = 0,2$  (ось абсцисс для переходных процессов — время, интервал квантования  $T_0 = 0,1$ ).

### Выводы

По существу, в этом коротком сообщении мы не предлагаем ничего принципиально нового. Примерами мы проиллюстрировали свойства очень простой известной нелинейной модели и применили к ней известные структурные преобразования. В результате такой "технической" работы предложена реализация линеаризующего компенсатора для параллельной модели Гаммерштейна, которая в совокупности с применением алгоритмов текущей идентификации позволяет говорить и об адаптивном линеаризующем компенсаторе. Уравнение (1) решается всего за 2...3 итерации, что с применением

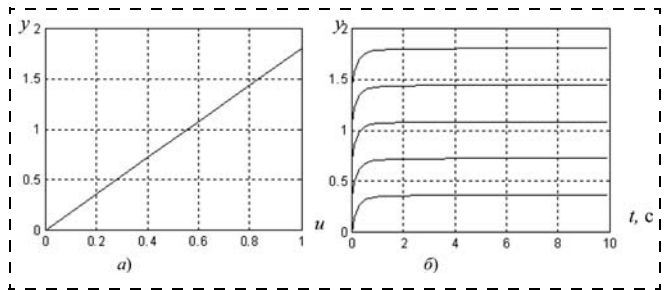


Рис. 11. Статическая характеристика и переходные процессы после компенсации (пример 2)

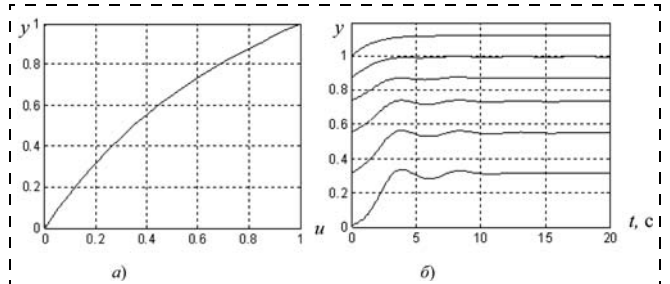


Рис. 12. Статическая характеристика и переходные процессы до компенсации (пример 3)

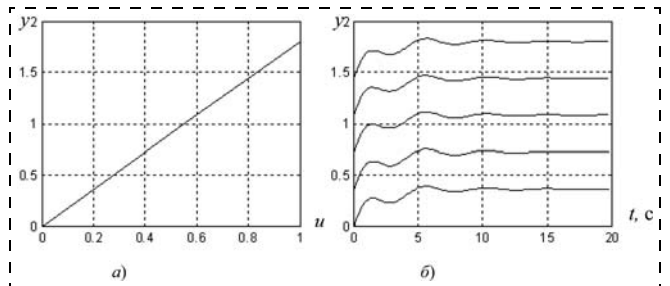


Рис. 13. Статическая характеристика и переходные процессы после компенсации (пример 3)

современных ЦПОС позволяет решать задачу линеаризации и быстротекущих процессов (характеристик Hi-Fi акустических систем в частности).

### Список литературы

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я. З. Цыпкина. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 432 с.
2. Модяев А. Д. Синтез нелинейных дискретных корректирующих устройств на основе многомерного Z-преобразования // Дискретные нелинейные системы / Под ред. Ю. И. Топчиева. М.: Машиностроение, 1982. С. 158—182.
3. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.
4. Billings S. A. Identification of nonlinear system — a survey // Control Theory and Applications. IEE Proceedings D. November 1980. V. 127, N 6. P. 272—285. doi: 10.1049/ip-d:19800047.
5. Kajikawa Y., Nomura Y. Online design of nonlinear inverse systems by adaptive Volterra filter // Electron. Comm. Jpn. Pt. III. 2000, 83. P. 46—56; doi: 10.1002/(SICI)1520-6440(200009)83:9<46::AID-ECJCS>3.0.CO;2-L.
6. Lashkari K., Puranik A. Exact Linearization of Wiener and Hammerstein Systems Loudspeaker Linearization // Information, Communications and Signal Processing, 2005 Fifth International Conference on. P. 917—920; doi: 10.1109/ICICS.2005.1689183.
7. Li G., Abd-Elrady E. Linearization of weakly nonlinear Volterra systems using FIR filters and recursive prediction error method //

Machine Learning for Signal Process. 2008. MLSP 2008. IEEE Workshop on. P. 409–414, 16–19 Oct. 2008; doi: 10.1109/MLSP.2008.4685515.

8. Li H., Wang D., Chen Z., Liu N. A filter bank-based parallel hammerstein predistorter for high power amplifier linearization // Telecommunications and Malaysia International Conference on Communications, 2007. ICT-MICC 2007. IEEE International Conference on. P. 627–631, 14–17 May 2007; doi: 10.1109/ICTMICC.2007.4448563.

9. Ling L., Liangchuan L., Yuanda H., Kai C., Qian Jin X., Hauske F. N., Changsong X., Yi C. Intrachannel Nonlinearity Compensation by Inverse Volterra Series Transfer Function // Lightwave Technology. 2012. V. 30, N 3. P. 310–316, Feb. 1. doi: 10.1109/JLT.2011.2182038.

10. Mossi M. I., Yemdji C., Evans N., Beaugeant C. Non-linear acoustic echo cancellation using online loudspeaker linearization // Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA), 2011. IEEE Workshop on. P. 97–100, 16–19 Oct. 2011; doi: 10.1109/ASPAA.2011.6082311.

11. Ni B., Gilson M., Garnier H. Refined instrumental variable method for Hammerstein-Wiener continuous-time model identifica-

tion // Control Theory & Applications, IET. 2013. V. 7, N 9, June 13. doi: 10.1049/iet-cta.2012.0548.

12. Samuelsson P., Norlander H., Carlsson B. An integrating linearization method for Hammerstein models // Automatica. V. 41, Iss. 10, October 2005, P. 1825–1828, ISSN 0005–1098. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2005.04.018>.

13. Shanmugam K., Lal M. Analysis and synthesis of a class of nonlinear systems // Circuits and Systems, IEEE Transactions on. Jan 1976. V. 23, N 1. P. 17–25. doi: 10.1109/TCS.1976.1084131.

14. Schoukens M., Pintelon R., Rolain Y. Parametric Identification of Parallel Hammerstein Systems // Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on 2011. V. 60, N 12. P. 3931–3938, Dec. doi: 10.1109/TIM.2011.2138370.

15. Van der Veen G., van Wingerden J.-W., Verhaegen M. Global Identification of Wind Turbines Using a Hammerstein Identification Method // Control Systems Technology, IEEE Transactions on July 2013. V. 21, N 4. P. 1471–1478. doi: 10.1109/TCST.2012.2205929.

16. Zadeh L. A. A contribution to the theory of nonlinear systems // Journal of the Franklin Institute. May 1953. V. 255, Iss. 5. P. 387–408.

УДК 004.3

Н. П. Кириллов, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., knp@mail.ru,

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук

## Метод комбинированного концептуального моделирования технических систем

*Предложен метод концептуального моделирования технических систем (ТС), основанный на комбинированном применении известных методов структурно-функционального анализа, объектно-ориентированного и совместного объектно-функционального моделирования. Получаемый при этом полезный эффект заключается в упрощении решения задач построения концептуальных моделей конструкции, процессов управления состояниями и управляемого функционирования ТС за счет задействования потенциальных возможностей приобретения и использования взаимодополняющей информации в ходе попеременного применения указанных методов моделирования.*

**Ключевые слова:** теория технических систем, концептуальные модели систем и процессов, методы концептуального моделирования

N. P. Kirillov

## Method of the Combined Conceptual Modelling of Technical Systems

*Is offered the method of conceptual modelling of technical systems (TS), based on the combined application of known methods of the structurally functional analysis, object-oriented and joint objective-functional modelling. The useful effect gained thus consists in simplification of problem solving of construction of conceptual models of a design, managerial processes by states and operated functioning of the TS at the expense of use of potentials in acquisition and use of the complementary information got during application of the specified methods of modelling.*

**Keywords:** the theory of technical systems, conceptual models of systems and processes, methods of conceptual modelling

### Введение в проблему

Концептуальная модель (КМ) — это мыслимый образ моделируемого объекта (процесса), содержащий требуемую потребителям информацию, представленную в виде, который позволяет им одинаково и правильно ее воспринимать<sup>1</sup>.

Концептуальное моделирование является основным методологическим принципом проектирования конструкции технических систем (ТС) [1–3].

<sup>1</sup> Под потребителями здесь и далее понимаются участники разработки КМ, а также ее пользователи.

Кроме того, в публикациях по технологиям и методам разработки программного обеспечения автоматизированных систем и систем автоматического управления состояниями ТС все чаще указывается на необходимость предварительного построения КМ, содержащих информацию о правилах управления состояниями и свойствах причинно-следственных процессов управляемого функционирования ТС [4].

В дальнейшем, там, где это не будет вызывать недопонимание, модели конструкции, а также процессов управления и функционирования ТС будем называть моделями ТС.

В теории технических систем [1–3] рассматриваются четыре типа КМ, которые используются в процессе проектирования конструкции ТС (приведены оригинальные названия моделей):

- модели "черного ящика" [5];
- модели функций ТС — структурно-функциональные представления выполняемых в системе функций;
- модели "органов" ТС — частей конструкции системы — подсистем и/или устройств, выполняющих в ней предопределенные функции<sup>2</sup>;
- модель элементов конструкции ТС — уровень схмотехнического представления состава и структуры системы.

Предусматривается, что проектирование ТС должно осуществляться итеративно, путем построения КМ в направлении порядка перечисления указанных моделей, с последовательной конкретизацией и детализацией конструкции на каждом шаге, и итерации моделирования от общего представления к частному. Перечисленные виды моделей, кроме модели функций, — это объектные КМ, представленные на разных уровнях детализации состава и структуры ТС.

В теории ТС указывается на наличие смысловых связей между функциональными и объектными моделями, которые проявляются в том, что всем объектным моделям частей, составляющих ТС, всегда сопоставляются функции, выполняемые ими в системе, и наоборот — компонентам функций, выполняемых ТС, сопоставляются соответствующие части системы.

Решение задач анализа процессов управления состояниями и управляемого функционирования ТС всегда осуществляется с использованием предварительно сформированных объектных и/или функциональных моделей этих систем. Отсюда следует вывод о том, что объектные и функциональные КМ следует рассматривать в качестве исходного модельного базиса для построения КМ и анализа указанных процессов. Следовательно, первоочередной задачей концептуального моделирования следует считать задачу формирования объектных и функциональных моделей ТС.

Анализ публикаций в области концептуального моделирования сложных систем и процессов показывает, что для этого применяются в основном три методологических подхода: объектно-ориентированное моделирование (ОМ) [4, 6], структурно-функциональный анализ (СФА) [7, 8] и менее известный метод совместного объектно-функционального моделирования, названный его автором методом "гамбургера" [9].

Метод ОМ позволяет осуществлять систематизацию, структуризацию и фор-

<sup>2</sup> Понятию "орган" в отечественной технической литературе соответствует понятие "функциональных блок".

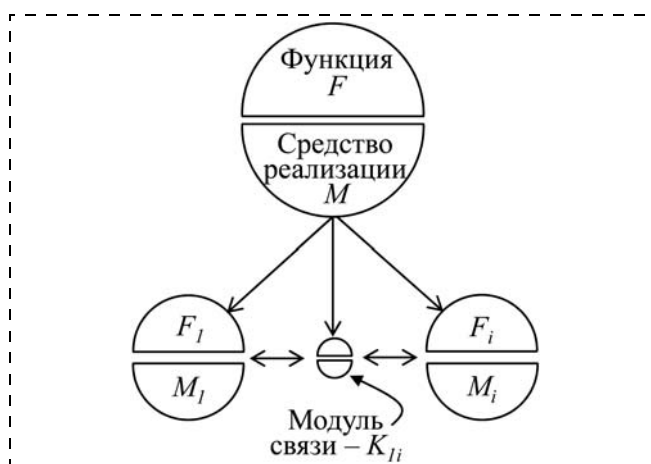


Рис. 1. Пример двухуровневой модели "гамбургера"

мализованное описание моделей частей, выделяемых в ТС. Он применяется для построения объектных КМ как проектируемых, так и существующих ТС.

Метод СФА ориентирован на решение аналогичных по смыслу задач, но уже применительно к сложным функциям и составляющим их компонентам, реализуемых системами и их частями. Этот метод применяют для построения функциональных КМ существующих систем.

Метод "гамбургера" ориентирован на формирование КМ, используемых только для проектирования систем. Он заключается в построении иерархической КМ, каждый элемент которой состоит из модуля — "гамбургера", в котором совместно учитываются функция и средство (объект) ее реализации.

На рис. 1 показана иллюстрация двухуровневой модели "гамбургера", в которой использованы следующие обозначения:  $F$  — функция,  $M$  — средство ее реализации,  $K$  — модуль связи между другими модулями модели, включающий соответствующую функцию связи и средство ее реализации.

Принцип построения КМ по этому методу заключается в следующем. В соответствии с требованиями к системе определяется ее функция. Известно, что разнообразие функций много меньше разнообразия средств, которые могут ее реализовать [7]. Поэтому каждой функции всегда можно сопоставить альтернативные варианты средств ее реализации (рис. 2) и, по результатам их сравнения между собой по каким-то известным критериям, выбрать

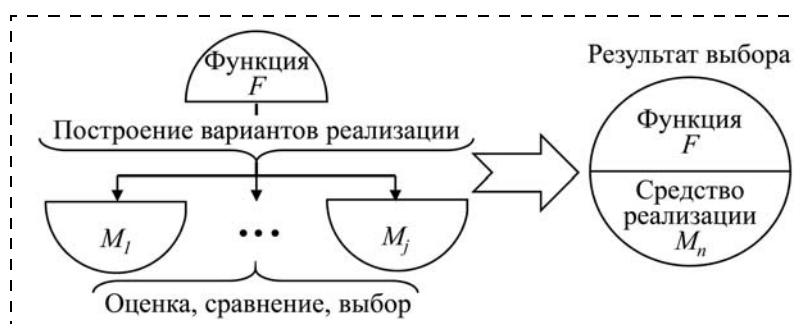


Рис. 2. Иллюстрация принципа построения модели "гамбургера"

лучший вариант, который вместе с реализуемой им функцией включается в модуль модели "гамбургера".

Однако применение моделей "гамбургера" для целей концептуального анализа процессов управления состояниями и управляемого функционирования ТС оказалось затруднительным, так как для этого требуется раздельное представление и рассмотрение свойств функциональных и объектных КМ.

Наличие смысловых связей между функциями систем и средствами их реализации предусматриваются также и в IDEF0-технологии СФА [8], в терминологии которой эти средства называются "механизмами". Однако методы построения их КМ в этой технологии не рассматриваются.

Результаты анализа методологий и методов ООМ, СФА и совместного объектно-функционального моделирования применительно к задачам концептуального моделирования ТС позволяют сделать следующие выводы.

1. Перечисленные методы концептуального моделирования систем и процессов являются универсальными, так как не привязаны к конкретным предметным областям. Применительно к построению КМ ТС возможности этих методов иллюстрируются в тематической литературе только на отдельных частных примерах, в которых существенную роль играют индивидуальные особенности и свойства выбранных для этого конкретных систем, что затрудняет или не позволяет осуществить перенос решений, показанных в таких примерах, на формирование КМ других систем. При этом вопросы адаптации этих методов для формирования КМ объектов класса (таксона)<sup>3</sup> ТС не рассматриваются.

2. Потребности в построении КМ ТС актуализируют необходимость в специализации указанных методов и/или разработки результативного метода концептуального моделирования ТС. Потенциальная возможность создания такого метода основана на наличии смысловых взаимосвязей между объектными и функциональными моделями, которые могут быть использованы для комплексирования рассмотренных методов и их комбинированного применения в формировании КМ ТС.

### Понятие "Функция"

Необходимость в уточнении содержания этого понятия в концептуальном моделировании ТС обусловлена тем обстоятельством, что в научно-технической литературе и в инженерной практике используется множество различных смысловых трактовок, затрудняющих его однозначное понимание и правильное использование.

Например, в работе [10] понятие "функция" рассматривается в следующих смысловых интерпретациях:

- как подтип активности — процесс или событие;

<sup>3</sup> Таксон, в отличие от класса, включает не только существующие, но и все мыслимые объекты с общими свойствами.

- как сущность в определенной роли или сделанная для определенной роли;
- как роль сущности, обычно в материальной вещи, которую эта вещь выполняет;
- как указание на связь, например, корреляцию между какими-то аспектами процесса (если высота растёт, то давление падает);
- как математическое отношение между числовыми объектами, определяющее их соотношение.

Анализ подобных трактовок показывает, что в их содержании используются, прежде всего, свойства, характеризующие *цели использования* функций в практической деятельности, а не свойства, которые составляют *концептуальную основу* этого понятия. В точных науках понятие "функция" вводится на формальном аксиоматическом уровне, что обуславливает его смысловую однозначность: *функция* — это бинарное отношение, однозначно сопоставляющее каждому элементу одного множества, называемого областью определения, элемент другого множества, называемого областью значений или ко-областью.

В концептуальном моделировании функции и правила их реализации могут быть представлены в виде вербальных, формальных, формализованных или в смешанных формах описаний на различных уровнях детализации/агрегации содержащейся в них информации о свойствах функций. Используются также множества различных форм и способов описания правил выполнения функций, в том числе не формализованных, посредством которых должно выполняться сопоставление значениям области определения функции значений ее ко-области. Однако это не должно означать, что смысловое содержание понятия "функция" должно зависеть от особенностей описания функций и правил их выполнения.

В дальнейшем будем считать, что в концептуальном моделировании ТС смысловая сущность функции, представленной в любых формах ее описания (задания), всегда понимается в математической трактовке этого понятия.

Цель концептуального моделирования функций с неформализованными описаниями заключается в обеспечении возможностей однозначного понимания и использования их свойств потребителями. Достижение этой цели осуществляется путем построения структурно-функциональных моделей исходной функции, представленных на требуемом уровне детализации их свойств.

### Понятие "Функциональный объект"

ТС и все элементы их конструкции всегда имеют вполне определенное функциональное назначение. Поэтому в концептуальном моделировании разделение конструкции ТС на части всегда осуществляется так, чтобы этим частям сопоставлялись вполне определенные функции, которые они выполняют в системе. Членения, не удовлетворяющие этому положению, не имеют смысла в концепту-

альном моделировании ТС. Это одна из общих особенностей концептуального моделирования проектируемых и существующих ТС, которая позволяет называть ТС функциональным объектом, а его части — функциональными частями системы.

**Функциональный объект (ФО)** — это абстрактный образ материального объекта, которому взаимно однозначно сопоставлена некоторая функция [11].

Модель ФО — это модель черного ящика, выполняющего приписанную ему ролевую сущность, а именно, заданным образом осуществлять качественные и/или количественные преобразования энергии, вещества и/или информации на его входах в энергию, вещество и/или информацию на его выходах [1]. Границы модели ФО определяются выбором и описанием его входов, которым сопоставляются аргументы соответствующей ему функции, и выходов, которым сопоставляются ее значения.

**Функциональная часть (ФЧ)** ТС — это составная часть ФО, которой взаимно однозначно сопоставлена одна из компонент выполняемой им функции.

Использование понятий "ФО" и "ФЧ" позволяет рассматривать объектные модели частей ТС как черные ящики, описание границ которых детализировано на требуемом уровне анализа выполняемых ими функций (функционального назначения), абстрагируясь при этом от специфики и разнообразия вариантов их индивидуальной конструкции. Вместе с тем, каждой ФЧ в объектной КМ ТС может быть сопоставлено множество различных способов и вариантов ее материальной реализации, что используется в проектировании систем.

Примеры функциональных объектов и функциональных частей:

- "объект управления" и "субъект управления" — понятия, которые используются в кибернетике и в теории систем;
- "функциональный блок" в блок-схемах разрабатываемой или существующей ТС — понятие, которое применяется в инженерной практике. Элементы блок-схемы функционального блока рассматриваются в качестве его функциональных частей.

### Комплексирование методов концептуального моделирования ТС

Из определения понятия "функциональный объект" следует однозначная определенность понятия "смысловая связь", существующая между ФО и приписанной ему функцией. Оно интерпретируется как отношение изоморфизма между объектными и функциональными моделями [12]. Это обстоятельство позволяет обосновать метод концептуального моделирования ТС, основанный на комплексировании методов ООМ, СФА и "гамбургера" и использовании возможностей их комбинированного применения.

Суть предлагаемого метода иллюстрирует рис. 3. В нем использованы следующие обозначения:

- $O$  и  $F$  — исходные модели ФО (черного ящика) и выполняемой им функции;
- $M_F$  и  $M_O$  — детализированные представления моделей  $F$  и  $O$ ;
- $F_1, F_i, K_F$  — компоненты членения функциональной модели  $M_F$ , где  $K_F$  — модель связей между  $F_1$  и  $F_i$ ;
- $O_1, O_i, K_O$  — части членения объектной модели  $M_O$ , где  $K_O$  — модель связей между  $O_1$  и  $O_i$ ;
- $m$  — модель конструкции одного из потенциально возможных или существующих средств материальной реализации объекта  $O_1$ ;
- $n$  — потенциально возможный или существующий вариант задания и правил выполнения функции  $F_i$ ;
- $A$  — множество моделей существующих и/или возможных альтернативных средств материальной реализации функционального объекта  $O_1$ ;
- $B$  — множество альтернативных правил представления и выполнения функции  $F_i$ ;
- двунаправленные стрелки — отношения изоморфизма между объектными и функциональными моделями; однонаправленные стрелки — отношения эпиморфизма между соединяемыми стрелкой сущностями.

Предлагаемый метод заключается в использовании в концептуальном моделировании ТС возможностей попеременного применения методов ООМ и СФА фактически в любой последовательности, в зависимости от наличия и типа исходной инфор-

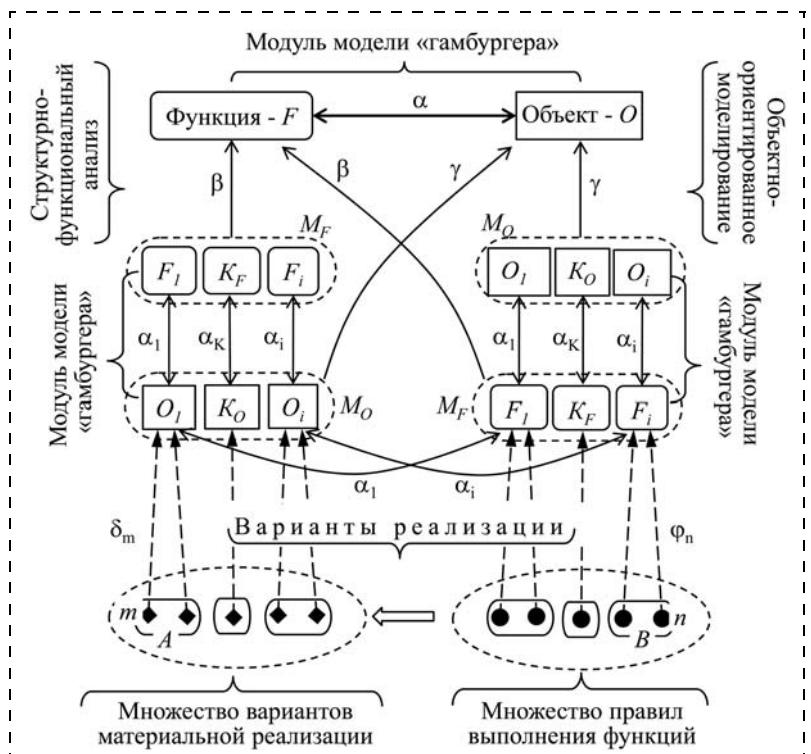


Рис. 3. Иллюстрация принципов комбинированного объектно-функционального метода концептуального моделирования

мации о моделируемых сущностях, а также от удобства ее представления в виде объектных, функциональных моделей и/или модели "гамбургера". Возможные переходы в последовательностях применения и возможности комбинированного использования методов ООМ и СФА определяются отношениями, показанными на рис. 3.

Если изначально имеется исходная информация о компонентном составе функций, выполняемых ТС, то существуют два начальных варианта в построении функциональных и объектных КМ:

- воспользоваться технологией СФА (IDEF0) в целях детализации состава и структуры компонентов функциональной КМ и представления ее в виде структурно-функциональной модели;
- использовать свойства изоморфизма функциональных и объектных моделей для выявления состава функциональных частей и структуры объектной КМ с ее последующей детализацией методами ООМ.

Если имеется априорная информация о составе частей ТС, то сначала формируется и детализируется объектная КМ, а затем с использованием свойств изоморфизма объектных и функциональных моделей методами СФА формируется структурно-функциональная модель функции системы.

Предложенный метод не исключает возможностей отдельного использования методов СФА и ООМ. Наоборот, на каких-то этапах концептуального моделирования может оказаться целесообразной последовательная детализация состава и свойств исходной модели ТС только одним из этих методов. В результате будет сформировано многоуров-

невое дерево функциональных или объектных КМ с различной степенью детализации выделяемых в них компонентов и частей (рис. 4).

Возможности установления отношения изоморфизма между функциональными частями ТС и выполняемыми ими функциями — элементами полученных указанным выше способом многоуровневых объектных и функциональных моделей — предоставляют свободу в выборе метода концептуального моделирования в зависимости от типа имеющейся исходной информации и/или удобства ее представления в заданном виде применительно к каждой ФЧ, выделяемой в исходной объектной модели ТС. При этом представление КМ ТС в виде деревьев моделей позволяет использовать потенциальные возможности решения задач рационального распределения заданий и планирования работ между различными исполнителями и коллективами разработчиков моделей частей и компонентов функций ТС.

Комбинированное и совместное использование методов СФА, ООМ и "гамбургера" в предложенном методе позволяет получить *полезный синергетический эффект*, который заключается в задействовании потенциальных возможностей в упрощении решения задач целенаправленного поиска, получения, систематизации и структуризации *взаимодополняющей* информации о компонентах функции и/или о функциональных частях ТС на каждом шаге построения, детализации и членения модельных представлений системы.

Предложенный метод может использоваться для построения объектных и функциональных КМ как проектируемых, так и существующих ТС.

Концептуальное моделирование проектируемой ТС осуществляется путем совместной детализации исходных представлений ее объектной и функциональной моделей до уровня, на котором появляются возможности выбора правил выполнения компонентов функций и вариантов средств реализации соответствующих им моделей ФЧ системы.

Для существующих ТС возможны два противоположных направления в формировании КМ:

- от общего описания объектных и функциональных моделей до уровня их детализации, достаточного для сопоставления полученных моделей ФЧ конкретным частям конструкции системы;
- от описания функций, выполняемых частями конструкции системы, к построению объектных и функциональных моделей, содержащих агрегированную информацию, необходимую для целей использования КМ ТС.

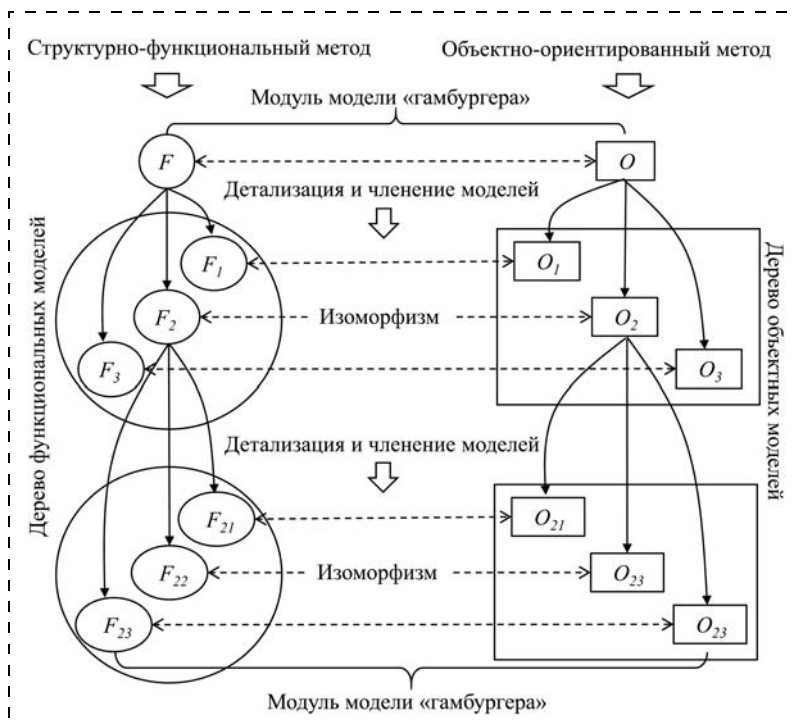


Рис. 4. Сопоставление деревьев функциональных и объектных моделей в комбинированном концептуальном моделировании ТС

## Заключение

Предложенный метод комбинированного моделирования представляет собой описание идеи и принципов комплексного использования известных методов концептуального моделирования. Основанием его практической реализуемости является проверяемое практикой утверждение о том, что членение объектных моделей ТС и составляющих ее частей осуществляется не произвольным, а вполне определенным образом, а именно, только на функциональные части, которым взаимно однозначно сопоставляются функции, выполняемые в системе.

Аналогичное свойство — возможность членения на функциональные части — присуще не только техническим, а также всем функциональным системам различной материальной природы [11]. Следовательно, предложенный метод может использоваться в концептуальном моделировании функциональных систем независимо от их устройства и назначения, что существенно расширяет сферу его потенциально возможных применений.

Дальнейшее развитие предложенного метода обусловлено потребностями в повышении степени результативности его использования в практике концептуального моделирования ТС. Для этого, в первую очередь, необходимо создать основанные на нем инженерные методики, ориентированные на формирование КМ (репрезентативных моделей) для различных классов (таксонов) ТС и целей последующего применения таких моделей, в частности, для проектирования конструкции, для управления состояниями, для создания системы классификации ТС [13].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 11-08-00641-а и 11-08-01016-а.

## Список литературы

1. Хубка В. Теория технических систем. М.: Мир, 1987. 202 с.
2. Hubka V., Eder W. E. Theory of Technical Systems. Berlin: Springer, 1988.
3. Eder W. E., Hosnedl St. Design Engineering. A Manual for Enhanced Creativity. London, New York: CRC Press. 2008. 588 p.
4. Эдванс Э. Предметно-ориентированное проектирование (DDD): структуризация сложных программных систем: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2011. 448 с.
5. Философский словарь / Под ред. И. Т. Фролова. 4-е изд. М.: Политиздат, 1981. 445 с.
6. Гради Буч, Роберт А. Максимчук, Майкл У. Энгл, Бобби Дж. Янг, Джим Коналлен, Келли А. Хьюстон. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений. М.: Вильямс. 720 с.
7. Дэвид А. Марка, Клемент МакГоуэн. Методология структурного анализа и проектирования. М.: Метатехнология, 1993. 240 с.
8. Р 50.1.028—2001. Информационные технологии поддержки жизненного цикла продукции. Методология функционального моделирования. М.: Госстандарт России.
9. Wim Gielingh. A theory for the modelling of complex and dynamic systems. URL: <http://15926.info/functional-physical-object/GARM-paper.pdf> (Электронный ресурс).
10. Gellish A. Generic Extensible Ontological Language. Design and Application of a Universal Data Structure. URL: [http://repository.tudelft.nl/assets/uuid:de26132b-6f03-41b9-b882-c74b7e34a07d/its\\_rensen\\_20050914.pdf](http://repository.tudelft.nl/assets/uuid:de26132b-6f03-41b9-b882-c74b7e34a07d/its_rensen_20050914.pdf) (Электронный ресурс).
11. Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. Принципы системной организации функций. М.: Наука, 1973. С. 5—61.
12. Кириллов Н. П. Концептуальная модель объекта ситуационного управления функциональными состояниями технических систем // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. № 4. С. 62—73.
13. Кириллов Н. П. Концептуальные модели технических систем с управляемыми состояниями (обзор и анализ) // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011. № 4.

УДК 681.5.033.23

**В. С. Хорошавин**, д-р техн. наук, проф., **А. В. Зотов**, аспирант, zotov.aleksandr.vikt@yandex.ru,  
**Д. В. Ишутин**ов, ст. преподаватель,  
Вятский государственный университет

## Исследование эффективности систем управления нелинейным динамическим объектом второго порядка с экстремальной статической характеристикой

*Исследованы особенности трех систем управления нелинейными динамическими объектами с экстремальной статической характеристикой, а именно, система управления, реализующая оптимальное управление в виде кусочно-непрерывной функции, система управления, реализующая квазиоптимальное управление в виде непрерывной функции, и система управления, реализующая оптимально-адаптивное управление. Законы управления для первых двух систем найдены на основе принципа максимума Понтрягина применительно к нелинейным объектам. Третья система управления реализована на ПИД регуляторе с настраиваемым коэффициентом. Выполнено сравнение систем управления по минимуму расхода ресурсов в переходном процессе, по времени переходного процесса, по асимптотической устойчивости в конечной точке и по перерегулированию.*

**Ключевые слова:** нелинейный динамический объект, экстремальная статическая характеристика, принцип максимума Понтрягина, особое управление, адаптивное управление, ПИД регулятор

## Research of Efficiency of Control Systems of Nonlinear Second-Order Dynamic Objects with Extreme Static Characteristic

The article investigates the features of the three control systems of nonlinear dynamic objects with extreme static characteristic, namely control system, which realizing the optimal control in the form of a piecewise continuous function, the control system, realizing quasi-optimal control in the form of a continuous function and the control system, realizing adaptive control. Control laws for the first two systems are found on the basis of the Pontryagin maximum principle applied to nonlinear objects. The third control system is realizing on the PID controller with variable gain. Control systems compared to the minimum resource consumption in the transition process, at the transient time, on the asymptotic stability in the endpoint, and overshoot.

**Keywords:** nonlinear dynamic object, extreme static characteristic, Pontryagin maximum principle, special control, optimal adaptive control, PID control, customizable controller gain

Задача оптимального (и, в частности, экстремального) управления нелинейными динамическими объектами, минимизирующего ресурсы (управления на минимум ресурсов) представляет сложную, до конца не решенную проблему, которая до сих пор очень актуальна. Общей методики для решения нелинейных оптимальных задач не существует.

Существует большой класс нелинейных динамических объектов с экстремальной статической характеристикой, для которых имеется адекватное математическое описание [1—4]. Применение для синтеза бесперебойных систем оптимального и экстремального управления вариационных и градиентных методов [2, 5] сопряжено со значительными вычислительными трудностями и приводит к сложной реализации управляющего устройства [6, 7]. В целях уменьшения временных и материальных затрат и вычислительных трудностей предлагается перейти от задачи экстремального управления к задаче динамической оптимизации на минимум отклонений координат объекта.

В работах [8—10] развит метод определения осолого (в смысле принципа максимума Понтрягина) управления в явном виде с помощью условий общности положения (УОП) для нелинейных стационарных объектов. Дальнейшее развитие этого метода применительно к нахождению оптимального на минимум ресурсов управления нелинейными динамическими объектами представлено в работе [11].

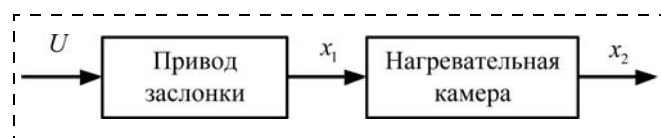


Рис. 1. Структурная схема объекта управления

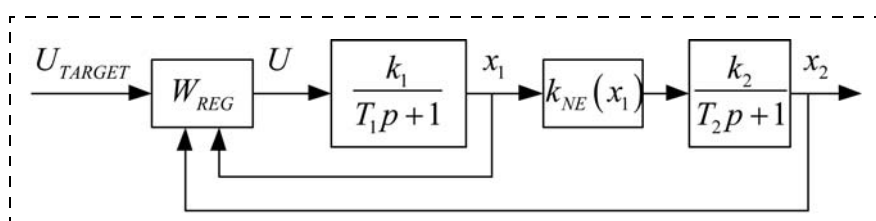


Рис. 2. Структура системы управления и объекта управления

Ниже будут рассматриваться три подхода к реализации управления: первые два основаны на использовании УОП и реализуют оптимальное на минимум ресурсов (отклонений координат) управление, третий подход основан на использовании пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора.

В работе [12] представлено применение метода УОП к двухкоординатному динамическому объекту с параболической статической характеристикой, а именно, к нагревательной камере с поворотной заслонкой. Получаемое оптимальное управление представляет собой кусочно-непрерывную функцию координат и параметров объекта управления (ОУ) и состоит из участков не особого и особого оптимального управления. Недостатком полученного в работе [12] оптимального управления является необходимость стабилизации ОУ в конце переходного процесса. Используя математический аппарат [11], в работе [13] найдено квазиоптимальное управление, являющееся непрерывной функцией и обеспечивающее асимптотическую устойчивость ОУ в конечной точке переходного процесса. Также можно реализовать управление указанным объектом с помощью адаптивного ПИ регулятора с переменным коэффициентом усиления для учета нелинейности ОУ.

В данной статье предлагается провести анализ интегрального критерия в переходных процессах для рассмотренных выше систем управления нагревательной камерой с поворотной заслонкой. Привод управления поворотной заслонкой представлен в виде линейного апериодического звена, нагревательная камера — в виде нелинейного звена с экстремальной статической характеристикой (рис. 1), вместе они образуют ОУ.

Структура системы управления в общем виде представлена на рис. 2, где  $W_{REG}$  — синтезируемый регулятор;  $U_{TARGET}$  — сигнал задания (уставка);  $U$  — выходной сигнал синтезируемого регулятора, непосредственно управляющий приводом нагревательной камеры;  $x_1$  — угол поворота заслонки;  $x_2$  — температура в нагревательной камере;  $k_{NE}(x_1)$  — нелинейность ОУ;  $k_1, k_2, T_1, T_2$  — параметры ОУ.



## Постановка задачи

Дан объект управления с экстремальной статической характеристикой (см. рис. 1), динамика которого описывается следующей системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} (k_1 U - k_2 x_1); \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} (k_3 (x_1 - a)^2 + b - x_2), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1 = [0, 1]$ ,  $x_2 = [0, 1]$ ,  $U = [-1, 1]$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 \geq 0$ ,  $k_3 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ,  $a = [0, 1]$ ,  $b = [0, 1]$ ,  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$ , точка  $(a, b)$  — точка экстремума статической характеристики ОУ.

Требуется найти допустимое управление  $U$ , минимизирующее интегральный критерий вида

$$J = \int_0^T x_1 dt, \quad (2)$$

где  $T$  — время движения от начальной до конечной точки заранее не задано.

В модели объекта (1) зададим следующие значения коэффициентов:

$$k_1 = k_2 = 1, k_3 = -1, T_1 = T_2 = 1, a = 0,5, b = 0,25.$$

Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = U - x_1; \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 - x_2. \end{cases} \quad (3)$$

### Оптимальное управление в виде кусочно-непрерывной функции

По методу, описанному в работе [11], для системы с математическим описанием (2) находится особое в смысле принципа максимума Понтрягина управление

$$U_{oc} = \frac{x_1(k_2 T_2 - T_1) + T_1 a}{k_1 T_2}. \quad (4)$$

Для системы (3) особое управление примет вид

$$U_{oc} = 0,5. \quad (5)$$

Случай множества особых траекторий и управлений — отличительная особенность задач на минимум ресурсов. Как показано в работе [12], среди множества траекторий, реализуемых кусочно-непрерывным управлением  $\{+1, U_{oc}, -1\}$ , существует единственное оптимальное на минимум критерия (1) управление и соответствующая ему оптимальная траектория. Данное оптимальное управление включает в себя участки особого управления  $U_{oc}$  (4) и неособого  $U = \pm 1$ , с максимально допустимыми амплитудами на интервалах между переключениями (рис. 3, а). В пакете компьютерной математики *Maple* была создана программа, которая для заданных на статической характеристике ОУ граничных

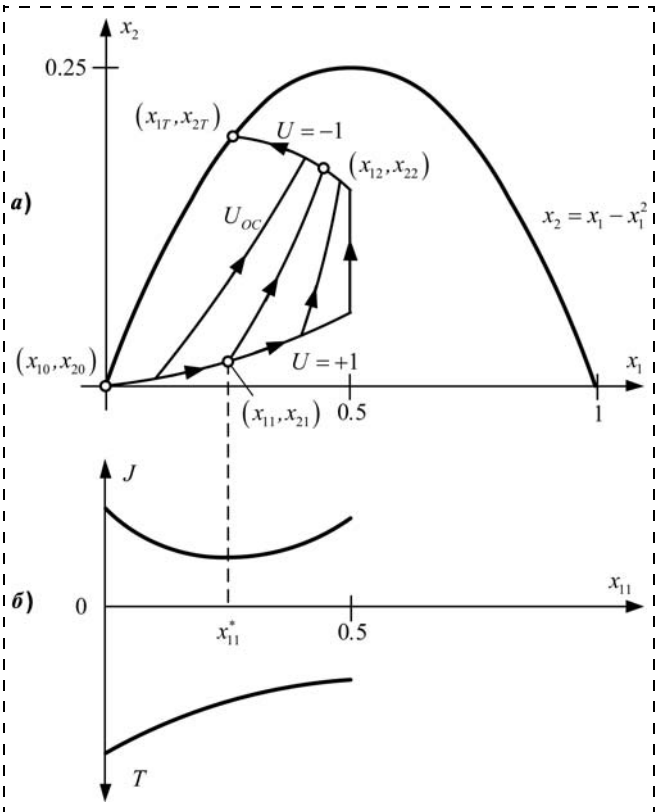


Рис. 3. Траектории движения ОУ (а) и зависимость критерия качества и времени переходного процесса (б) от точки сопряжения участков управлений

условий численно находит оптимальную траекторию и точки сопряжения ее участков.

На рис. 3 использованы следующие обозначения:  $(x_{10}, x_{20})$  — начальная точка движения ОУ, находится на статической характеристике ОУ;  $(x_{11}, x_{21})$  и  $(x_{12}, x_{22})$  — соответственно первая и вторая точки сопряжения участков траекторий при особом и не особом управлениях;  $(x_{1T}, x_{2T})$  — конечная точка движения ОУ, находится на статической характеристике ОУ;  $x_{11}^*$  — координата, которой соответствует оптимальная траектория. На рис. 3, б показаны зависимость критерия минимума ресурсов  $J$  (2) от координаты переключения  $x_{11}$  между управлениями  $U = +1$  и  $U_{oc}$ .

Таким образом, для структуры, представленной на рис. 2,  $U_{TARGET} = x_{2T}$  (для всех рассматриваемых в данной статье систем управления), а  $W_{REG}$  реализует закон управления  $U = \{U_{oc}, -1\}$ .

В пакете *Simulink* системы *MATLAB* были разработаны математические модели данной и рассматриваемых ниже систем управления объектом (1), которые позволяют при полученном управлении для различных граничных условий вычислить значение интегрального критерия  $J$  (2) и время переходного процесса  $T$ . Переходные процессы для функции управления и координат показаны на рис. 4.

В табл. 1 приведены критерий  $J$  и время переходного процесса  $T$  для различных пар начальных и конечных точек при полученном оптимальном управлении.

**Зависимость интегрального критерия  $J$  и времени переходного процесса  $T$  от граничных условий при кусочно-непрерывной функции управления**

$x_{10}$	$x_{20}$	$x_{1T}$	$x_{2T}$	$J$	$T$
0,1	0,09	0,2	0,16	0,128	1,14
0,1	0,09	0,3	0,21	0,457	2,05
0,1	0,09	0,4	0,24	0,949	3,47
0,1	0,09	0,5	0,25	2,032	9,49
0,2	0,16	0,3	0,21	0,198	1,41
0,2	0,16	0,4	0,24	0,756	2,88
0,2	0,16	0,5	0,25	1,844	16,06
0,3	0,21	0,4	0,24	0,314	2,03
0,3	0,21	0,5	0,25	1,536	10,40
0,4	0,24	0,5	0,25	0,715	17,40

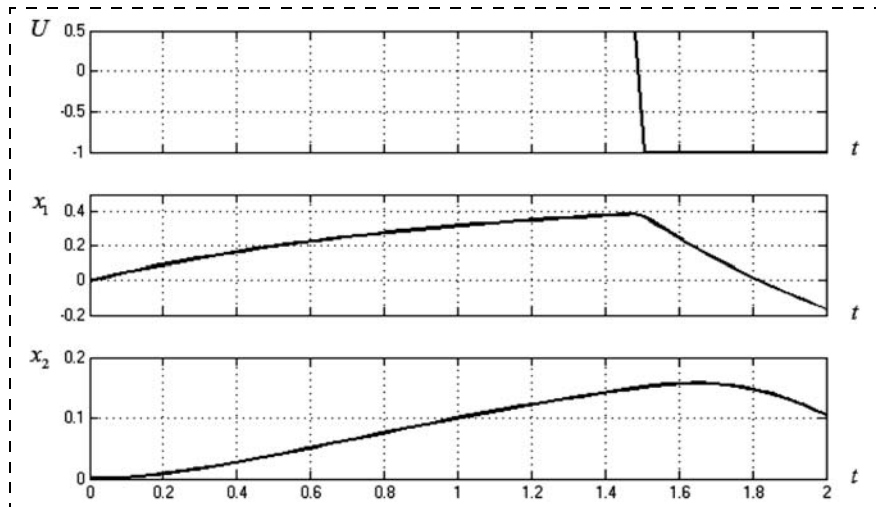


Рис. 4. Переходные процессы при кусочно-непрерывной функции управления

Для примера рассмотрим траекторию, начальная точка которой имеет координаты  $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$ , а конечная точка —  $(x_{1T}, x_{2T}) = (0, 2, 0, 16)$ . Значение интегрального критерия  $J = 0,415$ , время переходного процесса  $T = 1,67$  с, перерегулирование по координате  $x_1$  составляет 93,5 %.

**Квазиоптимальное управление в виде непрерывной функции**

Особое управление  $U_{oc}$  (4) доставляет асимптотическую устойчивость ОУ (1), а положением равновесия ОУ при данном особом управлении является точка с координатами  $(a, b)$  — экстремум статической характеристики ОУ. Так как требуется устойчивость положения равновесия ОУ в точке, отличной от экстремума статической характеристики, необходимо вводить добавку управляющего воздействия  $W$ :

$$W = \frac{T_1}{T_2} (x_{1T} - a). \tag{6}$$

Таким образом, закон управления для ОУ вида (1) будет иметь вид

$$U = U_{oc} + W = \frac{(k_2 T_2 - T_1)x_1 + T_1(k_1(x_{1T} - a) + a)}{k_1 T_2}, \tag{7}$$

а для ОУ вида (3) будет иметь вид

$$U = U_{oc} + W = x_{1T}. \tag{8}$$

Траектории движения ОУ показаны на рис. 5, а переходные процессы для функции управления и координат — на рис. 6. Так, ОУ под управлением вида (7) и его частного случая (8) достигает конечной точки за бесконечное время, и целесообразно рассчитать попадание системы в некоторую окрестность данной конечной точки. В данном случае оценивается текущая координата, отличающаяся от конечной на 5 % (что является допустимой точностью в технических приложениях) и на 1 % (с повышенной точностью).

Результаты моделирования данной системы для двух окрестностей и нахождения интегрального

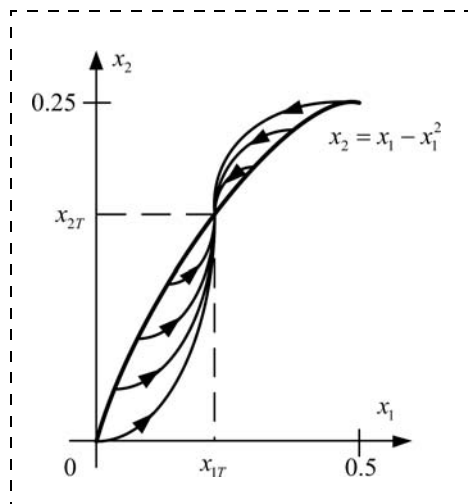


Рис. 5. Траектории движения ОУ при непрерывной функции закона управления

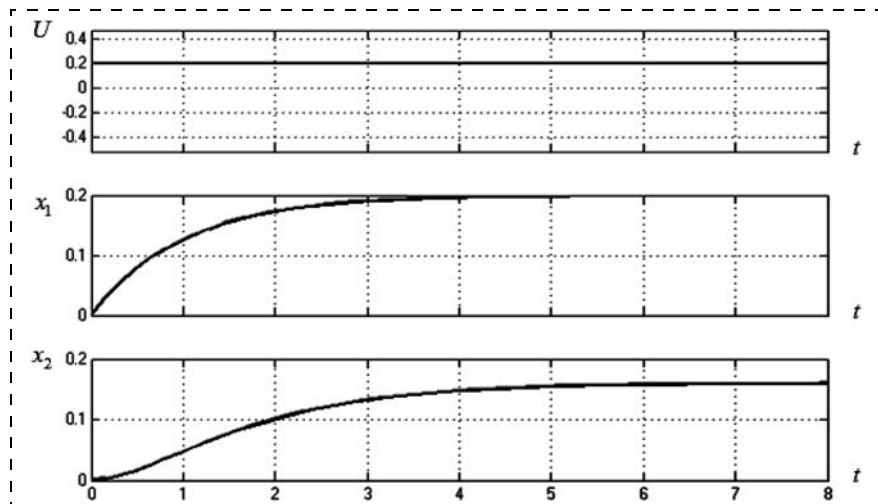


Рис. 6. Переходные процессы при непрерывной функции закона управления

Таблица 2

Зависимость интегрального критерия  $J$  и времени переходного процесса  $T$  от граничных условий при непрерывной функции управления

$x_{10}$	$x_{20}$	$x_{1T}$	$x_{2T}$	$\varepsilon = 0,05$		$\varepsilon = 0,01$	
				$J$	$T$	$J$	$T$
0,1	0,09	0,2	0,16	0,653	3,75	1,014	5,57
0,1	0,09	0,3	0,21	0,923	3,73	1,487	5,62
0,1	0,09	0,4	0,24	1,067	3,39	1,737	5,09
0,1	0,09	0,5	0,25	1,236	3,24	2,048	4,89
0,2	0,16	0,3	0,21	0,693	2,62	1,395	4,98
0,2	0,16	0,4	0,24	0,927	2,79	1,698	4,74
0,2	0,16	0,5	0,25	1,024	2,60	1,615	3,82
0,3	0,21	0,4	0,24	0,632	1,79	1,536	4,09
0,3	0,21	0,5	0,25	0,843	2,03	1,625	3,64
0,4	0,24	0,5	0,25	0,982	1,92	2,071	3,78

критерия  $J$  (2) и времени переходного процесса  $T$  показаны в табл. 2.

Также рассмотрим траекторию, начальная точка которой имеет координаты  $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$ , а конечная точка —  $(x_{1T}, x_{2T}) = (0,2, 0,16)$ . Для координаты, отличающейся от конечной на 5 %, значение интегрального критерия составляет  $J = 0,671$ , время переходного процесса  $T = 4,34$  с, а для координаты, отличающейся от конечной на 1 %, интегральный критерий  $J = 1,033$ , время переходного процесса  $T = 6,16$  с. Перерегулирование по обеим координатам отсутствует.

**Оптимально-адаптивное управление с настраиваемым коэффициентом регулятора**

В качестве системы с оптимально-адаптивным управлением была рассмотрена система с ПИ регулятором, настроенным на технический оптимум. Адаптация ПИ закона управления в соответствии с нелинейной статической характеристикой ОУ реализуется за счет переменного (настраиваемого) коэффициента усиления регулятора.

Для расчета регулятора нелинейная статическая характеристика ОУ была линеаризована прямой, тангенс угла наклона которой равен  $k_{NE}(x_1)$ , а уравнение, описывающее линеаризованную статическую характеристику, имеет вид  $x_2 = k_{NE}(x_1)x_1$ .

В соответствии с математическим описанием исследуемого ОУ, статическая характеристика которого описывается функцией  $x_2 = k_3(x_1 - a)^2 + b$  для системы (1) и  $x_2 = x_1 - x_1^2$  — для системы (3), коэффициент  $k_{NE}(x_1) = \frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ . После дифференцирования получается  $k_{NE}(x_1) = 2k_3(x_1 - a)$  для системы (1) и  $k_{NE}(x_1) = 1 - 2x_1$  — для системы (3).

Передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_{REG} = \frac{(T_2 p + 1)}{2 \frac{k_1}{k_2} k_{NE}(x_1) k_{OC} T_1 p}, \quad (9)$$

где  $k_{OC} = 1$  — коэффициент обратной связи (ОС) по координате  $x_2$ ,  $k_{NE}(x_1)$  — переменный коэффициент усиления, являющийся функцией координаты  $x_1$ .

Структура системы с оптимально-адаптивным управлением представлена на рис. 7, переходные процессы функции управления и координат — на рис. 8, фазовая траектория в координатах  $(x_1, x_2)$  — на рис. 9.

Результаты моделирования данной системы для двух окрестностей и нахождения интегрального критерия  $J$  (2) и времени переходного процесса  $T$  показаны в табл. 3. Также при моделировании учтены проблемы интегрального насыщения регулятора [14] и исключение равенства нулю его коэффициента усиления в точке экстремума статической характеристики.

Моделирование показывает, что в системе с оптимально-адаптивным управлением могут возникать незатухающие колебания регулируемых координат  $(x_1, x_2)$  в окрестности конечной точки  $(x_{1T}, x_{2T})$ , которые характеризуются незначительной амплитудой отклонения от точки  $(x_{1T}, x_{2T})$ , поэтому, как и в случае системы, реализующей квазиоптимальное управление, оценивается текущая координата, отличающаяся от конечной на 5 и на 1 %.

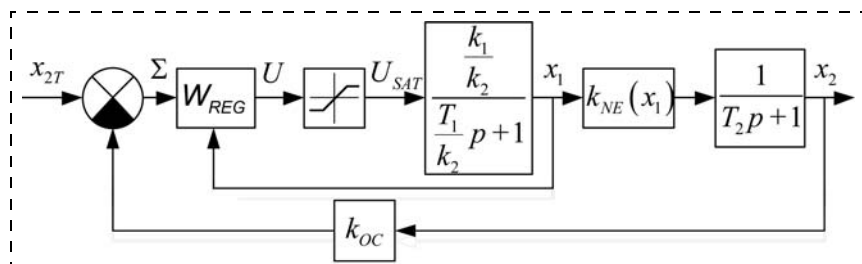


Рис. 7. Структура системы с оптимально-адаптивным управлением с настраиваемым коэффициентом регулятора и ОУ

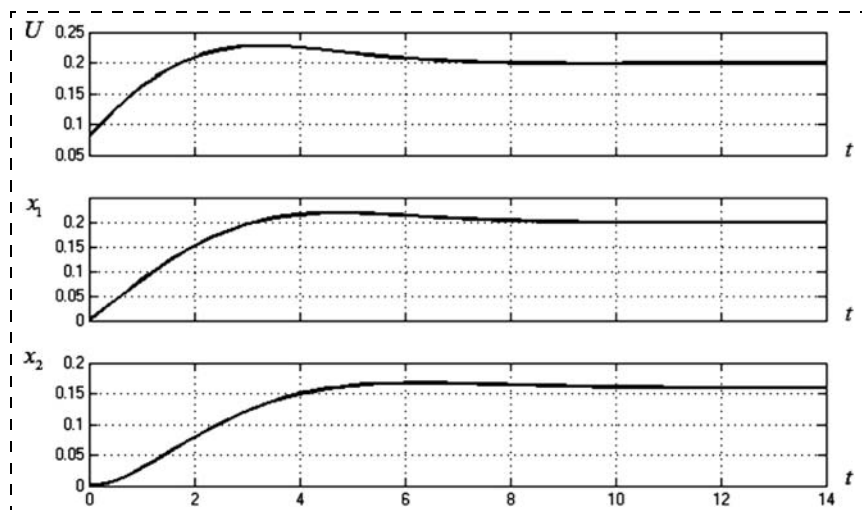


Рис. 8. Переходные процессы при адаптивном управлении

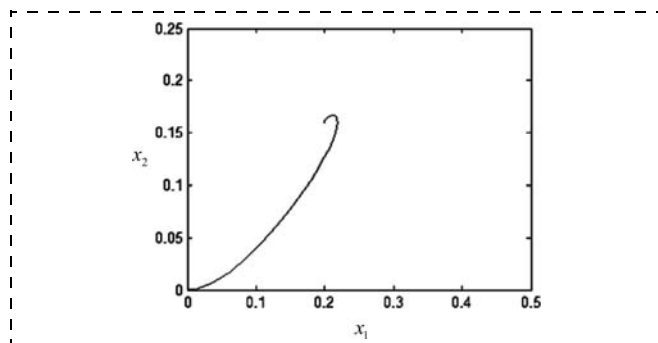


Рис. 9. Фазовая траектория системы (3) при оптимально-адаптивном управлении с настраиваемым коэффициентом регулятора

Таблица 3

Зависимость интегрального критерия  $J$  и времени переходного процесса  $T$  от граничных условий при оптимально-адаптивном управлении

$x_{10}$	$x_{20}$	$x_{1T}$	$x_{2T}$	$\varepsilon = 0,05$		$\varepsilon = 0,01$	
				$J$	$T$	$J$	$T$
0,1	0,09	0,2	0,16	0,602	3,64	1,582	8,42
0,1	0,09	0,3	0,21	1,565	5,97	2,450	8,86
0,1	0,09	0,4	0,24	2,670	7,30	3,383	9,04
0,1	0,09	0,5	0,25	1,351	4,22	2,191	5,93
0,2	0,16	0,3	0,21	0,791	3,07	2,061	7,22
0,2	0,16	0,4	0,24	2,301	6,29	3,118	8,28
0,2	0,16	0,5	0,25	1,257	3,62	2,049	5,25
0,3	0,21	0,4	0,24	0,845	2,44	2,782	7,22
0,3	0,21	0,5	0,25	1,306	3,34	2,012	4,79
0,4	0,24	0,5	0,25	1,357	3,08	11,605	23,91

Также рассмотрим траекторию, начальная точка которой имеет координаты  $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$ , а конечная точка  $(x_{1T}, x_{2T}) = (0,2, 0,16)$ . Для координаты, отличающейся от конечной на 5 %, интегральный критерий равен  $J = 1,089$ , время переходного процесса  $T = 6,54$  с, а для координаты, отличающейся от конечной на 1 %, интегральный критерий равен  $J = 1,684$ , время переходного процесса  $T = 9,45$  с. Перерегулирование по координате  $x_1$  составляет 9,25 %, по координате  $x_2$  — 4,31 %.

### Вывод

Система, реализующая оптимальное управление в виде кусочно-непрерывной функции, обеспечивает не только наименьшее значение интегрального критерия  $J$  среди рассматриваемых в данной статье систем управления, но и наибольшее быстродействие для многих граничных условий. К недостаткам данной системы управления можно отнести необходимость реализации стабилизации ОУ в конечной точке, что усложняет систему управления. Переходный процесс сопровождается значительным перерегулированием по координате  $x_1$ . Это обстоятельство необходимо учитывать при разработке реальных систем управления.

Система, реализующая квазиоптимальное управление, показывает большее, чем для системы оптимального управления, значение интегрального критерия  $J$  на траекториях (для некоторых граничных условий он больше в несколько раз, чем для системы оптимального управления) и большее время

переходного процесса  $T$ . Однако данная система управления доставляет асимптотическую устойчивость ОУ, отсутствует перерегулирование по координатам, управление является непрерывной функцией и легко реализуемо.

Система с оптимально-адаптивным управлением с настраиваемым коэффициентом регулятора стабилизирует ОУ в конечной точке или в малой ее окрестности. К недостаткам данной системы можно отнести то, что для большинства граничных условий она показывает самое большое значение интегрального критерия  $J$  в переходном процессе и самое большое время переходного процесса  $T$  для большинства граничных условий. Также к недостаткам можно отнести небольшое перерегулирование по обеим координатам. Однако для некоторых граничных условий числовые значения интегральных критериев при квазиоптимальном и оптимально-адаптивном управлении с настраиваемым коэффициентом регулятора незначительно отличаются, что позволяет сделать вывод о пригодности в ряде случаев оптимально-адаптивного регулятора с настраиваемым коэффициентом. Уменьшение длительности переходного процесса возможно за счет увеличения коэффициента усиления регулятора, однако при этом будет расти перерегулирование и колебательность.

Аналогичные выводы были получены во всех результатах моделирования для других значений параметров системы (2).

### Список литературы

1. Казакевич В. В., Родов А. Б. Системы автоматической оптимизации. М.: Энергия, 1977. 288 с.
2. Козлов Ю. М., Юсупов Р. М. Бесперебойные самонастраивающиеся системы. М.: Наука, 1969. 455 с.
3. Растринин Л. А. Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974. 630 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
5. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применения. М.: Машиностроение, 1972. 544 с.
6. Златкин В. И., Гельфанд Я. Е., Шутов В. В. Синтез оптимальной по быстродействию системы управления экстремальным инерционным объектом // Изв. вузов: Приборостроение. 1976. № 19. С. 42—44.
7. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 368 с.
8. Борисенко Р. А. Исследование особых управлений в нелинейных системах: Автореферат канд. дисс. Ленинградский электротехнический институт. 1972.
9. Олейников В. А. Синтез оптимальных по быстродействию управлений для нелинейных объектов: Автореферат докт. дисс. Ленинградский электротехнический институт. 1974.
10. Олейников В. А. Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности. Л.: Недра, 1982. 216 с.
11. Хорошавин В. С. Прикладные методы качественного исследования особых управлений и структур нелинейных оптимальных систем: Дисс. ... на соискание ученой степени доктора технических наук. Кировский политехнический институт, 1993. 402 с.
12. Хорошавин В. С., Прогасов А. П. Оптимальное управление электротехническими установками: учеб. пособие. Киров: Изд-во Кировского политехнического института, 1992. 95 с.
13. Зотов А. В. Нахождение закона управления непрерывными инерционными объектами второго порядка с экстремальной статической характеристикой, доставляющего асимптотическую устойчивость в состоянии равновесия, отличном от точки экстремума // Матер. Междунар. заочн. науч.-практ. конф. "Наука, образование, бизнес: проблемы, перспективы, интеграция", 28 февраля 2013 г., г. Москва, 2013.
14. Денисенко В. В. ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации. Часть 1 // Современные технологии автоматизации. 2006. № 4. С. 66—74.

# ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ, ДИАГНОСТИКИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

УДК 629.7:004.324

**С. В. Жернаков**, д-р техн. наук, проф., zhsviit@mail.ru, **Р. Ф. Равилов**, аспирант,  
Уфимский государственный авиационный технический университет

## Вычисление параметров масляной системы авиационного ГТД на основе технологии нейронных сетей\*

*Рассматриваются нейросетевые алгоритмы для контроля и диагностики технического состояния масляной системы авиационного газотурбинного двигателя (ГТД). Формализуется задача комплексной оценки теплового состояния роторных подшипников ГТД в нейросетевом базисе. Предложена инженерная методика, которая может быть применена на этапах стендовых и летных испытаний авиационных ГТД.*

**Ключевые слова:** масляная система ГТД, контроль и диагностика, алгоритм обучения, нейронные сети

S. V. Zhernakov, R. F. Ravilov

## Calculation of Oil System Parameters of Aviation GTE on the Basis of Neural Network Technology

*The neural network algorithms of technical condition checking and diagnosis for aeroengine gas-turbine engines oil system are considered. The problem of complex evaluation of GTE rotor thermal condition in the neural network basis is formalized. The engineering technique for applying at the stages of stand and on-board tests of aviation GTE is proposed.*

**Keywords:** GTE oil system, checking and diagnosis, learning algorithm, neural networks

### Введение

Современный авиационный двигатель — сложный технический объект, воплотивший в себе передовые технологии науки и техники. Спектр задач, решаемых современным газотурбинным двигателем (ГТД), очень разнообразен: от задач, выполняемых на борту летательного аппарата силовой установкой летательного аппарата (СУЛА) до функций наземных энергоустановок. Своевременный и качественный процесс диагностики и контроля параметров и систем авиационного двигателя позволяет осуществлять его эффективную эксплуатацию по состоянию. Несмотря на большое многообразие методов контроля и диагностики масляных систем ГТД [1—8], сегодня нет универсальных методов, способных полностью заменить остальные. Связано это и с высокой сложностью авиационного двигателя: многопараметричностью, многосвязностью, нелинейностью протекающих в нем процессов, многорежимностью его функционирования и т. д. Все это предполагает необходимость применения комплексных методов и методик для решения задач контроля и диагностики параметров авиационного двигателя и его систем.

\* Результаты научных исследований поддержаны грантами РФФИ: № 11-08-00871-а; 12-08-01014-а.

### Математическая модель маслосистемы авиационного ГТД

Процессы, протекающие в маслосистемах авиационных ГТД (кавитация и ламинарность течения, пеннистость и т. д.), сложны для аналитического описания. Это заставляет разработчиков математических моделей (ММ) авиационных двигателей учитывать следующие ограничения [5, 10, 12]:

- модель должна адекватно отражать совокупность функциональных связей между основными параметрами элементов маслосистемы и позволять оптимизировать систему и ее элементы по той или иной совокупности параметров;
- в связи с существенной сложностью состава параметров и многомерностью совокупности факторов, определяющих работу системы и ее элементов, математическая модель должна быть представлена модулями с ограничением до минимально допустимого числа межмодульных параметрических связей; при этом при формировании связи "система — подсистема — элемент" применяется иерархический принцип, при котором маслосистема определяется более высоким уровнем.

С учетом этих ограничений математическая модель маслосистемы представлена как совокупность

замкнутых систем уравнений, каждая из которых описывает систему, подсистему или элемент в зависимости от иерархического уровня. В соответствии с ранее проведенными исследованиями в общей математической модели маслосистемы авиационного ГТД присутствуют три основных модуля: тепловой, гидравлический и механический.

Для оценки состояния масляной системы ГТД контролируется множество различных по своей физической природе параметров. Опыт эксплуатации масляных систем авиационных двигателей показывает, что оценка их состояния требует комплексного применения методов и средств диагностирования, обобщения всей диагностической информации для принятия правильного и своевременного решения. В общем случае принятие решения о техническом состоянии ГТД и его систем проводится в условиях действия множества неопределенных факторов, основными из которых являются:

- нестационарность физических процессов, протекающих в ГТД и его системах;
- процессы эрозии и износа механических узлов;
- технологический разброс параметров при производстве ГТД и его систем;
- несовершенство методов и средств измерения газодинамических параметров ГТД, которые приводят к наличию дополнительных ошибок контроля;
- влияние на характеристики двигателя и его систем особенностей конструкции испытательного стенда и т. д.

К числу особенностей ГТД как объекта контроля также относятся:

- многосвязность (многомерность), обусловленная взаимодействием нескольких одновременно протекающих процессов обмена и превращения энергии;
- наличие большого числа степеней свободы, определяемых числом регулирующих элементов;
- влияние внешних условий функционирования на основные характеристики ГТД;
- большая информационная производительность, определяемая числом контролируемых параметров и скоростью их измерения.

Точность назначения допусков на измеряемые параметры в этих условиях обычно невысока. Учитывая наличие указанных выше факторов неопределенности, "классические" методы контроля и диагностики приходится дорабатывать, так как в рассматриваемых условиях они плохо справляются с поставленными перед ними задачами. Интеграция "классических" и интеллектуальных методов, предназначенных для решения плохо структурированных задач, существенно повышает эффективность контроля и качество принимаемых решений.

В этих условиях применение аппарата нейронных сетей (НС) оказывается весьма перспективным. По результатам измерений входных и выходных параметров масляной системы ГТД устанавливаются их причинные взаимосвязи, а затем выбираются или рассчитываются по определенным анали-

тическим зависимостям признаки для диагностики состояния объекта. Для этого применяются специальные методы оценки параметров, наблюдения за показателями состояния и соотношением паритетов. Изменения измеренных или рассчитанных признаков служат симптомами для установления возможных ошибок в функционировании исполнительных органов, датчиков или процесса в целом. Эти симптомы, дополненные наблюдениями обслуживающего персонала и эвристическими правилами экспертов, подаются далее в систему диагностики на базе НС, способную обобщить полученную информацию и принять правильное решение о состоянии масляной системы ГТД.

Для идентификации ММ масляной системы двигателя по результатам испытаний обычно просчитывается каждый экспериментальный режим, и значения всех измеренных параметров сравниваются с расчетными. В результате получаются невязки, уменьшение которых и является целью идентификации. Далее выполняется статистический анализ невязок, который позволяет выявить и исключить грубые ошибки при подготовке исходных данных. В результате получается идентифицированная модель масляной системы, которая уже более точно описывает протекающие в двигателе процессы и позволяет получить о них более полную информацию.

Идентификация включает в себя три основных этапа:

- выбор структуры модели из физических соображений;
- выбор критерия близости объекта и модели с учетом специфики задачи;
- определение параметров модели масляной системы, оптимальных с позиций выбранного критерия близости.

Практическое решение задачи идентификации масляной системы представляет собой вычислительную процедуру оценивания неизвестных параметров ММ, в результате которой устанавливаются закономерности функционирования масляной системы исходного двигателя. К настоящему времени в области авиационных двигателей накоплен достаточный опыт решения задач идентификации ГТД [1, 3—6, 8—18]. Повышенный интерес как у исследователей, так и у инженеров к методам идентификации масляной системы обусловлен естественным желанием эффективной организации функционирования ГТД и его эксплуатации. Сформулируем в общем виде задачу идентификации масляной системы ГТД.

#### **Идентификация математической модели масляной системы ГТД**

Рассмотрим постановку задачи идентификации характеристик масляной системы ГТД на установленных режимах работы. На этих режимах двигатель описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} X &= f_1(A, U); \\ Y &= f_2(A, X), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $U$  и  $A$  — векторы переменных состояния, выходов (измеряемых термогазодинамических параметров) ГТД, неизвестных параметров и управляющих воздействий модели, размерности  $r$ ,  $n$ ,  $m$  и  $k$  соответственно;  $f_1$  и  $f_2$  — некоторые нелинейные вектор-функции.

Задача идентификации заключается в нахождении зависимости

$$Y^* = f^*(A, U). \quad (2)$$

которая удовлетворяла бы условию  $\|Y - Y^*\| < \varepsilon$  на заданном множестве значений  $X \in \Gamma_x$ ,  $Y \in \Gamma_y$ ,  $U \in \Gamma_u$ , где  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$ ,  $\Gamma_u$  определяются режимами работы ГТД;  $\varepsilon$  — допустимая погрешность. Процедура идентификации ГТД с помощью НС показана на рис. 1.

Здесь  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — отклонения между измеренными параметрами двигателя и его масляной системы  $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_r^*$  и параметрами  $\hat{Y}_1^*, \hat{Y}_2^*, \dots, \hat{Y}_n^*$ , рассчитанными с использованием НС, при одних и тех же управляющих воздействиях  $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_m$ ;  $E$  — суммарная квадратичная ошибка обучения НС.

Решение задачи идентификации масляной системы ГТД сводится к обучению нейронной сети, которое заключается в настройке ее весов исходя из условия

$$E = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*)^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

В теории авиационных двигателей принято описывать множество установившихся режимов работы ГТД совокупностью функциональных зависимостей относительно значений приведенных параметров двигателя и его масляной системы:

$$\begin{aligned} N_{1пр} &= f_1(G_{т.пр}); & N_{2пр} &= f_2(G_{т.пр}); \\ N_{3пр} &= f_2(G_{т.пр}); & G_{в.пр} &= f_3(G_{т.пр}); \\ P_{2пр}^* &= f_4(G_{т.пр}); & T_{2пр}^* &= f_8(G_{т.пр}); \\ T_{3пр}^* &= f_5(G_{т.пр}); & T_{4пр}^* &= f_6(G_{т.пр}); \\ R_{пр} &= f_7(G_{т.пр}); & C_{уд.пр} &= f_9(G_{т.пр}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $N_{1пр}$  — приведенная частота вращения ротора турбокомпрессора низкого давления (%);  $N_{2пр}$  — приведенная частота вращения ротора турбокомпрессора среднего давления (%);  $N_{3пр}$  — приведенная частота вращения ротора турбокомпрессора высокого давления (%);  $G_{в.пр}$  — приведенный расход воздуха через компрессор (кг/с);  $P_{2пр}^*$  — приведенное давление воздуха за компрессором (Па);  $T_{2пр}^*$  — приведенная температура воздуха за компрессором (К);  $T_{3пр}^*$  — приведенная температура газов перед турбиной (К);  $T_{4пр}^*$  — приведенная температура газов за турбиной (К);  $R_{пр}$  — приведенная тяга (кН);  $C_{уд.пр}$  — удельный приведенный расход топлива (кг/н/ч);  $G_{т.пр}$  — приведенный расход топлива (кг/с).

Процесс перехода от физических параметров двигателя к приведенным значениям (и обратно),

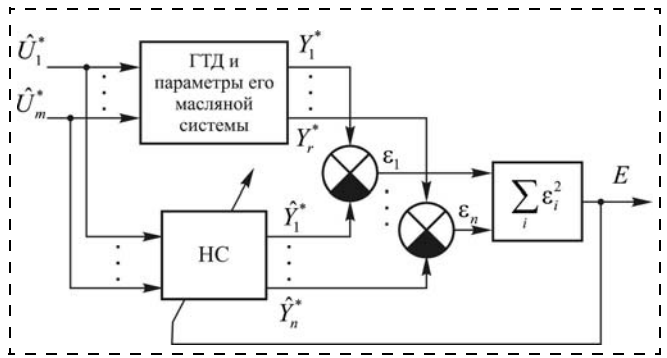


Рис. 1. Схема обучения нейросетевого идентификатора

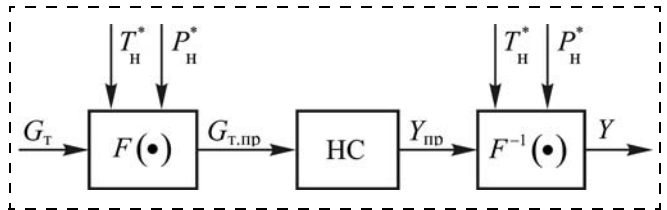


Рис. 2. Переход от нейросетевой модели ГТД в приведенных параметрах к модели в физических параметрах

осуществляемый с помощью нейросетевой модели ГТД, показан на рис. 2.

Здесь преобразование измеренных (физических) параметров ГТД к приведенным (соответствующим стандартным атмосферным условиям  $T_H^* = 288,15$  К;  $P_H = 760$  мм рт. ст.) осуществляется по формулам газодинамического подобия:

$$\begin{aligned} N_{1пр} &= N_1 \sqrt{\frac{288}{T_H^*}}; & N_{2пр} &= N_2 \sqrt{\frac{288}{T_H^*}}; \\ N_{3пр} &= N_3 \sqrt{\frac{288}{T_H^*}}; & G_{в.пр} &= \frac{G_B \cdot 760}{P_H^*} \sqrt{\frac{T_H^*}{288}}; \\ P_{2пр}^* &= P_2 \frac{760}{P_H^*}; & T_{2пр}^* &= T_2^* \frac{288}{T_H^*}; \\ T_{3пр}^* &= T_3^* \frac{288}{T_H^*}; & T_{4пр}^* &= T_4^* \frac{288}{T_H^*}; & R_{пр} &= R \frac{760}{P_H^*}. \end{aligned} \quad (5)$$

Влияние условий полета на параметры воздуха на входе в двигатель при этом учитывается в виде

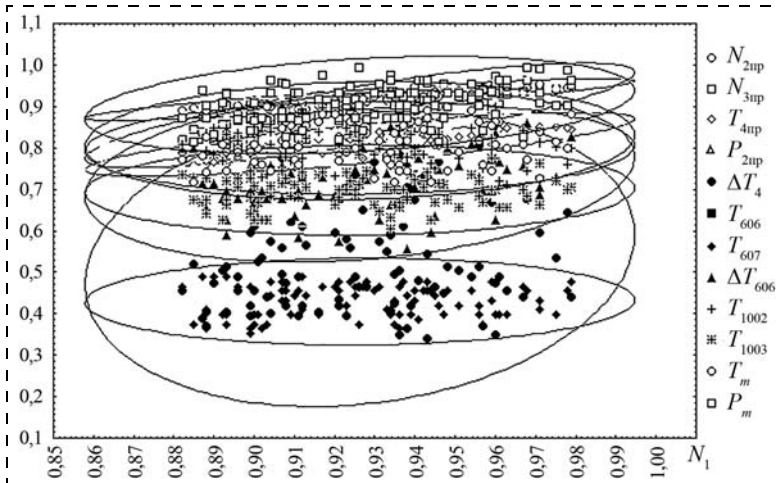
$$\begin{aligned} T_H^* &= T_H \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{п}^2 \right); \\ P_H^* &= P_H \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{п}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \sigma_B, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $T_H$  и  $P_H$  — соответственно температура (К) и давление (мм рт. ст.) воздуха на высоте полета  $H$ ;  $T_H^*$  и  $P_H^*$  — заторможенные значения этих параметров на данной высоте полета;  $k$  — показатель адиабаты;  $M_{п}$  — число Маха полета;  $\sigma_B$  — коэффициент восстановления полного давления в воздухоборнике.

Таблица 1

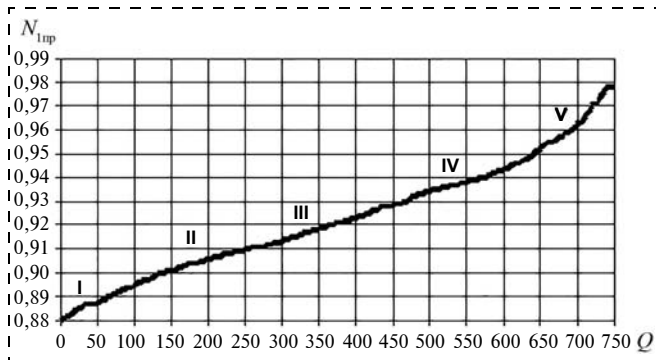
Фрагмент корреляционной матрицы параметров масляной системы и проточной части ГТД

	$N_{1пр}$	$N_{2пр}$	$N_{3пр}$	$T_{4пр}$	$P_{2пр}$	$\Delta T_4$	$T_{606}$	$T_{607}$	$\Delta T_{606}$	$T_{1002}$
$N_{1пр}$	1									
$N_{2пр}$	0,831	1								
$N_{3пр}$	0,771	0,698	1							
$T_{4пр}$	0,781	0,709	0,717	1						
$P_{2пр}$	0,752	0,655	0,693	0,625	1					
$\Delta T_4$	0,096	0,019	0,045	0,076	0,001	1				
$T_{606}$	0,206	0,158	0,152	0,154	0,209	0,045	1			
$T_{607}$	0,069	0,012	0,132	0,101	0,085	0,085	0,332	1		
$\Delta T_{606}$	0,215	0,179	0,093	0,141	0,198	0,024	0,824	0,045	1	
$T_{1002}$	0,102	0,013	0,105	0,011	0,144	0,042	0,439	0,409	0,357	1
$T_{1003}$	0,074	0,063	0,014	0,041	0,075	0,125	0,367	0,373	0,299	0,572
$T_m$	0,089	0,024	0,003	0,004	0,112	0,099	0,335	0,189	0,299	0,398
$P_m$	0,087	0,128	0,139	0,131	0,101	0,081	0,061	0,183	0,008	0,052

Рис. 3. Эллипс рассеивания экспериментальных точек проточной части ГТД АЛ 31СТ и его масляной системы в доверительном интервале ( $\pm 3\sigma$ )

Рассмотрим пример решения задачи идентификации параметров ГТД и его масляной системы, полученных в процессе эксплуатации двигателя АЛ 31СТ.

**Анализ данных.** В качестве исходных данных воспользуемся результатами эксплуатации масляной системы ГТД АЛ 31СТ, используемой в качестве наземной энергоустановки. Эти данные записаны при-

Рис. 4. Результаты кластеризации исходной экспериментальной выборки (I...V — классы) на примере частоты вращения ротора компрессора низкого давления ( $Q$  — число точек обучающей выборки)

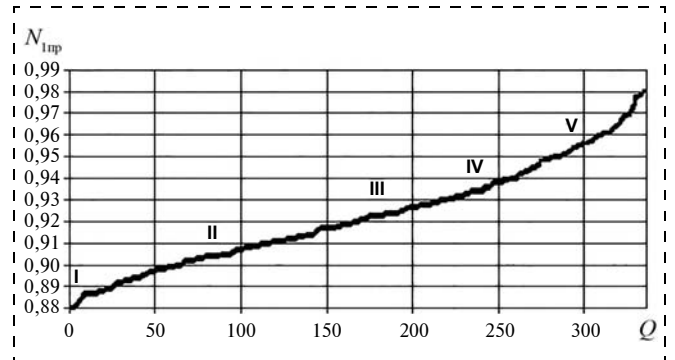
нительно к стандартным атмосферным условиям. Полная обучающая выборка содержит 1095 строк, соответствующих различным режимам эксплуатации масляной системы авиационного двигателя. Наряду с перечисленными выше данными в модели учитываются и собственные параметры масляной магистрали:  $\Delta T_4$  — перепад температуры за опорой турбины газогенератора (К);  $T_{606}$  — приведенная температура слива из опоры турбины ( $^{\circ}\text{C}$ );  $T_{607}$  — приведенная температура масла на входе в двигатель за фильтром ( $^{\circ}\text{C}$ );  $\Delta T_{606}$  — подогрев масла в сливе из опоры турбины ( $^{\circ}\text{C}$ );  $T_{1002}$  — температура слива масла из передней опоры силовой турбины ( $^{\circ}\text{C}$ );  $T_{1003}$  — температура слива масла из задней опоры силовой турбины ( $^{\circ}\text{C}$ );  $T_m$  и  $P_m$  — температура ( $^{\circ}\text{C}$ ) и давление ( $\text{кгс/см}^2$ ) в масляной системе ГТД.

Одним из основных вопросов, решаемых на этапе анализа данных, является оценка репрезентативности выборки, т. е. полноты ее представления. Решение данной задачи осуществляется с помощью методов кластерного или дискриминантного анализа [19—21].

Статистический и корреляционный анализ экспериментальной выборки (табл. 1 и рис. 3) показывает, что наиболее информативными ее параметрами являются: пять параметров проточной части ГТД ( $N_{1пр}$ ,  $N_{2пр}$ ,  $N_{3пр}$ ,  $T_{4пр}$ ,  $P_{2пр}$ ) и восемь параметров его масляной системы ( $\Delta T_4$ ,  $T_{606}$ ,  $T_{607}$ ,  $\Delta T_{606}$ ,  $T_{1002}$ ,  $T_{1003}$ ,  $T_m$ ,  $P_m$ ) (по значению коэффициентов корреляции в корреляционной матрице).

На основании изложенного выше дальнейший процесс идентификации математической модели ГТД и его масляной системы будем проводить с учетом восьми параметров масляной магистрали.

В процессе кластеризации с помощью пакета Statistica 8.0 были выделены пять характерных классов (рис. 4). После процедуры рандомизации были выделены собственно обучающая (контрольная) и

Рис. 5. Результаты кластеризации тестовой выборки на примере частоты вращения ротора компрессора низкого давления ( $Q$  — число точек выборки)



тестовая выборки (в соотношении 2:1, т. е. 67 и 33 %). Процесс кластеризации обучающей и тестовой (рис. 5) выборок показывает, что они так же, как и исходная выборка, содержат по пять характерных классов. Расстояния между кластерами практически совпадают в каждой из рассмотренных выборок, следовательно, обучающая и тестовая выборки репрезентативны.

**Предобработка данных.** Важным вопросом, решаемым на этапе предварительной обработки измеренных данных, является оценка однородности обучающей и тестовой выборок. Для этого воспользуемся критерием  $\chi^2$  Фишера — Пирсона [19—21] с  $r - k - 1$  степенями свободы:

$$\chi^2 = \min_{\theta} \sum_{i=1}^r \frac{[m_i - np_i(\theta)]^2}{np_i(\theta)}, \quad (7)$$

где  $\theta$  — оценка наибольшего правдоподобия, найденная по частотам  $m_1, \dots, m_r$ ;  $n$  — число элементов в выборке;  $p_i(\theta)$  — вероятности элементарных исходов с точностью до некоторого неопределенного  $k$ -мерного параметра  $\theta$ .

Указанная статистика  $\chi^2$  позволяет при заданных выше предположениях проверить гипотезу о представимости выборочных дисперсий и ковариаций факторов, содержащихся в статистической модели. Область принятия гипотезы есть  $\chi^2 \leq \chi_{n-m; \alpha}$ , где  $\alpha$  — уровень значимости критерия.

Вычисления по формуле (7) дают матрицу вероятностей  $\chi^2$ .

Вычисленные значения  $\chi^2$  по полученным при наблюдениях частотам  $m_1, \dots, m_r$  (путем суммирования построчно вероятности исходов каждой измеренной величины) сравниваем с критическими значениями распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $r - k - 1$ . В нашем случае при числе степеней свободы 13 и  $\alpha = 0,05$  случайная величина  $\chi^2 = 3,644$  не превысила критического значения 22,362. Это означает, что гипотеза о нормальном законе распределения может быть принята, и выборки однородны.

Завершающим этапом статистической обработки данных является их нормирование, которое может быть выполнено по формуле

$$\tilde{y}_i = \frac{y_i - y_{i_{\min}}}{y_{i_{\max}} - y_{i_{\min}}}, \quad (8)$$

где  $\tilde{y}_i$  — безразмерная величина, находящаяся в диапазоне [0; 1];  $y_{i_{\min}}$  и  $y_{i_{\max}}$  — минимальное и максимальное значение переменной  $y_i$ .

**Выбор архитектуры НС.** Для решения задачи идентификации ГТД в нейросетевом базисе в качестве основных архитектур были выбраны перцептрон, модульная нейронная сеть и сеть на радиально-базисных функциях (НС РБФ). Целесообразность применения этих архитектур НС обоснована многочисленными экспериментальными исследованиями, проведенными в процессе решения задачи идентификации модели масляной системы ГТД.

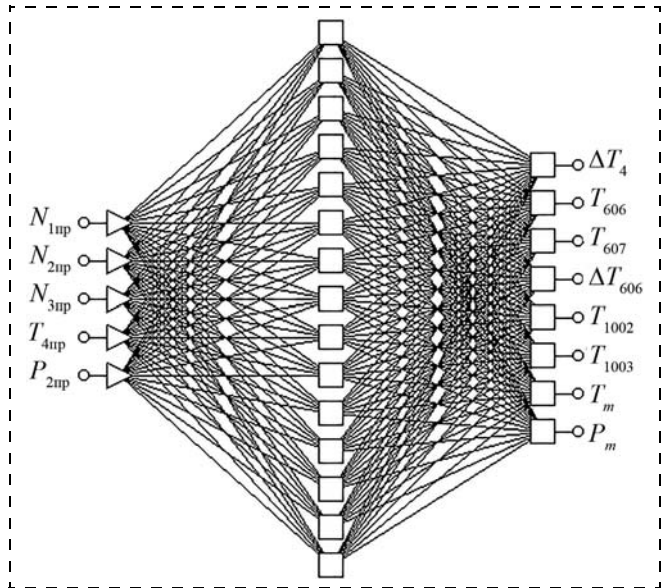


Рис. 6. Многослойный перцептрон

**Выбор структуры НС.** На данном этапе решения задачи идентификации должна быть выбрана оптимальная структура нейронной сети, т. е. число входов и выходов НС, скрытых слоев и число нейронов в каждом слое. На рис. 6 показан общий вид многослойной НС прямого распространения (перцептрон) с одним скрытым слоем, реализующей статическую многорежимную модель ГТД.

Модель нейронной сети типа перцептрон построена с учетом анализа статистики экспериментальных данных: на вход сети поступают пять параметров измерений проточной части ГТД, а на выходе — восемь параметров масляной системы.

В качестве активационных функций нейронов для перцептрона использовались сигмоидные функции. Оптимальной структурой НС является: для перцептрона — структура 5 — 15 — 8, (т. е. 5 нейронов — во входном слое; 15 нейронов — в скрытом слое и 8 нейронов — в выходном слое НС); для НС РБФ: 5 — 25 — 8, (т. е. 5 нейронов во входном слое; 25 нейронов в радиальном (скрытом) слое и 8 нейронов — в выходном слое). Эти НС-модели позволяют вычислить параметры масляной системы ГТД.

**Выбор алгоритмов обучения.** В качестве алгоритмов обучения НС использовались:

- алгоритм обратного распространения ошибки (*Back Propagation*);
- квазиньютоновский алгоритм (*Quasi Newton*);
- алгоритм сопряженных градиентов (*Conjugate Gradients*) и их комбинации.

Анализ полученных результатов показал, что наиболее приемлемым является использование квазиньютоновского алгоритма, который обеспечивает высокую скорость сходимости и точность процесса обучения.

**Оценка эффективности результатов идентификации.** В результате сравнительного анализа точности нейросетевых (перцептрон, РБФ, модульная

Таблица 2

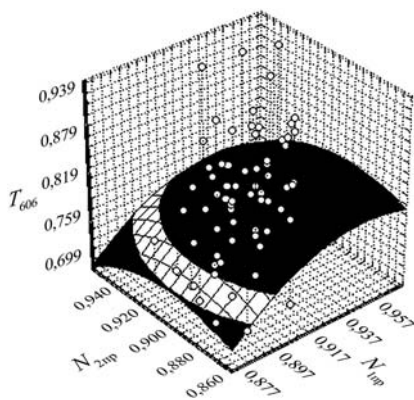
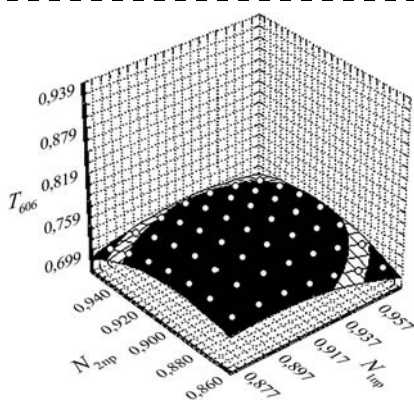
## Результаты идентификации параметров масляной системы ГТД

Методы вычислений	Параметры масляной системы ГТД							
	$\Delta T_4$	$T_{606}$	$T_{607}$	$\Delta T_{606}$	$T_{1002}$	$T_{1003}$	$T_m$	$P_m$
МНК	0,945	0,350	0,278	0,459	0,281	0,288	0,229	0,176
МГУА	0,832	0,235	0,316	0,391	0,182	0,199	0,223	0,144
НС РБФ	0,814	0,245	0,265	0,352	0,189	0,165	0,196	0,148
Модульная НС	0,747	0,228	0,246	0,344	0,153	0,168	0,218	0,134
НС персептрон	0,574	0,222	0,251	0,327	0,130	0,152	0,196	0,126

Таблица 3

Результаты идентификации параметров масляной системы ГТД в условиях помехи ( $M = 0$ ;  $\sigma = \pm 0,01$ )

Методы вычислений	Параметры масляной системы ГТД							
	$\Delta T_4$	$T_{606}$	$T_{607}$	$\Delta T_{606}$	$T_{1002}$	$T_{1003}$	$T_m$	$P_m$
МНК	7,413	2,248	2,621	3,573	2,188	1,833	1,894	1,675
МГУА	0,932	0,355	0,529	0,664	0,472	0,375	0,467	0,668
НС РБФ	1,037	1,142	1,157	1,126	1,221	1,321	1,236	1,212
Модульная НС	0,872	0,343	0,362	0,395	0,210	0,210	0,263	0,358
НС персептрон	0,755	0,285	0,315	0,352	0,189	0,175	0,227	0,262

Рис. 7. Поверхность отклика — приведенная температура слива из опоры турбины  $T_{606}$  масляной системы ГТД, построенная с использованием метода наименьших квадратов (полином 12-го порядка) в условиях аддитивной помехи в зависимости от  $N_{1пр}$  и  $N_{2пр}$ Рис. 8. Поверхность отклика — приведенная температура слива из опоры турбины  $T_{606}$  масляной системы ГТД, построенная с использованием нейронной сети персептрон в условиях аддитивной помехи в зависимости от  $N_{1пр}$  и  $N_{2пр}$ 

нейронная сеть) и классических методов (наименьших квадратов (МНК) и группового учета аргумента (МГУА)) идентификации масляной системы ГТД по восьми параметрам масла (табл. 2) было установлено, что максимальная погрешность идентификации при использовании НС персептрон в 2,2 раза ( $T_{1002}$ ) меньше, чем для полиномиальной регрессионной модели 12-го порядка, построенной с помощью МНК, и в 1,4 раза меньше, чем МГУА, а модульной НС и для РБФ меньше, соответственно, в 1,2 и в 1,45 раза. При этом персептрон обеспечивает погрешность идентификации, не превышающую 0,6 %; модульная НС — 0,75 %; НС РБФ и МГУА — 0,8; МНК — 0,95 %.

В целях анализа устойчивости нейронных сетей к изменению входных данных к ним добавлялась аддитивная помеха по отношению к текущему значению каждого из параметров в виде белого шума с нулевым математическим ожиданием и  $\sigma_i = 0,01$  (табл. 3).

Результаты анализа точности идентификации для восьми параметров масла ГТД в условиях действия шума показали следующие результаты: НС персептрон — 0,76 %; модульная НС — 0,87 %; НС РБФ — 1,32 %; МГУА — 0,93 %; МНК — 7,41 %.

Поверхности отклика для параметра — приведенная температура слива из опоры турбины  $T_{606}$ , построенная с использованием метода наименьших квадратов (полином 12 порядка) и нейросетевых методов (НС персептрон) в условиях аддитивной помехи ( $M = 0$ ;  $\sigma = \pm 0,01$ ), приведены на рис. 7, 8.

## Выводы

Подводя итоги сказанному выше, можно сделать следующие выводы:

1. В процессе решения задачи идентификации ММ масляной системы ГТД на основе НС было установлено, что нейронные сети решают задачу идентификации точнее классических методов: погрешность идентификации на выходе НС типа персептрон в 1,4 раза меньше, чем у регрессионной модели, полученной с помощью МНК для рассмотренного диапазона изменения режимов работы двигателя.

2. Погрешность идентификации масляной системы модели ГТД с помощью персептрона не превысила 0,6 %; для модульной НС — 0,75 %; для НС РБФ и МГУА — 0,8 %, в то время как для классического метода (МНК) она составляет около 0,95 % в рассмотренном диапазоне изменения режимов работы ГТД.

3. Нейросетевые методы более робастны к внешним возмущениям: для уровня шума  $\sigma = 0,01$  погрешность идентификации ГТД при использовании персептрона возросла с 0,6 до 0,769 %; для модульной НС — с 0,75 до 0,87 %; для НС РБФ — с 0,8 до 1 %, а для метода наименьших квадратов — с 0,95 до 7,4 %.

4. Приведенные примеры показывают эффективность (или, по крайней мере, перспективность) решения перечисленных выше задач с помощью НС.

## Список литературы

1. Боев Б. В., Бугровский В. В., Вершинин М. П. Идентификация и диагностика в информационно-управляющих системах авиакосмической энергетики. М.: Наука, 1988. 168 с.
2. Васильев С. Н., Васильев В. И., Ильясов Б. Г. Интеллектуальные системы управления. М.: Машиностроение, 2010. 544 с.
3. Васильев С. Н., Васильев В. И., Ильясов Б. Г. Интеллектуальные системы управления и контроля газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 2008. 550 с.
4. Энциклопедия "Машиностроение" / Под ред. В. В. Клюева. В 40 тт. Раздел III: Технология производства машин. Т. III-7: Измерения, контроль, испытания и диагностика. М.: Машиностроение, 2000. 665 с.
5. Сиротин Н. Н., Коровкин Ю. М. Техническая диагностика авиационных газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1979. 272 с.
6. Белкин Ю. С., Боев Б. В., Гуревич О. С. Интегральные системы автоматического управления силовыми установками самолетов. М.: Машиностроение, 1983. 283 с.
7. Волков Л. И. Управление эксплуатацией летательных комплексов. М.: Высшая школа, 1981. 368 с.
8. Глухов В. В. Техническое диагностирование динамических систем. М.: Транспорт, 2000. 96 с.
9. Жернаков С. В. Идентификация характеристик ГТД на основе технологии нейронных сетей // Информационные технологии. 2010. № 3. С. 39—47.
10. Дубравский Н. Г., Егоров И. В., Знаменков О. К. Структура и алгоритмы системы диагностики двигателей по функциональным параметрам. М.: ЦИАМ. 1984. № 10261. 156 с.

11. Епифанов С. В., Кузнецов Б. И., Богаенко И. Н. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей. Киев: Техніка, 1998. 312 с.
12. Чуян Р. К. Методы математического моделирования двигателей летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1984. 235 с.
13. Черкез А. Я., Онищик И. И., Таран Е. М. Испытания воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1992. 304 с.
14. Скибина В. А. Научный вклад в создание авиационных двигателей. Кн. 1. М.: Машиностроение, 2000. 625 с.
15. Шепель В. Т., Кузьменко М. Л., Сарычев С. В. Надежность, диагностика, контроль авиационных двигателей. Рыбинск: РГТА, 2001. 352 с.
16. Галушкин А. И. Теория нейронных сетей. М.: ИПРЖР, 2000. 416 с.
17. Головкин В. А. Нейронные сети: Обучение, организация и применение. М.: Радиотехника, 2001. 256 с.
18. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.
19. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. 393 с.
20. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. 385 с.
21. Буртаев Ю. Ф., Острейковский В. А. Статистический анализ надежности объектов по ограниченной информации. М.: Энергоатомиздат, 1995. 240 с.

УДК 004.89:004.4:681.5

**Г. А. Самигулина**, д-р техн. наук, galinasamigulina@mail.ru,

зав. лаб. "Интеллектуальные системы управления и сети",

Институт проблем информатики и управления, г. Алматы, Казахстан,

**З. И. Самигулина**, докторант, zarinasamigulina@mail.ru,

КазНТУ им. Сатпаева, г. Алматы, Казахстан

## Сбор данных с реального объекта и организация информационного обмена с интеллектуальной системой управления на основе искусственных иммунных систем

*На основе разработанной интеллектуальной технологии иммунносетевого моделирования управления сложными объектами решена задача сбора данных с реального объекта промышленной автоматизации с использованием оборудования и программного обеспечения Schneider Electric. Предложена процедура обмена данными с интеллектуальной системой управления с использованием искусственных иммунных систем.*

**Ключевые слова:** интеллектуальная технология, искусственные иммунные системы, обработка данных, автоматизация технологического процесса, прогноз

**G. A. Samigulina, Z. I. Samigulina**

## Data Collection from Real Object and the Organization of the Peering with the Intellectual Control System on the Basis of Artificial Immune System

*For the developed intellectual technology immune-net modeling for control of difficult nonlinear objects the problem of data collection from real object of industrial automation on the basis of Schneider Electric software and equipment is solved. Procedure of data exchange with the intellectual control system on the basis of artificial immune networks is suggested.*

**Keywords:** intellectual technology, artificial immune systems, data processing, automation of technological process, the forecast

### Введение

Одной из наиболее актуальных задач стремительно развивающегося современного информационного общества является управление реальными

сложными системами на основе обработки и анализа огромных потоков данных. Термин "сложные системы" появился в середине XX века. Под сложной системой понимается система, в модели которой недостаточно информации для эффективного управ-

ления. Неопределенность и динамический характер факторов, действующих в системе, затрудняют прогнозирование поведения сложных систем. Возникают ситуации, когда факторы, не имеющие влияния на поведение системы, со временем начинают играть важную роль. На сегодня существует много традиционных подходов к решению данной проблемы, однако все они имеют ограниченную область применения. Прежде всего, это связано с ограниченными временными ресурсами. Оперативное управление большими системами затруднено в режиме реального времени.

Однако современное высокотехнологичное производство предъявляет большие требования к системам промышленной автоматизации. В настоящее время актуальной задачей является использование специальных технологий для передачи данных в системе автоматизации технологических процессов и производств. Вместе с тем, актуально использование новых нетрадиционных подходов при построении интеллектуальных систем управления (ИСУ) сложными реальными объектами с различными видами неопределенностей параметров [1, 2].

Известно, что под ИСУ понимается система, которая должна иметь способность воспринимать информацию о процессах, возмущениях и условиях функционирования, прогнозировать поведение, выводить заключения и обучаться [3]. Иными словами, система должна сначала спрогнозировать ожидаемый результат, а потом принять решение по оптимальной реализации управления. В таких системах при обработке огромных потоков данных используются принципы имитационного моделирования естественных систем. Наиболее успешное развитие и применение в последнее время получили нейронные системы, эволюционные алгоритмы и нейро-нечеткие методы. Разработка перспективных подходов имитационного моделирования вызывает большой интерес в мире.

### Имитационное моделирование на основе искусственных иммунных систем

В последнее время особое внимание уделяется искусственным иммунным системам [4, 5], основанным на принципах обработки информации молекулами белков и иммунологической реакции организма при вторжении чужеродных антигенов. Достоинством искусственных иммунных систем (ИИС) является распределенность, самообучаемость, отсутствие централизованного контроля, самоорганизация и эволюция, малые вычислительные ресурсы, возможность параллельной обработки информации.

Существуют несколько направлений построения ИИС [6]: на основе теории отрицательного отбора, теории клональной селекции, теории иммунной сети. Большинство современных разработок с использованием ИИС основаны на клональной селекции.

Белки играют исключительную роль в жизни любого организма. Реакция организма на большинство внешних воздействий сводится к перекодиро-

ванию внешних сигналов на язык белковых взаимодействий. На основе моделирования этих процессов разработан ряд приложений, например, для дистанционного обучения в среде Internet [8], для компьютерного молекулярного дизайна лекарственных препаратов [9], в системах безопасности, для защиты компьютеров от вредоносного программного обеспечения [10] и др. [11].

Перспективным считается подход, в котором рассматриваются механизмы молекулярного узнавания. В этом случае базовым элементом является формальный пептид (белок) [7], который представляет собой математическую абстракцию принципа зависимости свободной энергии белковой молекулы от пространственной формы полипептидного остова. Для описания формальных пептидов используется алгебра кватернионов.

Формальный пептидом (ФП) называют упорядоченную пятерку:  $P = \langle n, U, Q, V, \nu \rangle$ , которая включает следующие компоненты:

- число звеньев  $n > 0$ ;
- множество торсионных углов  $U = \{\varphi_k, \psi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  
где  $-\pi \leq \varphi_k \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \psi_k \leq \pi$ ;
- множество единичных кватернионов  $Q = \{Q_0, Q_k\}$ , где кватернионы  $Q_k = Q_k(\varphi_k, \psi_k)$  и результирующий кватернион ФП  $Q_0$  определяются как их произведение:  $Q_0 = Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ;
- множество коэффициентов  $V = \{v_{ij}\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j \geq i$ ;
- функцию  $\nu$ , определенную на элементах результирующего кватерниона  $Q_0$  квадратичной формой  $\nu = - \sum_{j \geq i} v_{ij} q_i q_j$ .

Вводится следующее определение: сетью связывания называют любую последовательность связываний двух формальных пептидов. Для того чтобы произошло молекулярное узнавание (например, антитела и антигена), необходимо связывание формальных пептидов, которое соответствует минимальной энергии связи между ними.

Моделирование с использованием понятия сети связывания называют иммунносетевым моделированием.

Основные задачи, которые решаются при иммунносетевом моделировании:

- выбор структуры иммунной сети;
- уменьшение времени на обучение иммунной сети;
- выбор оптимальной структуры иммунной сети;
- решение задачи выделения информативных признаков;
- уменьшение ошибки обобщения иммунной сети;
- повышение достоверности прогноза;
- работа в реальном масштабе времени;
- распараллеливание вычислительных алгоритмов;
- разработка автоматизированной системы построения технологических цепочек для различных критериев качества на основе формального языка интеллектуальной технологии обработки многомерных данных ИИС;

- разработка операционных маршрутов пользователя и создание библиотек для иммунносетевого моделирования;
- визуализация данных.

### Построение иммунносетевой модели для прогнозирования и управления сложным объектом

#### Технология иммунносетевого моделирования.

В настоящее время актуальны исследования в области ИИС для прогнозирования поведения и управления сложными динамическими объектами с различными неопределенностями в реальном времени.

Так как в подходе на основе ИИС под сетью связывания понимается любая последовательность связываний формальных пептидов, то для построения иммунносетевой модели необходимо создать формальные пептиды (временные ряды), которые будут служить эталонами поведения системы (режимы функционирования "безопасный", "опасный", "аварийный"). Формальные пептиды состоят из информативных признаков, характеризующих рассматриваемый объект управления в соответствующих режимах (классах) функционирования. Временные ряды сворачиваются определенным образом в матрицы эталонов  $A_1, A_2, A_3$  для трех классов. После сингулярного разложения данных матриц получаем правые и левые сингулярные векторы  $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$  и т. д. эталонных матриц. Затем формируется множество матриц, рассматриваемых как образы:  $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_m$ , где  $m$  — число образов.

Энергия связи между формальными пептидами представляется в виде:  $W_1 = -x_1^T B y_1, W_2 = -x_2^T B y_2, W_3 = -x_3^T B y_3$ , где  $T$  — символ транспонирования. С помощью сингулярных разложений исходных матриц определяются энергии связи. Решается задача распознавания образов. Минимальное значение энергии связи определяет класс, к которому принадлежит данный образ:  $k: W_k = \min\{W_1, W_2, W_3\}$ .

Технология иммунносетевого моделирования (рис. 1, см. вторую сторону обложки) реализуется с помощью следующего алгоритма.

#### Алгоритм 1

**Шаг 1.** Сбор статистических данных с реального объекта управления и организация обмена данными с ИИС.

**Шаг 2.** Разработка баз данных для ИИС на основе концепции формальных пептидов.

**Шаг 3.** Предварительная обработка данных, которая включает в себя нормирование, центрирование данных, заполнение пропущенных данных.

**Шаг 4.** Выделение информативных признаков и построение оптимальной структуры иммунной сети на основе различных подходов:

- факторного анализа данных [12];
- с помощью нейронных сетей;
- с помощью генетических алгоритмов.

**Шаг 5.** Классификация решений и разработка формальных пептидов — эталонов для каждого класса.

**Шаг 6.** Решение задачи распознавания образов на основе нахождения минимальной энергии связи

между формальными пептидами с использованием сингулярного разложения матриц.

**Шаг 7.** Прогноз поведения интеллектуальной системы на основе оценки энергетических погрешностей по гомологам [13, 14] и вычисление коэффициентов риска прогнозирования. Расчет ошибки обобщения и выбор подхода (*шаг 4*), который дает минимальную ошибку обобщения.

**Шаг 8.** Выработка рекомендаций по принятию решений и оперативное управление сложной системой.

**Сбор статистических данных с реального объекта управления и организация обмена данными.** Разработана процедура сбора данных с реального объекта промышленной автоматизации и организации информационного обмена данными для интеллектуальной системы управления на основе ИИС.

Для решения поставленной задачи применяется технология OPC (OLE for Process Control), которая предназначена для обмена данными с системой измерения и управления с использованием оборудования Schneider Electric. Данная технология представляется двумя классами программ: OPC-сервер (OPC server) и OPC-клиент (OPC client). Первая программа предназначена для взаимодействия с аппаратурой, а вторая получает данные от сервера для последующей обработки и передачи команд управления на сервер.

Механизм организации информационного обмена с реальным объектом представляет собой систему, которая состоит из объекта управления (ОУ) и устройства управления (УУ) (см. рис. 1 на второй стороне обложки). УУ воздействует на ОУ через исполнительные механизмы и состоит из следующих основных элементов:

- шкафа управления, содержащего в себе один или более программируемых логических контроллеров (Modicon M340, Premium или Quantum под управлением программы Unity Pro). Их роль заключается в реализации алгоритмов управления в процессе обработки данных, связанных с ОУ;
- человеко-машинного интерфейса (Superviseur PcVue, Vijeo Cites и т. д.), обеспечивающего отладочные функции и управляющее воздействие со стороны человека (оператора) на процесс [15].

В качестве ОУ рассматриваются датчики и исполнительные устройства, которые информируют устройство управления о состоянии объекта управления. Датчики преобразуют физические величины в стандартные электрические сигналы. Исполнительные устройства изменяют состояние ОУ в соответствии с командами, которые формируются УУ.

Механизм организации сбора данных с помощью OPC-технологии показан на рис. 2 (см. вторую сторону обложки). Информация с контроллера Modicon M340 через коммутатор поступает на сервер OPC. Благодаря протоколу OPC/DCOM осуществляется передача данных разным клиентам.

Сбор и обработку данных можно разделить на несколько шагов, которые представлены в следующем укрупненном алгоритме.

#### Алгоритм 2

**Шаг 1.** Сбор данных с реального объекта.

**Шаг 2.** Локализация данных.

*Шаг 3.* Формирование базы данных.

*Шаг 4.* Организация человеко-машинного интерфейса.

*Шаг 5.* Передача и обработка данных с помощью подхода на основе ИИС.

*Шаг 6.* Получение прогноза и принятие решения.

На рис. 3 (см. третью сторону обложки) представлена общая структурная схема интеллектуализации процесса сбора и обработки данных с реального объекта.

Система включает в себя несколько независимых блоков, с возможностью конфигурирования каждого блока:

- *блок 1.* Объект управления;
- *блок 2.* Формирует OPC Server (конфигурация OPC в среде Unity Pro);
- *блок 3.* Формирует OPC Server (конфигурация OPS Factory Server);
- *блок 4.* OPS client (на примере макроса Exel);
- *блок 5.* PC Vue (HMI/Scada) — мониторинг и управление данными с объекта управления;
- *блок 6.* Data Base Manager — возможность подключения баз данных к PC Vue;
- *блок 7.* С помощью Data Hub — считывание данных в среде MATLAB;
- *блок 8.* Анализ и обработка данных с помощью ИИС.

Технология заключается в следующем. Для установки связи с сервером на начальном этапе необходимо осуществить конфигурацию сети с помощью пакета прикладных программ Unity Pro, в ней же реализована программа по управлению промышленным объектом с помощью контроллеров Schneider Electric. Затем конфигурируются основные настройки OPC Factory Server. На следующем этапе осуществляется подключение OPC-client.

Далее возможно подключение к программе PC Vue (ARC Informatique), которая отвечает за мониторинг, управление и анализ поступающей информации.

Данная программа связана с Database Manager (диспетчер баз данных), который обеспечивает простой и удобный доступ к любым базам данных типа Access или SQL Server. Затем полученные от клиента данные с помощью Data Hub передаются в пакет прикладных программ MATLAB для считывания и дальнейшей обработки по технологии ИИС. После обработки данных прогнозируется поведение объекта управления [14], и информация о принятии решения отправляется обратно для выработки управляющего воздействия.

### Заключение

Предложенная технология открывает широкий спектр возможностей по организации многостороннего информационного обмена между интеллектуальной системой управления на основе ИИС и реальным объектом, обеспечивая дополнительные возможности по контролю, диагностике, анализу данных в условиях промышленной эксплуатации.

Достоинством данного подхода является интеллектуализация процесса сбора и обработки данных с динамических промышленных объектов управления,

которая сочетает в себе применение современного производственного оборудования и новейших разработок на основе искусственного интеллекта. Технология ИИС позволяет повысить достоверность прогнозируемых процессов за счет применения алгоритмов оценки погрешностей и уменьшения ошибки обобщения на основе анализа гомологичных белков [14].

На разработанное программное обеспечение получены авторские свидетельства о государственной регистрации объекта интеллектуальной собственности [16—18] и акт внедрения в ТОО "Шнейдер Электрик", г. Алматы (Казахстан).

### Список литературы

1. **Васильев С. Н.** От классических задач регулирования к интеллектуальному управлению // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2001. № 1. С. 5—22.
2. **Васильев С. Н.** От классических задач регулирования к интеллектуальному управлению // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2001. № 2. С. 7—20.
3. **Методы** современной теории автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова. М.: МГУ им. Н. Э. Баумана, 2004. Т. № 5. 481 с.
4. **Искусственные** иммунные системы и их применение / Под ред. Д. Дасгупты: Пер. с англ. под ред. А. А. Романюхи. М.: Физматлит, 2006. 344 с.
5. **Castro L. M., Timmis J. I.** Artificial immune systems: A new computational intelligence approach. London: Springer-verlag, 2003. 357 p.
6. **Литвиненко В. И.** Искусственные иммунные системы как средство индуктивного построения оптимальных моделей сложных объектов // Проблемы управления и информатики. 2008. № 3. С. 43—61.
7. **Tarakanov A. O.** Formal peptide as a basic of agent of immune networks: from natural prototype to mathematical theory and applications // Proc. of the I Int. workshop of central and Eastern Europe on Multi-Agent Systems (CEEMAS'99). St. Petersburg, Russia, June 1—4. 1999. P. 281—292.
8. **Самигулина Г. А.** Математическое моделирование дистанционного обучения на основе искусственных иммунных сетей // Информатика (Минск). 2010. № 4 (28). С. 105—111.
9. **Самигулина Г. А., Чебейко С. В.** Разработка технологий иммунносетевого моделирования для компьютерного молекулярного дизайна лекарственных препаратов // Вестник Харьковского Университета. Тематический выпуск: информатика и моделирование. 2011. № 17. С. 142—148.
10. **Самигулина Г. А., Чебейко С. В., Ширяева О. И., Самигулина З. И.** Разработка технологий иммунносетевого моделирования для решения различных прикладных задач. Алматы, 2011. 217 с.
11. **Самигулина Г. А.** Технология искусственных иммунных систем — основа интеллектуальных информационных систем нового поколения // Автоматизация и современные технологии. 2009. № 8. С. 29—33.
12. **Иберла К.** Факторный анализ. М.: Статистика, 1980. 341 с.
13. **Самигулина Г. А.** Разработка интеллектуальных экспертных систем прогнозирования и управления на основе искусственных иммунных систем // Проблемы информатики. 2010. № 1. С. 15—22.
14. **Samigulina G.** Development of the decision support systems on the basis of the intellectual technology of the artificial immune systems // Automatic and remold control. Springer, 2012. V. 74, № 2. P. 397—403.
15. **Philippe Warin.** Введение в промышленную автоматизацию // Шнейдер Электрик. 2005.
16. **Самигулина Г. А.** Предварительная обработка данных AIS (программа для ЭВМ). Свидетельство о государственной регистрации объекта интеллектуальной собственности № 286. Зарегистрировано в Комитете по правам интеллектуальной собственности Министерства юстиции Республики Казахстан. Астана. 2008.
17. **Самигулина Г. А., Самигулина З. И.** Оценка энергетических погрешностей искусственной иммунной системы по гомологам (программа для ЭВМ). Свидетельство о государственной регистрации объекта интеллектуальной собственности № 396. Зарегистрировано в Комитете по правам интеллектуальной собственности Министерства юстиции Республики Казахстан. Астана. 2008.
18. **Самигулина Г. А., Самигулина З. И.** Разработка интеллектуальной стохастической системы управления на основе иммунносетевого моделирования (программа для ЭВМ). Свидетельство о государственной регистрации прав на объект авторского права в Комитете по правам интеллектуальной собственности МЮ РК. Астана, 4 июня 2012. № 675. 23 с.

УДК 681.587.72

**С. Г. Герман-Галкин**, д-р техн. наук, проф, ggsg@yandex.ru,

Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,

**Ю. В. Загашвили**, д-р техн. наук, проф., зав. каф., y.zagashvili@yandex.ru,

БГТУ "Военмех" им. Д. Ф. Устинова

## Энергосберегающие стенды для комплексных испытаний электроприводов

*Предложен способ построения стендов для испытания электроприводов. Стенд содержит замкнутый механический контур и единый электрический источник питания, имеющий ограниченную мощность. В стенде использовано два однотипных электропривода. Каждый электропривод имеет собственный канал управления. Это позволяет реализовать произвольную программу испытаний и обеспечить исследования при различных скоростях и моментах как в двигательных, так и в генераторных режимах работы.*

**Ключевые слова:** стенд, замкнутый энергетический контур, модель, статические характеристики

**S. G. German-Galkin, J. V. Zagashvili**

## Energy-Saving Stands for Integrated Test Drives

*In this paper is proposed a method for constructing a stand for testing of electric drives. The stand contains mechanical closed loop and a single electrical power source with limited power. In this stand is used two similar of electric drive. Each actuator has its own control channel. This allows is realized random program and is investigate of electric drive at various speed and torque in motor mode and a generator mode.*

**Keywords:** stand, closed energy loop, model, static characteristics

### Введение

Создание эффективных и безопасных средств для экспериментальных исследований электроприводов является актуальной научно-технической и производственной задачей. Функциональные возможности современного испытательного оборудования должны обеспечивать:

- полную автоматизацию процессов стендовых испытаний;
- возможность комплексных испытаний приводов в широком диапазоне статических и динамических режимов, в том числе в режимах наработки (выработки ресурса) и контроля технического состояния;
- требуемую точность и стабильность воспроизведения режимов испытаний;
- точность измерения контролируемых параметров и определения оценок показателей технического состояния и надежности приводов;
- возможность рекуперации энергии для уменьшения энергозатрат при проведении испытаний [1–3].

Кафедра "Мехатроника и робототехника" БГТУ "Военмех" им. Д. Ф. Устинова имеет многолетний опыт работы по созданию автоматизированных мо-

делирующих стендов для испытаний силовых гидроприводов [2–4]. Наряду с широкой автоматизацией технологического процесса испытаний, включая измерение, визуализацию, сбор, хранение и обработку экспериментальных данных, воспроизведение различных тестовых и эксплуатационных режимов и др., эти стенды характеризуются двумя принципиальными особенностями:

1. Имеется замкнутый гидромеханический контур, состоящий из двух гидроприводов и позволяющий обеспечивать передачу энергии между гидроприводами, при этом один из приводов обеспечивает прямую передачу энергии (работает в "двигательном режиме"), а второй передает энергию в противоположном направлении (работает в "генераторном режиме") [2, 4]. Тем самым, обеспечивается взаимное нагружение испытуемых приводов.

2. Благодаря искусственно организованной энергетической связи между двумя приводами мощность от внешнего механического источника энергии расходуется только на компенсацию потерь в гидроприводах, и ее потребление с ведущего механического вала минимально. Таким образом, достигается значительная (в 2...5 раз) экономия энергии, что особенно актуально для мощных приводов в процессе длительных ресурсных испытаний [2, 3].

В данной статье идея построения испытательного стенда с замкнутым энергетическим контуром для взаимного нагружения приводов распространена на электромеханические системы, в частности на вентильный электропривод. На основе применения современных средств моделирования с использованием виртуальных моделей электрических машин и силовых полупроводниковых преобразователей [5, 6] обоснована возможность и показаны преимущества реализации испытаний вентильных электроприводов в стендах с двумя электрическими машинами, соединенными общим механическим валом. Представлена разработка виртуальной модели испытательного стенда вентильного электропривода в среде MATLAB-Simulink и результаты модельных испытаний в статических (установившихся) режимах работы.

### Общие вопросы построения моделей вентильных электроприводов

Одним из наиболее существенных моментов модельного исследования вентильного электропривода является выбор модели силового преобразователя.

Среда MATLAB-Simulink предоставляет пользователю различные модели силовых преобразователей, начиная с моделей "по средним значениям", в которых не учитывается динамика работы полупроводникового прибора, и заканчивая SPICE-моделями [6], в которых задаются электрофизические и конструктивные параметры полупроводниковых приборов. Такие модели содержат несколько десятков параметров, которые разработчикам полупроводниковых систем, как правило, неизвестны. Попытка построить модель полупроводниковой системы для исследования ее энергетических характеристик с использованием SPICE-моделей приводит к возрастанию времени симуляции на 3...4 порядка, что даже для современных многоядерных компьютеров является практически неразрешимой задачей.

Среди моделей различного уровня детализации для решения поставленных задач наиболее целесообразно использовать модели полупроводниковых приборов, основанные на эквивалентных электрических схемах замещения. Среда MATLAB-Simulink предоставляет проектировщику такую возможность и позволяет выполнить основное требование к модели — разработать модели, наиболее адекватные из всех простых и наиболее простые из всех адекватных.

### Вентильные машины

Энергетическим звеном вентильного электропривода является вентильная машина (ВМ) (рис. 1). Вентильная машина — это устройство, в котором магнитоэлектрическая синхронная машина с синусоидальным распределением магнитного поля в зазоре включена в замкнутую систему с использованием

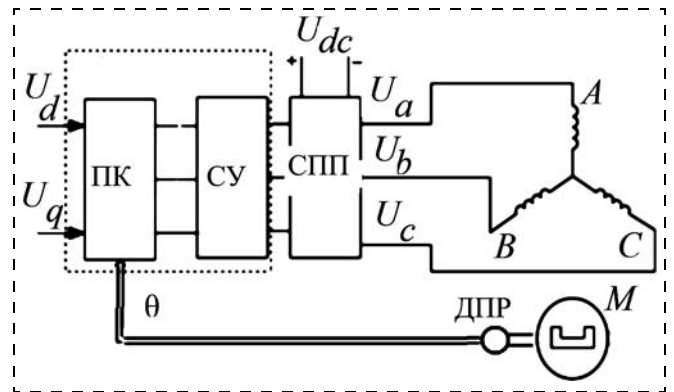


Рис. 1. Функциональная схема вентильной машины

датчика положения ротора (ДПР), преобразователя координат (ПК) и силового полупроводникового преобразователя (СПП), роль которого выполняет автономный инвертор напряжения (АИН).

Синусоидальная форма магнитного поля в зазоре ВМ обуславливает необходимость формирования синусоидального тока, что достигается за счет синусоидальной широтно-импульсной модуляции (ШИМ). Модуляция реализуется в ПК, при этом амплитуда модулирующего сигнала определяется сигналом на входе ПК, а мгновенная фаза — углом поворота ротора (сигналом с ДПР). Таким образом, регулирование скорости и момента ВМ осуществляется за счет изменения входного сигнала.

Электромагнитные процессы на выходе АИН при синусоидальной ШИМ подробно рассмотрены в литературе [7, 8]. Следует подчеркнуть, что исследование ВМ включает как энергетические свойства самой машины, так и энергетические свойства СПП.

### Трехфазная синхронная машина в пакете Sim Power System

Модель синхронной машины (Permanent Magnet Synchronous Machine), имеется в библиотеке пакета расширения Sim Power System среды MATLAB-Simulink.

Математическая модель машины состоит из двух частей — электромагнитной и электромеханической. Математическое описание электромагнитной части модели зависит от характера распределения поля в зазоре. При синусоидальном распределении поля электромагнитная часть машины описывается системой дифференциальных уравнений во вращающейся системе координат  $d, q$  [7] (при описании модели использованы обозначения параметров и переменных, принятые в пакете Sim Power System):

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d} u_d - \frac{R}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} \omega i_q; \\ \frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q} u_q - \frac{R}{L_q} i_q - \frac{L_d}{L_q} \omega i_d - \frac{\lambda \omega}{L_q}; \\ T_e &= 1,5p[\lambda i_q + (L_d - L_q)i_d i_q], \end{aligned} \quad (1)$$



где  $i_d, i_q, u_d, u_q$  — проекции результирующих векторов тока и напряжения статора на оси  $d, q$ ;  $\lambda$  — амплитуда потокоцепления обмотки статора;  $T_e$  — электромагнитный момент;  $\omega$  — угловая частота напряжения на выходе инвертора (статоре двигателя), связанная со скоростью вращения ротора уравнением  $\omega = p\omega_m$ ;  $L_d, L_q$  — индуктивности по осям  $d, q$ ;  $R$  — сопротивление обмотки статора;  $p$  — число пар полюсов;  $\omega_m$  — скорость вращения ротора.

Электромеханическая часть описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{1}{J} (T_e - F\omega_m - T_m); \\ \frac{d\theta_m}{dt} &= \omega_m, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $J$  — суммарный момент инерции на валу;  $F$  — коэффициент вязкого трения;  $\theta_m$  — угол поворота ротора;  $T_m$  — внешний механический момент, приложенный к валу машины.

Окна настройки параметров машины на двух вкладках показаны на рис. 2. На вкладке *Configuration* в первом поле Back EMF waveform (форма магнитного поля в зазоре) из выпадающего списка можно выбрать два типа распределения: 1) синусоидальное распределение магнитного поля в воздушном зазоре; 2) трапецеидальное распределение магнитного поля в воздушном зазоре.

Во втором поле (*Mechanical input*) в выпадающем списке можно выбрать два варианта: 1) Torque  $T_m$  (момент); 2) Speed  $w$  (скорость). При задании скорости в уравнениях, описывающих машину, исключается электромеханическая часть (уравнения (2)).

На вкладке *Parameters* вводятся параметры модели во вращающейся системе координат в соответствии с математическим описанием. Три параметра требуют дополнительных пояснений:

1) Flux linkage established by magnets ( $V_s$ ) — поток на полюс, созданный постоянным магнитом ротора. Этот параметр в уравнениях (1) обозначен  $\lambda$ ;

2) Voltage Constant ( $V_{peak} L_L / k_{rms}$ ) — постоянная напряжения — отношение амплитуды линейного напряжения к уменьшенной в 1000 раз скорости ротора, выраженной в  $\text{мин}^{-1}$  (аналог  $k_E$  для машины постоянного тока);

3) Torque Constant ( $N.m / A_{peak}$ ) — постоянная момента — отношение момента к амплитуде тока статора (аналог  $k_T$  для машины постоянного тока).

При выборе базового параметра доступен лишь один из

перечисленных, который задается в выпадающем меню поля Specify (рис. 2). Остальные параметры рассчитываются автоматически.

На выходном порту виртуальной модели изменяются переменные состояния, представленные в таблице.

Измеряемая переменная	Единицы измерения	Обозначение	Номер выхода
Ток в фазе А	А	$I_a$	1
Ток в фазе В	А	$I_b$	2
Ток в фазе С	А	$I_c$	3
Ток статора по поперечной составляющей	А	$I_q$	4
Ток статора по продольной составляющей	А	$I_d$	5
Напряжение статора по поперечной составляющей	В	$V_q$	6
Напряжение статора по продольной составляющей	В	$V_d$	7
Скорость ротора	рад/с	$\omega_r$	10
Угол поворота ротора	рад	$\theta_r$	12
Электромагнитный момент	Н · м	$T_e$	13

Уравнения, описывающие установившийся режим работы ВМ, находятся из уравнений (1) и (2) и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} U_d &= RI_d - \omega L_q I_q; \\ U_q &= RI_q + \omega L_d I_d + \lambda \omega; \\ T_e &= 1,5p(\lambda I_q + (L_d - L_q)I_d I_q); \\ I_1 &= \sqrt{I_d^2 + I_q^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{U_d + \omega \tau_q U_q - \omega \tau_q \lambda \omega}{R(1 + \omega^2 \tau_d \tau_q)}; \\ I_q &= \frac{U_d - \omega \tau_d U_d - \lambda \omega}{R(1 + \omega^2 \tau_d \tau_q)}, \end{aligned} \quad (4)$$

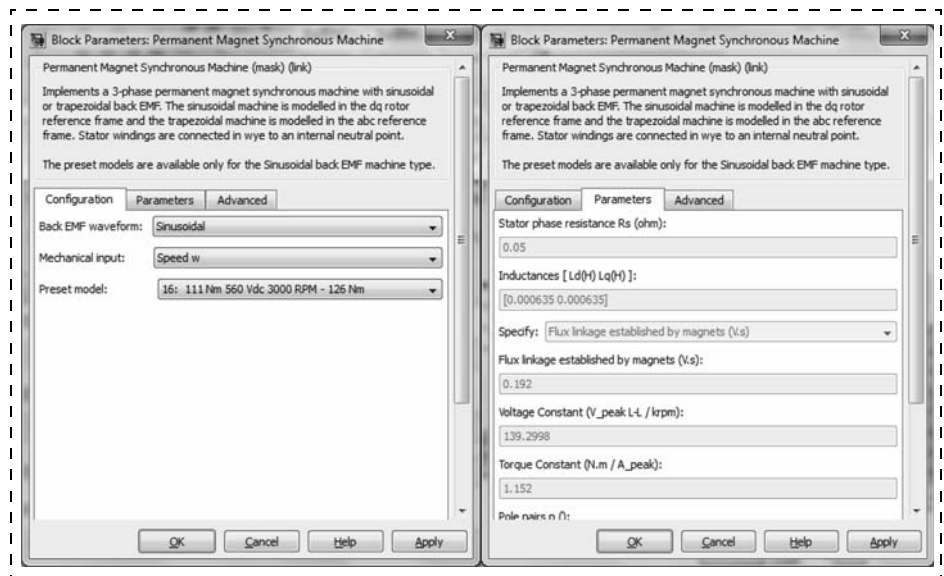


Рис. 2. Окна настройки параметров синхронной машины при синусоидальном поле

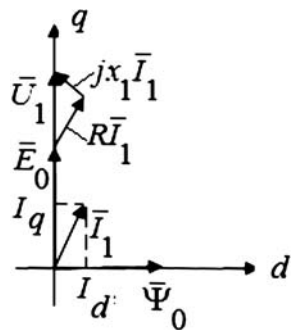


Рис. 3. Векторная диаграмма ВМ

где  $U_d, U_q, I_d, I_q$  — проекции результирующих векторов напряжения и тока статора на оси  $d, q$  в установившемся режиме;  $I_1$  — ток потребления;  $\tau_d = L_d/R, \tau_q = L_q/R$  — постоянные времени;  $R$  — суммарное сопротивление, включающее сопротивление обмотки машины, сопротивление инвертора и внутреннее сопротивление источника.

Активная  $P_1$  и реактивная  $Q_1$  мощности, потребляемые ВМ от инвертора, а также механическая мощность  $P_m$  на валу ВМ рассчитываются по выражениям:

$$P_1 = 1,5U_1I_q; Q_1 = 1,5U_1I_d; P_m = T_e\omega_m \quad (5)$$

Статические характеристики ВМ зависят от свойств каждого блока, входящего в ее состав (см. рис. 1).

Напряжения  $U_d, U_q$  можно задавать независимо друг от друга, а можно увязать их значения с на-

чальной установкой датчика положения ротора  $\theta_0$ . В любом случае в реверсивных системах реализуются соотношения  $U_d = 0, U_q = U_1$ . По уравнениям (3) с учетом условий  $U_d = 0, U_q = U_1$  на рис. 3 построена векторная диаграмма, из которой следует, что ток на выходе АИН (ток в якоре машины  $I_1$ ) и напряжение на выходе АИН ( $U_1$ ) смещены по фазе. Это смещение зависит от угловой скорости ротора.

В результате отмеченного фазового сдвига появляется продольная составляющая ( $I_d$ ) тока якоря, которая влияет на основной магнитный поток машины и, как следствие, на момент и скорость.

Все дальнейшие исследования осуществляются для машины 111 Nm 560 Vdc 3000RPM 126 Nm, параметры которой приведены на рис. 2.

### Статические характеристики ВМ при питании от автономного инвертора напряжения

Когда в АИН реализовано независимое управление с ШИМ [3, 8], электромагнитный момент ( $T_e$ ), ток потребления ( $I_1$ ), выходная механическая мощность ( $P_m$ ) и электромагнитная мощность в машине (мощность на выходе инвертора) ( $P_1$ ) в установившемся режиме определяются из уравнений (3), (4), (5) с учетом соотношения. Зависимости этих переменных от скорости представлены на рис. 4.

Механическая характеристика ВМ  $T_e = f(\omega)$  подобна характеристике двигателя постоянного тока с последовательным возбуждением. При независимом управлении электромагнитный момент уменьшается с увеличением скорости. Активная мощность на выходе инвертора ( $P_1$ ) значительно превышает механическую мощность ( $P_m$ ) на малых скоростях, что свидетельствует о низком КПД при скоростях, меньших номинальной. Механическая мощность на выходе машины и электромагнитная мощность в машине уменьшаются с увеличением скорости. При номинальной скорости КПД машины приближается к единице. Эти свойства ВМ позволяют создавать значительные электромагнитные перегрузки в машине и инверторе при испытаниях.

### Статические характеристики ВМ при питании от источника тока

Реализация скользящего токового управления в АИН ("токовый коридор") широко описана в литературе [7, 8]. При этом управлении в установившемся режиме задаются токи  $I_d, I_q$  статора. Момент,

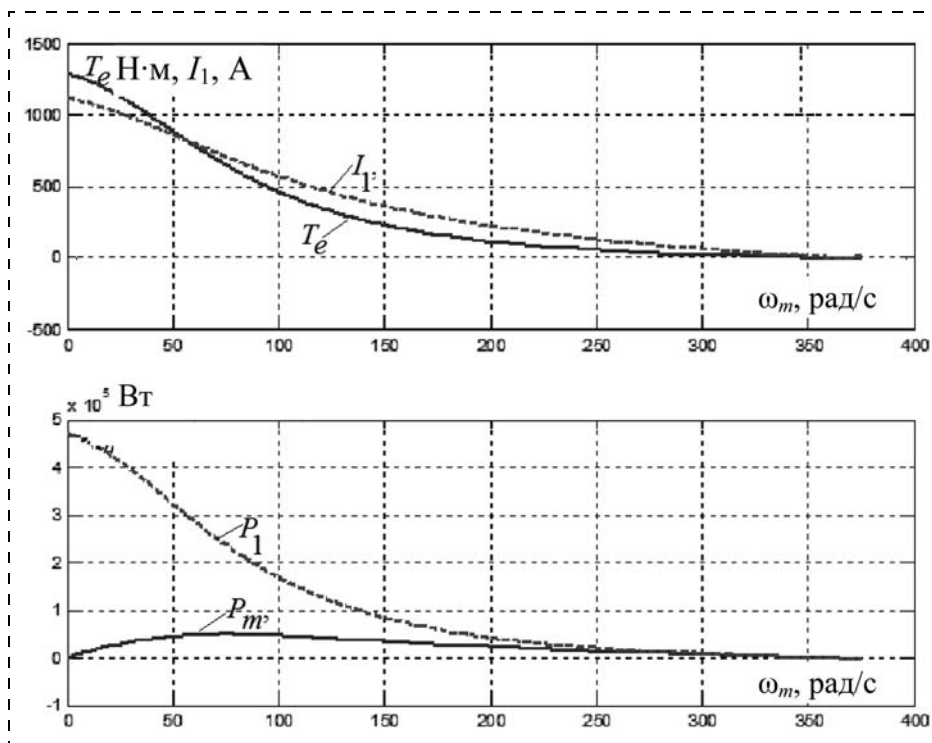


Рис. 4. Электромагнитные, электромеханические и энергетические характеристики ВМ

ток потребления машины, активная мощность на выходе инвертора и мощность на валу определяются из уравнений (3)—(5) в функции заданных токов.

Эти зависимости для скорости вала  $\omega_m = 350$  рад/с и  $I_d = 0$  представлены на рис. 5.

Они показывают, что при рассмотренном управлении ток и электромагнитный момент не зависят от скорости вращения вала. Управление может обеспечивать двигательный и генераторный режимы работы ВМ. Механическая мощность на выходе машины и электромагнитная мощность в машине увеличиваются с увеличением скорости.

Активная мощность на выходе инвертора незначительно превышает механическую мощность при больших моментах, что свидетельствует о достаточно высоком КПД машины в широком диапазоне изменения момента. При малых моментах КПД машины приближается к единице.

Сравнивая электромеханические характеристики ВМ с независимым и токовым управлением, можно сделать вывод о том, что при независимом управлении машина может быть использована как источник скорости, а при токовом управлении — как источник момента в двигательном и генераторном режимах.

### Функциональная схема испытательного стенда

Рассмотренные свойства ВМ положены в основу разработки виртуального нагрузочного стенда для исследования вентильного электропривода. Функциональная схема такого стенда приведена на рис. 6.

В представленном стенде в ВМ1 реализовано независимое управление, а в ВМ2 — токовое управ-

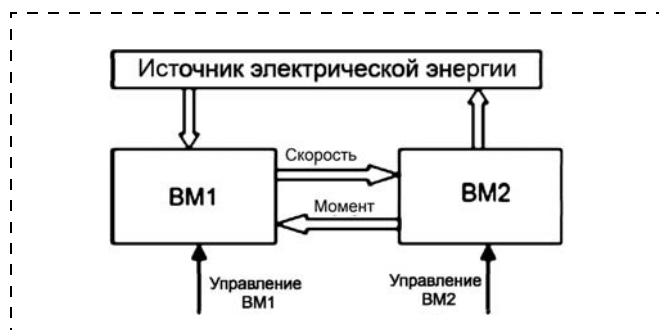


Рис. 6. Функциональная схема стенда

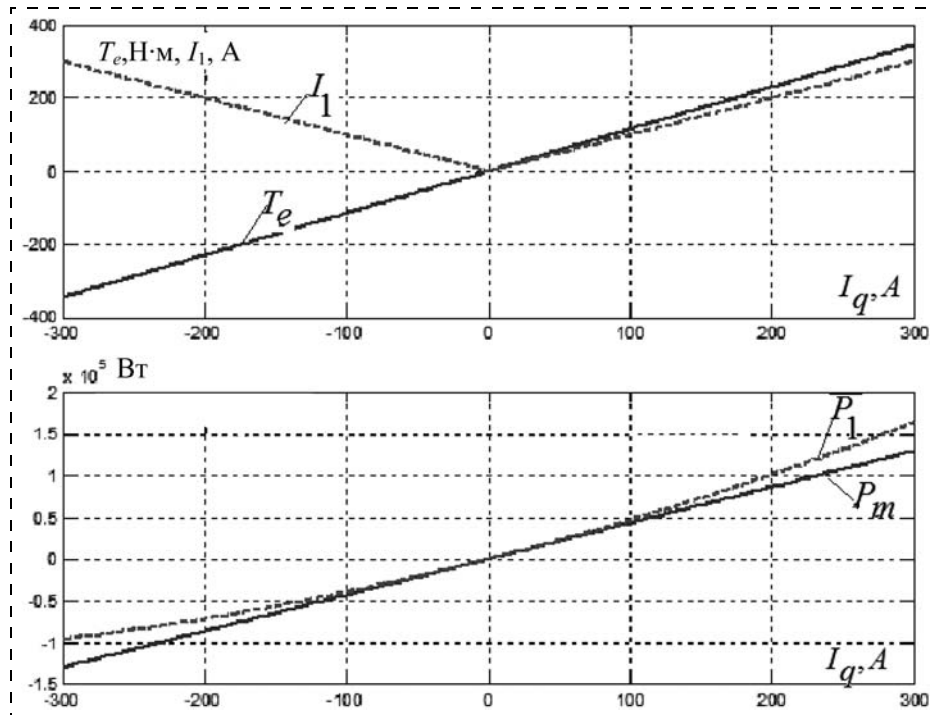


Рис. 5. Электромагнитные, электромеханические и энергетические характеристики ВМ с токовым управлением

ление. При этом ВМ1 работает в двигательном режиме, а ВМ2 — в генераторном. Машины имеют общий вал, поэтому скорость определяется сигналом управления ВМ1, а момент — сигналом управления ВМ2. Источник электрической энергии общий для обеих машин, поэтому ток источника определяется разностью токов потребления ВМ1 и ВМ2.

### Результаты моделирования испытательного стенда

Модель испытательного стенда для исследования вентильного электропривода построена в соответствии с функциональной схемой (рис. 6) в пакете SimPower System. Модель содержит две вентильные машины со своими системами управления и измерительную часть.

Электромагнитные, электромеханические и энергетические характеристики, полученные для этой модели, показаны на рис. 7. На рис. 7, а приведены зависимости тока  $I_1$  в ВМ1 и тока  $I_2$  в ВМ2, а также электромагнитного момента  $T_e$  от скорости вращения общего вала. На рис. 7, б представлены зависимости от скорости вала:

- механической мощности  $P_m$ ;
- мощности в источнике питания  $P_{dc}$ ;
- электромагнитной мощности ВМ1  $P_1$ ;
- электромагнитной мощности ВМ2  $P_2$ .

Зависимости момента на общем валу и тока якоря ВМ1 совпадают с характеристиками, приведенными на рис. 4 для вентильной машины с независимым управлением. На малых скоростях (до 50 рад/с) при больших токах преобладающими в системе являются потери. При этом ВМ2 работает

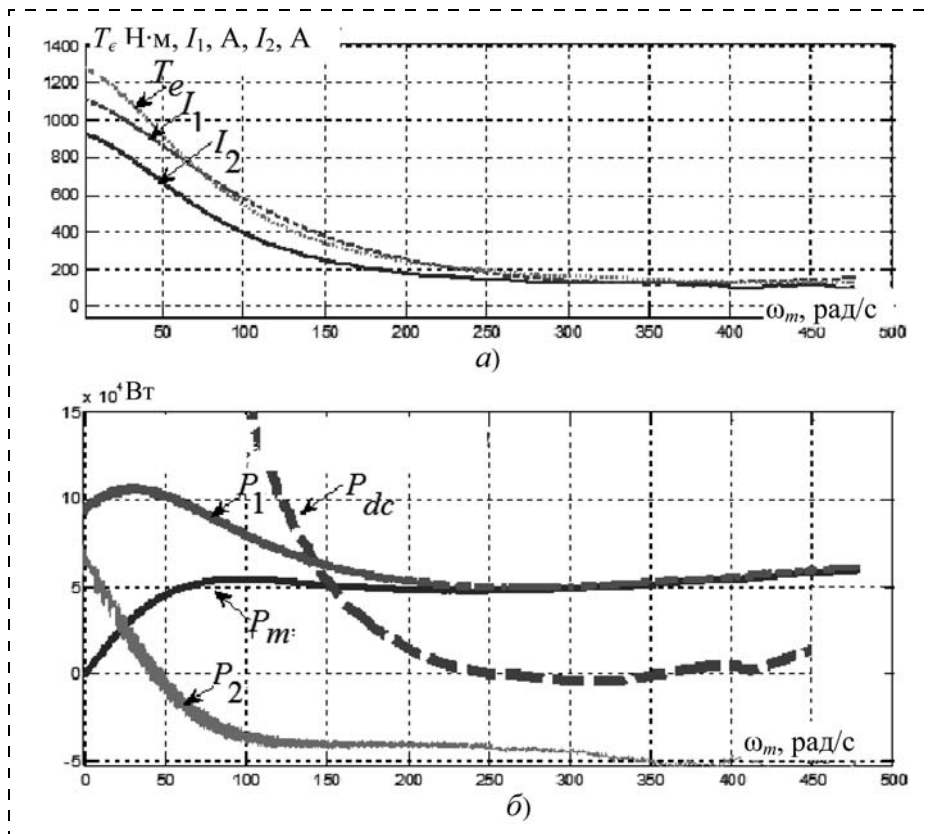


Рис. 7. Электромагнитные, электромеханические и энергетические характеристики стенда

в режиме противовключения, потребляя электрическую мощность от источника. При скорости 50 рад/с ВМ2 переходит в генераторный режим работы. Механическая мощность на общем валу  $P_m$  для скоростей, превышающих 50 рад/с, практически не зависит от скорости вращения вала. Электрическая мощность  $P_{dc}$ , потребляемая от общего источника питания, определяется разностью мощностей в ВМ1 и ВМ2. Из графиков следует, что в диапазоне скоростей от 200 до 450 рад/с мощность, потребляемая от источника питания, приблизительно на порядок меньше механической и электромагнитной мощности каждой машины и ее преобразователя.

### Заключение

Описано моделирование статических режимов работы электроприводов, входящих в состав испытательного стенда с замкнутым энергетическим контуром и единым электрическим источником питания, осуществленное с использованием виртуальных моделей вентильных электрических машин и силовых полупроводниковых преобразователей.

Проведенные исследования показали, что потребляемая от источника мощность расходуется только на компенсацию электромагнитных и механических потерь в замкнутом контуре. В стендах с подобной конфигурацией реализуется энергетическая обратная связь с рекуперацией энергии в сеть.

Поэтому исследование энергетических и электромагнитных характеристик электроприводов может осуществляться без использования мощных источников питания, в том числе в лабораторных условиях. Указанная особенность таких стендов особенно эффективно может быть использована при проведении энергоемких ресурсных испытаний силовых электроприводов.

Кроме того, использование в стенде двух однотипных электрических машин, имеющих отдельные каналы управления, позволяет реализовывать произвольную программу испытаний, обеспечивая исследования машин при различных скоростях и моментах как в двигательных, так и в генераторных режимах работы. Следует также подчеркнуть, что измерение механических и электромагнитных переменных состояния приводов в стенде, включающем две однотипные вентильные машины, не представляет трудностей и осуществляется простыми методами.

Результаты расчетов подтверждают возможность и целесообразность создания промышленных стендов подобной конфигурации с замкнутым энергетическим контуром и единым источником питания для повышения эффективности комплексных, в том числе ресурсных испытаний электроприводов.

Результаты расчетов подтверждают возможность и целесообразность создания промышленных стендов подобной конфигурации с замкнутым энергетическим контуром и единым источником питания для повышения эффективности комплексных, в том числе ресурсных испытаний электроприводов.

### Список литературы

1. **Динамическое** моделирование и испытания технических систем / Под ред. И. Д. Кочубиевского. М.: Энергия, 1978. С. 251.
2. **Потапов А. М., Мороз А. В., Савельев Б. Н., Загашвили Ю. В.** Опыт создания автоматизированных двухместных моделирующих стендов для обеспечения эффективности и безопасности ресурсных испытаний гидроприводов // Новое в проектировании и эксплуатации автоматических приводов и систем гидроавтоматики. Л.: ЛДНТП, 1984.
3. **Потапов А. М., Мороз А. В., Савельев Б. Н., Маркелов А. С.** Опыт создания моделирующих стендов для испытаний приводов робототехнических систем // Робототехнические системы комплексной автоматизации ядерной энергетики. Л.: ЛДНТП, 1988.
4. **А. с. СССР № 1435859.** Стенд для испытаний двух объемных регулируемых гидропередат. БИ № 41, 07.11.88.
5. **Герман-Галкин С. Г.** Matlab — Simulink. Проектирование мехатронных систем. СПб.: Корона Век, 2008. 367 с.
6. **Дьяконов В. П.** MATLAB6/6.1/6.5 + SIMULINK4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя. М.: СОЛОН-Пресс, 2002. С. 532.
7. **Бродовский В. Н., Иванов Е. С.** Приводы с частотно-токовым управлением. М.: Энергия, 1974. С. 267.
8. **Соколовский Г. Г.** Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. М.: АКАДЕМИА, 2006. С. 375.

УДК 612.22.28:518.12

**Т. В. Матюшев**, д-р биол. наук, зам. начальника отдела, mtv4465@yandex.ru,  
**М. В. Дворников**, д-р мед. наук, проф., начальник отдела, dvormv@yandex.ru,  
**Ю. А. Кукушкин**, д-р техн. наук, проф., вед. научн. сотр., kukushkinya@gmail.com,  
**А. В. Богомолов**, д-р техн. наук, проф., вед. научн. сотр., a.v.bogomolov@gmail.com,  
Научно-исследовательский испытательный центр

(авиационно-космической медицины и военной эргономики) 4 ЦНИИ Минобороны России, г. Москва

## Управление длительностью десатурации членов экипажа пилотируемых космических объектов с использованием математического моделирования

*Описана математическая модель, позволяющая оценить риск возникновения высотной декомпрессионной болезни по показателям перенасыщения азотом тканей и крови организма человека. Приведены результаты численного эксперимента с использованием разработанной модели по управлению режимами десатурации при вынужденном пребывании человека в условиях гипобарии (работа космонавтов в открытом космосе, разгерметизация воздушного судна в высотном полете, отказ кислородного оборудования и т. п.).*

**Ключевые слова:** управление параметрами газовой среды, высотная декомпрессионная болезнь, моделирование газообмена, коэффициент перенасыщения азотом, десатурация

**T. V. Matyushev, M. V. Dvornikov, Yu. A. Kukushkin, A. V. Bogomolov**

## Managing the Duration of Desaturation Crew Manned Space Objects Using Mathematical Modeling

*The mathematical model in order to assess the risk of altitude decompression sickness in terms of nitrogen saturation of tissues and blood of the human body, the results of numerical experiments using a model developed by the management regimes in induced desaturation of human presence in hypobarium (the work of astronauts in space, depressurization of the aircraft in high-altitude flight, the failure of the oxygen equipment, etc.).*

**Keywords:** control parameters of the gaseous medium, high-altitude decompression sickness, modeling gas exchange ratio saturation with nitrogen, oxygen desaturation

Проблема рационального формирования искусственной газовой атмосферы (ИГА) скафандра (СК) экипажа космического летательного аппарата (КЛА) для внекорабельной деятельности (ВКД) является одной из важнейших задач авиакосмической медицины. В этот период риск возникновения высотной-декомпрессионной болезни (ВДБ) значительно выше возникновения других неблагоприятных форм дисбаризма, которые могут возникнуть в космическом полете. Снижение риска ВДБ при ВКД может быть достигнуто за счет применения ИГА с пониженным общим давлением и контролируемым содержанием  $O_2$ , что позволяет обеспечить декомпрессионную безопасность ВКД путем подбора основных параметров атмосферы кабины и значения давления в СК непосредственно перед выходом, т. е. путем проведения предварительной десатурации (вымывания азота из организма при дыхании чистым кислородом в течение определенного времени), что приводит к экономии рабочего времени космонавта. Последнее обстоятельство при-

обретает особую актуальность при проведении работ, требующих срочного выхода в космос. Основное ограничение применения десатурации обусловлено антагонизмом между степенью очищения организма от азота и длительностью ее проведения. Чем длительней режим десатурации, тем выше степень очищения. Поэтому для обоснования требований к управлению параметрами ИГА необходимо провести оценку риска возникновения ВДБ при различных комбинациях давления в кабине, состава ИГА и рабочего давления в СК.

### Постановка задачи

Несмотря на то, что требования к режиму десатурации и значению рабочего давления в СК в настоящее время в основном сформулированы и подтверждены практикой, весьма актуальным остается вопрос совершенствования процесса перехода от нормобарической атмосферы к ИГА в скафандре, что особенно важно в нештатных (аварийных) си-

туациях, характеризующихся дефицитом времени для проведения десатурации.

На риск развития ВДБ влияет комплекс факторов, связанных с техническими трудностями формирования ИГА СК, ограничениями по времени проведения десатурации до надевания скафандра с использованием управляемой ИГА, а также с неопределенностью безопасной продолжительности десатурации чистым кислородом после надевания скафандра в целях повышения оперативности выходов в открытый космос.

Риск возникновения ВДБ зависит от уровня перенасыщения тканей азотом [1, 2]. Этот уровень принято выражать через коэффициент перенасыщения ( $KП$ ), определяемый как отношение парциального давления азота в альвеолярном газе и тканях ( $P_{N_2}^Z$ ) к общему постдекомпрессионному конечному давлению ( $P_K$ ):

$$KП^Z = \frac{P_{N_2}^Z}{P_K}, \quad (1)$$

где  $Z = \{A, LIP, F\}$  — индекс, определяющий альвеолярную газовую смесь ( $A$ ) и тип ткани: жировую —  $LIP$ ; водосодержащую —  $F$ .

Риск ВДБ будет тем меньше, чем меньше значение  $KП$ . В работе [3] получены максимально допустимые значения коэффициента перенасыщения ( $МДКП$ ), превышение которых приводит к развитию ВДБ, и показано, что безопасные значения  $KП$  зависят от режима десатурации. Длительность десатурации связана со скоростью выведения азота из тканей, с повышенным содержанием липидов, растворимость в которых у азота в 5 раз выше, чем в водной среде.

$KП$ , рассчитанный по формуле (1), является статической величиной, учитывающей только фиксированные значения  $P_{N_2}^Z$  и  $P_K$ , и не позволяет установить необходимое время проведения десатурации при различных значениях этих параметров. Для определения этого времени необходимо определить скорость выведения азота из различных тканей организма, что, в свою очередь, требует разработки математической модели газообмена.

Математическая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом: по заданным значениям барометрического давления, концентрации кислорода, конечного постдекомпрессионного давления (давления в скафандре)  $P_K$  определить для практически здорового мужчины нормостенического типа минимальное время декомпрессии, при котором

$$KП^Z = \frac{P_{N_2}^Z}{P_K} \leq МДКП. \quad (2)$$

Установление соотношения (2) обеспечивает управление временем десатурации для различных условий гипобарии.

### Математическое моделирование динамики показателей газообмена человека при декомпрессионных воздействиях

Для определения коэффициентов  $KП^Z$ , задаваемых формулой (1), разработана комплексная модель газообмена человека [4—12].

Модель описывает девять последовательно и параллельно соединенных участков дыхательной системы (см. рисунок). Для удобства описания участкам присвоены буквенные и цифровые индексы, начиная с эффективного альвеолярного объема и заканчивая системными венами (указаны в скобках на рисунке): 1 — участок эффективного альвеолярного объема ( $A$ ), 2 — капиллярный участок в легких ( $Q$ ), 3 — артериальный участок с учетом неравномерности вентиляционно-перфузионных соотношений ( $L$ ), 4 — легочный шунт легких ( $SH$ ), 5 — венозный участок легких ( $R$ ), 6 — системные артерии ( $U$ ), 7 — системные капилляры ( $K$ ), 8 — тканевый участок системы ( $T$ ), 9 — системные вены ( $V$ ).

Модель представлена в виде компьютерной исследовательской программы, позволяющей проверять различные гипотезы о механизме наблюдаемых процессов.

В основу формализованного описания положена концепция разделения физиологической системы газообмена на активные и пассивные подсистемы регуляции. В соответствии с положениями этой концепции механизмы регуляции газообмена разделялись на пассивные механизмы изменения параметров газообмена и активные механизмы химической регуляции газотранспортной функции [13].

Пассивные механизмы регулируют комплекс взаимосвязанных физико-химических процессов формирования концентраций  $O_2$ ,  $CO_2$  и  $pH$  с учетом буферной бикарбонатной системы и эффектов Холдена, Бора—Верига, а также влияния  $CO_2$  на кризис диссоциации  $O_2$ .

Пассивная регуляция газообмена человека включает механизмы:

- ♦ внешнего, или легочного, дыхания, осуществляющего газообмен между наружной и внутренней средой организма (между воздухом и кровью);
- ♦ внутреннего газообмена, функцию которого выполняют кровь и гемодинамика, обеспечивающие транспорт газов к тканям и от них, а также рациональное распределение крови в организме.

Модель внутреннего газообмена включает описание процессов взаимодействия крови как специфической газотранспортной среды и внутреннего или тканевого дыхания, осуществляющего непосредственный процесс клеточного окисления. Соответственно, модель пассивных механизмов регуляции внутреннего газообмена включает модель общих закономерностей динамики газового состава и ки-

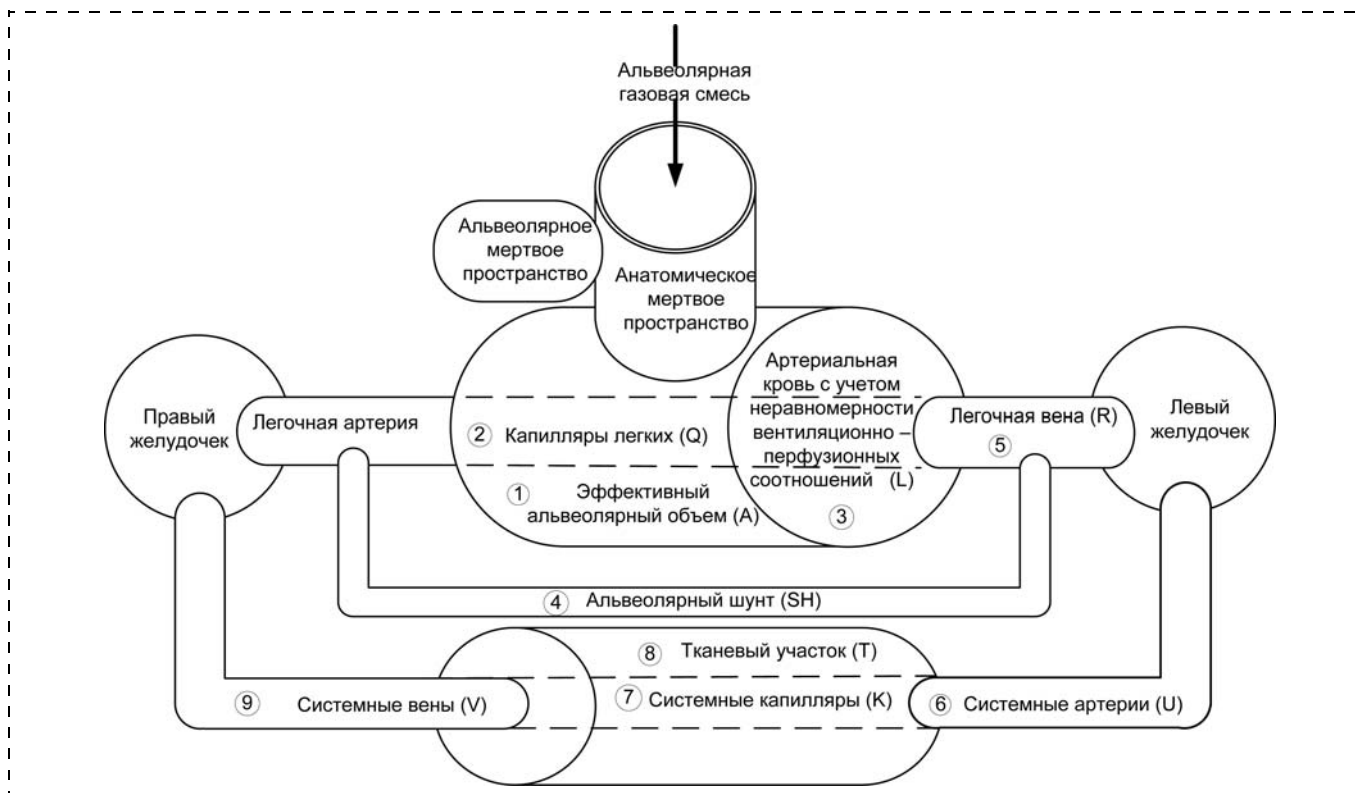


Схема модели системы газообмена

слотно-щелочного состояния крови и модель транспорта газов.

Активные механизмы регуляции дыхания — это механизмы рецепторного типа, регулирующие комплекс процессов, участвующих в формировании изменений легочной вентиляции в зависимости от значений парциальных давлений кислорода и углекислого газа, а также кислотности артериальной крови [14].

На основании вышеизложенного легкие рассматривались как единая газообменная система — замкнутая среда переменного объема, в которой действуют процессы перемешивания и имеются источники и стоки газов, обусловленные особенностями газообмена и движением потоков крови.

В соответствии с классификацией, представленной в работе [15], модель легочного участка описывается системой уравнений для четырехкомпонентной газообменной системы, включающей следующие участки:

1) эффективный альвеолярный объем (альвеолярно-капиллярный участок легких, в котором устанавливается полное равновесие газового состава и крови);

2) альвеолярный мертвый объем (объем альвеолярной газовой смеси, вентилирующей альвеолы, в которых нет кровотока по легочным капиллярам);

3) артериовенозный шунт в легких, соединяющий артериальную кровь с необмениваемой с воздухом венозной кровью;

4) анатомическое мертвое пространство (внутренний объем легких, включающий воздухоносные

пути от носа и рта до альвеол, в которые поступает воздух, но которые не перфузируются кровью).

Состав альвеолярного воздуха формируется под влиянием двух противоположно действующих процессов. С одной стороны, легкие обмениваются газами с атмосферой, а с другой стороны, — с кровью легочных капилляров. Вентиляция легких, а следовательно, и обновление альвеолярного воздуха вдыхаемым воздухом, совершается дискретно. В то же время поглощение кислорода из легких и выделение в них углекислого газа кровью являются непрерывными процессами. Поэтому в эффективном альвеолярном объеме скорость изменения концентраций газов равна разности между скоростями поступления и вымывания газов [13]:

$$dF_{O_2}^A/dt = (STPD \cdot (v_I F_{O_2}^I - v_E F_{O_2}^A) + v_R (C_{O_2}^V - C_{O_2}^Q)) / V_L;$$

$$dF_{CO_2}^A/dt = (STPD \cdot (v_I F_{CO_2}^I - v_E F_{CO_2}^A) + v_R (C_{CO_2}^V - C_{CO_2}^Q)) / V_L,$$

$$F_{N_2}^A = 1 - F_{O_2}^A - F_{CO_2}^A - F_{H_2O}^A,$$

где  $V_L$  — объем легких, мл;  $v_I$  и  $v_E$  — скорость изменения объемов вдыхаемого и выдыхаемого воздуха, мл/с;  $v_R$  — объемная скорость крови, мл/с;

$F_{O_2}^I$  и  $F_{CO_2}^I$  — соответственно концентрации газов ( $O_2$  и  $CO_2$ ) во вдыхаемом воздухе, (мл газа)/(мл воздуха);  $F_{O_2}^A$ ,  $F_{CO_2}^A$ ,  $F_{N_2}^A$  — концентрация газов в альвеолярном воздухе, (мл газа)/(мл воздуха);  $C_{O_2}^Q$  и  $C_{CO_2}^Q$  — концентрация газов капиллярной крови легких, (мл газа/мл крови);  $C_{O_2}^V$  и  $C_{CO_2}^V$  — концентрация газов венозной крови легких, (мл газа)/(мл крови);  $STPD$  — стандартные условия измерения газовых объемов (температура  $T = 273$  К, давление  $P = 760$  мм рт. ст., давление водяных паров  $0$  мм рт. ст. (сухой воздух)) [1].

Альвеолярная вентиляция определяется в соответствии с выведенной авторами формулой [4]:

$$v_A = 9 \cdot 10^{-5} v_E^3 - 0,004 v_E^2 + 0,8 v_E - 0,8.$$

Парциальное давление газов во вдыхаемой газовой смеси ( $I$ ), в альвеолярной газовой смеси ( $A$ ) и в выдыхаемом воздухе ( $E$ ) определяются из следующей системы уравнений:

$$P_{O_2}^J = F_{O_2}^J (P_B - P_{H_2O});$$

$$P_{CO_2}^J = F_{CO_2}^J (P_B - P_{H_2O});$$

$$P_{N_2}^J = P_B - P_{O_2}^J - P_{CO_2}^J - P_{H_2O}^J,$$

где  $J = \{I, A, E\}$  — вид газовой смеси (воздуха);  $P_B$  — атмосферное давление, мм рт. ст.;  $P_{H_2O}$  — парциальное давление паров воды, мм рт. ст.

Концентрации кислорода и углекислого газа в выдыхаемом воздухе вычисляются из модификации уравнения Бора:

$$F_{O_2}^E = \frac{v_E - v_A}{v_E} (F_{O_2}^I - F_{O_2}^A) + F_{O_2}^A,$$

$$F_{CO_2}^E = \frac{v_E - v_A}{v_E} (F_{CO_2}^I - F_{CO_2}^A) + F_{CO_2}^A.$$

Скорость изменения объема вдыхаемого воздуха вычисляют по формуле

$$v_I = \frac{F_{N_2}^E}{F_{N_2}^I} v_E,$$

а вентиляцию мертвого пространства (мл/с) находят по формуле

$$v_D = v_E - v_A.$$

В соответствии с принятой гипотезой о равенстве парциальных давлений газов в капиллярах легких и в альвеолярной газовой смеси

$$P_{O_2}^Q = P_{O_2}^A, P_{CO_2}^Q = P_{CO_2}^A, P_{N_2}^Q = P_{N_2}^A$$

расчетные значения парциальных давлений соответствуют давлениям в начальных участках сосудов. Концентрации физически растворенных кислорода, углекислого газа и азота в крови определяют по формуле

$$C_J^\Phi = k_p \alpha_J P_J,$$

где  $J = \{O_2, CO_2, N_2\}$  — вид газа;  $P_J$  — парциальное давление соответствующего газа;  $\alpha_{O_2} = 0,0237$ ;  $\alpha_{CO_2} = 0,495$ ;  $\alpha_{N_2} = 0,012$  — коэффициенты растворимости газа в плазме крови (%/атм.);  $k_p = 0,001316$  — фактор размерности [15].

Кислородное насыщение определяется из уравнения [6]

$$S_{O_2} = (1 - e^{-k_B k_{O_2} P_{O_2}}) \cdot 100,$$

где  $k_B = -0,6(pH)^2 + 9,4(pH) - 37$  — коэффициент, отражающий влияние эффекта Бора—Верига;  $pH$  — кислотность крови,  $k_{O_2} = 4,3 \cdot 10^{-8} P_{O_2}^3 \times 1,5 \cdot 10^{-5} P_{O_2}^2 + 0,001 P_{O_2} + 0,002$  — коэффициент, отражающий влияние кислорода на кривую диссоциации кислорода.

Концентрации химически связанных кислорода  $C_{O_2}^x$  и углекислого газа  $C_{CO_2}^x$  в крови вычисляют по формулам [13]

$$C_{O_2}^x = K_E S_{O_2};$$

$$C_{CO_2}^x = B_{HCO_3} + 0,375(K_E - C_{O_2}^x) - (0,16 + 0,23 K_E) \cdot \left( \lg \left( \frac{k_x C_{CO_2}^x}{0,01 P_{CO_2}} \right) \right),$$

где  $K_E$  — кислородная емкость;  $B_{HCO_3}$  — концентрация бикарбонатов  $k_x = 2,1 \cdot 10^{-9} P_{CO_2}^6 - 6,3 \cdot 10^{-7} P_{CO_2}^5 + 7,5 \cdot 10^{-5} P_{CO_2}^4 - 0,005 P_{CO_2}^3 + 0,17 P_{CO_2}^2 - 3,4 P_{CO_2} + 35,8$  — коэффициент, учитывающий влияние парциального давления углекислого газа [6].



Кислотность (рН) крови определяется в соответствии с формулой [6]

$$\text{pH} = 6,1 + \lg\left(\frac{B_{\text{HCO}_3}}{k_{\text{pH}} C_{\text{CO}_2}}\right),$$

где  $k_{\text{pH}} = 2,9 \cdot 10^{-9} P_{\text{CO}_2}^5 - 6,2 \cdot 10^{-7} P_{\text{CO}_2}^4 + 4,9 \cdot 10^{-5} P_{\text{CO}_2}^3 - 0,0018 P_{\text{CO}_2}^2 + 0,03 P_{\text{CO}_2} - 0,14$  — коэффициент, учитывающий влияние кислотности крови на кривую сатурации углекислого газа.

Объемная скорость крови, не участвующей в газообмене, определяется по формуле

$$v_{AV} = (1 - k_{AV}^v) v_R,$$

где  $k_{AV}^v = 0,05$  — коэффициент, отражающий неравномерность вентиляционно-перфузионного соотношения.

Концентрации  $C_J^L$  и парциальные давления  $P_J^L$  газов в капиллярной крови легких с учетом неравномерности вентиляционно-перфузионного соотношения находятся из следующей системы уравнений:

$$C_J^L = (C_J^V v_{AV} + C_J^Q (v_R - v_{AV}))/v_R;$$

$$P_J^L = (P_J^V v_{AV} + P_J^Q (v_R - v_{AV}))/v_R,$$

где  $J = \{O_2, CO_2, N_2\}$  — вид газа,  $C_J^V, C_J^Q$  — концентрации газов соответственно, в венозной и капиллярной крови, (мл газа)/(мл крови);  $P_J^V, P_J^Q$  — парциальное давление газов соответственно в венозной и капиллярной крови, мм рт. ст.

К легочным шунтам относятся участки, по которым кровь поступает в артерии большого круга, минуя вентилируемые участки легких, т. е. не участвуя в газообмене. Поэтому концентрация кислорода в крови аорты большого круга кровообращения меньше концентрации кислорода в крови легочной вены (для углекислого газа — наоборот). Объемную скорость крови в шунтах  $v^{sh}$  вычисляют по формуле

$$v^{sh} = k^{sh} v_R,$$

где  $k^{sh} = 0,05$  — коэффициент, определяющий значение легочного шунта [5];  $v_R$  — объемная скорость крови в легочных артериях, мл/с.

Концентрации  $C_J^{sh}$  и парциальные давления  $P_J^{sh}$  газов в артериальном участке сосудистого русла легких на выходе из шунта вычисляют по формулам

$$C_J^{sh} = C_J^V \cdot \frac{v^{sh}}{v_R},$$

$$P_J^{sh} = P_J^V \cdot \frac{v^{sh}}{v_R},$$

где  $J = \{O_2, CO_2, N_2\}$  — вид газа.

Парциальные давления газов в артериальной крови вен легких с учетом артериовенозного шунта находят по формуле

$$P_J^R = (P_J^L v_L + P_J^V v^{sh})/v_R.$$

Концентрации газов в системных участках (см. рисунок) определяются как суммы скоростей образования газов в процессе обмена, поступления и удаления крови, отнесенные к объему резервуара участка:

$$dC_{O_2}^I/dt = (-q_{O_2} + v_R(C_{O_2}^{I-1} - C_{O_2}^I))/V_I;$$

$$dC_{CO_2}^I/dt = (q_{CO_2} + v_R(C_{CO_2}^{I-1} - C_{CO_2}^I))/V_I;$$

$$dC_{N_2}^I/dt = (v_R(C_{N_2}^{I-1} - C_{N_2}^I))/V_I,$$

где  $I$  — порядковый номер участков  $U, K, T, V$  (см. рисунок);  $C_{O_2}^I, C_{CO_2}^I, C_{N_2}^I$  — концентрации газов в этих участках, (мл газа)/(мл крови);  $V_I$  — объем, мл;  $q_{CO_2}, q_{O_2}$  — поступление, соответственно, углекислого газа и кислорода, мл/с.

Для системных сосудов значения  $q_{CO_2}, q_{O_2}$  равны нулю, а концентрация газов в венозной крови легочных артерий на каждом анализируемом участке принималась равной концентрации газов в системных венах.

Текущий уровень легочной вентиляции  $v_E$  определяют в соответствии с выражением

$$v_E = v_E^0 + v_{\text{pH}} + v_{\text{CO}_2} + v_{\text{O}_2},$$

где  $v_E^0$  — легочная вентиляция в покое, мл/с;  $v_{\text{CO}_2}, v_{\text{O}_2}, v_{\text{pH}}$  — скорости изменения компонентов легочной вентиляции соответственно в зависимости от  $P_{\text{CO}_2}, P_{\text{O}_2}, \text{pH}$ , мл/с.

Скорости изменения компонентов легочной вентиляции в зависимости от изменения физико-химических свойств артериальной крови определяют из следующей системы уравнений:

$$v_{O_2} = n_{O_2} (P_{O_2}^{U,1} - P_{O_2}^{U,i});$$

$$v_{CO_2} = n_{CO_2} (P_{CO_2}^{U,i} - P_{CO_2}^{U,1});$$

$$v_{\text{pH}} = n_{\text{pH}} (\text{pH}^{U,1} - \text{pH}^{U,i}),$$

где индекс "1" — начальный момент времени;  $i$  —  $i$ -й момент времени;  $n_{O_2}, n_{CO_2}, n_{\text{pH}}$  — коэффициенты, характеризующие соответственно инерционность действия ионов водорода, углекислого газа и

кислорода на системные артерии ( $U$ ), определяемые по формулам

$$\begin{aligned} n_{O_2} &= 7,6 \cdot 10^{-7} P_{O_2}^4 + 0,0001 P_{O_2}^3 - \\ &- 0,002 P_{O_2}^2 - 0,3 P_{O_2} + 13,6; \\ n_{CO_2} &= -0,04 P_{CO_2}^2 + 5,1 P_{CO_2} - 100; \\ n_{pH} &= -7,1(pH)^U + 110. \end{aligned}$$

Объем азота в организме  $V_{N_2}^\Sigma$  (мл) определяют по формуле

$$V_{N_2}^\Sigma = V_{N_2}^B + V_{N_2}^F + V_{N_2}^{LIP},$$

где  $V_{N_2}^B$  — объем азота в крови, мл;  $V_{N_2}^F$  — объем азота в водосодержащих тканях, мл;  $V_{N_2}^{LIP}$  — объем азота в жиродержащих тканях, мл.

Объем азота в крови определяют по формуле

$$V_{N_2}^B = k_p \alpha_F P_{N_2}^T V_B,$$

где  $\alpha_F = 0,012$  — коэффициент растворения азота в водосодержащих тканях;  $P_{N_2}^T$  — парциальное давление азота в тканях, мм рт. ст.;  $V_B$  — объем крови, мл.

Объем азота в водосодержащих тканях определяют по формуле

$$V_{N_2}^F = k_p \alpha_F P_{N_2}^T V_F,$$

где  $V_F$  — объем крови в водосодержащих тканях, мл;  $V_F$  — объем водосодержащих тканей, мл.

Объем азота в жиродержащих тканях определяют по формуле

$$V_{N_2}^{LIP} = k_p \alpha_L P_{N_2}^T V_{LIP},$$

где  $\alpha_L = 0,0612$  — коэффициент растворения азота в жиродержащих тканях;  $V_{LIP}$  — объем жиродержащих тканей, мл.

Объем азота в легких определяют по формуле

$$V_{N_2}^L = V_{FRC} P_{N_2}^A \cdot \frac{\rho_H}{\rho_0},$$

где  $V_{FRC}$  — функционально остаточная емкость, мл;  $\rho_H$  — плотность воздуха, (мл азота)/(мл воздуха);  $\rho_0$  — плотность воздуха на земле, (мл азота)/(мл воздуха).

Концентрацию азота в жиро- и водосодержащих тканях ( $C_{N_2}^{LIP}$ ,  $C_{N_2}^F$ ) определяют аналогично концентрации этого газа в тканевых участках:

$$dC_{N_2}^Y/dt = (v_R(C_{N_2}^Y - C_{N_2}^V))/V_Y,$$

где  $Y = \{LIP, F\}$  — индекс, определяющий тип ткани.

Парциальное давление азота в жиро- и влагосодержащих тканях ( $P_{N_2}^{LIP}$ ,  $P_{N_2}^F$ ) определяют по формуле

$$P_{N_2}^Y = \frac{C_{N_2}^Y}{k_p \alpha_{N_2}},$$

где  $Y = \{LIP, F\}$ ;  $\alpha_{N_2} = 0,012$  — коэффициент растворимости азота в плазме крови, %/атм.

Показатели  $P_{N_2}^Y$  и  $P_{N_2}^J$  используются в формуле

(1) для определения  $KП^Z$  и проверки условия (2), выполнение которого определяет требуемое временное десатурации при заданных параметрах барометрического давления, концентрации кислорода, конечного постдекомпрессионного давления.

### Результаты вычислительного эксперимента определения КП в легких, крови и тканях по разработанной модели газообмена человека при декомпрессионных воздействиях

При прогнозировании динамики физиологических показателей газообмена с использованием разработанной модели имитировалось изменение парциального давления азота при изменении параметров ИГА. Исходными данными для определения показателей газообмена являются газовый состав и парциальные давления ИГА в кабине и в скафандре. Внутренними данными являются значения физиолого-химических и физиологических показателей газообмена: парциальные давления, концентрации кислорода, углекислого газа и азота в крови в выделенных участках системы (см. рисунок), минутный объем дыхания, уровень метаболизма, соответствующие показателям газообмена практически здорового мужчины нормостенического типа. Вычислительный эксперимент выполняли в среде программирования MATLAB (для решения дифференциальных уравнений использовался метод Рунге—Кутты—Фехлберга).

Адекватность модели оценивали по результатам отклонения значений КП, полученных экспериментально В. И. Чадовым [3] с расчетными значениями.

В соответствии с концепцией В. И. Чадова, ВДБ возникает при превышении КП значения МДКП, ведущего к образованию во внутренней среде организма закритического объема газа при снижении атмосферного давления. Этот факт предполагает возможность существования для определенного режима декомпрессии максимального значения КП, при котором проявления ВДБ еще не наблюдаются. Значения КП, меньшего значения МДКП, следует считать допустимыми (относительно безопасными), а значения КП, превышающие МДКП, — недопустимыми (опасными). МДКП не является постоянной величиной: его значение увеличивается с понижением конечного постдекомпрессионного давления.

Способ анализа безопасных режимов предварительной десатурации, изложенный в работе [3], не позволяет прогнозировать эффективность кратковременной десатурации с использованием чистого кислорода после надевания скафандра, а также определять ее необходимую продолжительность с учетом неравномерности выведения азота из легких, крови и тканей. В связи с этим проведено моделирование динамики выведения азота из различных тканей организма при дыхании чистым кислородом в наземных условиях с последующим переходом в ИГА с пониженным давлением.

Определяли значения коэффициента перенасыщения азотом различных тканей организма в  $i$ -й момент времени процесса десатурации. В табл. 1 представлены рассчитанные с использованием модели данные по изменению парциального давления азота в различных тканях организма в процессе десатурации чистым кислородом в наземных условиях.

Динамика парциального давления азота отражает неодинаковую скорость десатурации в различных тканях организма, которая зависит от уровня их свойств (плотности, коэффициента растворимости газов и т. п.) и кровоснабжения.

В первые 15 минут дыхания скорость выведения азота особенно высока, что обусловлено в основном выведением его из дыхательных путей, легких

и крови. В дальнейшем скорость выведения  $N_2$  заметно замедляется, и десатурация его происходит преимущественно из жировой ткани. Это обусловлено тем, что жировая ткань имеет весьма низкий уровень кровоснабжения, а растворимость азота в жире значительно больше, чем в других тканях.

Используя данные табл. 1, по формуле (1) можно определить динамику  $KП$  при подъеме на высоты 6000 м (табл. 2) и 7000 м (табл. 3) после проведения в наземных условиях десатурации с различными интервалами времени.

В соответствии с экспериментальными данными, представленными в работах [3, 18],  $МДКП \approx 1,6$ . Как следует из табл. 2, 3 потенциально опасные уровни ожидаемого  $KП$  сохраняются в течение 90 мин десатурации перед подъемом на 7000 м и в течение 10...15 мин перед подъемом на 6000 м. Эти данные полностью соответствуют результатам экспериментальных исследований [16—20], посвященных обоснованию безопасной продолжительности десатурации в наземных условиях перед высотными подъемами.

Полученные с помощью разработанной математической модели значения  $KП$  в различных тканях в зависимости от продолжительности десатурации в наземных условиях (табл. 2 и 3) подтверждают ге-

Таблица 1

**Изменение парциального давления азота (мм рт. ст.) в зависимости от продолжительности десатурации чистым кислородом в наземных условиях ( $H = 0$  м,  $P_B = 760$  мм рт. ст.)**

Участок организма	Время, мин									
	0	15	30	60	90	120	150	180	210	240
Альвеолярная газовая смесь	568,56	161,12	87,32	59,95	53,34	51,74	51,36	51,26	51,24	51,23
Венозная кровь	568,56	373,08	212,40	91,26	61,08	53,64	51,82	51,37	51,27	51,24
Водосодержащие ткани	568,56	553,06	491,48	342,16	228,05	155,35	111,76	86,23	71,42	62,87
Жиродержащие ткани	568,56	557,70	546,15	522,43	499,16	476,81	455,43	435,03	415,57	396,98

Таблица 2

**Изменение ожидаемых значений коэффициентов перенасыщения в различных тканях при подъеме на высоту  $H = 6000$  м ( $P_B = 354,1$  мм рт. ст.) в зависимости от продолжительности десатурации в наземных условиях**

Участки организма	Время, мин									
	0	15	30	60	90	120	150	180	210	240
Альвеолярная газовая смесь	1,61	0,45	0,25	0,17	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14
Венозная кровь	1,61	1,05	0,60	0,26	0,17	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14
Водосодержащие ткани	1,61	1,56	1,39	0,97	0,64	0,44	0,32	0,24	0,20	0,18
Жиродержащие ткани	1,61	1,57	1,54	1,48	1,41	1,35	1,29	1,23	1,17	1,12

Таблица 3

**Изменение значений коэффициентов перенасыщения в различных тканях при подъеме на высоту  $H = 7000$  м ( $P_B = 308,25$  мм рт. ст.) в зависимости от продолжительности десатурации в наземных условиях**

Участки организма	Время, мин									
	0	15	30	60	90	120	150	180	210	240
Альвеолярная газовая смесь	1,84	0,52	0,28	0,19	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
Ткани организма	1,84	1,21	0,69	0,30	0,20	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
Водосодержащие ткани	1,84	1,79	1,59	1,11	0,74	0,50	0,36	0,28	0,23	0,20
Жиродержащие ткани	1,84	1,81	1,77	1,69	1,62	1,55	1,48	1,41	1,35	1,29

терохронность выведения азота из различных тканей организма.

\* \* \*

Разработанная математическая модель газообмена при декомпрессионных воздействиях позволяет оценивать динамику выведения азота из организма и рассчитывать безопасную продолжительность десатурации перед декомпрессией и может быть использована для управления режимами десатурации при пребывании человека в условиях гипобарии.

Разработанная математическая модель востребована также и для практики медицинского обеспечения безопасности высотных полетов в авиации в случаях вынужденного пребывания человека в условиях гипоксии (разгерметизация кабины или салона самолета в высотном полете, отказ кислородного оборудования и т. п.).

*Работа поддержана грантом РФФИ № 12–08–01273а.*

#### Список литературы

1. Шибанов Г. П. Основные понятия и количественные оценки, используемые в авиации и космонавтике. М.: Издательский дом Академии им. Н. Е. Жуковского, 2012. 472 с.
2. Справочник по космической биологии и медицине / Под ред. А. И. Бурназяна, О. Г. Газенко. М., 1983. 352 с.
3. Чадов В. И. Экспериментально-теоретическое обоснование декомпрессионной безопасности внекорабельной деятельности экипажей пилотируемых космических объектов. Дисс. ... доктора мед. наук на основе научного доклада. М.: ВЦМК "Защита" Минздрава России, 2004. 86 с.
4. Матюшев Т. В. Математическая модель пассивных механизмов регуляции респираторной системы организма // Биомедицинская радиоэлектроника. 2010. № 5. С. 26–33.
5. Матюшев Т. В., Никифоров Д. А. Обоснование и разработка алгоритма пассивных механизмов внешнего дыхания человека // Электронное научное издание "Ученые заметки ТОГУ". 2010. Т. 1. № 1. С. 74–78.
6. Матюшев Т. В., Степанов В. К., Дворников М. В., Рыженков С. П. Математический анализ основных закономерностей

газового обмена и кислотно-щелочного состояния крови // Клиническая физиология кровообращения. 2008. № 3. С. 74–79.

7. Матюшев Т. В., Степанов В. К., Дворников М. В., Бухтияров И. В. Математический анализ процесса массопереноса кислорода кровью // Биомедицинская радиоэлектроника. 2009. № 9. С. 21–28.

8. Матюшев Т. В., Дворников М. В. Математическая модель химической регуляции респираторной системы организма // Биомедицинская радиоэлектроника. 2011. № 9. С. 67–71.

9. Матюшев Т. В., Дворников М. В. Имитация влияния повышенной концентрации двуокси углерода на газообмен человека на основе математической модели респираторной системы // Биомедицинская радиоэлектроника. 2011. № 12. С. 49–58.

10. Кислова Ю. В., Богомолов А. В., Солошенко Н. В. Математическое моделирование реакций сердечно-сосудистой системы человека при кровопотере и гипотермии // Медицинская техника. 2006. № 4. С. 10–13.

11. Кислова Ю. В., Богомолов А. В., Солошенко Н. В., Загородников С. Н. Математическое моделирование нервной регуляции гемодинамики человека // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2005. № 11–12. С. 68–72.

12. Богомолов А. В., Кукушкин Ю. А., Дворников М. В. Математическое моделирование динамики гипоксических состояний человека // Программные продукты и системы. 2013. № 2. С. 40.

13. Теоретические исследования физиологических систем / Н. М. Амосов, Б. Л. Палец, Б. Т. Агапов и др. Киев: Наукова думка, 1977. 361 с.

14. Гродинз Ф. Теория регулирования и биологические системы. М.: Мир, 1966. 133 с.

15. Зильберт А. П. Регионарные функции легких. Петрозаводск: ПГУ, 1973. 280 с.

16. Николаев В. П. Прогнозирование безопасности декомпрессии по математическим моделям образования и роста газовых пузырьков в организме: Дисс. ... доктора биол. наук. М.: ИМБП МЗ СССР, 1990. 248 с.

17. Вакар М. И., Граменицкий П. М., Мазин А. Н. и др. // Труды 5-х Гагаринских чтений. М., 1975. С. 154–158.

18. Генин А. М. Некоторые принципы формирования искусственной среды обитания в кабинах космических кораблей // Проблемы космической биологии. 1964. Т. 3. С. 59–65.

19. Граменицкий П. М. Декомпрессионные расстройства // Проблемы космической биологии. Т. 25. М.: Наука, 1974. 101 с.

20. Катунцев В. П. Высотно-декомпрессионная болезнь: экспериментальные исследования патогенеза и путей профилактики. Дисс. ... доктора мед. наук. М.: ИМБП МЗ СССР, 1975. 287 с.

ИНФОРМАЦИЯ



## Шестая Всероссийская конференция «РЕКОНСТРУКЦИЯ ЭНЕРГЕТИКИ — 2014»

3–4 июня 2014 г., ГК «ИЗМАЙЛОВО», г. Москва

Шестая Всероссийская конференция «РЕКОНСТРУКЦИЯ ЭНЕРГЕТИКИ — 2014», посвящена модернизации и реконструкции оборудования электростанций, ТЭЦ, АЭС, ГРЭС, ТЭС и других предприятий электроэнергетики, повышению ресурса и эффективности турбин, котлов и другого энергетического оборудования, автоматизации, надежности, газоочистке, водоподготовке и водоочистке, антикоррозионной защите и усилению зданий и оборудования, экологии и промышленной безопасности энергетики стран СНГ.

#### ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ:

- Инновационные разработки для повышения ресурса и эффективности котлов, турбин и другого технологического оборудования ТЭЦ, ГРЭС, ТЭС.
- Современные предложения по реконструкции паротурбинного оборудования.
- Повышение экологической чистоты и экономичности работы котлов электростанций.
- Автоматизация предприятий энергетики — системы управления, учета и контроля.
- Экология энергетики — газоочистка, водоочистка и переработка отходов.
- Отечественные и зарубежные электрофильтры для установок золоулавливания.
- Современные технологии водоподготовки и водоочистки.
- Вопросы промышленной безопасности и антикоррозионной защиты.

**Председатель оргкомитета:** Ермаков Алексей Владимирович — т.: +7 (905) 567-8767

**Оргкомитет:** Андроников Игорь Николаевич тел.: +7 (916) 117-0275,

+7 (499) 166-6420, факс: +7 (495) 737-7079

e-mail: admin@intecheco.ru

www.intecheco.ru

# ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



## Управление и информатика в авиакосмических и морских системах

№ 2  
февраль  
2014

**Главный редактор:**

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

**Ответственный секретарь:**

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционная коллегия:**

АЛЕКСЕЕВ В. В.  
БАРАНОВ Л. А.  
БЕЛОКОНОВ И. В.  
БУКОВ В. Н.  
ВАСИЛЬЕВ В. И.  
ГОДУНОВ В. А.  
ГУРЕВИЧ О. С.  
ГУРСКИЙ Б. Г.  
ЕФИМОВ В. В.  
ЗАЙЦЕВ А. В.  
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.  
НЕСТЕРОВ В. А.  
ОХТИЛЕВ М. Ю.  
ПАНКРАТОВ В. М.  
РАСПОПОВ В. Я.  
САБО Ю. И.  
СТЕПАНОВ О. А.  
СОЛДАТКИН В. М.  
ФИЛИМОНОВ Н. Б.  
ХИМЕНКО В. И.  
ЧЕБУРАХИН И. Ф.  
ШИРЯЕВ В. И.  
ШКОЛИН В. П.

**Редакция:**

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

**Лавров А. О., Петров В. В., Федунев Б. Е.**

Оперативное конструирование двумерной траектории выхода подвижного объекта в заданную точку с заданным курсом.

Часть 1 . . . . . 54

**Правидло М. Н., Нестеров В. А., Беляев А. Н.**

Анализ адаптивной замкнутой системы отделения авиационных средств поражения. Часть 1 . . . . . 60

**Старовойтов Е. И., Савчук Д. В.**

Использование геометрических искажений изображения, формируемого КМОП-фотоприемником, для контроля скорости сближения космических аппаратов . . . . . 66

**Жук А. С.**

Численно-аналитический метод построения области достижимости движения судна . . . . . 69

А. О. Лавров<sup>1</sup>, нач. лаб., В. В. Петров<sup>2</sup>, аспирант, pitt.oldcastle@gmail.com,

Б. Е. Федун<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф.,

<sup>1</sup> ФГУП ГосНИИАС,

<sup>2</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт)

## Оперативное конструирование двумерной траектории выхода подвижного объекта в заданную точку с заданным курсом. Часть I

*Рассмотрен синтез управления объектом, позволяющий объекту выйти из текущего положения в заданную точку с заданным курсом при возможном появлении зоны угроз, в которую объект не должен заходить.*

**Ключевые слова:** траектории, обход угрозы, выход из зоны угрозы, заход на цель

A. O. Lavrov, V. V. Petrov, B. E. Fedunov

## The Operative Design of the Trajectory on the Plane for the Leaving of the objeCt in the Given Point with the Given Course

*It is examined the problems of the construction of trajectories in the real time in the knowledge bases of some on-board operative advising expert systems.*

**Keywords:** the base trajectory, the zone of the threats, design of the trajectories with pass-by of the zone of the threats

### Введение

В ряде технических приложений при управлении наземными, воздушными или подводными подвижными объектами (ПО) возникает задача оперативного определения на борту ПО двумерной траектории выхода объекта ПО с заданным курсом в заданную на поверхности Земли/дна акватории точку (цель). При этом может существовать область угрозы движению объекта. Информация об угрозе может быть известна заранее (априори) или оперативно поступать на борт ПО в процессе его движения [1]. Объект ПО не должен входить в зону угроз. Искомая траектория должна строиться из текущего положения ПО с учетом текущего направления его вектора скорости. В случае оперативного поступления на борт ПО информации о зоне угроз, в которую попадает текущее положение ПО, объект должен максимально быстро покинуть эту область.

В статье рассматривается случай отсутствия априорно заданной зоны угрозы и возможное появление оперативно поступившей информации о существовании зоны угрозы.

Близкая задача рассмотрена в работе [2], где предлагается строить траекторию, оперативно используя оптимизационную процедуру. Это приводит к повышенным требованиям к бортовому вычислителю.

Наиболее близкая к рассматриваемой в данной статье постановке задача по обходу зоны угроз и обеспечению траекторной безопасности решается в работе [3]. Искомая траектория задается спряжением прямых и дуг окружностей с равным радиусом и рассматривается построение траектории при различных соотношениях радиусов зоны угроз и окружности разворота ПО. Однако как угодно близкое приближение искомой траектории к окру-

ности зоны угроз, отсутствие требования выхода ПО в заданную точку с заданным курсом и максимально быстрый выход ПО из появившейся зоны угроз остались за пределами работы [3]. В данной работе этот вопрос исследуется.

В части I рассматривается построение базовой траектории (траектории при отсутствии угрозы) и траектории выхода ПО из оперативно появившейся зоны угроз в случае, когда эта зона накрыла текущее положение ПО.

В части II строится траектория в случае оперативного появления угрозы, когда базовая траектория пересекает зону угрозы и объект ПО не находится в этой зоне.

В части III рассматривается полная структура алгоритма построения траектории объекта для условий, описанных в части I и в части II. В этой части также приведены результаты моделирования работы алгоритма в различных случаях его работы.

### 1. Постановка задачи

Движение ПО описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1 \cos \psi_1; \\ \frac{dz_1}{dt} = V_1 \sin \psi_1; \\ \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{n_\Gamma g}{V_1}; \end{cases} \quad (1)$$

$$n_\Gamma \in \{(+1) n_{\text{доп}}; 0; (-1) n_{\text{доп}}\}, \quad (2)$$

где  $\psi_1$  — текущий курс ПО, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления

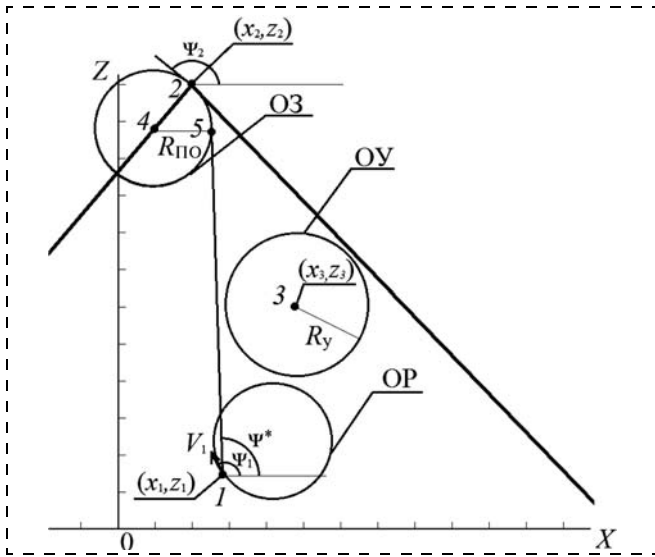


Рис. 1. Текущее положение объекта И1, условие выхода И1 в заданную точку и положение зоны угроз. Сокращения на рис.: ОЗ — окружность захода, ОУ — окружность угрозы, ОР — окружность разворота

оси  $OX$  (рис. 1);  $x_1, z_1$  — текущее положение ПО на плоскости;  $V_1$  — модуль скорости ПО;  $n_r$  — горизонтальная составляющая перегрузки ПО (управляющий сигнал);  $g$  — ускорение свободного падения.

Кроме того, на рис. 1 обозначены:  $x_2, z_2$  — заданная точка на плоскости (цель), в которую ПО должен выйти;  $\psi_2$  — заданный курс выхода ПО в заданную точку  $x_2, z_2$ .

Оперативно поступившая информация об угрозе представляется на плоскости  $ZOX$  кругом известного радиуса  $R_y$  с известными координатами  $(x_3, z_3)$  центра круга (рис. 1). Граница зоны угроз — окружность — на рис. 1 обозначена ОУ.

При заходе на цель ПО должен двигаться по дуге окружности захода (ОЗ) (см. рис. 1), радиус которой задается перегрузкой и вычисляется по формуле

$$R_{\text{ПО}} = \frac{V_1^2}{gn_{\text{доп}}}, \quad (3)$$

а координаты центра — по формулам

$$x_4 = x_2 - R_{\text{ПО}} \sin \psi_2; z_4 = z_2 + R_{\text{ПО}} \cos \psi_2. \quad (4)$$

Центр находится на перпендикуляре к прямой, проходящей через цель с углом наклона  $\psi_2$  к оси  $OX$ .

Из любого положения  $(x_1, z_1)$  с текущим курсом  $\psi_1$  ПО всегда разворачивается по дуге окружности разворота (ОР) радиуса  $R_{\text{ПО}}$  (3).

*Примечание.* Изменение курса ПО в процессе движения осуществляется путем перемещения по соответствующей дуге окружности радиуса  $R_{\text{ПО}}$  (окружность разворота), которая проходит через точку текущего положения ПО, а текущий вектор скорости  $V_1$  касается окружности.

Среди возможных траекторий ПО выбираются только траектории с минимальной длиной. На этой траектории следует определить координаты характерных точек, в которых ПО должен переходить из одного участка траектории на другой. На каждом участке следует определить управление  $n_r$ .

Конструирование траектории будем вести с учетом следующих ограничений:

- ПО движется с постоянным модулем скорости  $V_1$ ,
- соотношения радиусов  $R_y \geq R_{\text{и}}$ ;
- ПО должен находиться внутри угла, отмеченного на рис. 1 утолщенными линиями: линией, проходящей через цель под углом  $\psi_2$  (верхняя утолщенная линия рис. 1), и перпендикулярной к ней линией, проходящей также через цель (боковая утолщенная линия рис. 1);
- зона угроз не должна пересекать окружность захода на цель и не должна пересекать стороны упомянутого выше угла.

## 2. Конструирование траектории движения ПО

Рассмотрим три возможных случая построения траектории движения ПО из его текущего положения:

- угроза отсутствует, строится базовая траектория (пункт 2.1);
- появилась оперативно обнаруженная угроза, и текущее положение ПО находится в зоне угрозы (пункт 2.2);
- появилась оперативно обнаруженная угроза, зона которой пересекается базовой траекторией, но ПО находится вне зоны угрозы (пункт 2.3).

### 2.1. Конструирование траектории движения ПО при отсутствии угрозы (базовая траектория)

Поскольку базовая траектория будет состоять из дуг окружностей и касательных к ним, рассмотрим принцип построения внешних и внутренних касательных, который будем использовать для нахождения характерных точек траектории.

Предварительно найдем угол наклона к оси  $OX$  касательных к двум окружностям с равными радиусами  $R_1 = R_2$  (рис. 2).

Найдем угол наклона  $\varphi_k^*$  к оси абсцисс  $OX$  для внешних касательных к окружностям с центрами  $O_1, O_2$  (рис. 2, а).

Угол  $\varphi_k^*$  наклона внешней касательной к  $O_1, O_2$  (рис. 2, а) равен углу наклона  $\varphi_0$  прямой  $O_1O_2$ , проходящей через центры этих окружностей, так как эти прямые параллельны.

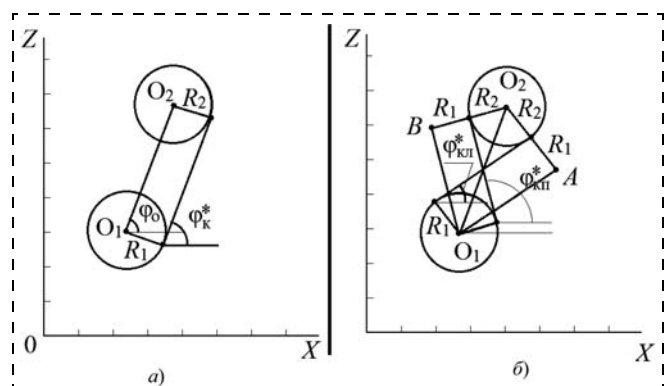


Рис. 2. Внешняя и внутренняя касательные к окружностям равных радиусов

Тогда

$$\varphi_k^* = \varphi_O = \arctg\left(\frac{z_{O_2} - z_{O_1}}{x_{O_2} - x_{O_1}}\right). \quad (5)$$

Рассмотрим внутренние касательные к окружностям  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 2, б). Назовем правой внутренней касательной внутреннюю касательную к правой половине окружности  $O_2$ . Соответственно, другую внутреннюю касательную назовем левой внутренней касательной. Найдем  $\varphi_k^*$  для правой и левой внутренних касательных к окружностям  $O_1, O_2$  (рис. 2, б). Построим внутреннюю правую касательную к  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 2, б).

Из центра  $O_1$  проведем прямую, параллельную построенной касательной. Из центра  $O_2$  опустим на эту прямую перпендикуляр, основание которого обозначим буквой А.

Получим  $\Delta O_1 A O_2$ . Тогда

$$\angle A O_1 O_2 = \arcsin\left(\frac{R_1 + R_2}{|O_1 O_2|}\right).$$

Аналогичные построения выполним для левой внутренней касательной. Получим  $\Delta O_1 B O_2$ . Тогда  $\angle B O_1 O_2 = \angle A O_1 O_2$ . Поскольку  $\Delta B O_1 O_2$  и  $\Delta A O_1 O_2$  равны, то углы наклона внутренних касательных равны:

$$\begin{aligned} \varphi_{кп}^* &= \arctg\left(\frac{z_{O_2} - z_{O_1}}{x_{O_2} - x_{O_1}}\right) + \arcsin\left(\frac{R_1 + R_2}{|O_1 O_2|}\right), \\ \varphi_{кл}^* &= \arctg\left(\frac{z_{O_2} - z_{O_1}}{x_{O_2} - x_{O_1}}\right) - \arcsin\left(\frac{R_1 + R_2}{|O_1 O_2|}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $|O_1, O_2| = \sqrt{(x_{O_2} - x_{O_1})^2 + (z_{O_2} - z_{O_1})^2}$ .

*Примечание.* В случае, если окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис. 2) касаются ( $|O_1 O_2| = R_1 + R_2$ ), то внешние касательные ищутся так, как описано выше, а внутренняя касательная — одна, она проходит через точку касания и перпендикулярна к  $[O_1, O_2]$ . В случае, если окружности пересекаются ( $|O_1 O_2| < R_1 + R_2$ ), внутренних

касательных не будет, а внешние ищутся так же, как и в предыдущих случаях.

Зная угол наклона касательной, точки касания будем находить как точки, лежащие на перпендикуляре, опущенном на касательную из центра окружности, на которой находится эта точка касания. Приведем примеры для правой внутренней и правой внешней касательных:

- для правой внутренней

$$\begin{aligned} x_{O_{1(к)}} &= x_{O_1} + R_1 \sin \varphi_{кп}^*; \quad z_{O_{1(к)}} = z_{O_1} - R_1 \cos \varphi_{кп}^*; \\ x_{O_{2(к)}} &= x_{O_2} - R_2 \sin \varphi_{кп}^*; \quad z_{O_{2(к)}} = z_{O_2} + R_2 \cos \varphi_{кп}^*. \end{aligned} \quad (7)$$

- для правой внешней

$$\begin{aligned} x_{O_{1(к)}} &= x_{O_1} + R_1 \sin \varphi_{к}^*; \quad z_{O_{1(к)}} = z_{O_1} - R_1 \cos \varphi_{к}^*; \\ x_{O_{2(к)}} &= x_{O_2} + R_2 \sin \varphi_{к}^*; \quad z_{O_{2(к)}} = z_{O_2} - R_2 \cos \varphi_{к}^*. \end{aligned}$$

*Базовой траекторией* назовем траекторию с минимальной длиной от текущего положения ПО до конечной точки "2" при отсутствии угрозы. В общем случае она будет состоять из (рис. 3):

- а) дуги ОР радиуса  $R_{ПО}$ , определяемой допустимой перегрузкой (2);
- б) отрезка общей касательной к ОР и к ОЗ;
- в) дуги ОЗ радиуса  $R_{ПО}$ .

Используя полученные результаты, определим характерные точки базовой траектории ПО.

Известны координаты ПО (точка "1") ( $x_1, z_1$ ), его текущий курс  $\psi_1$ , скорость  $V_1$ ; координаты цели ( $x_2, z_2$ ) (точка "2"), заданный курс захода на цель  $\psi_2$ , допустимая перегрузка  $n_{доп}$ .

Кратчайшим путем до точки "2" при заданных условиях будет траектория с тремя участками (рис. 3): дуга ОР, отрезок касательной, дуга ОЗ.

Для определения характерных точек на ОР и ОЗ (точек касания к ОР и ОЗ) предварительно следует выбрать направление движения (по часовой стрелке или против), по которому пойдет дальнейшая траектория. Поскольку такое движение будет происходить по дуге ОР, будем выбирать одно из двух возможных положений центра ОР. В зависимости

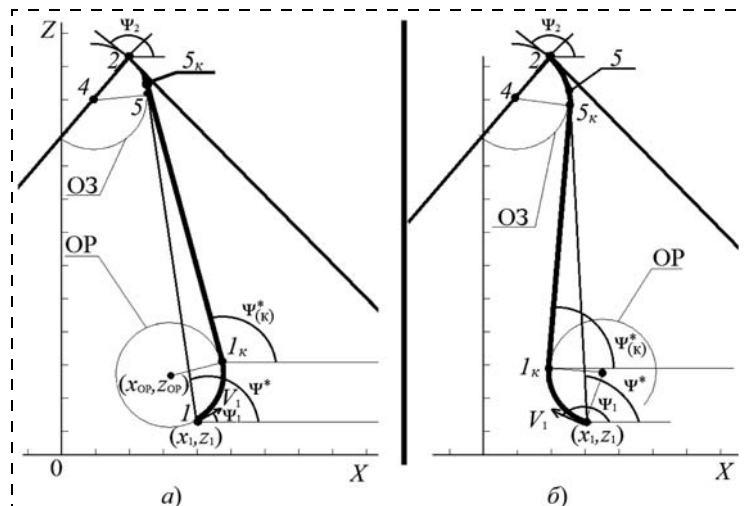


Рис. 3. Базовые траектории захода на цель

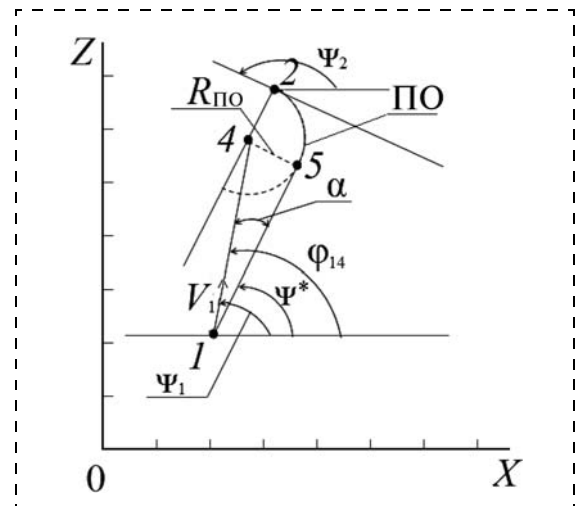


Рис. 4. Касательная к ОЗ из текущего положения ПО



от выбранного положения центра будет строиться внешняя или внутренняя касательная к ОР и ОЗ:

$$x_{OP} = x_1 + R_{ПО} \sin \psi_1; z_{OP} = x_1 - R_{ПО} \cos \psi_1;$$

или

$$x_{OP} = x_1 - R_{ПО} \sin \psi_1; z_{OP} = x_1 + R_{ПО} \cos \psi_1.$$

Для определения условий выбора центра ОР определим угол  $\psi^*$  (рис. 4) наклона к оси ОХ касательной к ОЗ, проведенной из точки "1" (текущего положения ПО).

Он равен:

$$\psi^* = \varphi_{14} - \alpha,$$

где угол  $\alpha$  определяется из синуса угла прямоугольного  $\Delta 145$  (см. рис. 4).

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{R_{ПО}}{\sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (z_4 - z_1)^2}} \right);$$

угол  $\varphi_{14}$  определяется из тангенса угла наклона прямой, проходящей через точки "1" и "4":

$$\varphi_{14} = \arctg \left( \frac{z_4 - z_1}{x_4 - x_1} \right).$$

Тогда координаты точки "5" касания ОЗ имеют вид

$$x_5 = x_4 + R_{ПО} \sin \psi^*; z_5 = z_4 - R_{ПО} \cos \psi^*.$$

Отсюда

$$\psi^* = \arctg \left( \frac{z_4 - z_1}{x_4 - x_1} \right) - \arcsin \left( \frac{R_{ПО}}{\sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (z_4 - z_1)^2}} \right).$$

При  $\psi^* - \psi_1 > 0$  выбирается внешняя касательная для базовой траектории, и тогда координаты центра окружности разворота будут иметь вид

$$x_{OP} = x_1 - R_{ПО} \sin \psi_1, z_{OP} = z_1 + R_{ПО} \cos \psi_1.$$

В противном случае выбирается правая внутренняя касательная, и координаты окружности разворота будут равны

$$x_{OP} = x_1 + R_{ПО} \sin \psi_1, z_{OP} = z_1 - R_{ПО} \cos \psi_1.$$

Координаты точек касания находятся по аналогии с формулами (7).

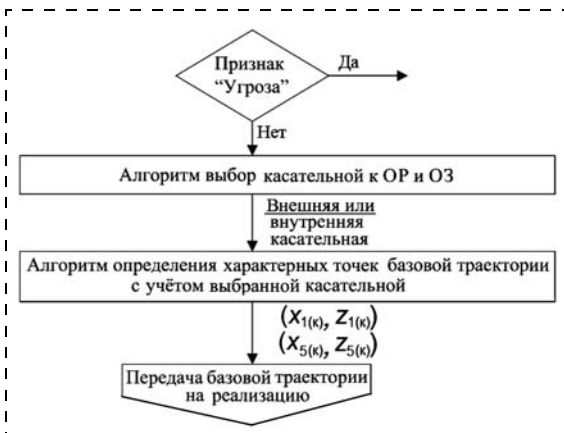


Рис. 5. Блок-схема алгоритма конструирования базовой траектории

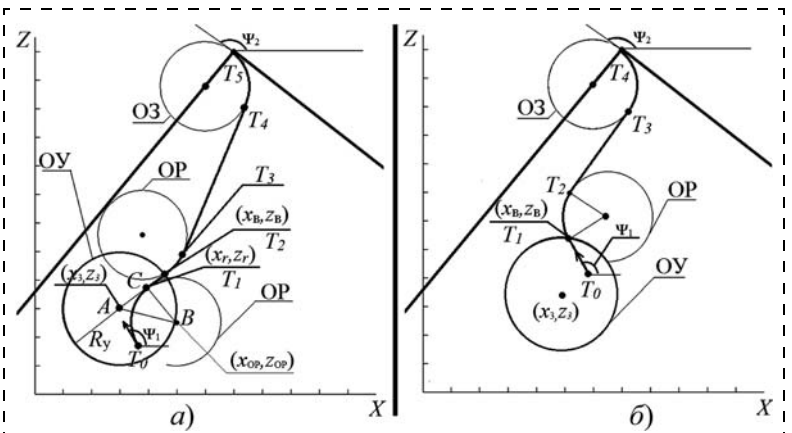


Рис. 6. Траектории выхода ПО из зоны угроз с последующим движением по базовой траектории. Характерные точки составной траектории обозначены  $T_j$ , где  $j = 1 \dots 5$

Используя вышеизложенное, сконструируем базовую траекторию (см. рис. 3):

- первый участок: дуга ОР от текущего положения ПО до точки "1к" касания к ОР;
- второй участок: отрезок касательной от точки "1к" до точки "5к" касания ОЗ;
- третий участок: дуга ОЗ от точки "5к" до точки "2".

Управление ПО на первом участке  $n_r = (-1)n_{доп}$  (если необходимо двигаться по часовой стрелке — рис. 3, б) или  $n_r = (+1)n_{доп}$  (если необходимо двигаться против часовой стрелки — рис. 3, а). На втором участке  $n_r = 0$ . На третьем участке при развороте против часовой стрелки  $n_r = (+1)n_{доп}$ .

Входная информация алгоритма:

- текущее положение ПО  $(x_1, z_1, V_1)$ ;
- координаты цели  $(x_2, z_2)$ ;
- курс  $\psi_2$  захода ПО на цель;
- отсутствие признака "Угроза", который вырабатывается при оперативном поступлении угрозы на борт ПО.

Выходная информация алгоритма:

- координаты характерных точек базовой траектории;
- тип участка базовой траектории, располагаемый между каждой парой характерных точек.

Блок-схема алгоритма оперативного построения базовой траектории представлена на рис. 5.

На рис. 5 обозначен признак "Угроза", который вырабатывается при оперативном поступлении информации об угрозе на борт ПО.

## 2.2. Конструирование траектории выхода ПО из зоны угроз

Для построения траектории выхода из зоны угрозы будем рассматривать две конкурирующие траектории: а) выход по прямой, содержащей текущий вектор скорости  $V_1$  ПО; б) выход по дуге ОР до соприкосновения с касательной, проведенной из центра ОУ к ОР или до точки пересечения ОР с ОУ, если эта точка встречается первой.

Построим траекторию выхода ПО из зоны угроз по прямой, заданной текущим вектором скорости  $V_1$  (рис. 6, б). Для вычисления протяженности этой тра-

ектории необходимо найти точку  $(x_B, z_B)$  пересечения этой прямой с ОУ, для этого введем систему координат  $Z^*O^*X^*$  с таким же направлением осей, что и  $ZOX$  и центром в центре ОУ. Координаты ПО  $(x_1, z_1)$  в этой системе координат:  $x_1^* = x_3 - x_1$ ,  $z_1^* = z_3 - z_1$ . Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^*)^2 + (z^*)^2 = R_y^2; \\ (z^*) = k(x^*) + b \end{cases}$$

— первое уравнение есть уравнение окружности ОУ с центром в начале координат, а второе уравнение (прямая выхода из зоны угроз) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом  $(z^* - z_1^*) = \text{tg}\psi_1(x^* - x_1^*)$ .

Подставив  $z^* = kx^* + b$  в первое уравнение, получим  $(1 + k^2)(x^*)^2 + 2kbx^* + b^2 - R_y^2 = 0$ . Корни этого уравнения:

$$x_{[1]}^* = \frac{-kb + \sqrt{k^2b^2 - (b^2 - R_y^2)(1 + k^2)}}{(1 + k^2)};$$

$$x_{[2]}^* = \frac{-kb - \sqrt{k^2b^2 - (b^2 - R_y^2)(1 + k^2)}}{(1 + k^2)}.$$

Подставляя найденные корни в уравнение прямой, найдем соответствующие им значения  $z^*$ :

$$z_{[1]}^* = kx_{[1]}^* + b; \quad z_{[2]}^* = kx_{[2]}^* + b.$$

Из этих значений выберем большее. Найденная точка  $(x_B^*, z_B^*)$  — точка выхода из ОУ в системе координат  $Z^*O^*X^*$ . Координаты  $(x_B, z_B)$  этой точки в системе координат  $ZOX$ :  $x_B = x_3 + x_B^*$ ,  $z_B = z_3 + z_B^*$ .

Найдем длину траектории выхода  $D_B$  из ОУ по найденной прямой:  $D_B = \sqrt{(x_B - x_1)^2 + (z_B - z_1)^2}$ .

Другой способ выхода ПО из ОУ предполагает, что ПО начинает выходить из нее по ОР направо или налево в зависимости от положения точки  $(x_1, z_1)$  относительно центра ОУ (см. рис. 6, а). При этом точка соприкосновения ОР с касательной, проведенной из центра ОУ к ОР, может находиться либо внутри ОУ (см. рис. 6, а), либо вне ОУ (см. рис. 6, б, где точка выхода находится на границе ОР).

Построим ОР, на которой находится точка  $(x_1, z_1)$  и вектор  $V_1$  ее касается, а также касательную, проведенную к ней из центра ОУ.

Определим координаты  $(x_{OP}, z_{OP})$  центра построенной ОР:

- для  $x_1 \geq x_3$   
 $x_{OP} = x_1 + R_{ПО}\sin\psi_1$ ;  $z_{OP} = z_1 - R_{ПО}\cos\psi_1$ ;
  - для  $x_1 < x_3$   
 $x_{OP} = x_1 - R_{ПО}\sin\psi_1$ ;  $z_{OP} = z_1 + R_{ПО}\cos\psi_1$
- и угол наклона прямой, проходящей через  $(x_3, z_3)$  и  $(x_{OP}, z_{OP})$ :

$$\psi_{OP} = \arctg\left(\frac{z_{OP} - z_3}{x_{OP} - x_3}\right).$$

Из центра ОУ проведем касательные к ОР. Углы наклона касательных к ОР обозначим  $\varphi_{OP1}$ ,  $\varphi_{OP2}$  (на рис. 6, а не показаны), точки их касания к ОР

обозначим  $(x_{r1}, z_{r1})$ ,  $(x_{r2}, z_{r2})$  (на рис. 6, а показаны только для левой касательной к ОР).

Углы наклона упомянутых касательных к ОР определим из прямоугольного треугольника  $\Delta BAC$  (см. рис. 6, а).

$$\text{Определим: } |AB| = \sqrt{(x_{OP} - x_3)^2 + (z_{OP} - z_3)^2};$$

$$\angle CAB = \arcsin\left(\frac{R_{ПО}}{|AB|}\right); \quad |AC| = \sqrt{|AB|^2 - R_y^2}.$$

Используя соотношения в этих треугольниках, получим:

$\varphi_{OP1} = \psi_{OP} + \angle CAB$  — для правой касательной к ОР;

$\varphi_{OP2} = \psi_{OP} - \angle CAB$  — для левой касательной к ОР.

Координаты точек касания (характерные точки траектории):

$$x_{OP1} = x_3 + |AC|\cos\varphi_{OP1}; \quad z_{OP1} = z_3 + |AC|\sin\varphi_{OP2}$$

при выборе правой касательной к ОР;

$$x_{OP2} = x_3 + |AC|\cos\varphi_{OP2}; \quad z_{OP2} = z_3 + |AC|\sin\varphi_{OP2}$$

при выборе левой касательной к ОР.

Из полученных точек выбираем точку с большим значением "z", которая является характерной точкой  $T_1$  искомой траектории. Выбранную точку касания обозначим  $(x_r, z_r)$ , а угол наклона соответствующей ей касательной обозначим  $\psi_{вых}$  (см. рис. 6, а). Выбранная точка касания может находиться внутри ОУ или быть вне ее, или находиться на границе ОУ.

Пусть выбранная точка находится внутри ОУ, что устанавливается из факта выполнения нера-

венства  $\sqrt{(x_3 - x_r)^2 + (z_3 - z_r)^2} < R_y$ . Тогда координаты точки выхода ПО из зоны угроз будут равны

$$x_B = x_3 + R_y\cos\psi_{вых}; \quad z_B = z_3 + R_y\sin\psi_{вых}.$$

Это вторая характерная точка  $T_2$  траектории выхода. В рассматриваемом случае траектория выхода ПО из зоны угроз  $L_{1-2}$  складывается из двух участков:  $L_1$  — дуга ОР от  $(x_1, z_1)$  до точки  $(x_r, z_r)$  и  $L_2$  — прямая от точки  $(x_r, z_r)$  до точки  $(x_B, z_B)$ .

Для определения длины дуги  $L_1$  рассмотрим равнобедренный треугольник  $\Delta BCT_O$  (на рис. 6, а

не указан). Найдем в нем  $\angle CBT_O = \arcsin\frac{|CT_O|}{2R_{ПО}}$ , где

$$|CT_O| = \sqrt{(x_r - x_1)^2 + (z_r - z_1)^2}.$$

$$\text{Тогда длина искомой дуги } L_1 = R_u \cdot 2\arcsin\frac{|CT_O|}{2R_{ПО}},$$

а длина входящего в искомую траекторию отрезка

$$\text{касательной } L_2 = \sqrt{(x_B - x_3)^2 + (z_B - z_3)^2}.$$

Общая длина траектории выхода ПО из зоны угроз равна:  $L_{1-2} = L_1 + L_2$ .

В случае, если выбранная выше точка касания находится вне ОУ или на самой ОУ (что устанавливается по выполнению неравенства

$\sqrt{(x_3 - x_r)^2 - (z_3 - z_r)^2} \geq R_y$ ), траектория выхода будет состоять из одной дуги ОР (дуга выхода), которая

ограничена точкой  $(x_1, z_1)$  с одной стороны и точкой  $(x_B, z_B)$  пересечения ОР с ОУ — с другой стороны.

Определим координаты точки пересечения. Введем систему  $Z^*O^*X^*$  с центром в центре ОР.

Пусть ось  $O^*X^*$  параллельна прямой, проходящей через центры ОУ и ОР, и направлена в сторону ОУ, а ось  $O^*Z^*$  направлена вверх. Обозначим  $D$  — расстояние между центрами ОУ и ОР. Тогда

$$\begin{cases} (x^*)^2 + (z^*)^2 = R_{\text{ПО}}^2; \\ (x^* + D)^2 + (z^*)^2 = R_y^2, \end{cases}$$

где первое уравнение системы — уравнение ОР, а второе уравнение — уравнение ОУ в этой системе координат.

Для определения точки  $(x_B^*, z_B^*)$  пересечения ОР с ОУ выразим  $(z^*)^2$  из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} (z^*)^2 = R_{\text{ПО}}^2 - (x^*)^2; \\ (x^*)^2 + 2D(x^*) + D^2 + R_{\text{ПО}}^2 - (x^*)^2 = R_y^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} z^* = \pm \sqrt{R_{\text{ПО}}^2 - \left(\frac{R_y^2 - R_{\text{ПО}}^2 - D^2}{2D}\right)^2}; \\ x^* = \frac{R_y^2 - R_{\text{ПО}}^2 - D^2}{2D}. \end{cases}$$

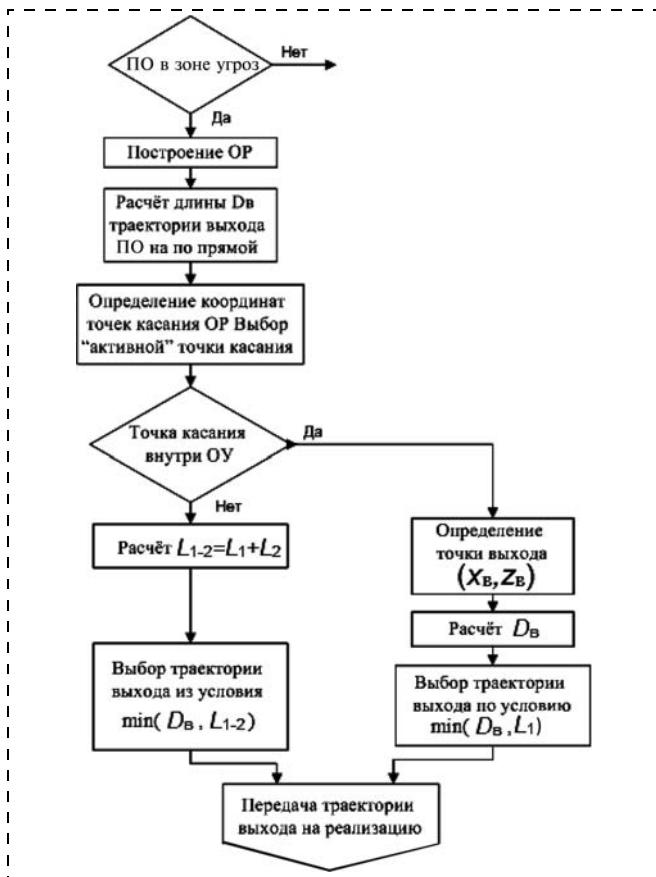


Рис. 7. Блок-схема алгоритма конструирования траектории выхода ПО из зоны угроз

Чтобы получить сами координаты точки  $(x_B, z_B)$  пересечения ОР и ОУ, вернемся к первоначальной системе координат  $ZOX$ .

Для случая выхода справа от центра ОУ:

$$\begin{aligned} x_B &= x_3 + R_y \cos(\psi_B^* + \psi_{\text{ОУ}}); \\ z_B &= z_3 + R_y \sin(\psi_B^* + \psi_{\text{ОУ}}), \end{aligned}$$

где  $\psi_B^* = \left| \arctg\left(\frac{z^*}{x^*}\right) \right|$ .

Для случая выхода справа от центра ОУ:

$$-90^\circ \leq \psi_{\text{ОУ}} \leq 90^\circ.$$

Для случая выхода слева от центра ОУ:

$$90^\circ \leq \psi_{\text{ОУ}} \leq 180^\circ.$$

В этом случае:

$$L_1 = R_{\text{ПО}} \left( \pi - \arccos \frac{\sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (z_1 - z_B)^2}}{2R_{\text{ПО}}} \right).$$

Из полученных оценок длин двух конкурирующих траекторий выхода ПО из зоны угроз по дуге ОР выбираем траекторию с меньшей длиной. Условия выбора сведены в таблицу.

Условия выбора траектории выхода из ОУ

Положение выбранной точки касания $(x_p, z_p)$ радиуса ОУ окружности разворота	Условия выбора траектории выхода ПО из зоны угроз
Точка внутри ОУ	$\min(D_B, L_{1-2})$
Точка вне ОУ или на ее границе	$\min(D_B, L_1)$

Блок-схема алгоритма траектории выхода ПО из зоны угроз показана на рис. 7.

На всем протяжении реализации траектории, если выбранная траектория — против часовой стрелки, то управление на этом участке:  $n_\Gamma = +n_{\text{доп}}$ , в противном случае  $n_\Gamma = -n_{\text{доп}}$ , при прямолинейном движении  $n_\Gamma = 0$ .

### Заключение

В Части I статьи рассмотрен алгоритм построения траектории захода на цель при отсутствии угрозы, построенная траектория называется базовой, и сформулирован алгоритм построения траектории выхода из угрозы произвольного радиуса, с последующим заходом на цель.

### Список литературы

1. Федунев Б. Е. Макромодель пилотируемых летательных аппаратов для разработки алгоритмов бортового интеллекта // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение "Управление и информатика в авиакосмических системах". 2006. № 3. С. 13—16.
2. Алехин Д. В., Якименко О. А. Синтез алгоритма оптимизации траектории полета по маршруту прямым вариационным методом // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 4. С. 150—167.
3. Воронов Е. М., Карпунин А. А. Обеспечение траекторной безопасности в задаче облета динамической круговой зоны // Наука и образование. 2011. № 12.
4. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Физматлит. 1962.

**М. Н. Правидло**, д-р техн. наук, проф., **В. А. Нестеров**, д-р техн. наук, проф.,  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

**А. Н. Беляев**, начальник конструкторского отдела, alex\_jc@mail.ru,

ОАО "Государственное машиностроительное конструкторское бюро "Вымпел" имени И. И. Торопова"

## Анализ адаптивной замкнутой системы отделения авиационных средств поражения. Часть 1

*Анализируются существующие методики проектирования установок бомбардировочного вооружения. Рассматривается частный случай создания математической модели внешней баллистики груза, катапультируемого с помощью системы принудительного отделения, построенной с использованием априорной информации о значениях действующих аэродинамических нагрузок. Разрабатывается структурная схема адаптивной системы принудительного отделения, функционирующей на основе апостериорной информации о внешних нагрузках.*

**Ключевые слова:** установка авиационного вооружения, авиационное средство поражения, адаптивная система катапультирования, принудительное отделение, аэродинамическая интерференция, катапультирование, условия безопасного отделения, пространственная устойчивость, замкнутый контур управления

**M. N. Pravidlo, V. A. Nesterov, A. N. Belyaev**

## The Analysis of the Adaptive Closed-Loop Ejection System of Stores. Part 1

*Existing engineering techniques of aircraft ejector systems are analyzed. The particular case with creation of mathematical external ballistics model for the store catapulted with the help of forced ejection system, constructed with usage of the aprioristic information about the amount of operating aerodynamic loads. The block diagram for the adaptive system of forced separation functioning on the basis of posteriori information on external loadings is developing.*

**Keywords:** aircraft store ejector system, aircraft weapons, adaptive ejection system, forced separation, aerodynamic interference, ejection, conditions for safe ejection, dimensional stability, closed loop control

### Введение

Одним из основных направлений развития и повышения эффективности перспективных комплексов авиационного вооружения является применение высокоточного оружия, а именно, управляемых бомбардировочных авиационных средств поражения (АСП), во всем диапазоне скоростей и маневренных перегрузок самолета-носителя (СН). В связи с этим возникает задача обеспечения безопасности отделения указанных АСП от СН, которая отличается от известной задачи сброса неуправляемых АСП тем, что помимо аспекта исключения соударения АСП с СН данная задача должна дополнительно включать аспект обеспечения пространственной устойчивости управляемых АСП. С учетом широких диапазонов аэродинамических нагрузок, обусловленных применением АСП с высокоскоростных и высокоманевренных СН, обеспечение безопасности отделения управляемых АСП представляет собой сложную научно-техническую задачу.

Решение указанной задачи возможно за счет формирования облика установки авиационного вооружения (УАВ) с адаптивной системой принудительного отделения, способной обеспечить локализацию в узком диапазоне изменений угловых и линейных параметров отделения АСП при всех действующих на него нагрузках, обусловленных режимами полета СН, составляющими зону его боевого применения. Под адаптивностью понимается способность УАВ

формировать конечные линейные и угловые параметры движения отделяемой АСП в заданных диапазонах с учетом информации о текущих параметрах его движения.

Проведенный анализ обеспечения существующими УАВ (с нерегулируемой системой принудительного отделения) локализации параметров катапультирования в пределах области их допустимых значений показал невозможность полного решения задачи локализации значений угловой скорости во всей зоне возможного применения СН [1].

Обоснование выбора и возможности создания адаптивной системы принудительного отделения с управлением по замкнутому контуру основывается на проведенном анализе результатов влияния составляющих элементов комплекса авиационного вооружения на значение характеристик аэродинамической интерференции, а также на результатах проведенного сравнительного анализа погрешности экспериментальных измерений этих характеристик [2]. Априорная информация по нагрузкам с учетом аэродинамической интерференции, полученная в аэродинамических трубах, определяется с погрешностью измерения от 20 до 50 %. Такие значения погрешностей измерений аэродинамических характеристик приводят к выводу о нецелесообразности построения адаптивной УАВ, работающей на принципе использования априорной информации.

## Особенности существующих методик исследования систем отделения АСП от СН

Существующие методики проектирования бомбардировочных УАВ, при применении которых должно обеспечиваться безопасное отделение АСП от СН, включают следующие последовательные этапы:

1) формирование исходных требований к условиям применения бомбардировочных УАВ в составе СН исходя из планируемой тактики боевого применения размещаемых на нем АСП. На основе данных условий комплексом экспериментальных и теоретических исследований определяются параметры аэродинамических и инерционных нагрузок с учетом интерференции СН и АСП как в процессе совместного полета, так и в процессе отделения на всех режимах полета СН;

2) создание математических моделей, описывающих параметры движения АСП в процессе его отталкивания от УАВ, а также на этапе пространственного движения, в диапазоне внешних воздействий, определенных на этапе 1, включая математическую модель системы принудительного отделения (СПО). В результате предварительного моделирования определяются параметры начального движения АСП, которые должна обеспечивать СПО на определенных режимах полета СН, а также обосновываются конкретные технические решения, определяющие облик СПО;

3) проведение комплекса наземных и летных испытаний УАВ, целью которого является проверка сходимости реально полученных результатов работы СПО с данными предварительного моделирования и уточнение моделей.

Анализ научных работ, посвященных первому этапу, позволяет выделить труды по исследованию требований, предъявляемых к конструкциям перспективных УАВ и АСП, методикам их проектирования, а также по определению взаимного влияния составляющих элементов комплекса авиационного вооружения (КАВ) на параметры безопасного отделения АСП [3–5]. В работах представлены расчетно-экспериментальные методы, позволяющие на основе продувок и гидродинамического моделирования с использованием макетов СН и АСП определять влияние особенностей элементов КАВ на параметры аэродинамической интерференции СН и АСП, используемые в ходе математического моделирования сквозного движения АСП. Указанным работам свойственна тщательная проработка условий безопасного отделения АСП с учетом аэродинамических воздействий на различных режимах полета СН. При этом в работах рассматриваются условия обеспечения безопасного отделения неуправляемых АСП в части их несударения с элементами КАВ и не учитываются дополнитель-

ные требования к СПО управляемых АСП, а именно необходимость обеспечения пространственной устойчивости таких грузов. Также в работах недостаточно подробно исследована область допустимых значений параметров движения отделяемых АСП в условиях применения на высокоманевренных СН без ограничений режимов полета.

Второй этап проектирования УАВ представлен теоретическими и экспериментальными исследованиями, проведенными в работах [6, 7], посвященных комплексному математическому моделированию динамики АСП и всех элементов, входящих в КАВ, с учетом их упругих свойств и внутренней баллистики силовых приводов. Основными особенностями моделирования работы существующих СПО являются использование априорных данных по значениям аэродинамических воздействий на АСП и отсутствие возможности регулирования его линейных и угловых параметров движения в процессе катапультирования. Рассмотрим подробнее методику моделирования процесса катапультирования АСП на примере СПО с двумя толкателями, разработанную авторами на основе материалов ГосНИИАС.

### Методика моделирования процесса катапультирования АСП

Схема катапультирования АСП от СПО вниз толкателями прямолинейного хода представлена на рис. 1. Согласно данной схеме полагаем, что смещение АСП относительно штока толкателя  $OA$  отсутствует до конца его хода. В конструкции СПО применен пиротехнический привод с двумя толкателями. Допускается скольжение без трения штока второго (переднего) толкателя относительно корпуса АСП, но движение АСП в поперечной плоскости (курса) не допускается во время действия толкателей.

Механическая система обладает в процессе катапультирования двумя степенями свободы. В соответствии с правилами статического и динамического размещения масс при толкании масса АСП разделена на две дискретные массы  $A$  и  $B$ . Размещение первой массы  $m_A$  выбрано в точке  $A$  на конце штока  $OA$  заднего толкателя с соответствующей его поступательному движению вдоль оси  $OY_0$  степе-

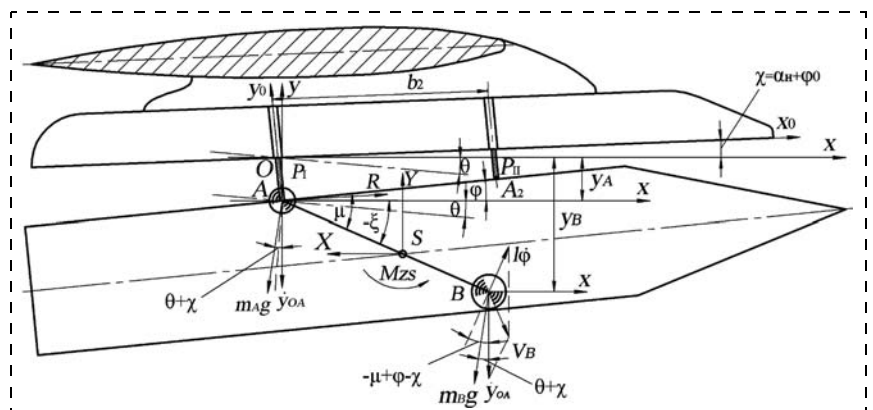


Рис. 1. Расчетная схема катапультирования АСП от СПО

ню свободы. Вторая масса  $m_B$  имеет степень свободы, соответствующую вращению маятника  $AB$  вокруг подвижной точки  $A$ . Расчет параметров ее размещения будет приведен ниже.

В итоге построения расчетной схемы получается задача о расчете движения математического маятника  $AB$ , точка подвески которого  $A$  смещена массой  $m_A$  и движется ускоренно и прямолинейно. Для данной расчетной схемы характерен тот факт, что в процессе движения значения дискретных масс  $m_A$  и  $m_B$  и расстояние между ними  $|AB| = l$  остаются неизменными (постоянными).

Все направления скоростей и сил, рассматриваемых в данной системе, а также траектория центра тяжести АСП в процессе катапультирования ориентированы относительно скоростной системы координат в плоскости  $xOy$ , связанной с СН, совершающим плоский маневр (в частности, набор высоты) под углом  $\theta$  к горизонту. Ввиду малого времени катапультирования  $\theta = \text{const}$ , движение штока толкателя (ОА) вниз принято отрицательным, а угол  $\varphi$  при отклонении АСП на пикирование — отрицательным, а на кабрирование — положительным.

Уравнения движения АСП, соединенного с СПО механическими связями, выводятся из уравнений Лагранжа 2-го рода с учетом полной механической энергии  $E$ , равной сумме  $E = T + V$ , составленной из кинетической энергии  $T$  и потенциальной  $V$  энергии системы.

Уравнения Лагранжа 2-го рода записываются в этом случае в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь число начальных звеньев равно числу степеней свободы механизма, и поэтому число уравнений движения механизма, записываемых в виде (1), также равно числу степеней свободы, т. е. равно двум ( $i = 1; 2$ ). Далее определяем отдельно кинетическую и потенциальную энергии системы.

**Кинетическая энергия.** Кинетическая энергия системы согласно схеме, приведенной на рис. 1, складывается из энергий поступательного и вращательного движений:

$$T = \frac{1}{2} (m_A v_A^2 + m_B v_B^2),$$

где  $v_A = \dot{y}_{OA} \equiv \dot{q}_1$  — скорость штока  $OA$ , принятого за первое начальное звено механизма катапультирования;  $v_B$  — скорость массы  $m_B$  в сложном движении, определяемая по теореме косинусов из треугольника скоростей  $\vec{v}_B = \vec{v}_{B1} + \vec{v}_{B2}$ , причем  $v_{B1} = \dot{y}_{OA}$ ,  $v_{B2}^2 = l\omega$  и, следовательно,

$$v_B^2 = \dot{y}_{OA}^2 + l^2\omega^2 + 2l\omega\dot{y}_{OA}\cos[\pi - (\chi - \xi)],$$

где  $\xi = \varphi - \mu$ ;  $\omega = \dot{\varphi} \equiv \dot{q}_2$  — угловая скорость вращения АСП (с массой  $m$  и моментом инерции  $J_S$  относительно центра масс  $S$ ).

Если обозначить согласно рис. 1 длину математического маятника  $|AB| = l$  и его плечи относи-

тельно центра тяжести АСП  $S$ :  $|AS| = a$  и  $|SB| = k$ , т. е.  $l = a + k$ , то получим следующие соотношения для определения дискретных масс и их размещения:

$$\begin{aligned} m &= m_A + m_B, \\ m_A &= m \frac{k}{a+k} = m \frac{k}{l}, \\ m_B &= m \frac{a}{l}, \\ k &= \frac{J_S}{ma}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $a$  вычисляется через координаты центра тяжести  $S$  АСП  $x_S, y_S$  и координаты  $x_A, y_A$  точки приложения штока толкателя к АСП в начальный момент времени ( $t = 0$ ) (далее  $a = \text{const}$ ):

$$a = \sqrt{|x_{S0} - z_{A0}|^2 + |y_{S0} - y_{A0}|^2}.$$

С учетом вышесказанного выражение для кинетической энергии преобразуется к следующей функции  $T(y_{OA}, \varphi)$  от обобщенных координат  $q_1 = y_{OA}$ ,  $q_2 = \varphi$ :

$$T = T(y_{OA}, \varphi) = \frac{1}{2} m \dot{y}_{OA}^2 - m a \dot{y}_{OA} \dot{\varphi} \cos(\chi - \xi) + \frac{1}{2} m a l \dot{\varphi}^2.$$

Это уравнение может быть получено также путем преобразований из формулы кинетической энергии АСП, записываемой в форме

$$T = \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2),$$

где  $m$  — масса АСП, сосредоточенная в центре тяжести с координатами

$$\begin{aligned} x_S &= a \cos \xi - y_{OA} \sin \chi, \\ y_S &= a \sin \xi + y_{OA} \cos \chi, \end{aligned}$$

причем  $J_S$  — момент инерции АСП относительно центра тяжести  $S$ , а  $\dot{x}_S, \dot{y}_S$  — составляющие скорости центра тяжести АСП.

**Потенциальная энергия.** Поскольку в задаче о работе механизма с жесткими звеньями силы упругости (обусловливаемые потенциальной энергией деформации) не учитываются, то силами, обладающими потенциалом ( $U = -V$ ), будут только силы тяжести. Силы тяжести могут быть учтены в уравнениях движения либо через потенциал  $U$  сил тяготения (в зависимости от положения по высоте дискретных масс  $m_A$  и  $m_B$ ) в левой части уравнения (1), либо в составе обобщенных сил в правой части уравнения (1), где силы тяжести считаются как заданные внешние силы, и тогда можно принять потенциальную энергию  $V$  равной нулю. Итак, полагаем:  $U = -V = 0$ .

При обобщенных скоростях  $\dot{q}_1 = \dot{y}_{OA}$  и  $\dot{q}_2 = \dot{\varphi} = \dot{\xi}$  из уравнений Лагранжа 2-го рода получаются следующие уравнения динамики катапультирования АСП толкателями прямолинейного хода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{OA}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_{OA}} &= \\ = m \ddot{y}_{OA} + m a \cos(\chi - \xi) \ddot{\varphi} + m a \sin(\chi - \xi) \dot{\varphi}^2 &= Q_1; \\ Q_1 &= |x| \sin \chi + Y \cos \chi - G \cos(\chi + \theta) + P, \end{aligned}$$

где  $P = P_1 + P_2$  — суммарная сила катапультирования первого и второго толкателей;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = mal\ddot{\phi} + macos(\chi - \xi)\ddot{y}_{OA} = Q_2,$$

где  $Q_2 = P_2b_2 + M_{ZS} + |X|asin\xi + Yacos\xi - Gacos(\xi + \theta)$ .

Из этих уравнений нетрудно найти выражения для ускорения  $\ddot{y}_{OA}$  поступательного движения АСП (и штока  $OA$ ) и углового ускорения  $\ddot{\phi}$  вращательного движения АСП вокруг точки  $A$ :

$$\ddot{y}_{OA} = \frac{1}{(l - acos^2\zeta)} [al|\sin\xi|\dot{\phi}^2 + \frac{g}{G} (Q_{1l} - Q_2cos\zeta);$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(-1)}{(l - acos^2\zeta)} \left[ a|\sin\xi|cos\zeta\dot{\phi}^2 + \frac{g}{G} (Q_1cos\zeta - \frac{Q_2}{a}) \right].$$

После подстановки обобщенных сил  $Q_i$  последние уравнения для ускорений  $\ddot{y}_{OA}$  и  $\ddot{\phi}$  преобразуются к следующему виду:

$$\ddot{y}_{OA} = \frac{1}{(l - acos^2\zeta)} \left\{ al|\sin\xi|\dot{\phi}^2 + g \left[ |n_x|(l\sin\chi - a\sin\xi\cos\zeta + n_y(l\cos\chi - acos\xi\cos\zeta) + n_{P_1}l + n_{P_2}(l - b_2\cos\zeta) - \frac{M_{ZS}}{G}\cos\zeta - l\cos\eta + acos\zeta\cos\nu) \right] \right\};$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(-1)}{(l - acos^2\zeta)} \left\{ a|\sin\xi|cos\zeta\dot{\phi}^2 + g \left[ |n_x|(\sin\chi\cos\zeta - \sin\xi) + n_{P_1}\cos\zeta + n_{P_2} \left( \cos\zeta - \frac{b_2}{a} \right) - \frac{M_{ZS}}{aG}\cos\zeta\cos\eta + \cos\nu \right] \right\}.$$

К этим уравнениям необходимо добавить кинематические (геометрические) соотношения, соответствующие выбранной схеме (см. рис. 1):

$$\chi = \alpha_H + \phi_{уст} = const,$$

$$\eta = \chi + \theta = const,$$

$$\mu = \arctg \left| \frac{y_{S0}}{x_{S0}} \right| = const,$$

где  $\alpha_H$  — угол атаки СН;  $\phi_{уст}$  — угол установки АСП.

Углы  $\chi, \theta, \mu, \xi, \phi$  показаны на схеме (см. рис. 1):

$$\xi = \phi - \mu; \zeta = \xi - \chi; \nu = \xi + \theta;$$

$$n_x = \frac{X}{G}; n_y = \frac{Y}{G};$$

$$n_P = \frac{P}{G} = \frac{P_1}{G} + \frac{P_2}{G} = n_{P_1} + n_{P_2}; \ddot{y}_{OA} = \frac{d\dot{y}_{OA}}{dt};$$

$$\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt}; \frac{dy_{OA}}{dt} = \dot{y}_{OA}; \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}.$$

где  $n_x, n_y, n_P$  — перегрузки от аэродинамических сил и сил толкания;  $\ddot{y}_{OA}, \dot{y}_{OA}$  — линейные ускоре-

ние и скорость АСП в точке  $A$ ;  $\ddot{\phi}, \dot{\phi}$  — угловые ускорение и скорость АСП;

$$x_B = x_A + lcos\xi; y_B = y_A + lsin\xi;$$

$$x_{\text{хвост АСП}} = L_{\text{хвост}}cos\phi - x_S;$$

$$y_{\text{хвост АСП}} = L_{\text{хвост}}sin\phi - y_S;$$

$$x_{\text{нос АСП}} = L_{\text{хвост}}cos\phi + x_S;$$

$$y_{\text{нос АСП}} = L_{\text{хвост}}sin\phi + y_S;$$

где  $x_A, y_A, x_B, y_B$  — координаты дискретных масс (точек)  $A$  и  $B$ ;  $x_{\text{хвост}}, y_{\text{хвост}}, x_{\text{нос}}, y_{\text{нос}}$  — координаты хвостовой и носовой точек отделяемого АСП, причем  $L_{\text{хвост}}, L_{\text{нос}}$  — расстояния хвостовой и носовой точек от центра тяжести  $S$  АСП;

$$\dot{x}_S = -\dot{y}_{OA}\sin\chi - a\dot{\phi}\sin\xi;$$

$$\dot{y}_S = -\dot{y}_{OA}\cos\chi + a\dot{\phi}\cos\xi;$$

$$\Delta y_0 = b_2tg(\phi - \chi),$$

где  $\dot{x}_S, \dot{y}_S$  — составляющие скорости центра масс  $S$  АСП;  $\Delta y_0$  — разность ординат, исчисляемых по оси  $OY_0$ , точек  $A$  и  $A_2$  приложения двух толкателей к поверхности катапультируемого АСП. Ордината точки приложения  $A_2$  второго (переднего) толкателя на поверхности АСП  $y_{OA_2}$  вычисляется по формуле

$$y_{OA_2} = y_{OA} + \Delta y_0,$$

а скорость и ускорение этой точки  $A_2$ :

$$\dot{y}_{OA_2} = \dot{y}_{OA} + \frac{b_2\dot{\phi}}{\cos^2(\phi - \chi)},$$

где  $b_2$  — база толкателей (см. рис. 1);

$$\ddot{y}_{OA_2} = \ddot{y}_{OA} + \frac{b_2[\dot{\phi} + 2\dot{\phi}^2tg(\phi - \chi)]}{\cos^2(\phi - \chi)}.$$

Момент окончания катапультирования тем или иным толкателем определяется полным выходом толкателя на величину  $h_i$ , т. е. катапультирование происходит при условии:  $y_{OA_2} \leq h_2$  и  $y_{OA} \leq h_1$ . Если раньше нарушится первое из этих условий, то катапультирование продолжается (при  $P_2 = 0$  и  $P_1 \neq 0$ ) одним первым толкателем. Если нарушится условие  $y_{OA} \leq h_1$ , то вычисления по программе катапультирования прекращаются и переводятся на программу определения свободного движения АСП после отделения.

Аэродинамические силы  $X, Y$  и момент  $M_{ZS}$  вычисляются по формулам

$$X = C_x q S, Y = C_y q S, m_{ZS} q S L,$$

где коэффициенты  $C_x, C_y, m_{ZS}$  этих сил и моментов определяются по испытаниям (продувкам) моделей

АСП в аэродинамических трубах;  $S$  — площадь ми­делового сечения АСП;  $q$  — скоростью напор. Реак­ция  $R_x$  опоры АСП о шток толкателя ОА (в попереч­ном к нему направлении) определяется по формуле

$$R_x = |X|\cos\chi + Y\sin\chi + G\sin\eta - \frac{M_{ZS}}{l}\sin\zeta,$$

где  $G$  — вес АСП.

Таким образом, приведенная выше модель опи­сывает механическое движение катапультируемого АСП как твердого тела и его внешнюю баллистику при известных силах катапультирования  $P_1$  и  $P_2$ , развиваемых пиромеханизмом замка СПО [8]. При этом необходимо учитывать, что рассмотренная методика построения данной модели использует аэродинамические коэффициенты, полученные с учетом интерференции, которые могут иметь по­грешность до 50 %, что существенно снижает точ­ность моделирования.

Альтернативой описанной системе принуди­тельного отделения является более сложная, но не­зависимая от априорных данных по аэродинами­ческим нагрузкам адаптивная СПО, работающая на основе алгоритмов, обеспечивающих автомати­ческую настройку усилий толкания в зависимости от реальных внешних воздействий на АСП.

### Разработка структуры адаптивной системы принудительного отделения

Структурная схема замкнутой адаптивной систе­мы принудительного отделения (АСПО) состоит из трех взаимосвязанных блоков, представленных на рис. 2—4, и основана на использовании следящей автоматической системы регулирования линейной и угловой скоростей АСП в течение всего процесса катапультирования. Замкнутая, т. е. использующая обратные связи по текущим кинематическим пара­метрам движения АСП, система управления позво­ляет сформировать адаптивный режим

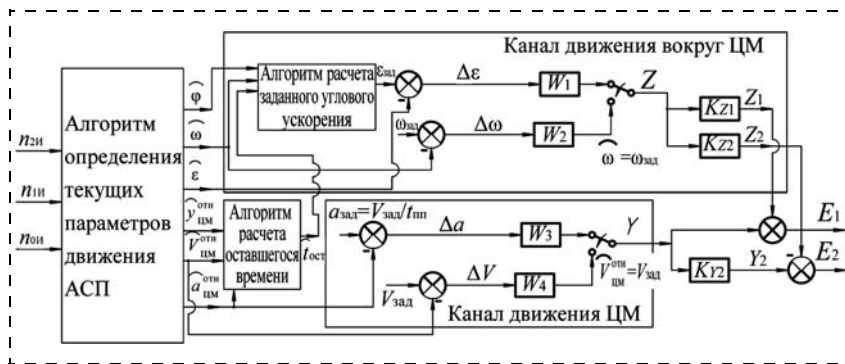


Рис. 2. Структурная схема электронно-вычислительного блока

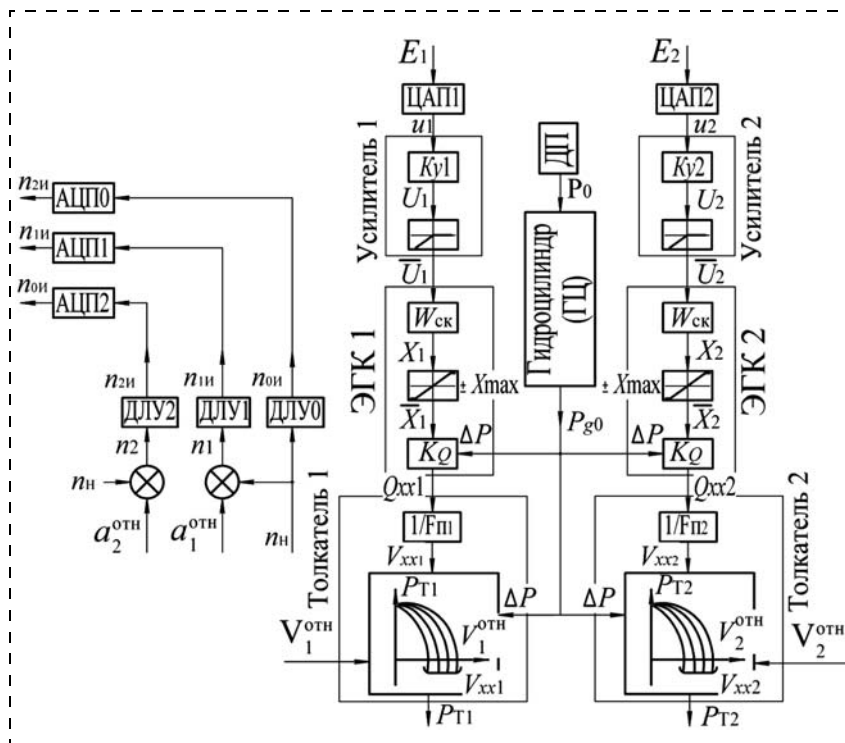


Рис. 3. Структурная схема блока исполнительных и измерительных механизмов

управления процессом формирования линейной и угловой скоростями авиационных средств поражения. В сравнении с разомкнутой такая система позволяет реализовать требуемые кинематические параметры отделения с гораздо большей точностью, причем она позволяет требуемым образом изменять по режимам полета СН задаваемые значения этих параметров. Система включает электронно-вычислительный блок (ЭВБ) (см. рис. 2), содержащий алгоритм обработки данных и выполнения математической задачи определения параметров движения АСП (угла поворота АСП при катапультировании ( $\hat{\phi}$ ), угловой скорости АСП ( $\hat{\omega}$ ), углового ускорения ( $\hat{\varepsilon}$ ), перемещения центра масс (ЦМ) АСП ( $\hat{Y}_{\text{ЦМ}}^{\text{отн}}$ ), линейной скорости ЦМ ( $\hat{V}_{\text{ЦМ}}^{\text{отн}}$ ), линейного ускорения ЦМ ( $\hat{a}_{\text{ЦМ}}^{\text{отн}}$ ), заданных углового ускорения ( $\varepsilon_{\text{зад}}$ ), угловой скорости ( $\omega_{\text{зад}}$ ), линейного ускорения ( $a_{\text{зад}}$ ), линейной скорости ( $V_{\text{зад}}$ ), оставшегося времени толкания ( $\hat{t}_{\text{ост}}$ ), а также включает подобранные передаточные функции и коэффициенты усиления каналов, определяющие требуемые значения сигналов  $E_1$  и  $E_2$ , подаваемых на вход блока исполнительных и измерительных механизмов (см. рис. 3).

Блок исполнительных и измерительных механизмов включает два электрогидроклапана (ЭГК), регулирующих значение усилий толкания на



переднем и заднем штоках, силовой привод в виде двухполостного пиромеханизма (ДП), объединенного с гидроцилиндром (ГЦ), измерители (датчики линейных ускорений (ДЛУ) для образования обратных связей, цифроаналоговые (ЦАП) и аналого-цифровые преобразователи (АЦП) для обеспечения взаимосвязи измерителей, ЭВБ и ЭГК. Управление в пирогидравлическом приводе организовано по гидравлическому тракту, так как при этом отсутствует запаздывание, связанное со сжимаемостью рабочего тела, что важно для построения системы регулирования с высоким быстродействием. Управление скоростями выдвигания обоих толкателей в блоке выполняется независимым за счет использования для каждого из них собственного электрогидроклапана, что обеспечивает простоту перенастройки системы на различные значения требуемой угловой скорости отделения АСП. На выходе блок формирует потребные для обеспечения заданных параметров движения АСП силы толкания передним и задним поршнями АСПО ( $P_{T1}$ ,  $P_{T2}$ ) которые подаются на вход блока параметров относительного движения АСП (см. рис. 4), а также измеренные и преобразованные АЦП сигналы о текущих линейных ускорениях переднего и заднего поршней и перегрузке СН ( $n_y$ ), идущие на вход блока ЭВБ.

В блоке (см. рис. 4) относительное движение АСП вместе с толкателями рассматривается плоским, при этом центр масс смещается вниз по оси  $OY$  и одновременно АСП поворачивается вокруг оси  $OZ$ . Уравнения движения катапультируемого АСП имеют вид

$$m\ddot{y}_c = P_{T1} + P_{T2} + (Gn_y^c - Y);$$

$$J_z\ddot{\theta} = P_{T1}d_1 - P_{T2}d_2 + M_z.$$

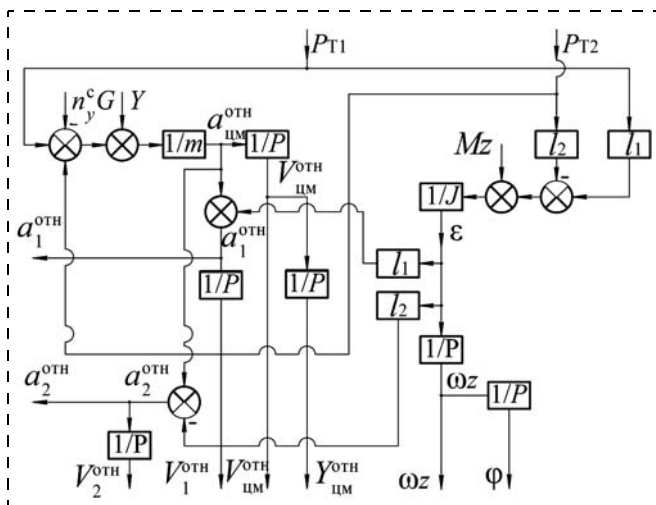


Рис. 4. Структурная схема блока параметров относительного движения АСП:

$m$ ,  $J$  — масса и момент инерции АСП;  $Y_{CM}^{OTH}$  — смещение ЦМ АСП по оси  $OY$ ;  $1/P$  — символ интегрирования;  $n_y^c$  — перегрузка СН;  $l_1$ ,  $l_2$  — плечи сил  $P_{T1}$  и  $P_{T2}$  и относительно ЦМ АСП;  $Y$ ,  $M_z$  — аэродинамические сила и момент с учетом интерференции

Основными кинематическими параметрами, регулировку которых должна обеспечивать АСПО, являются угловая скорость катапультирования АСП и линейная вертикальная скорость АСП. На основании опыта обработки систем безопасного катапультирования АСП с учетом обеспечения устойчивости системы стабилизации АСП можно заключить, что АСПО должна позволять задавать потребное значение  $\omega_z$ , которое может быть различным для различных режимов полета СН ( $\omega_z = 10...80$  °/с). Требование по линейной вертикальной скорости отделения АСП зададим как  $V_y \leq -4$  м/с.

## Выводы

1. Проведен анализ математической модели внешней баллистики АСП, катапультируемого с помощью СПО с двумя пиротолкателями, которая построена на основе использования априорной информации о значениях действующих аэродинамических нагрузок.

2. Разработана структурная схема пирогидравлической адаптивной системы принудительного отделения. Схема основана на использовании замкнутого контура управления с обратной связью по линейным и угловым параметрам движения АСП, определяемым измерениями текущих ускорений толкателей с использованием трех ДЛУ, и обеспечивает выработку управляющих сигналов, пропорциональных рассогласованиям между заданными и текущими значениями параметров движения АСП относительно СН.

## Список литературы

1. Беляев А. Н., Правидло М. Н. Анализ предельных возможностей систем принудительного отделения существующих установок авиационного вооружения // Электронный журнал "Труды МАИ". 2012. № 61. URL: [www.mai.ru/science/trudy/](http://www.mai.ru/science/trudy/).
2. Установки бомбардировочного вооружения летательных аппаратов / Н. В. Синицин, С. А. Улитин, В. Н. Волков, К. М. Тихонов и др. М.: МАИ-Принт, 2010. 564 с.
3. Колотков Н. И., Ватолин В. В. Основы конструкции и проектирования установок БРВ. М.: Машиностроение, 1979. 175 с.
4. Каневский М. И., Смирнов В. Ю. Исследование процесса отделения подвешенных объектов в условиях нестационарного аэродинамического нагружения // Установки и системы управления авиационным вооружением. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1994. С. 98—102.
5. Ватолин В. В., Пресняков В. М. Методика экспериментальных исследований параметров катапультирования грузов короткоходовым АКУ с упругого объекта // Сборник научных трудов. М.: НИИАС, 1986. № 10 (260). С. 40—42.
6. Пресняков В. М. Динамика принудительного отделения подвешиваемых грузов от упругого крыла самолета // Техника воздушного флота. М.: ЦАГИ, 1993, № 4—6. С. 22—32.
7. Пресняков В. М. Комплексная математическая модель динамики системы "самолет — устройство принудительного отделения — подвешиваемый груз" // Техника воздушного флота. М.: ЦАГИ, 1996. № 5—6. С. 53—59.
8. Синицин Н. В. Определение газодинамических параметров пиротехнического привода, оснащенного двумя толкателями // Проблемы безопасности полетов. 2008. № 9. С. 43—53.

**Е. И. Старовойтов**, канд. техн. наук, инженер 2-й категории, evgstarovojtov@yandex.ru,  
**Д. В. Савчук**, инженер, ОАО "РКК "Энергия" им. С. П. Королева"

## Использование геометрических искажений изображения, формируемого КМОП-фотоприемником, для контроля скорости сближения космических аппаратов

*Разработана система контроля скорости сближения кооперируемых космических аппаратов, реализованная на эффекте геометрических искажений изображения, формируемого КМОП-фотоприемником. Представлены результаты макетирования системы, подтверждающие ее техническую реализуемость, и математическая модель, описывающая геометрические искажения изображения, возникающие при сближении космических аппаратов.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, сближение и стыковка, скорость, КМОП-фотоприемник, изображение, геометрические искажения

**E. I. Starovoirov, D. V. Savchuk**

## Using of the Geometric Distortion of the Image, Generated by the CMOS Photodetectors for Evaluation of Speed of Approach of Space Vehicles

*Developed a system for evaluation of the speed approach of spacecraft, implemented on the effect of geometric distortion of the image formed by a CMOS photodetector. Presents the results of breadboarding system confirming its technical realization and the mathematical model describing the geometric distortion of the image resulting from the approximation of the spacecraft.*

**Keywords:** spacecraft, rendezvous and docking, speed, CMOS photodetector image, geometric distortions

Повышение безопасности операций сближения и стыковки космических аппаратов (КА) требует поддержания скорости сближения в установленных пределах, превышение которых должно быть обнаружено с достаточной надежностью.

Актуальным является поиск методов и средств для повышения надежности измерений скорости сближения КА, в том числе дополнительных датчиков, сигнализирующих о превышении допустимых ограничений скорости в случае отказа основной системы взаимных измерений (радиотехнической или лазерно-оптической).

Определение скорости движения движущихся объектов возможно на основе специальных алгоритмов обработки информации, содержащих данные об изменении положения в пространстве объектов, находящихся в поле зрения телекамер, как это реализовано в телевизионной системе, предназначенной для определения скоростных характеристик отдельных автотранспортных средств, движущихся в общем потоке [1].

Для контроля безопасности лифтов и подъемников предложен метод измерения параметров их торможения на основе потока фотоизображений [2]. Метод состоит в том, что на нижней части лифта или подъемника размещаются контрастная геометрическая фигура (оптический маяк) и источник подсветки, а в шахте установлена быстродействующая фотокамера.

Для измерения параметров движущегося объекта может быть использован характерный для КМОП-фотоприемника эффект динамических искажений за время одного кадра, обусловленный особенностями работы электронного затвора фотоприемников на базе КМОП-технологии [3–5].

Суть эффекта состоит в том, что накопление строк в таком фотоприемнике происходит не синхронно, а со смещением во времени (бегущий затвор). В результате движущиеся объекты на изображении получают искаженными: вертикальные линии становятся наклонными. Особенно это проявляется при использовании длительных выдержек. Вид геометрических искажений зависит от взаимной ориентации в пространстве направления движения наблюдаемого объекта и направлений горизонтальной и вертикальной развертки КМОП-фотоприемника, а их значение — от скорости движения объекта, а также от формата и тактовой частоты камеры.

Недостатки перечисленных методов заключаются в том, что они требуют достаточной освещенности объекта измерений и предназначены для измерений скорости объектов, движущихся под большим углом к датчику, что затрудняет использование этих методов для контроля скорости приближающегося на встречном курсе объекта. Кроме того, они требуют значительной площади оптического маяка, которая ограничена площадями размещения на КА, либо вообще не позволяют измерять скорость.

Для повышения безопасности операции сближения и стыковки КА авторами разработана система, реализованная на основе описанного эффекта геометрических искажений изображения, формируемого КМОП-фотоприемником [6].

Система включает телекамеру с КМОП-фотоприемником, узкополосный светофильтр, блок управления и обработки сигнала, расположенные на активном КА, а также четыре оптических маяка на пассивном КА в плоскости стыковочного узла, перпендикулярной оси, по которой происходит сближение.

На рис. 1 изображена конструкция предложенной системы.

Телекамера работает в видимом или ближнем ИК спектральном диапазоне, полоса пропускания узкополосного (интерференционного) светофильтра совпадает со спектральным диапазоном излучения оптических маяков.

Оптические маяки располагаются таким образом, чтобы образовывать прямоугольник в поле зрения телекамеры (рис. 2), при этом две стороны этого прямоугольника параллельны строкам чувствительных элементов КМОП-фотоприемника, что является условием проявления эффекта смазывания изображения маяков.

При чрезмерном возрастании скорости сближения за время последовательного накопления сигнала в КМОП-фотоприемнике изображение нижней пары маяков оказывается смазанным относительно верхней пары (нижняя пара маяков получается более растянутой по сравнению с верхней парой маяков, и прямоугольник на изображении, формируемом КМОП-фотоприемником, превращается в трапецию).

Изменение геометрии расположения оптических маяков представлено на рис. 3.

В результате отношение оснований трапеции определяет значение и направление скорости сближения КА. При сближении с пассивным КА нижнее основание трапеции будет больше верхнего. Отношение длины нижнего основания трапеции к верхнему будет увеличиваться с возрастанием скорости сближения КА. При зависании вместо трапеции на изображении будет прямоугольник. При удалении пассивного КА в противоположном направлении (например, при расстыковке) верхнее основание трапеции будет больше нижнего пропорционально значению скорости. Точность определения скорости определяется разрешением КМОП-фотоприемника.

В качестве оптических маяков могут быть использованы полупроводниковые светоизлучающие диоды или полупроводниковые инжекционные лазеры. Последний вариант более предпочтителен в условиях сильных световых помех, так как ширина спектра излучения лазера более узкая, что облегчает использование спектральной селекции. Для повышения надежности в составе каждого маяка может быть комплект из нескольких светоизлучающих диодов или лазеров.

Предложенная система позволяет определять превышение скорости при сближении кооперируемых КА по смазу изображения оптических маяков пассивного КА, формируемого КМОП-фотоприемником телекамеры на активном КА. Так как маяки сами являются источником излучения, то для работы системы не требуется внешняя засветка. Использование узкополосного светофильтра обеспечивает устойчивость системы к наличию фоновой засветки.

Для проверки работоспособности предложенного принципа контроля скорости сближения было проведено макетирование. Тест-объект (рис. 4) представлял собой прямоугольную сетку и тестовые надписи на белом фоне.

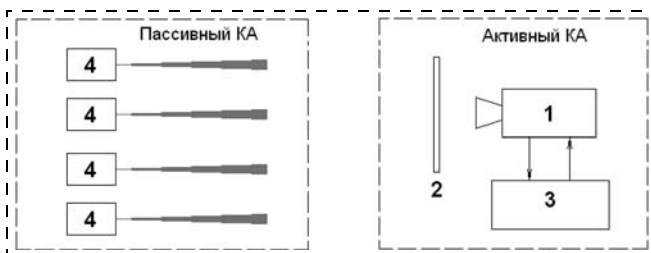


Рис. 1. Система контроля скорости сближения кооперируемых КА: 1 — телекамера на основе КМОП-фотоприемника; 2 — узкополосный светофильтр; 3 — блок управления и обработки сигнала; 4 — оптические маяки

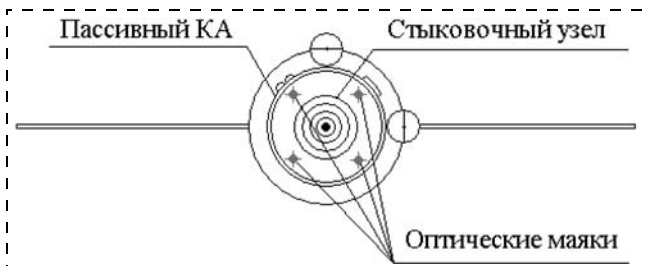


Рис. 2. Расположение оптических маяков на пассивном КА

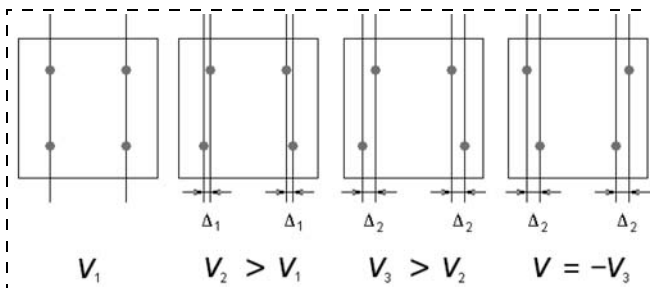


Рис. 3. Изменение расположения оптических маяков на изображении, формируемом КМОП-фотоприемником

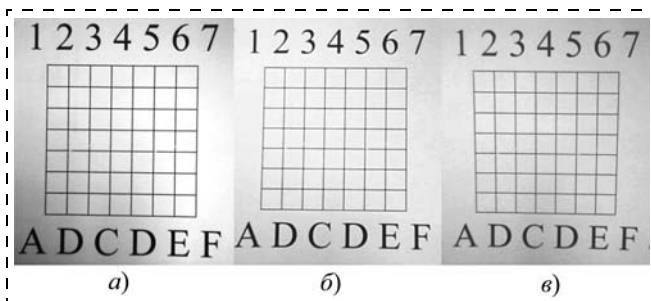


Рис. 4. Результаты макетирования с использованием тест-объекта: а — объект неподвижен; б — объект приближается; в — объект удаляется

Для макетирования использовали фотокамеру на основе КМОП-фотоприемника, поочередно проводили съемку неподвижного (рис. 4, а), приближающегося (рис. 4, б) и удаляющегося (рис. 4, в) тест-объектов.

Из представленных фотоснимков видно, что при сближении и удалении КМОП-фотоприемника с тест-объектом возникают заметные геометрические искажения изображения.

Следующей задачей является интерпретация возникающих искажений изображения, позволяющая

определить скорость сближения (удаления). Для количественной оценки превышения скорости необходимо найти зависимость значения возникающего смаза изображения от скорости сближения кооперируемых КА.

В работе [4] описана математическая модель для смаза, возникающего при движении объекта перпендикулярно оптической оси следящей системы. Однако она может только ограниченно использоваться при решении рассматриваемой здесь задачи. Поэтому возникла необходимость разработки специальной математической модели применительно к задаче контроля скорости сближения КА.

Основная особенность новой модели заключается в том, что смаз формируемого изображения происходит в результате изменения видимого углового размера объекта с маяками при отсутствии его движения в плоскости, параллельной КМОП-фотоприемнику.

Дистанция, на которую смещается объект с маяками за время считывания кадра КМОП, может быть рассчитана по формуле

$$\Delta D = \frac{v_{об}}{f_{ps}},$$

где  $v_{об}$  — скорость сближения с объектом;  $f_{ps}$  — число кадров в секунду.

Изменение видимого углового размера объекта:

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{d_{об}}{D_0}\right);$$

$$\alpha_2 = \arctg\left(\frac{d_{об}}{D_0 - \Delta D}\right),$$

где  $d_{об}$  — линейный размер объекта;  $D_0$  — начальная дистанция до объекта.

Угловая скорость объекта в поле зрения системы за время считывания кадра:

$$\rho_{об} = \Delta\alpha f_{ps}.$$

Если светодиодные маяки расположены на углах квадрата, центр которого находится на пересечении осей  $x$  и  $y$  системы координат КМОП-фотоприемника, то скорость перемещения изображения отдельного маяка по этим осям будет равна

$$\rho_{об}^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2;$$

$$\rho_x = \rho_y = \sqrt{\frac{\rho_{об}^2}{2}}.$$

Плоский угол поля зрения отдельного пикселя равен

$$\beta = \frac{\theta\pi}{n \cdot 180},$$

где  $\theta$  — плоский угол поля зрения оптической системы;  $n$  — число пикселей в строке КМОП-фотоприемника.

Линейная скорость перемещения изображения отдельного маяка

$$v_x = v_y = \frac{\rho_{x,y} m}{\beta},$$

где  $m$  — линейный размер отдельного пикселя.

Скорость считывания кадра КМОП-фотоприемника

$$W_k = N m f_{ps},$$

где  $N$  — число пикселей КМОП-фотоприемника.

Угловые размеры смаза изображения по осям  $x$  и  $y$  соответственно равны

$$\Omega_{cx} = \frac{d_{об}\rho_x}{W_k}; \quad \Omega_{cy} = \frac{d_{об}\rho_y}{W_k}.$$

Размеры смаза в пикселях по осям  $x$  и  $y$  соответственно равны

$$M_{cx} = \frac{\Omega_{cx}}{\beta}; \quad M_{cy} = \frac{\Omega_{cy}}{\beta}.$$

Линейный размер смаза изображения по оси  $y$  при движении маяка вверх равен

$$L_{cy1} = \frac{d_{об}v_y}{W_k + v_y},$$

а при движении маяка вниз

$$L_{cy2} = \frac{d_{об}v_y}{W_k - v_y}.$$

Результирующее значение смаза изображения в пикселях

$$M_p = \sqrt{M_{cx}^2 + M_{cy}^2}.$$

Данная модель может использоваться для анализа возможностей разработанной системы контроля скорости сближения КА.

В дальнейшем представляет интерес усовершенствование алгоритма определения скорости сближения в части измерения скорости сближения при наличии боковой составляющей.

#### Список литературы

1. Макарецкий Е., Овчинников А., Нгуен Л. Х. Телевизионные измерительные системы контроля скоростного режима дорожного движения // Компоненты и технологии. 2007. № 4. С. 34—37.
2. Осипов С. П., Попов М. Ю., Федяев Р. В., Косач А. А. Способ определения параметров торможения лифтов и подъемников на основе анализа потока фотоизображений. URL: <http://agps-2006.narod.ru/ttb/2011-4/12-04-11.ttb.pdf> (дата обращения 30.09.12).
3. Рычажников А. Е. Методы измерения скоростей движущихся объектов с помощью цифровых видеосистем на основе КМОП-технологии // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символической информации. Матер. VIII Межд. конф. Ч. 2. Курск, 2008. С. 86—87.
4. Пилипко Н. Е., Рычажников А. Е. Особенности работы КМОП-фотоприемника в режиме бегущего электронного затвора // Известия Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ). 2008. № 1. С. 40—54.
5. Формирователь изображения. Патент РФ № 2389153 / ООО "НПК "ЕС-Экспертс" / В. В. Багров, А. Е. Рычажников. Заявка № 2008143871/09 от 05.11.2008.
6. Система контроля скорости космических аппаратов при сближении. Заявка на изобретение № 2013138949. Приоритет от 20.08.2013 / Е. И. Старовойтов, Д. В. Савчук, И. В. Старовойтов.

## Численно-аналитический метод построения области достижимости движения судна

*Предлагается метод построения области достижимости движения судна, основанный на сочетании теоретических методов построения множеств достижимости динамических систем и экспериментальных данных о маневренных характеристиках судна. Выполняется моделирование и даются рекомендации для практического применения. Выполненные исследования способствуют совершенствованию методов управления судном и повышению безопасности судовождения.*

**Ключевые слова:** модель движения судна, множество достижимости, управление судном

A. S. Zhuk

## Construction of Reachable Sets of Ship's Movement

*The article has proposed a method of constructing a reachable set of the ship's movement, based on a combination of theoretical methods for constructing reachable sets of dynamical systems and experimental data for the maneuvering characteristics of the vessel. Computer modeling was carried out, recommendations for practical use were given. Performed researches contribute to the improvement of both ship's steering techniques and safe navigation.*

**Keywords:** ship movement model, reachable set, ship handling

Знание множеств достижимости движения судна позволяет решать многие задачи управления судном, в частности, задачи оптимального управления. Вместе с тем, методы оптимального управления дают возможность в ряде случаев исследовать и построить множества достижимости в результате решения серии задач оптимального управления [1–4].

При непосредственном использовании уравнений динамики судна возникают трудности при определении неинерционных сил и моментов, в особенности гидродинамических. Поэтому такой подход может дать неадекватные результаты. Предлагается для описания движения судна в этом случае использовать подход, сочетающий в себе апробированные теоретические модели и экспериментальные маневренные характеристики судна.

**Математическая модель движения судна.** Рассматривается задача плоского движения судна, обладающего тремя степенями свободы. В качестве фазовых координат выбираются координаты судна в неподвижной декартовой, ориентированной по меридиану, системе координат  $XУ$ , модуль скорости судна  $V$ , курс судна  $K$  и угол дрейфа на повороте  $\alpha$ .

Управление судном осуществляется только путем изменения угла перекадки руля. Двигатель в режиме полного морского хода, обороты — максимальные.

Для исследования управляемости судов часто используется известная модель А. М. Басина [5] второго порядка, которая уточняется введением нелинейного элемента согласно работе [6] и имеет вид

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2r' \frac{d\omega}{dt} + q'\omega + f(\omega) = s'_{31} \frac{d\beta}{dt} + s'_{\omega}\beta, \quad (1)$$

где  $\omega$  — угловая скорость судна;  $2r' = r'_{31} + q'_{21}$ ;  $q' = r'_{31}q'_{21} - r'_{21}q'_{31}$ ;  $s'_{\omega} = q'_{31}s'_{21} - q'_{21}s'_{31}$ ;  $q'_{21}$ ,  $r'_{21}$ ,  $s'_{21}$ ,  $q'_{31}$ ,  $r'_{31}$ ,  $s'_{31}$  — гидродинамические коэффициенты

корпуса судна и руля;  $f(\omega)$  — нелинейная функция, определяемая непосредственно по диаграмме управляемости судна — по его статической характеристике;  $\beta$  — угол перекадки руля.

Нелинейный член в уравнении (1) имеет вид

$$f(\omega) = d'_c|\omega|\omega + c\omega^3, \quad (2)$$

где  $d'_c$ ,  $c$  — постоянные коэффициенты.

С учетом (2) уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2r' \frac{d\omega}{dt} + q'\omega + d'_c|\omega|\omega + c\omega^3 = s'_{31} \frac{d\beta}{dt} + s'_{\omega}\beta. \quad (3)$$

Принимая за выходную функцию угол  $\Delta K$  отклонения судна от начального курса, получаем

$$\frac{d^3(\Delta K)}{dt^3} + 2r' \frac{d^2(\Delta K)}{dt^2} + q' \frac{d(\Delta K)}{dt} + d'_c \left| \frac{d(\Delta K)}{dt} \right| \frac{d(\Delta K)}{dt} + c \left( \frac{d(\Delta K)}{dt} \right)^3 = s'_{31} \frac{d\beta}{dt} + s'_{\omega}\beta. \quad (4)$$

При маневрировании скорость судна уменьшается из-за увеличения сил сопротивления водной среды, а также возникающей силы сопротивления переложенного руля. Падение скорости зависит от активности маневра, т. е. от степени перекадки руля и времени маневра. Для целей моделирования пока эту зависимость можно принять линейной:

$$V = V_0 k_v \frac{\beta}{\beta_{\max}} t, \quad (5)$$

где  $V$  — скорость судна;  $V_0$  — начальное значение скорости судна;  $k_v$  — коэффициент, который пока можно принять постоянным;  $\beta_{\max}$  — предельный угол перекадки руля.

Дрейф судна монотонно изменяется с момента начала циркуляции и плавно переходит к установившемуся значению. Под углом дрейфа на циркуляции подразумевается угол дрейфа центра тяжести судна. Значение угла дрейфа на установившейся

циркуляции можно определить приближенно по формуле Мунка [7]

$$\bar{\alpha} \approx k_{\alpha} \frac{L}{R}, \quad (6)$$

где  $\bar{\alpha}$  — угол дрейфа на установившейся циркуляции;  $k_{\alpha}$  — постоянный коэффициент;  $L$  — длина судна;  $R$  — радиус установившейся циркуляции.

У судов водоизмещением свыше 100 000 тонн угол дрейфа на установившейся циркуляции с максимальным углом перекадки руля лежит в интервале 20...30°.

Увеличение массы судна приводит к увеличению эволюционного периода циркуляции. У судов водоизмещением свыше 150 000 т эволюционный период заканчивается после поворота судна более чем на 270°, другими словами, параметры циркуляции, включая угол дрейфа, принимают установившиеся значения после поворота более чем на 270°.

Для целей моделирования изменение угла дрейфа судна при перекадке руля на борт пока можно принять линейным

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{T_{270}} t = k_{\alpha} \frac{L}{RT_{270}} t, \quad (7)$$

где  $T_{270}$  — время от момента начала маневра до момента поворота судна на 270°.

Уравнения кинематики плоского движения центра тяжести судна можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = V(t) \cos(K(t) + \alpha(t)); \quad (8)$$

$$\frac{dY}{dt} = V(t) \sin(K(t) + \alpha(t)), \quad (9)$$

где  $X, Y$  — координаты центра тяжести судна в неподвижной декартовой системе координат, оси которой ориентированы по меридиану и параллели соответственно.

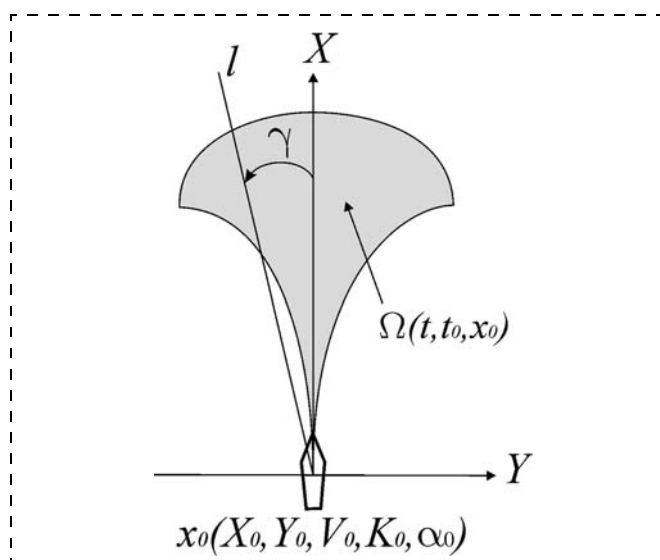


Рис. 1. Множество достижимости движения судна  $\Omega(t, t_0, x_0)$ ,  $x_0(X_0, Y_0, V_0, K_0, \alpha_0)$  — начальный фазовый вектор состояния судна

Для судна как управляемой системы необходимо задать начальные условия в начальный момент  $t = 0$ :  $X(0) = 0; Y(0) = 0; V(0) = V_0; K(0) = 0; \alpha(0) = 0.$  (10)

Угол перекадки руля  $\beta(t)$  является управляющей функцией, на которую наложены ограничения при всех  $t \geq 0$ :

$$|\beta(t)| \leq \beta_{\max}, \quad (11)$$

где  $\beta_{\max}$  — максимальный угол перекадки руля.

Таким образом, движение судна как управляемой системы определяется системой пяти уравнений (4), (5), (7)–(9) и начальными условиями (10). Система содержит одну управляющую функцию, удовлетворяющую ограничениям (11).

**Методика построения области достижимости движения судна.** Решаются следующие задачи:

1. Определение области  $\Omega$  точек плоскости  $XU$ , в которые может быть приведена траектория судна при ограничениях (11) (рис. 1).

2. Задача приведения судна в заданную точку  $(X^*, Y^*) \in \Omega$  за кратчайшее время при тех же ограничениях.

Решение первой задачи заключается в решении серии задач оптимального управления с функционалами вида

$$J_{\gamma} = X(T) \cos \gamma + Y(T) \sin \gamma \rightarrow \max, \quad (12)$$

где  $T$  — момент окончания процесса;  $\gamma$  — угол между направлением луча  $l$ , выходящего из начала координат, и осью  $X$  (рис. 1).

Функционал (12) представляет собой расстояние в плоскости  $XU$  в направлении луча  $l$ . Придавая углу  $\gamma$  ряд значений и решая задачи оптимального управления с функционалом (12), можно получить параметрическое представление границы области  $\Omega$  в следующем виде:

$$X = J_{\gamma} \cos \gamma; Y = J_{\gamma} \sin \gamma, \quad (13)$$

здесь  $\gamma$  — параметр представления.

Задача о наискорейшем приведении судна в заданную точку области  $\Omega$  (задача на оптимальное быстроедействие) представляет собой задачу оптимального управления с граничными условиями

$$X(T) = X^*; Y(T) = Y^* \quad (14)$$

и минимизируемым функционалом

$$J = T \rightarrow \min. \quad (15)$$

Обе задачи можно решить численными методами в среде многочисленных пакетов компьютерного моделирования динамических систем.

Для первой задачи, очевидно, судно движется по граничным траекториям области  $\Omega$  при управляющих функциях, лежащих на границе множества допустимых управлений, т. е.  $\beta(t) = \pm \beta_{\max}$ . Таким образом, граничные траектории снимаются непосредственно с диаграммы циркуляции. При  $\gamma = 0$ , очевидно, функционал (12) достигает максимума при управлении  $\beta(t) = 0$ . Таким образом, остается определить промежуточные траектории области  $\Omega$  и соответствующие им оптимальные управления.

**Компьютерная апробация.** Решение этой задачи выполнялось в среде программного комплекса

"МВТУ". Для моделирования был взят танкер типа Suezmax в полном грузу с характеристиками, представленными ниже.

**Основные характеристики танкера типа Suezmax в полном грузу**

Водоизмещение, т	172646
Дедвейт, т	150296
Наибольшая длина, м	274,2
Длина между перпендикулярами, м	263,0
Наибольшая ширина, м	48,041
Осадка, м	16,022
Расчетная скорость, узлы	15,7
Максимальный угол перекадки руля, °	35
Время перекадки руля с борта на борт (при работе двух рулевых приводов), с	12

Для целей моделирования на основе данных о маневренных характеристиках судна были приняты следующие значения коэффициентов в уравнениях (5), (7):  $k_v = -0,0499$ ,  $k_\alpha = 0,14$  — для правой циркуляции;  $k_v = -0,0545$ ,  $k_\alpha = 0,14$  — для левой циркуляции.

Режим оптимизации позволяет реализовать автоматизированный поиск варьируемых параметров управляющего воздействия, при которых переход-

ный процесс удовлетворяет некоторым условиям (локальным критериям). В качестве такого критерия был взят функционал (12).

Управляющая функция задана как кусочно-линейное воздействие в виде суперпозиции линейных воздействий — массива временных отметок  $t$  и массива соответствующих значений выходного сигнала — угла перекадки руля  $\beta$ :

$$t = [0 \ 6 \ F \ F + 6 \ 142]; \beta = [0 \ A \ A \ B \ B]. \quad (16)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  руль находится в положении прямо. Отметки времени, отделяющие шестисекундные интервалы, соответствуют минимальному времени перекадки руля на борт при работе двух рулевых приводов для судна данного типа. Процесс завершается в момент  $t = 142$  с, что соответствует повороту судна на  $270^\circ$  на правой циркуляции с максимальным углом перекадки руля.

Значения временной отметки  $F$  и положений руля  $A, B$  принимаются в качестве варьируемых параметров оптимизации управляющего воздействия.

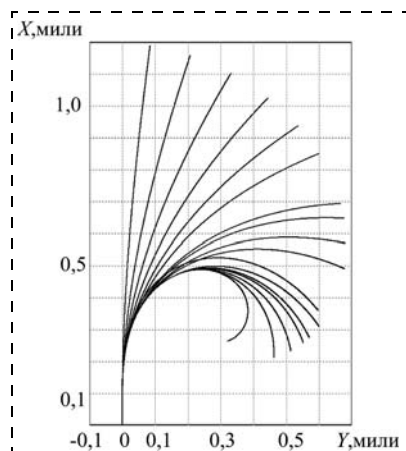


Рис. 2. Совокупность траекторий движения судна при  $\gamma > 0$

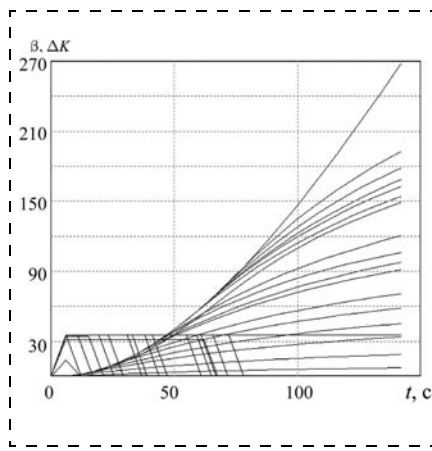


Рис. 3. Совокупность оптимальных управлений  $\beta(t)$  и соответствующих изменений курса  $\Delta K(t)$  при  $\gamma > 0$

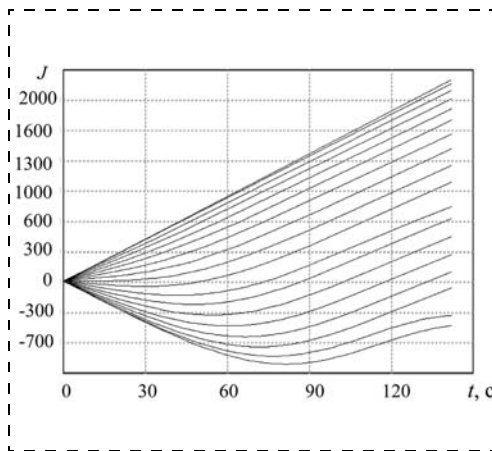


Рис. 4. Совокупность функционалов при  $\gamma > 0$

Таблица 1

Результаты решения серии задач оптимального управления для  $\gamma > 0$

№	$\theta, ^\circ$	$A, ^\circ$	$B, ^\circ$	$F, \text{с}$	$J, \text{м}$
1	10	14	0	6	2199,50
2	20	35	0	6	2145,91
3	30	35	-0,00071374	10,8337	2074,35
4	40	34,081	-0,0265494	15,1525	1983,35
5	50	35	-0,0905241	19,3109	1874,31
6	60	35	0,040996	23,3146	1747,26
7	70	35	-0,123784	30,8618	1597,08
8	80	35	0,00686664	32,9678	1441,08
9	90	35	-1,26727	38,1013	1257,19
10	100	35	0,127542	41,1979	1078,41
11	110	31,3273	-1,20513	61,8222	811,137
12	120	35	-0,0459375	54,9664	679,344
13	130	35	-0,436607	59,0712	481,676
14	140	35	0,150998	60,8712	290,821
15	150	35	-0,0846881	65,6668	102,995
16	160	35	0,0926497	72,1596	-75,1596
17	170	35	35	6	-375,979
18	180	35	35	6	-486,647

Таблица 2

Результаты решения серии задач оптимального управления для  $\gamma < 0$

№	$\theta, ^\circ$	$A, ^\circ$	$B, ^\circ$	$F, \text{с}$	$J, \text{м}$
1	-10	-7	0	6	2075,41
2	-20	-35	0	6	2024,23
3	-30	-35	-0,0521686	9,23935	1955,5
4	-40	-35	-0,368964	10,3499	1856,17
5	-50	-34,8266	-0,327661	17,5549	1764,93
6	-60	-35	-0,0264375	22,8027	1646,44
7	-70	-35	2,23429	29,3412	1490,89
8	-80	-35	-0,000734018	30,9495	1357,34
9	-90	-35	-0,075499	33,4356	1190,52
10	-100	-35	0,684137	39,4666	1012,63
11	-110	-35	16,236	55,5349	757,093
12	-120	-35	3,40322	50,4038	631,427
13	-130	-35	0,000185971	51,3657	459,549
14	-140	-35	0,333753	58,706	272,83
15	-150	-35	-0,0702111	61,4833	98,9127
16	-160	-35	-32,345	7,03578	-240,78
17	-170	-35	-35	6	-358,258
18	-180	-35	-35	6	-460,576

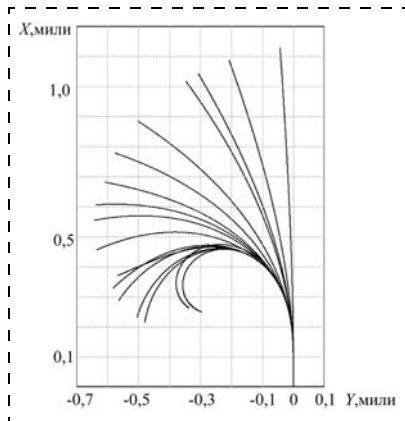


Рис. 5. Совокупность траекторий движения судна при  $\gamma < 0$

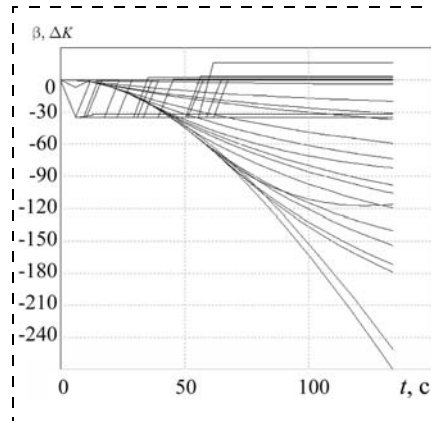


Рис. 6. Совокупность оптимальных управлений  $\beta(t)$  и соответствующих изменений курса  $\Delta K(t)$  при  $\gamma < 0$

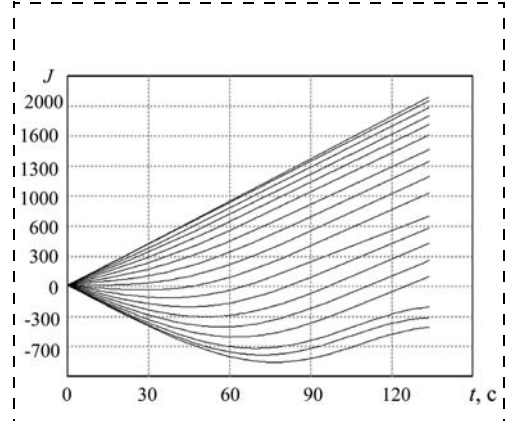


Рис. 7. Совокупность функционалов при  $\gamma < 0$

Для построения области достижимости  $\Omega$  была решена серия задач оптимального управления с функционалами (12) при углах  $\gamma = \pm 10, \pm 20, \pm 30, \dots, \pm 180^\circ$  и параметрами оптимизации  $A, B, F$ . Результаты оптимизации и моделирования представлены в табл. 1, 2 и на рис. 2—7. Совокупность полученных траекторий (см. рис. 2, 5) определяет область достижимости движения судна  $\Omega$ .

Знание множеств достижимости движения судна, в свою очередь, позволяет решать многие задачи управления судном, в частности, задачи определения закона управления по заданному движению судна. Кроме того, знание множеств достижимости играет важную роль для планирования и прогнозирования движения судна, а также для оценивания возможностей управляющего комплекса и при оценке маневренных качеств и управляемости судна. Предлагаемый метод построения множеств достижимости движения судна способствует эффективному решению указанных задач.

В заключение по результатам выполненных исследований можно сделать вывод, что предлагаемый метод построения множеств достижимости движения

судна является эффективным, достаточно простым по сравнению с исключительно теоретическими моделями на основе уравнений динамики, обеспечивает хорошую сходимость с реальными маневренными характеристиками судна и динамическими возможностями системы управления судном.

#### Список литературы

1. Черноушко Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
2. Steven M. LaValle. Planning Algorithms. Part IV. Planning Under Differential Constraints. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
3. Овсевич А. И. Области достижимости управляемых систем, их свойства, аппроксимации и применения // Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1996.
4. Воронов Е. М., Карпенко А. П., Козлова О. Г., Федин В. А. Численные методы построения области достижимости динамической системы // Электронное научно-техническое издание: наука и образование. 2010. № 1. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/135-944.html>
5. Басин А. М. Ходкость и управляемость судов. М.: Транспорт, 1977.
6. Глушков С. В. Методы повышения качества управления судном на основе использования нейросетевых технологий // Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Владивосток, 2008.
7. Вагушенко Л. Л., Цымбал Н. Н. Системы автоматического управления движением судна. Одесса: Латстар, 2002.

### Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Дизайнер Т. Н. Погорелова.

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор Т. В. Пчелкина.

Сдано в набор 28.11.2013. Подписано в печать 16.01.2014. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН214. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".

119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.