

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 8 (137)

август

2012

**Редакционный совет:**

ВАСИЛЬЕВ С. Н.  
КАЛЯЕВ И. А.  
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г.  
КУЗНЕЦОВ Н. А.  
ЛЕОНОВ Г. А.  
МАКАРОВ И. М.  
МАТВЕЕНКО А. М.  
МИКРИН Е. А.  
ПЕШЕХОНОВ В. Г.  
РЕЗЧИКОВ А. Ф.  
СЕБРЯКОВ Г. Г.  
СИГОВ А. С.  
СИРОТКИН О. С.  
СОЙФЕР В. А.  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М.  
ФЕДОРОВ И. Б.  
ЧЕНЦОВ А. Г.  
ШЕРБАТЮК А. Ф.  
ЮСУПОВ Р. М.

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б.

**Заместители гл. редактора:**

ПОДУРАЕВ Ю. В.  
ПУТОВ В. В.  
ЮЩЕНКО А. С.

**Ответственный секретарь:**

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционная коллегия:**

АЛЕКСАНДРОВ В. В.  
АНТОНОВ Б. И.  
АРШАНСКИЙ М. М.  
БУКОВ В. Н.  
ВИТТИХ В. А.  
ВОСТРИКОВ А. С.  
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В.  
ГРАДЕЦКИЙ В. Г.  
ИВЧЕНКО В. Д.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г.  
КОЛОСОВ О. С.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф.  
КУЗЬМИН Н. Н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.  
ЛОХИН В. М.  
НОРЕНКОВ И. П.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е.  
ПРОХОРОВ Н. Л.  
РАПОПОРТ Э. Я.  
СЕРГЕЕВ С. Ф.  
ТИМОФЕЕВ А. В.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф.  
ФРАДКОВ А. Л.  
ФУРСОВ В. А.  
ЮРЕВИЧ Е. И.

**Редакция:**

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕХАТРОНИКИ

**Осипов Ю. М., Щербинин С. В.** О мехатронике как научной основе создания высоко-технологичной продукции . . . . . 2

### МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Ефанов В. Н., Муфаззалов Д. Ф.** Стабилизация нелинейной системы управления в заданной области пространства состояний . . . . . 7  
**Колосов О. С., Кошоева Б. Б.** Методика реализации алгоритмов численного дифференцирования в законе регулирования с увеличенным шагом дискретизации . . . . . 13  
**Быстров Л. Г., Сафронов В. В.** Новые компьютерные алгоритмы вычисления матричной экспоненты в приложении к исследованию линейных динамических систем автоматического управления . . . . . 18

### МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ И КОНТРОЛЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Мелентьев В. С., Батищев В. И., Смолина А. М.** Метод измерения параметров емкостных датчиков положения и перемещения . . . . . 26  
**Лобусов Е. С.** Использование средств инерциальной навигации для определения пространственного углового положения цилиндрических тел . . . . . 31  
**Якунин А. Н.** Использование оператора кватерниона для определения относительной угловой ориентации квазистационарного объекта . . . . . 36

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

**Певзнер Л. Д., Бабаков С. Е.** Математическая модель динамики карьерного экскаватора как объекта управления . . . . . 40  
**Данилушкин И. А., Гусева М. А.** Численно-аналитическое моделирование систем с распределенными параметрами . . . . . 48

### Журнал в журнале

#### "УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

**Инсаров В. В., Ким В. Я., Тихонова С. В.** Методы оценки качества статических изображений, полученных при дистанционном зондировании сложноструктурированных наземных сцен . . . . . 54  
**Девятисильный А. С., Числов К. А.** Модель векторной гравиметрии на базе модели интеграции двухкомпонентной инерциальной, спутниковой и астронавигационной систем . . . . . 61  
**Филаретов В. Ф., Юхимец Д. А., Мурсалимов Э. Ш.** Метод комплексирования данных с навигационных датчиков подводного аппарата с использованием нелинейного фильтра Калмана . . . . . 64  
**Contents** . . . . . 71

*Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

УДК 621.865.8

**Ю. М. Осипов**, д-р техн. наук, д-р экон. наук,  
проф., зав. кафедрой,  
um1943@yandex.ru,

**С. В. Щербинин**, канд. техн. наук, доц.,  
sherb@mail.ru,

Отделение кафедры ЮНЕСКО  
"Новые материалы и технологии",  
Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники

## О мехатронике как научной основе создания высокотехнологичной продукции\*

*Рассматриваются объекты мехатроники — мультикоординатные системы движения с электроприводом прямого действия, основанные на синергетическом объединении в соответствии с критерием оптимизации "цена—качество" механических, электротехнических, электронных и компьютерных компонентов, обеспечивающие проектирование и производство конкурентоспособной высокотехнологичной продукции. Предлагается классификация мультикоординатных систем движения с электроприводом прямого действия.*

**Ключевые слова:** критерий оптимизации "цена—качество", мультикоординатные системы движения, электропривод прямого действия, кинематическая мультикоординатная комбинаторика, интеллектуальное схемотехническое проектирование и интеллектуальное управление движением

### Введение

В книге "Мехатроника" японских авторов Т. Исии, М. Накадзима, Х. Иноуэ, М. Хиросэ и И. Симояма утверждается [1]:

"...современные представления о мехатронике еще далеки от идеальных. Можно ожидать, что уже четвертое и пятое поколения специалистов начнут всесторонне вскрывать те резервы, которые скрыты в недрах мехатроники...";

"...наряду с глубоким удовлетворением от того, что мехатроника в своем развитии испытывает скачок и быстро набирает силу, необходимо задуматься над современным состоянием мехатроники и чего следует ожидать, когда, возможно, после первого десятилетия XXI века произойдут и второй, и третий скачки...".

\* Статья подготовлена при выполнении государственного контракта № 16.523.11.3009, финансируемого Министерством образования и науки РФ.

Слова японских авторов, сказанные более 20 лет назад, являются пророческими. Развитие технологий мехатроники как непрерывный процесс создания высокотехнологичной продукции в РФ объективно продолжается и в новых прорывных направлениях науки и техники, и в "старых" областях, в которых требуются новое качество исследований и производство новых видов изделий.

В 2010 году Е. Д. Теряев, Н. Б. Филимонов в статье "Наномехатроника: состояние, проблемы, перспективы" показали, что мехатроника в своем развитии испытывает скачок — уже в области нанотехнологий [2]. Кроме того, в "старых" областях вскрываются "...резервы, которые скрыты в недрах мехатроники...", о чем свидетельствуют многочисленные публикации в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", в трудах международных и всесоюзных научно-технических конференций "Мехатроника, автоматизация, управление", в монографиях.

В историческом развитии структур производственных машин от "однополярной" механики к современной "многокоординатной" мехатронике можно выделить ряд стадий. Первоначально три базисных направления мехатроники (точная механика, электроника и информатика) интегрировали попарно, образуя три гибридных направления: объединение механических узлов с электротехническими изделиями и электронными блоками; аппаратно-программное объединение электронных и компьютерных устройств; системы автоматизированного проектирования (САПР) [3].

На стыке указанных гибридных направлений возникла область мехатроники — мультикоординатные системы движения (МСД) с электроприводом прямого действия (ЭППД). Коллектив исследователей из Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники проводит научно-исследовательские работы и осуществляет производство конкурентоспособной отечественной высокотехнологичной продукции по научной тематике "Мультикоординатные системы движения на основе электроприводов прямого действия с интеллектуальным управлением", обеспечивающие формирование и обработку сложных поверхностей, имеющих широкое распространение в станкостроении и робототехнике, в медицинской технике, в микро- и наноэлектронике, в технологиях и оборудовании двойного назначения (например, в навигации, для создания стабилизированных в горизонте платформ), в приборах для научных исследований и т. п. [4—11].

Созданы линейные и дуговые модули движения и функциональные системы на их основе: манипу-

лятор лазерного технологического комплекса для обработки сложных криволинейных поверхностей, автономная электростанция с автоматическим слежением фотоэлектрических панелей за положением Солнца. В настоящее время выполняется проект "Высокоточная система позиционирования рабочего стола рентгеновского микротомографа" по техническому заданию к государственному контракту № 16.523.11.3009 "Разработка и организация опытного производства рентгеновского микротомографа для исследования органических и неорганических объектов", финансируемому Министерством образования и науки РФ. Выполнение проекта позволит изготавливать на предприятиях г. Томска конкурентоспособное высокотехнологичное отечественное оборудование, что снизит зависимость российских производителей от импортной техники.

### **Синергетическое объединение компонентов мехатроники на основе критерия оптимизации "цена—качество"**

В настоящее время становятся актуальными и существенно оптимизирующими разработки в мехатронике, сопровождающиеся оценкой качества получаемых технико-эксплуатационно-экономических характеристик (ТЭЭХ) нового товара, т. е. соотношения необходимой цены потребления и получаемого качества [9].

Нетрадиционные компоновки МСД, обеспечивающие высокую технологичность и конкурентоспособность продукции, основаны на синергетическом объединении в соответствии с критерием оптимизации "цена—качество", механических, электротехнических, электронных и компьютерных компонентов. Критерий оптимизации "цена—качество" является характерным показателем наилучшего решения задачи — максимального удовлетворения поставленным требованиям технического задания. Решение задачи создания конкурентоспособной высокотехнологичной продукции сводится к задаче двухкритериальной оптимизации, критериями в которой являются "цена" и "качество". "Цена—качество" — главный критерий конкурентности высокотехнологичной продукции, который позволяет учесть и экономические требования (цена), и производственно-технические требования (качество продукции).

ТЭЭХ описываются функцией  $S(Q)$  — зависимостью качества МСД и его составляющих от стоимости потребления, являющейся суммой затрат на изготовление и эксплуатацию. Функция  $S(Q)$  может быть описана большим числом факторов, из которых определяющими являются схемоконструкторское исполнение МСД и его элементов, виды опор, электронный блок управления, программное обеспечение и т. п. В статье [9] приведены основы теории оценки качества получаемых ТЭЭХ, на примере дугового модуля движения с использованием

анализа видов опор. Разработана модель "затраты — эксплуатационные показатели", включающая в себя затраты на изготовление и эксплуатацию и эксплуатационные характеристики второго уровня: число степеней подвижности; грузоподъемность для четырех видов опор МСД.

### **Классификация мехатронных устройств и систем**

Область мехатронных устройств и систем чрезвычайно широка и специализирована, например, по типам приводных устройств и их компонентам. Для повышения качества исследований и производства высокотехнологичных и конкурентоспособных изделий в работе [11] предложена классификация, представленная несколькими специализированными уровнями, соответствующими более конкретным и узким направлениям для исследований, разработок и применений мехатронных устройств и систем. Первый уровень классификации представляет широко известные компоненты мехатроники, второй — приводные устройства, третий — элементы МСД. Данная классификация позволяет разработчикам и исследователям мехатронных устройств и систем закрепить и развивать свою специализацию для повышения качества исследований и производства высокотехнологичных и конкурентоспособных изделий.

Третий уровень классификации включает компоненты:

- механики (конструктивные элементы: направляющие, опоры движения и т. п.);
- электротехники (электрические обмотки, магнитопроводы из электротехнической стали и с постоянными магнитами, магнитную ленту и обмотки считывания датчика обратной связи, сенсорные устройства и т. п.);
- электроники (аппаратная часть планировщика мультикоординатных движений (ПМД), электронные силовой блок и блок управления и т. п.);
- компьютерного обеспечения (алгоритмическо-программная часть ПМД, выполненная с применением методов отображения рабочего пространства на пространство конфигураций, подсистемы САПР *SolidWorks* и т. п.).

Третий уровень постоянно изменяется по составу и качеству элементов, что обусловлено появлением новых конструкционных и электротехнических материалов, материалов электроники, совершенствованием компьютерных технологий.

Наряду с указанной трехуровневой классификацией предлагается классификация МСД по следующим трем признакам:





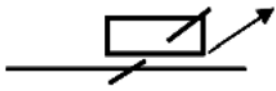



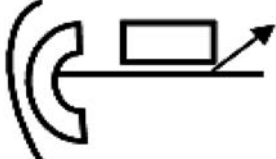
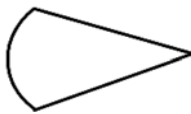




- *кинематическая мультикоординатная комбинаторика;*
- *интеллектуальное схемоконструкторское проектирование;*
- *интеллектуальное управление движением.*

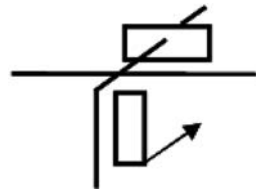
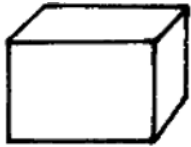




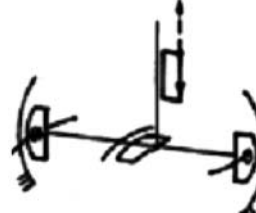

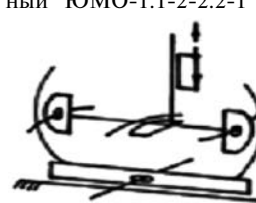

**Классификация МСД по признаку "кинематическая мультикоординатная комбинаторика"** отражает не только число степеней подвижности, но и возможность комбинаций кинематических движений при синергетическом объединении. На основе однокоординатных линейных и дуговых модулей движения возможно построение (компоновка) МСД для любых сложных криволинейных перемещений рабочего органа. Для структур МСД важно учесть их

потребительские свойства, к которым помимо точности и повторяемости движений, быстродействия и грузоподъемности относятся также свойства, зависящие от числа степеней подвижности МСД и его конструктивных особенностей: рабочее пространство и производительность. Рабочее пространство МСД определяется различной комбинацией степеней подвижности рабочего органа в прямоугольной, цилиндрической угловой и сферической системах

**Классификация МСД по признаку "кинематическая мультикоординатная комбинаторика"**

Окончание таблицы

Наименование линейных и дуговых модулей движения	Технические характеристики	
	Число степеней подвижности	Конфигурация рабочего пространства
1. Линейный модуль "ЮМО-1" 	1	
2. Дуговой модуль "ЮМО-2" 	1	
3. Плоскостной двухкоординатный "ЮМО-1.1" 	2	
4. Сферический двухкоординатный "ЮМО-2.2" 	2	
5. Плоскостной двухкоординатный "ЮМО-2.1" 	2	
6. Плоскостной двухкоординатный "ЮМО-1.2" 	2	
7. Объемный двухкоординатный "ЮМО-1-2" 	2	

Наименование линейных и дуговых модулей движения	Технические характеристики	
	Число степеней подвижности	Конфигурация рабочего пространства
8. Объемный линейный трехкоординатный "ЮМО-1-1-1" 	3	
9. Сферический объемный "ЮМО-2-2.1" 	3	
10. Сферический объемный "ЮМО-2-2.2" 	3	
11. Сферический объемный "ЮМО-2-2.2-1" 	4	
12. Сферический объемный "ЮМО-1.1-2-2.2-1" 	6	

координат. В таблице представлена классификация МСД по признаку "кинематическая мультикоординатная комбинаторика".

**Классификация МСД по признаку "интеллектуальное схемоконструкторское проектирование"** характеризует компьютерный компонент, включающий универсальные САПР, например САПР *SolidWorks*, предназначенные для проектирования, решающие только задачу моделирования, т. е. расчета характеристик по уже заданной принципиальной схеме устройства, а также подсистемы для интеллектуального схемоконструкторского проектирования (ИСП). Выбор последних осуществляется на основе эвристического подхода с использованием опыта разработчика, многократного моделирования и оптимизации различных вариантов и т. д. [4, 8]. Наличие в универсальных САПР интерфейса прикладного программирования — набора стандартных программных прерываний, методов и форматов данных, используемых прикладной программой для запроса и получения от головной программы необходимых функций, который ориентирован на создание пользовательских программных модулей на языках высокого уровня, интегрированных с базовым программным продуктом, — позволяет расширять функциональность САПР для ре-

шения узкоспециальных задач применением специализированных подсистем ИСП (см. рисунок).

**Классификация по признаку "интеллектуальное управление движением"** отражает компьютерные подсистемы управления планированием движения МСД, например, осуществляющие интеллектуальное управление движением (ИУД):

геометрическое обеспечение движения рабочего органа;

построение математической модели обрабатываемой поверхности;

выбор и расчет оптимальных траекторий обработки поверхности изделия;

определение траекторий движения рабочего органа (инструмента) и т. п.

Математическая модель обрабатываемой поверхности представляется в виде математической абстракции, дающей представление о геометрических свойствах детали, необходимых для осуществления ИУД. Любую поверхность в декартовой прямоугольной системе координат с базисными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  можно представить следующей векторной функций:

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=1}^3 r_i(u, v)\mathbf{e}_i, \quad u, v \in \Omega,$$

двух скалярных аргументов  $u$  и  $v$ , где  $\Omega$  — область изменения параметров. Такое описание поверхности называют параметрическим.

Область изменения параметров поверхности  $\Omega$  в общем случае представляет собой произвольную связанную двумерную область на плоскости  $u$  и  $v$ , ограниченную двумерными контурами  $c_i(t_i)$ ,  $t_{i\min} \leq t_i \leq t_{i\max}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Параметры поверхности являются координатами некоторой двумерной точки  $M'[u \ v]^T$  на параметрической области  $\Omega$ . Точку  $M'$  можно также представить как криволинейную проекцию точки  $M$  на плоскость  $uv$  параметров.

Координаты произвольной точки поверхности могут быть представлены аналитическими функциями двух параметров. В общем виде аналитическую поверхность можно представить в виде уравнения

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + x(u, v)\mathbf{i}_x + y(u, v)\mathbf{i}_y + z(u, v)\mathbf{i}_z,$$

где  $\mathbf{p}$  — произвольная точка поверхности;  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$  — взаимно ортогональные векторы единичной длины;  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  — координатные функции.

Подсистема ИУД осуществляет решение задач:

- планирования пути, состоящего в поиске функции перехода от одной конфигурации обобщенных координат к другой в пространстве конфигураций;
- геометрического обеспечения движения рабочего органа, заключающегося в доставке его с определенными кинематическими параметрами, с учетом динамических ограничений, в заданную целевую позицию, например, для обеспечения



Схема интеллектуальных компьютерных компонентов конкретного изделия

непрерывного физического контакта с обрабатываемым инструментом, с лучом технологического лазера или с фрезой, при этом учитывается требуемое взаимное положение рабочего органа и обрабатываемой поверхности.

### Выводы

1. В настоящее время объективно продолжается развитие технологий мехатроники как непрерывный процесс создания конкурентоспособной высокотехнологичной продукции. Развитие идет в направлении синергетического объединения компонентов в соответствии с критерием оптимизации "цена—качество". Синергетический подход к процессу интеллектуального схемотехнического проектирования мультикоординатных систем движения позволяет разрабатывать, производить и эксплуатировать изделия с оптимальным соотношением "цена—качество".

2. Элементы электромеханических приводных устройств по составу и качеству находятся всегда в постоянном развитии, обусловленном появлением новых конструктивных и электротехнических материалов и совершенствованием компьютерных технологий.

3. Предложены основы теории создания МСД, включающие классификацию МСД по трем признакам: кинематическая мультикоординатная комбинаторика; интеллектуальное схемотехническое проектирование; интеллектуальное управление движением.

### Список литературы

1. **Мехатроника:** Пер. с яп. / Т. Исии, И. Симояма, Х. Иноуэ и др. М.: Мир, 1988. 318 с.
2. **Теряев Е. Д., Филимонов Н. Б.** Наномехатроника: состояние, проблемы, перспективы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 1. С. 2—14.
3. **Подураев Ю. В.** Мехатроника: Основы, методы, применение. М.: Машиностроение, 2007. 256 с.
4. **Осипов Ю. М.** Линейный и дуговой электромехатронные модули движения — функциональные элементы мехатронных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. Матер. междунар. науч.-техн. конф. МАУ-2009. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. С. 258—260.
5. **Васенин П. К., Негодяев С. В., Осипов Ю. М., Щербинин С. В.** Управление многокоординатной манипулятор-платформой при обработке поверхностей сложной формы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7. С. 43—47.
6. **Вологдин Б. Я., Осипов Ю. М.** Создание позаказного производства дугowych и линейных электромехатронных модулей движения // Сб. трудов "Инновационные технологии управления. Электромехатроника" / Под ред. проф. Ю. М. Осипова. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2010. Вып. 2. С. 73—87.
7. **Медведев Д. А.** Многокоординатный манипулятор на основе линейных и дугowych электромехатронных модулей движения: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05. Науч. рук. Ю. М. Осипов. Томск: Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2009. 23 с.
8. **Негодяев С. В.** Аппаратно-программный комплекс построения траектории движения многокоординатного манипулятора: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05. Науч. рук. Ю. М. Осипов. Томск: Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2010. 22 с.
9. **Медведев Д. А., Осипов О. Ю., Осипов Ю. М., Щербинин С. В.** Создание лазерных технологических комплексов по критерию цена—качество // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 12. С. 41—43.
10. **Осипов Ю. М.** К вопросу о развитии понятия "мехатроника" // Доклады Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники. 2010. № 1 (21). Ч. 2. С. 193—198.
11. **Осипов О. Ю., Осипов Ю. М., Щербинин С. В.** Мультикоординатные электромехатронные системы движения. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2010. 320 с.



## Третья межотраслевая конференция "АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА — 2012"

г. Москва, 27 ноября 2012 г., ГК "ИЗМАЙЛОВО"



27 ноября 2012 г. в ГК "ИЗМАЙЛОВО" (г. Москва) состоится  
Третья Межотраслевая конференция "АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА—2012",

посвященная демонстрации новейших разработок для автоматизации предприятий энергетики, металлургии, нефтегазовой и цементной промышленности, современных информационных технологий, IT, АСУ ТП, ERP, MES-систем, систем мониторинга и контрольно-измерительной техники

### ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ КОНФЕРЕНЦИИ:

- ◆ Актуальные задачи автоматизации в промышленности
- ◆ IT-инфраструктура современного промышленного предприятия
- ◆ Современные информационные технологии для повышения уровня эффективности, экономичности и промышленной безопасности промышленных предприятий
- ◆ Информационно-управляющие системы промышленной автоматизации (АСУ ТП, АСОДУ, ERP, MES-системы и др.)
- ◆ IT для повышения безопасности и эффективности технологических процессов
- ◆ Практический опыт внедрения информационных систем на предприятиях нефтегазовой отрасли, энергетики и металлургии
- ◆ Современные подходы к построению автоматизированных систем управления технологическими процессами.
- ◆ Технология и технические средства систем производственного контроля и мониторинга
- ◆ Последние достижения в области контрольно-измерительной техники
- ◆ Новейшие типы газоанализаторов, расходомеров, спектрометров, средств мониторинга, контроля и учета, различные типы датчиков
- ◆ Автоматизация измерений и испытаний
- ◆ Средства поддержки проектирования

Сайт конференции: [www.intecheco.ru](http://www.intecheco.ru)

УДК 004.3

**В. Н. Ефанов**, д-р техн. наук, проф.,  
**Д. Ф. Муфаззалов**, ст. преподаватель,  
Arsew@ya.ru,  
Уфимский государственный  
авиационный технический университет

## Стабилизация нелинейной системы управления в заданной области пространства состояний

*Предложен метод стабилизации нелинейной системы управления в заданной области пространства состояний. Метод базируется на использовании концепции сверхустойчивости применительно к линеаризованной интервальной модели исходной нелинейной системы.*

**Ключевые слова:** стабилизация, робастность, сверхустойчивость, сложная система, интервальная матрица

### Введение

При исследовании сложных систем управления приходится сталкиваться с трудностью однозначной формулировки цели и критериев управления, особенно в нестандартных ситуациях, связанных с непредсказуемостью поведения внешней среды, а также с неопределенностью в описании системы. В связи с этим большое внимание уделяется способности системы сохранять свои характеристики в заданных пределах при наличии внешних воздействий с не определенными заранее свойствами. Поскольку высокая размерность подобных систем не позволяет обеспечить желаемое поведение всех переменных, определяющих их текущее состояние [1], то приходится использовать показатели, способные оценить поведение "в целом", без детализации конкретных характеристик типа "вход—выход". К числу таких показателей относится условие стабилизируемости системы [2—4]. В данной статье предлагается метод робастной стабилизации сложных систем управления на основе концепции сверхустойчивости динамических систем [5, 6].

### Постановка задачи

Пусть исследуемая система описывается совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u); \\ y(t) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (1)$$

с векторами  $x \in R^n$ ,  $u \in R^l$ ,  $y \in R^m$  состояния, управления и выходных координат соответственно. Полагаем, что функции  $f(x, u)$  и  $\varphi(x)$  дважды дифференцируемы по своим совокупностям аргументов, причем  $f(0, 0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ , а управлениями служат кусочно-непрерывные при  $t > 0$  функции  $u(t)$ .

В наиболее общем виде условие стабилизируемости можно сформулировать следующим образом [4].

Система является *стабилизуемой*, если для каждого наперед заданного числа  $\eta > 0$  найдутся такое число  $b > 0$  и такой закон управления, чтобы для выходных координат системы  $y_i(t)$  выполнялось условие

$$|y_i(t)| \leq b|y_i(t_0)|\exp[-\eta(t - t_0)], \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

для всех  $t_0$  при  $u(t) = 0$  и  $t \geq t_0$ .

Требуется найти такое управление  $u(t) = Kx(t)$ , где  $K$  — матрица коэффициентов обратной связи, чтобы условие стабилизируемости (2) выполнялось для системы (1) в области  $\Omega$  пространства состояний, заданной в виде многомерного параллелепипеда

$$p_i \leq x_i \leq q_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

### Методика синтеза

Чтобы найти соотношения, при выполнении которых система (1) будет удовлетворять сформулированным требованиям, осуществим линеаризацию ее математической модели в вершинах данного параллелепипеда. В результате получим следующий спектр линеаризованных моделей:

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u(t), \quad y(t) = C_k x(t), \quad k = \overline{1, 2^n}. \quad (4)$$

Потребуем теперь, чтобы корни всех характеристических полиномов  $P_k(s) = \det(sI - A_k)$  линеаризованных систем (4) располагались левее линии, параллельной мнимой оси и проходящей через точку  $s = -\eta$ . Для выполнения этого требования достаточно, чтобы полиномы вида  $P_k(z) = \det(zI - \hat{A}_k)$ , где  $\hat{A}_k = \eta I - A_k$ , были гурвицевыми. Таким образом, для обеспечения стабилизируемости систем (4) достаточно потребовать устойчивости следующих систем:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}_k x(t) + B_k u(t); \\ y(t) &= C_k x(t), \quad k = \overline{1, 2^n}. \end{aligned} \quad (5)$$

С этой целью воспользуемся понятием сверхустойчивости в том виде, как оно было сформулировано в работе [7], а именно: система является *сверхустойчивой*, если для ее матрицы  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  выполняется условие

$$\sigma(A) = \min_i (-a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|) > 0. \quad (6)$$

Непосредственное применение условий (6) к совокупности моделей (5) приводит к так называемой  $(n, p)$ -сложной проблеме, так как число матриц  $\hat{A}_k$  (5) растет по экспоненциальной зависимости от порядка системы. В связи с этим воспользуемся следующим приемом. На основе (5) сформируем интервальные матрицы  $\tilde{A} \in M_{n \times n}(I(R))$ ,  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\tilde{B} \in M_{n \times l}(I(R))$ ,  $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]_{n \times l}$ , где  $M_{n \times n}(I(R))$ ,  $M_{n \times l}(I(R))$  — множества матриц, элементами которых являются вещественные интервалы  $I(R)$ ;  $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}; \bar{a}_{ij}]$ ,  $\tilde{b}_{ij} = [b_{ij}; \bar{b}_{ij}]$  — интервальные элементы этих матриц, нижние и верхние границы которых вычисляются следующим образом. В случае, когда частные производные функции  $f(x, u)$  по аргументам  $x$  и  $u$  — соответственно,  $f'_x(x, u)$ ,  $f'_u(x, u)$  — являются монотонными в области (3) или, что то же самое, производные второго порядка  $-f''_x(x, u)$ ,  $f''_{xu}(x, u)$ ,  $f''_u(x, u)$  — являются знакоопределенными в этой области, тогда

$$\underline{a}_{ij} = \min_k \hat{a}_{ij}^k; \quad \bar{a}_{ij} = \max_k \hat{a}_{ij}^k,$$

$$\text{где } \hat{A}_k = [\hat{a}_{ij}^k]_{n \times n}, \quad k = \overline{1, 2^n}; \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$\underline{b}_{ij} = \min_k \hat{b}_{ih}^k; \quad \bar{b}_{ij} = \max_k \hat{b}_{ih}^k; \quad h = \overline{1, l},$$

$$\text{где } \hat{B}_k = [\hat{b}_{ih}^k]_{n \times l}, \quad h = \overline{1, l}.$$

В противном случае

$$\underline{a}_{ij} = \min_{x \in \Omega} (f_i(x, 0))'_{x_j}; \quad \bar{a}_{ij} = \max_{x \in \Omega} (f_i(x, 0))'_{x_j}, \quad \text{где } i \neq j,$$

$$\underline{a}_{ii} = \min_{x \in \Omega} (f_i(x, 0))'_{x_i} + \eta; \quad \bar{a}_{ii} = \max_{x \in \Omega} (f_i(x, 0))'_{x_i} + \eta;$$

$$\underline{b}_{ih} = \min_{x \in \Omega} (f_i(x, u))'_{u_h} \Big|_{u=0};$$

$$\bar{b}_{ih} = \max_{x \in \Omega} (f_i(x, u))'_{u_h} \Big|_{u=0}; \quad h = \overline{1, l}; \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Введенная матрица позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для совокупности систем (5) существует управление по состоянию  $u(t) = Kx(t)$  такое, что характеристические полиномы замкнутых систем  $\hat{A}_k^3 = \hat{A}_k + B_k K$  являются гурвицевыми в

том случае, если следующее неравенство имеет решение:

$$\sigma(\tilde{A}^3) = \min_i (-\bar{a}_{ii}^3 - \sum_{j \neq i} \max\{|\underline{a}_{ij}^3|; |\bar{a}_{ij}^3|\}) > 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где  $\tilde{A}^3 = \tilde{A} + \tilde{B}K$ .

*Доказательство* этого утверждения базируется на применении условия сверхустойчивости для наихудшей с точки зрения устойчивости матрицы  $A^*$  среди всех матриц, элементы которых ограничены заданными интервалами  $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}; \bar{a}_{ij}]$ :

$$a_{ii}^* = \bar{a}_{ii}; \quad a_{ij}^* = \max\{|\underline{a}_{ij}|; |\bar{a}_{ij}|\}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad i \neq j.$$

Действительно, система является сверхустойчивой, если для ее матрицы  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  выполняется условие (6), непосредственно вытекающее из теоремы Гершгорина, согласно которой каждое из собственных значений матрицы  $A$  лежит по крайней мере в одном из кругов

$$|z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n},$$

комплексной плоскости. Таким образом, для локализации собственного числа  $\mu$  в левой полуплоскости комплексной плоскости требуется, чтобы расстояние  $-a_{kk}$  от мнимой оси до центра круга было больше его радиуса  $\sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ , т. е.

$$-a_{kk} > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|, \quad \text{или} \quad -a_{kk} - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| > 0.$$

Если подобное неравенство будет выполняться для минимальной величины

$$\sigma(A) = \min_i \left( -a_{ii} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \right),$$

то в остальных случаях оно будет выполняться заведомо.

В свою очередь, чтобы аналогичное неравенство выполнялось для интервальной матрицы, достаточно потребовать его выполнения для минимального расстояния от мнимой оси до центра круга  $a_{ii}^* = \bar{a}_{ii}$  и для максимально возможного радиуса  $a_{ij}^* = \max\{|\underline{a}_{ij}|; |\bar{a}_{ij}|\}$ . ■

Следует, однако, заметить, что условие (7), непосредственно вытекающее из теоремы Гершгорина, накладывает достаточно жесткие требования к структуре управляющей части системы, в частности, необходимо, чтобы параметры управляющей части входили в запись всех строк матрицы замкнутой системы. В связи с этим рассмотрим другой вариант условия стабилизируемости, который основывается на теореме Островского о локализации корней характеристического полинома.



**Утверждение 2.** Для совокупности систем (5) существует управление по состоянию  $u(t) = Kx(t)$  такое, что характеристические полиномы замкнутых систем  $\hat{A}_k^3 = \hat{A}_k + B_k K$  являются гурвицевыми в том случае, если следующее неравенство имеет решение:

$$\sigma(\tilde{A}^3) = \min_i \left( -\bar{a}_{ii}^3 - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \max\{|a_{ij}^3|; |\bar{a}_{ij}^3|\} \right)^\alpha \times \right. \\ \left. \times \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \max\{|a_{ji}^3|; |\bar{a}_{ji}^3|\} \right)^{1-\alpha} \right) > 0; \quad (8)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1; i = \overline{1, n}.$$

*Доказательство утверждения 2.* Согласно теореме Островского [8], если для некоторой матрицы  $A$  выполняются соотношения

$$|a_{ii}| > \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \right)^{1-\alpha}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

то  $\det A \neq 0$ . И наоборот, если  $\det A = 0$ , то (9) не выполняется, а это значит

$$|a_{ii}| \leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \right)^{1-\alpha}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Следовательно, поскольку для каждого собственного числа  $\lambda_i$  справедливо равенство  $\det(\lambda_i I_n - A) = 0$ , то для матрицы  $(\lambda_i I_n - A)$  выполняются условия (10), т. е.

$$|\lambda_i - a_{ii}| \leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \right)^{1-\alpha}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теперь можно воспользоваться рассуждениями, приведенными при доказательстве утверждения 1, о том, что для локализации собственного числа  $\lambda_i$  в левой полуплоскости комплексной плоскости требуется, чтобы расстояние  $-a_{ii}$  от мнимой оси до центра круга было больше его радиуса, т. е.

$$-a_{ii} > \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \right)^{1-\alpha},$$

$$\text{или } -a_{ii} - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \right)^{1-\alpha} > 0.$$

Если подобное неравенство будет выполняться для минимальной величины

$$\sigma(A) = \min_i \left( -a_{ii} - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \right)^{1-\alpha} \right) > 0,$$

то в остальных случаях оно будет выполняться заведомо.

Аналогичными оказываются и рассуждения относительно интервальной матрицы, для которой достаточно потребовать выполнения существующего условия для минимального расстояния от мнимой оси до центра круга  $a_{ii}^* = \bar{a}_{ii}$  и для максимально возможного радиуса  $a_{ij}^* = \max\{|a_{ij}|; |\bar{a}_{ij}|\}$ . ■

Покажем теперь, что условия стабилизируемости (7) и (8), полученные для линеаризованной модели (4), обеспечивают стабилизацию исходной нелинейной системы (1) в области (3). Для этого рассмотрим поведение системы (1) под воздействием управления  $u(t) = Kx(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u(x)), \\ y(t) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Считаем, что  $f(x, u(x))$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x_1, u(x_1)) - f(x_2, u(x_2))\| \leq g\|x_1 - x_2\|. \quad (12)$$

Осуществим линеаризацию системы (11) относительно некоторой произвольной точки области  $\Omega$  (3):

$$\dot{x}_л(t) = A_л x_л(t) + R_1(x);$$

$$\dot{y}_л(t) = C_л x_л(t) + R_2(x). \quad (13)$$

Здесь остаточные члены  $R_1(x)$  и  $R_2(x)$  в силу допущения об ограниченности вторых производных функций  $f(x, u(x))$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют условиям

$$\|R_1(x)\| \leq c_1 \|x(0)\|^2; \|R_2(x)\| \leq c_2 \|x(0)\|^2. \quad (14)$$

Оценим теперь на отрезке времени  $t \in [0, T]$  норму отклонения выходных координат нелинейной и линеаризованной систем, находящихся под воздействием одного и того же управления:

$$\|y(t) - y_л(t)\| = \|\varphi(x) - C_л x_л(t)\| = \|C_л x(t) + R_2(x) - C_л x_л(t)\| \leq \|C_л\| \cdot \|x(t) - x_л(t)\| + c_2 \|x(0)\|^2. \quad (15)$$

Чтобы найти норму отклонения векторов состояния нелинейной и линеаризованной систем, воспользуемся подходом, изложенным в [9]. Рассмотрим интегральную форму представления решений для этих систем:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t f(x(\tau), u(x(\tau))) d\tau; \\ x_л(t) &= x(0) + \int_0^t A_л x_л(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для нормы  $\|x(t) - x_{\Gamma}(t)\|$  на отрезке  $t \in [0, T]$  справедливо

$$\begin{aligned} \|x(T) - x_{\Gamma}(T)\| &= \left\| x(0) + \int_0^T f(x(\tau), u(x(\tau)))d\tau - x(0) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T A_{\Gamma}x_{\Gamma}(\tau)d\tau \right\| = \left\| \int_0^T f(x(\tau), u(x(\tau)))d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T [f(x_{\Gamma}(\tau), u(x_{\Gamma}(\tau))) - R_1(x_{\Gamma}(\tau))]d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^T [f(x(\tau), u(x(\tau))) - f(x_{\Gamma}(\tau), u(x_{\Gamma}(\tau)))]d\tau \right\| + c_1 T \|x(0)\|^2. \end{aligned}$$

С учетом (12) находим

$$\|x(T) - x_{\Gamma}(T)\| \leq \int_0^T g \|x(\tau) - x_{\Gamma}(\tau)\|d\tau + c_1 T \|x(0)\|^2.$$

Воспользуемся теперь леммой Беллмана—Грунолла с учетом того обстоятельства, что весовая функция в подынтегральном выражении равна  $g$ :

$$\|x(T) - x_{\Gamma}(T)\| \leq c_1 T \|x(0)\|^2 \exp(gT). \quad (16)$$

Объединяя (14) и (13), для всех  $t \in [0, T]$ , получаем

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_{\Gamma}(t)\| &\leq c_1 T \exp(gT) \|C_{\Gamma}\| \cdot \|x(0)\|^2 + \\ &+ c_2 \|x(0)\|^2 + c_3 \|x(0)\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, управление, удовлетворяющее условиям стабилизируемости (7) и (8), обеспечивает квадратичную по  $x(0)$  близость траекторий исходной (1) и линеаризованной (4) систем в заданной области (3) пространства состояний исследуемой системы.

### Пример синтеза системы управления летательным аппаратом

Рассмотрим систему координированного управления боковым движением самолета с использованием статического автопилота.

Нелинейные дифференциальные уравнения бокового движения имеют вид [10]:

$$mV \left( \frac{d\beta}{dt} - \omega_x \sin\alpha - \omega_y \cos\alpha \right) = c_z q S + G \sin\gamma \cos\vartheta;$$

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x; \quad J_y \frac{d\omega_y}{dt} = M_y;$$

$$\omega_x = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta; \quad \omega_y = \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta \cos\psi + \frac{d\gamma}{dt} \sin\gamma,$$

где  $M_x, M_y$  — проекции моментов всех внешних сил относительно соответствующих осей;  $J_x, J_y$  — осе-

вые моменты инерции;  $c_z$  — коэффициент боковой силы;  $\omega_x, \omega_y$  — проекции угловой скорости;  $m, V$  — масса и скорость полета самолета;  $\alpha, \beta, \gamma, \psi, \nu$  — углы, соответственно, атаки, скольжения, крена, рыскания и тангажа;  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  — скоростной напор;  $S$  — площадь крыла;  $G$  — модуль силы тяжести.

Проведем линеаризацию уравнений, предполагая, что установившиеся значения регулируемых величин  $\beta, \gamma, \psi, \omega_x, \omega_y$ , а также и регулирующих факторов — отклонений руля направления  $\delta_H$  и элеронов  $\delta_{\vartheta}$  — равны нулю. Кроме того, полагаем, что скорость постоянна, режим полета горизонтальный (угол тангажа равен нулю), углы скольжения и рыскания малы, тогда после преобразования линейная математическая модель бокового движения самолета имеет следующий вид:

$$(p + b_{11})\bar{\beta} + b_{12}\bar{\omega}_x + b_{13}\bar{\omega}_y = 0;$$

$$b_{21}\bar{\beta} + (p + b_{22})\bar{\omega}_x + b_{23}\bar{\omega}_y = -c_{\vartheta}\bar{\delta}_{\vartheta};$$

$$b_{31}\bar{\beta} + b_{32}\bar{\omega}_x + (p + b_{33})\bar{\omega}_y = -c_H\bar{\delta}_H. \quad (18)$$

Здесь  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $\bar{\beta}, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\delta}_{\vartheta}, \bar{\delta}_H$  — относительные

отклонения соответствующих величин;  $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{32}, b_{32}, b_{33}, c_{\vartheta}, c_H$  — коэффициенты линеаризованной системы.

Потребуем, чтобы система (18) удовлетворяла условию стабилизируемости (2) с параметром  $\eta = 1$  в области пространства состояний (3) следующего вида:

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta \leq 0,262 \text{ рад}, \quad 0 \leq \omega_x \leq 5 \text{ рад/с}, \\ 0 \leq \omega_y \leq 5 \text{ рад/с}. \end{aligned} \quad (19)$$

Как следует из работы [10], основные аэродинамические коэффициенты имеют монотонную зависимость от переменных состояния и управляющих воздействий. При этом коэффициенты линеаризованной модели бокового движения самолета, вычисленные в граничных точках заданной области пространства состояний, меняются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} 2,56 \leq b_{11} \leq 3,07; \quad b_{12} = 0 = \text{const}; \quad b_{13} = 1 = \text{const}; \\ 9,5 \leq b_{21} \leq 15,8; \quad 4,82 \leq b_{22} \leq 6,7; \quad 0,41 \leq b_{23} \leq 0,43; \\ 4,3 \leq b_{31} \leq 5,76; \quad 0,0058 \leq b_{32} \leq 0,037; \\ 0,16 \leq b_{33} \leq 0,22; \quad 19,0 \leq c_{\vartheta} \leq 30,7; \quad 2,26 \leq c_H \leq 3,18. \end{aligned}$$

Уравнения каналов автопилота имеют вид

$$\delta_{\vartheta} = K_{11}\beta + K_{12}\omega_x + K_{13}\omega_y;$$

$$\delta_H = K_{21}\beta + K_{22}\omega_x + K_{23}\omega_y, \quad (20)$$

где  $K_{11}, K_{21}, K_{12}, K_{22}, K_{13}, K_{23}$  — передаточные числа каналов, соответственно, скольжения, крена и рыскания.

Сформируем на основе системы уравнений объекта управления (18) матрицы  $A$  и  $B$ , а на основе (12) — матрицу  $K$  параметров управляющей части:

$$A = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c_3 & 0 \\ 0 & -c_H \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \end{bmatrix}.$$

В свою очередь, элементы смещенной интервальной матрицы  $\hat{A} = \eta I + A$  удовлетворяют следующим неравенствам:

$$1,56 \leq \hat{b}_{11} \leq 2,07; \hat{b}_{12} = 0 = \text{const}; \hat{b}_{13} = 1 = \text{const};$$

$$9,5 \leq \hat{b}_{21} \leq 15,8; 3,82 \leq \hat{b}_{22} \leq 5,7; 0,41 \leq \hat{b}_{23} \leq 0,43;$$

$$4,3 \leq \hat{b}_{31} \leq 5,76; 0,0058 \leq \hat{b}_{32} \leq 0,037;$$

$$-0,84 \leq \hat{b}_{33} \leq -0,78.$$

Используя введенные матрицы, найдем матрицу замкнутой системы

$$\tilde{A}^3 = \hat{A} + BK =$$

$$= \begin{bmatrix} -\hat{b}_{11} & -\hat{b}_{12} & -\hat{b}_{13} \\ -\hat{b}_{21} - c_3 K_{11} & -\hat{b}_{22} - c_3 K_{12} & -\hat{b}_{23} - c_3 K_{13} \\ -\hat{b}_{31} - c_H K_{21} & -\hat{b}_{32} - c_H K_{22} & -\hat{b}_{33} - c_H K_{23} \end{bmatrix}.$$

Полагая, что передаточные числа каналов автопилота положительные, и используя правила интервальной арифметики, рассчитаем интервальные значения элементов матрицы замкнутой системы:

$$\tilde{a}_{11}^3 = [-2,07; -1,56];$$

$$\tilde{a}_{12}^3 = [0; 0];$$

$$\tilde{a}_{13}^3 = [-1; -];$$

$$\tilde{a}_{21}^3 = [-15,8 - 30,7K_{11}; -9,5 - 19,0K_{11}];$$

$$\tilde{a}_{22}^3 = [-5,7 - 30,7K_{12}; -3,82 - 19,0K_{12}];$$

$$\tilde{a}_{23}^3 = [-0,43 - 30,7K_{13}; -0,41 - 19,0K_{13}];$$

$$\tilde{a}_{31}^3 = [-5,76 - 3,18K_{21}; -4,3 - 2,26K_{21}];$$

$$\tilde{a}_{32}^3 = [-0,037 - 3,18K_{22}; -0,0058 - 2,26K_{22}];$$

$$\tilde{a}_{33}^3 = [0,78 - 3,18K_{23}; 0,84 - 2,26K_{23}].$$

Теперь сформируем совокупность элементов "наихудшей" с точки зрения устойчивости матрицы  $A^*$

$$a_{11}^* = -1,56;$$

$$a_{22}^* = (-3,82 - 19,0K_{12});$$

$$a_{33}^* = (0,84 - 2,26K_{23});$$

$$a_{12}^* = 0; a_{13}^* = 1;$$

$$a_{21}^* = 15,8 + 30,7K_{11};$$

$$a_{23}^* = 0,43 + 30,7K_{13};$$

$$a_{31}^* = 5,76 + 3,18K_{21};$$

$$a_{32}^* = 0,037 + 3,18K_{22}.$$

Поскольку элементы первой строки матрицы  $A^*$  не зависят от параметров автопилота, то мы не можем гарантировать выполнение условия (7). В связи с этим для обеспечения робастной стабилизации воспользуемся условием (8), которое в данном случае приобретает вид следующих неравенств:

$$\sigma_1(A) = 1,56 - \sqrt[10]{30,7K_{11} + 21,56 + 3,18K_{21}} > 0;$$

$$\sigma_2(A) = 19K_{12} + 3,82 - (30,7K_{11} + 16,23 + 30,7K_{13})^{0,9}(3,18K_{22} + 0,037)^{0,1} > 0;$$

$$\sigma_3(A) = 2,26K_{23} - 0,84 - (3,18K_{21} + 5,797 + 3,18K_{22})^{0,9}(1,43 + 30,7K_{13})^{0,1} > 0.$$

Преобразуя эти неравенства, получим следующие ограничения на параметры автопилота:

$$K_{21} < \frac{1,56^{10} - 21,56 - 30,7K_{11}}{3,18};$$

$$K_{12} > \frac{(30,7K_{11} + 16,26 + 30,7K_{13})^{0,9}(3,18K_{22} + 0,037)^{0,1} - 3,82}{19};$$

$$K_{23} > \frac{(3,18K_{21} + 5,797 + 3,18K_{22})^{0,9}(1,41 + 30,7K_{13})^{0,1} - 0,84}{2,26}.$$

Выберем значения параметров автопилота, удовлетворяющие полученным условиям, например,

$$K = \begin{bmatrix} 1,00 & 3,00 & 1,00 \\ 2,00 & 1,00 & 8,00 \end{bmatrix},$$

и осуществим моделирование синтезированной системы в точках заданной области (19), соответствующих правым (рис. 1) и левым (рис. 2) границам интервальных элементов матрицы замкнутой системы. Как показывают результаты моделирования, переходные процессы в системе затухают быстрее, чем заданная экспонента  $\exp(-t)$ .

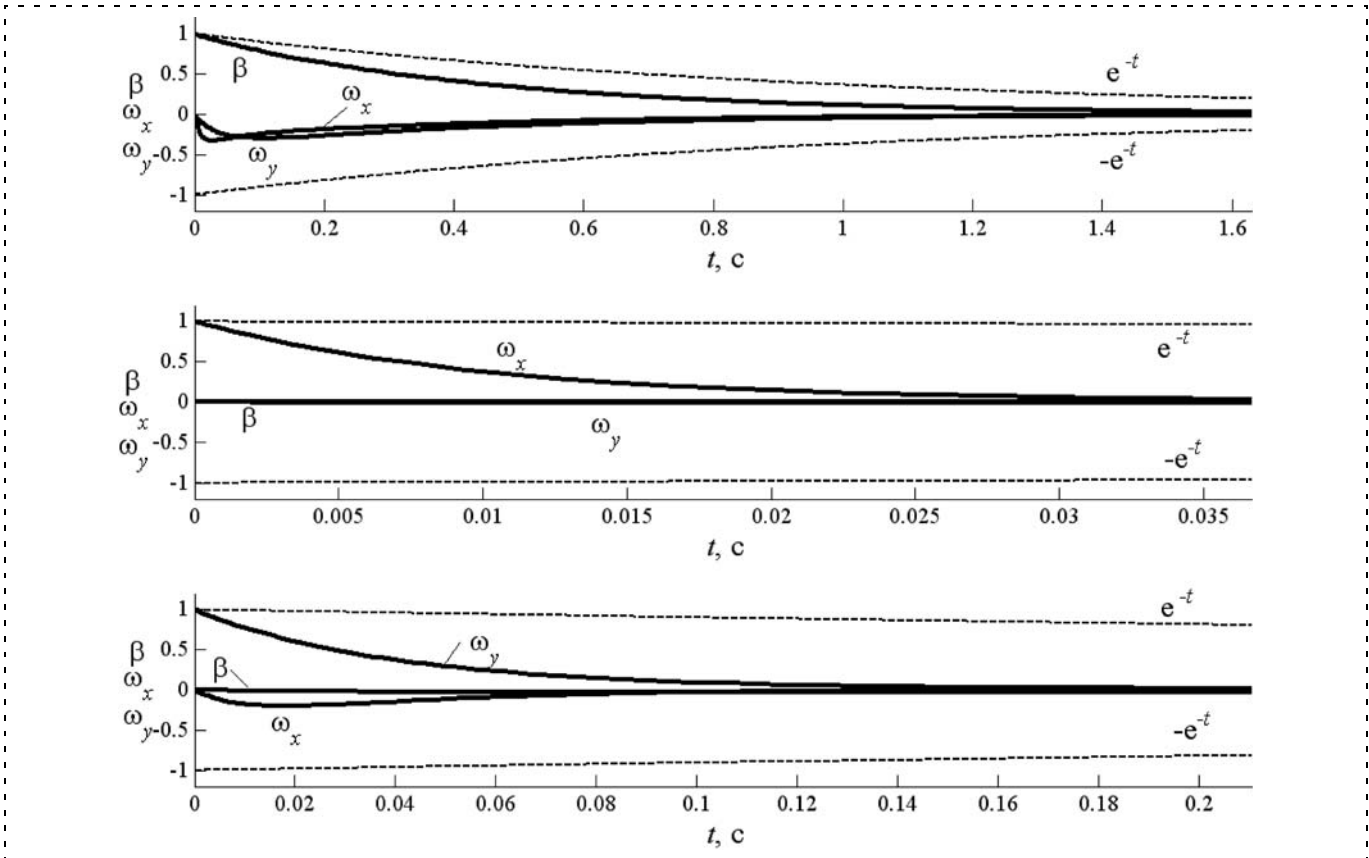


Рис. 1. Результаты моделирования системы для правых границ интервальных элементов матрицы замкнутой системы

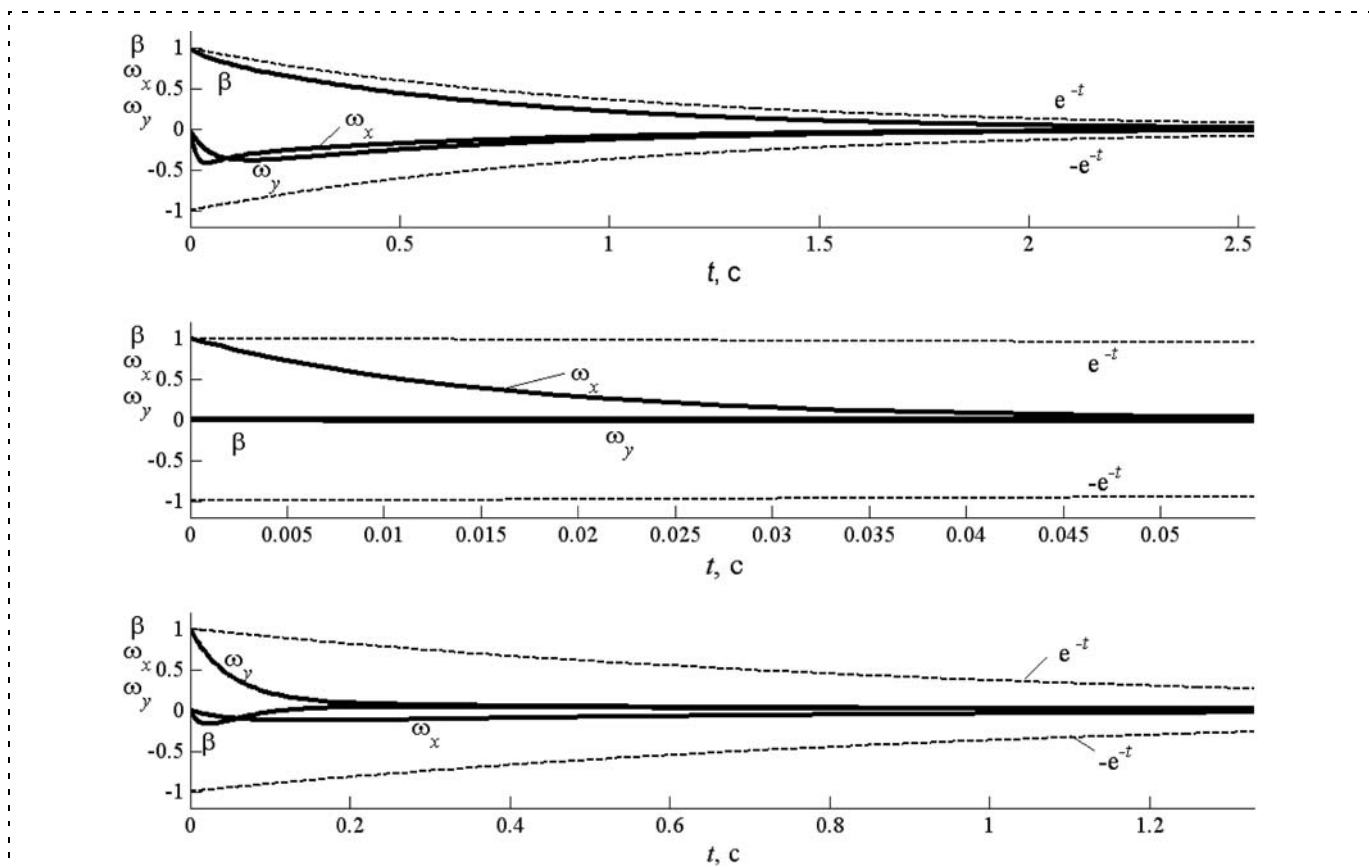


Рис. 2. Результаты моделирования системы для левых границ интервальных элементов матрицы замкнутой системы

## Заключение

Предложенный подход расширяет возможности практического использования концепции сверхустойчивости для обеспечения робастной стабилизации сложных систем управления. Полученные в работе условия стабилизации позволяют устранить проблемы, возникающие при использовании интервальных матриц для формализации параметрической неопределенности линеаризованных систем. При этом управление, синтезированное на основе линейного приближения, гарантирует стабилизацию исходной нелинейной системы вследствие квадратичной близости траекторий нелинейной и линеаризованной систем в заданной области пространства состояний.

## Список литературы

1. Воронов А. А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.

2. Chan W. S., Desoer C. A. Eigen value assignment and stabilization of interconnected systems using local feedbacks // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. № 2. P. 312–317.
3. Daniel R., Kouvaritakis A. A new robust stability criterion for linear and nonlinear multivariable feedback systems // Intern. J. control. 1985. Vol. 41. № 6. P. 1349–1379.
4. Darwish M., Fantin I., Soliman H. Decentralized stabilization of large-scale dynamical systems // IEEE Trans. on system man. and cybern. 1979. SMC-9. № 11. P. 717–720.
5. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I: Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 37–53.
6. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Сверхустойчивые линейные системы управления. II: Синтез // Автоматика и телемеханика. 2002. № 11. С. 56–75.
7. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 312 с.
8. Ostrowski A. Uber die Determinanten mit uberwiegender Hauptdiagonale // Comment. Math. Helv. 1937–1938. V. 10. P. 69–96.
9. Давыдов Д. В. Локальная стабилизация интервально наблюдаемой системы с неопределенными параметрами // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 1. С. 44–51.
10. Михалев И. А., Окосмов Б. Н., Чиклаев М. С. Системы автоматического управления самолетом. М.: Машиностроение, 1987. 240 с.

УДК 621.398-501.01

О. С. Колосов, д-р техн. наук, проф.,  
Б. Б. Кошоева, аспирант,  
KolosovOS@mpei.ru,  
Московский энергетический институт

## Методика реализации алгоритмов численного дифференцирования в законе регулирования с увеличенным шагом дискретизации

*Рассматривается методика реализации алгоритмов численного дифференцирования реального времени на базе производной интерполяционного полинома Ньютона в составе ПД и ПИД регуляторов с увеличенным шагом дискретизации для уменьшения влияния высокочастотных помех в тракте передачи управляющего сигнала и уменьшения числа срабатываний исполнительного элемента при сохранении требуемой точности и качества системы управления промышленным объектом.*

**Ключевые слова:** алгоритм численного дифференцирования реального времени, полоса пропускания, точность дифференцирования, интерполяционный полином Ньютона, ПД и ПИД регуляторы, шаг дискретизации

Статья является логическим завершением исследований алгоритмов численного дифференцирования, используемых в локальных системах управления промышленными объектами, представленных в работах [1, 2]. Целью настоящих исследований является разработка методики реализации алгоритмов численного дифференцирования с увеличенным шагом дискретизации в составе алгоритмов ПД и ПИД-регуляторов для систем локаль-

ной автоматики промышленных объектов. Использование такого алгоритма сохраняет динамические свойства и точность системы и одновременно понижает ее чувствительность к высокочастотным помехам и, таким образом, уменьшает число срабатываний регулирующей аппаратуры под воздействием помех и возмущений. Связано это с тем, что точность дифференциатора определяется близостью его частотных характеристик по отношению к частотным характеристикам идеального дифференциатора в области низких частот, ограниченной частотой среза разомкнутой системы [1].

## Алгоритм численного дифференцирования на основе производной интерполяционного полинома Ньютона

В работах [1, 3] показано, что для целей управления в режиме online подходят алгоритмы взятия производной на основе интерполяционного полинома Ньютона, так как в них используются только предыдущие отсчеты. При этом оценка производной в точке  $y_0$  осуществляется по значениям наблюдаемой функции  $y_0, y_{-1}, y_{-2} \dots y_{-k}$  в момент времени  $t_0$  и в предыдущие моменты времени  $t_0 - \Delta t, t_0 - 2\Delta t, \dots, t_0 - k\Delta t$ .

Остановимся подробнее на интерполяционном полиноме Ньютона по переменной  $u = \frac{t-t_0}{\Delta t}$  для функции  $f(t)$  [10, 11]:

$$\hat{y}(u) = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3!}u(u+1)(u+2)\Delta^3 y_{-3} + \dots \quad (1)$$

При  $t = t_0$  ( $u = 0$ ) первая производная интерполяционного полинома Ньютона имеет вид

$$\hat{y}'(t_0) = \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta y_{-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 y_{-3} + \frac{1}{4} \Delta^4 y_{-4} + \frac{1}{5} \Delta^5 y_{-5} + \frac{1}{6} \Delta^6 y_{-6} + \frac{1}{7} \Delta^7 y_{-7} + \frac{1}{8} \Delta^8 y_{-8} + \dots \right). \quad (2)$$

В работах [1, 3] были определены алгоритмы численного дифференцирования реального времени на базе производной интерполяционного ряда Ньютона для определенного, фиксированного числа слагаемых этого ряда (табл. 1).

Вместе с тем, в [1, 3] показывается, что частотные характеристики дискретных алгоритмов дифференцирования на базе первых слагаемых производной интерполяционного полинома Ньютона ограничивают коэффициент передачи дифференциатора в области высоких частот и, кроме этого, существенно уменьшают коэффициент передачи его в окрестностях частот, кратных частоте дискретизации  $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ .

В работах [1, 3] показывается, что рациональный выбор структуры алгоритма численного дифференцирования реального времени и значение шага дискретизации при его использовании в алгоритмах управления системами может обеспечить

достаточную помехозащищенность всего тракта цифрового управления без дополнительной высокочастотной фильтрации.

### Методика настройки типовых регуляторов с "идеальным" дифференцированием

"Идеальное" дифференцирование рассматривается с известной степенью идеализации, принятой в литературе по настройке ПД и ПИД регуляторов [7, 9]. Обобщенная функциональная схема системы промышленной автоматики изображена на рис. 1. Обычно объект управления (ОУ) в таких системах является объектом с самовыравниванием и обладает значительной инерционностью по сравнению с инерционностями измерительных и исполнительных элементов.

Существует ряд способов описания промышленных объектов по виду их переходных процессов. Однако в том случае, когда по условиям работы замкнутой системы не допускается перерегулирование, достаточным бывает использование упрощенного описания ОУ в виде последовательного соединения двух апериодических (инерционных) звеньев по известной методике [4–6, 9]. Примером подобного объекта может служить теплообменник в системе горячего водоснабжения (ГВС) [2]. Структурная схема системы ГВС представлена на рис. 2.

Замкнутый контур системы ГВС содержит: устройство, задающее уставку по температуре горячей воды и сравнивающее ее с сигналом датчика температуры в обратной связи, цифровой ПИД регулятор, усилительно-преобразовательное устройство с трехпозиционным реле на входе, исполнительное устройство, управляющее положением клапана подачи сетевой воды в теплообменник, ОУ (теплообменник) и датчик температуры горячей воды. На рис. 2 представлены параметры всех передаточных функций элементов структурной схемы системы ГВС, полученные в работе [2] экспериментальным путем. Ширина зоны нечувствительности трехпозиционного реле на входе усилительно-преобразовательного устройства определяется заданным допуском отклонения температуры горячей воды от уставки. Возмущающим воздействием для исследуемой системы является неконтролируемый расход горячей воды потребителями  $f$ , который приводит к срабатыванию реле. Частота срабатываний целиком зависит от статистических характеристик  $f$ , а также от частотных свойств контура управления, которые, в частности, могут быть изменены за счет настроек ПД и ПИД регуляторов.

Далее мы рассмотрим методику настройки параметров ПД и ПИД регуляторов, обеспечивающих уменьшение частоты

Таблица 1

Алгоритмы численного дифференцирования на базе производной полинома Ньютона

Число слагаемых	Алгоритм численного дифференцирования на базе производной полинома Ньютона
1	$\hat{y}'(t_0) = \frac{1}{\Delta t} (\Delta y_{-1}) = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta t}$
2	$\hat{y}'(t_0) = \frac{3y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{2\Delta t}$
3	$\hat{y}'(t_0) = \frac{11y_0 - 18y_{-1} + 9y_{-2} - 2y_{-3}}{6\Delta t}$
4	$\hat{y}'(t_0) = \frac{25y_0 - 48y_{-1} + 36y_{-2} - 16y_{-3} + 3y_{-4}}{12\Delta t}$
5	$\hat{y}'(t_0) = \frac{137y_0 - 300y_{-1} + 300y_{-2} - 200y_{-3} + 75y_{-4} - 12y_{-5}}{60\Delta t}$
6	$\hat{y}'(t_0) = \frac{147y_0 - 360y_{-1} + 450y_{-2} - 400y_{-3} + 225y_{-4} - 72y_{-5} + 10y_{-6}}{60\Delta t}$

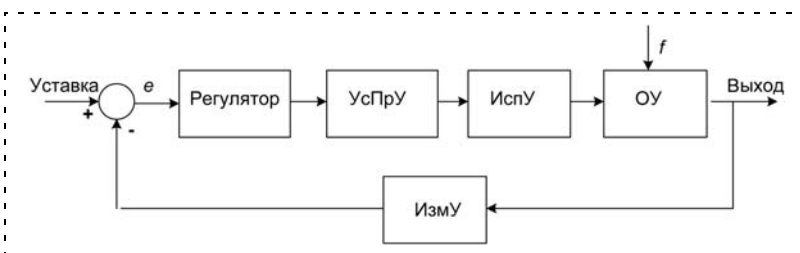


Рис. 1. Обобщенная функциональная схема системы промышленной автоматики: УсПрУ — усилительно-преобразовательное устройство; ИсполУ — исполнительное устройство; ИзмУ — измерительное устройство; ОУ — объект управления

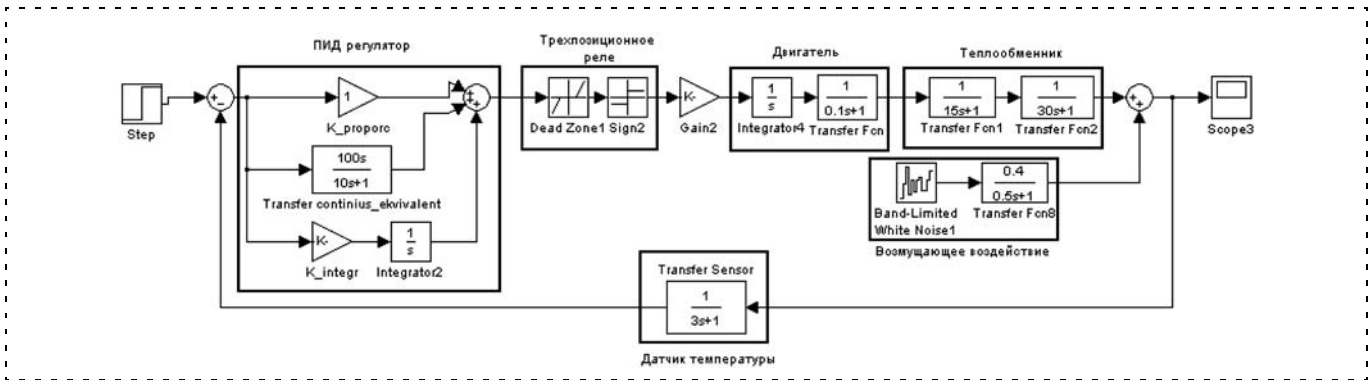


Рис. 2. Структурная схема системы горячего водоснабжения

срабатывания исполнительного органа от действующих неконтролируемых возмущений при заданных требованиях к системе по точности и качеству переходных процессов.

Методику настройки параметров ПД и ПИД регуляторов с увеличенным шагом дискретизации в тракте дифференцирования целесообразно проводить в частотной области [1]. В связи с этим будем привязывать методику к логарифмическим амплитудно-частотным (ЛАЧХ) и фазочастотным (ФЧХ) характеристикам разомкнутой линеаризованной системы.

Проведем на первом этапе синтез параметров ПД и ПИД регуляторов для линейной системы, когда трехпозиционное реле на входе усилительно-преобразовательного устройства заменяется пропорциональным звеном с единичным коэффициентом передачи. Пусть также параметры настроек ПД и ПИД регуляторов будут нормированы относительно тракта пропорциональной передачи сигнала, коэффициент передачи которого также примем за единицу. Регулировку общего коэффициента передачи разомкнутой системы в этом случае можно осуществлять с помощью усилительно-преобразовательного устройства.

Настройка параметров как непрерывного, так и дискретного (с частотой дискретизации, намного превышающей частоту среза ( $\omega_{cp}$ ) разомкнутой системы) ПД и ПИД регуляторов выполняется в соответствии с требованиями технического задания известными способами [4, 5]. При этом основным требованием для обеспечения требуемой точности и качества является абсолютное значение частоты среза системы и запас по фазе на этой частоте.

Для уменьшения чувствительности системы к высокочастотным помехам тракт цифрового дифференцирования ПД и ПИД регуляторов целесообразно реализовать с увеличенным шагом дискретизации  $\Delta t$ , воспользовавшись для выбора  $\Delta t$  соотношением [1, 2, 3]

$$\Delta t \leq \frac{0,1}{\omega_{cp}}$$

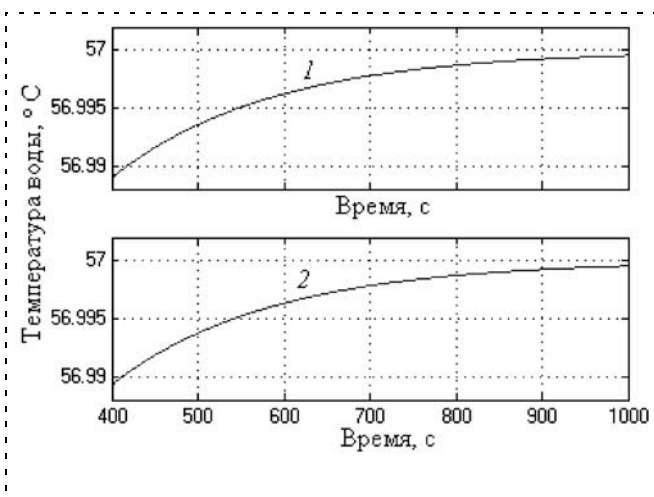
Эквивалентная постоянная времени ( $T_H$ ) непрерывного реального дифференцирующего звена с передаточной функцией  $W_H(s) = \frac{k_D s}{T_H s + 1}$  (где  $k_D$  — коэффициент передачи тракта дифференцирования), ограничивающая сверху на том же уровне, что и дискретный дифференциатор, усиление высоких частот в тракте дифференцирования ПД и ПИД регуляторов, определяется из соотношения [3]

$$T_H = \frac{\Delta t}{k},$$

где  $k = 2, 4, 6.667$  — соответствующие коэффициенты для дискретных дифференциаторов на базе одного, двух или трех слагаемых производной интерполяционного полинома Ньютона [2, 3, 6]. По существу введение в тракт дифференцирования ПД и ПИД регулятора реального дифференцирующего звена позволяет ограничить усиление высоких частот преобразуемого регулятором сигнала. Несложно показать, что тот же эффект дает постановка сразу за ПД и ПИД регуляторами апериодического (инерционного) звена в качестве фильтра с той же постоянной времени  $T_\phi = T_H$ . В табл. 2 представлены относительные погрешности в оценке модуля и фазы по отношению к идеальному дифференциатору эквивалентных дифференциаторов и дифференци-

Таблица 2  
Относительные погрешности в оценке модуля и фазы по отношению к идеальному дифференциатору непрерывных эквивалентных дискретных дифференциаторов на частоте среза системы

Относительная погрешность	Эквивалентный непрерывный алгоритм	Дискретный алгоритм на базе		
		одного слагаемого	двух слагаемых	трех слагаемых
модуля	9,0 % 5,0 % 3,0 %	9,37 %	1,0 %	0,008 %
фазы	7,0 % 4,0 % 2,0 %	7,0 %	1,0 %	0,001 %



**Рис. 5. Обработка ступенчатого изменения уставки (без помех) системой ГВС с ПИД регулятором, в структуре которого:**  
 1 — непрерывный алгоритм с реальным дифференцирующим звеном; 2 — дискретный алгоритм дифференцирования на базе одного слагаемого интерполяционного полинома Ньютона с увеличенным шагом дискретизации

аторов на базе одного, двух или трех слагаемых производной интерполяционного полинома Ньютона на частоте среза системы.

Наиболее важным следствием из анализа табл. 2 является незначительное искажение фазочастотной характеристики в окрестности частоты среза разомкнутой системы, что позволяет обеспечить требуемое качество переходных процессов.

На рис. 3 (см. вторую сторону обложки) представлены ЛАЧХ и ФЧХ ПИД регулятора настраиваемой системы ГВС, в структуре которого имеются непрерывный алгоритм с эквивалентным реальным дифференцирующим звеном (1) и дискретный алгоритм дифференцирования на базе одного слагаемого интерполяционного полинома Ньютона с увеличенным шагом дискретизации (2). На рис. 4 (см. вторую сторону обложки) представлены ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы ГВС, в состав которой включен ПИД регулятор с характеристиками, показанными на рис. 3.

На представленных характеристиках просматривается совпадение их для непрерывного и дискретного вариантов в окрестности  $\omega_{\text{ср}}$ , что обеспечивает качество переходных процессов без перерегулирования, показанных на рис. 5.

В то же время ЛАЧХ, показанные на рис. 3 и 4, наглядно демонстрируют существенное ослабление высоких частот для системы с дискретным дифференциатором по сравнению с системой с непрерывным дифференциатором в окрестностях частот [1, 2]:

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{\Delta t},$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots \infty$ .

В табл. 3 представлены оценки среднеквадратического отклонения (СКО) сигнала на выходе ПИД регулятора моделируемой системы ГВС с непрерывным и дискретными дифференциаторами при действии шумовой составляющей  $f$  с различными законами распределения. Алгоритмы дискретных дифференциаторов базировались на одном, двух и трех слагаемых производной интерполяционного полинома Ньютона [2, 3]. Результаты моделирования хорошо иллюстрируют эффективность дискретных дифференциаторов с увеличенным шагом дискретизации. Результаты показывают схожесть СКО сигнала на выходе ПИД регулятора непрерывной системы и системы с дискретным дифференциатором. Однако в сигнале непрерывной системы наблюдается больше высокочастотных составляющих, которые влияют на частоту срабатывания регулирующей аппаратуры в случае использования релейного исполнительного элемента [2].

Введение трехпозиционного реле с зоной нечувствительности  $\pm a$  и уровнями реле  $\pm B$  на входе усилительно-преобразовательного устройства (УПУ) уменьшает число срабатываний исполнительного элемента и упрощает техническую реализацию усилителя. Ширина зоны нечувствительности определяется допустимыми отклонениями стабилизируемого параметра. Однако от соотношений между

Таблица 3

**Оценки СКО сигнала на выходе ПИД регулятора системы ГВС с непрерывным и дискретными дифференциаторами при действии шумовой составляющей  $f$  с различными законами распределения**

Шум	СКО входного сигнала	СКО на выходе непрерывного дифференциатора	СКО на выходе дискретного дифференциатора на базе одного слагаемого	СКО на выходе дискретного дифференциатора на базе двух слагаемых	СКО на выходе дискретного дифференциатора на базе трех слагаемых
Слабый сигнал с нормальным распределением	0,24	6,65 6,92 7,11	6,77	7,07	6,94
Белый шум	0,77	7,2 8,31 9,64	7,16	8,14	9,15
Слабый сигнал с равномерным распределением	0,44	6,8 7,31 7,86	6,87	7,36	7,55



Число срабатываний регулирующей аппаратуры

Шум	Фильтр	Число слагаемых в алгоритме	Число срабатываний в НСУ	Число срабатываний в ДСУ
Белый шум	$W(s) = \frac{0,4}{5s+1}$	1	33	28
		2	46	29
		3	67	52
Белый шум	$W(s) = \frac{0,4}{s+1}$	1	55	32
		2	111	76
		3	135	100
Белый шум	$W(s) = \frac{0,4}{0,5s+1}$	1	80	50
		2	132	81
		3	189	136

Таблица 5

Оценки СКО сигнала на выходе ПИД регулятора системы ГВС с трехпозиционным реле на входе УПУ и с непрерывным и дискретными дифференциаторами, при действии шумовой составляющей  $f$  с различными законами распределения

Шум	СКО на выходе непрерывного дифференциатора	СКО на выходе дискретного дифференциатора на базе одного слагаемого	СКО на выходе дискретного дифференциатора на базе двух слагаемых	СКО на выходе дискретного дифференциатора на базе трех слагаемых
Слабый сигнал с нормальным распределением	146,8 146,8 146,8	146,8	148,1	148,1
Белый шум	146,9 146,9 147	146,8	148,2	148,2
Слабый сигнал с равномерным распределением	146,8 146,8 146,9	146,8	148,1	148,1

$a$  и  $B$  зависит устойчивость и качество переходных процессов в подобной нелинейной системе. При заданной ширине зоны нечувствительности необходимо так выбрать уровни срабатывания реле, чтобы в переходном процессе отсутствовало перерегулирование. Для этого можно воспользоваться простым практическим приемом (не совсем строгим, но обладающим большим физическим смыслом): необходимо подобрать уровни реле  $B$  так, чтобы максимальное значение коэффициента его гармонической линейаризации не превышало заданное значение при любых амплитудах входного гармонического сигнала. Заданным максимальным значением в данном случае является единица, принятая при рассмотрении выше для линейаризованного варианта системы.

Коэффициент гармонической линейаризации, как известно [8], определяется соотношением

$$K(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq a, \quad (3)$$

где  $A$  — амплитуда входного гармонического сигнал;  $a$  и  $B$  в расчетах учитываются как модули.

Характеристика  $K(A)$  имеет экстремум, определяемый параметрами

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{2} a; \\ K_3(A_3) &= 0,637 \frac{B}{a}. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с (4), если  $K_3(A_3) \leq 1$  и  $a = \pm 0,5$ , то уровни реле следует выбирать из условия

$$B \leq 0,785. \quad (5)$$

Естественно, условие (5) нестрогое и может служить только для предварительной настройки УПУ.

В табл. 4 представлены сведения о числе срабатываний регулирующей аппаратуры под воздействием белого шума. Из анализа табл. 4 видно, что с ростом числа слагаемых в алгоритме растет число срабатываний регулирующей аппаратуры.

В табл. 5 представлены оценки СКО сигнала на выходе ПИД регулятора системы ГВС с трехпозиционным реле на входе УПУ и с непрерывным и дискретными дифференциаторами при действии шумовой составляющей  $f$  с различными законами распределения.

Из анализа табл. 4, 5 следует, что СКО на выходе непрерывного и дискретного дифференциаторов близки, при этом число срабатываний регулирующей аппаратуры в системе с дискретным (ДСУ) дифференциатором меньше, чем с непрерывным (НСУ) дифференциатором.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что во многих случаях при реализации дискретных алгоритмов численного дифференцирования целесообразно увеличивать шаг дискретизации для уменьшения влияния высокочастотных

составляющих сигнала помехи на динамику системы управления.

Сформулируем кратко существо методики реализации алгоритма дифференцирования в законах регулирования с увеличенным шагом дискретизации для объектов промышленной автоматики.

1. На основании результатов идентификации отдельных элементов структуры и анализа частотных свойств разомкнутой линейаризованной системы известными способами проводится синтез структуры ПД и ПИД регулятора и параметров ее настроек с учетом требований технического задания. При синтезе параметров настроек допускается описание объекта упрощенными передаточными функциями в виде последовательного соединения двух инерционных звеньев или одного инерционного звена и звена запаздывания.

2. В случае использования непрерывного или релейного исполнительного устройства в сочетании с приводным реверсивным двигателем в анализи-

руемой структуре после ПД и ПИД регулятора появляется дополнительный интегратор. Частотные свойства последнего должны быть учтены заранее, на первой стадии анализа частотных свойств разомкнутой системы, синтеза структуры и коэффициентов настроек ПД и ПИД регуляторов. На входе усилительно-преобразовательного устройства вводится зона нечувствительности  $\pm a$ , определяемая требованиями ТЗ по точности регулирования в стационарном режиме работы в случае использования как непрерывного, так и релейного исполнительного элементов.

3. В зависимости от ширины зоны нечувствительности находятся нормированные уровни  $B$  срабатывания релейного элемента с использованием соотношения  $\pm B \leq \pm \frac{\pi}{2} a$ , где  $a$  — модуль зоны нечувствительности. При таком выборе уровней выходного сигнала реле максимум эквивалентного комплексного коэффициента передачи данного трехпозиционного реле не превышает единицы, и с его учетом общий коэффициент передачи разомкнутой системы не должен превышать значение разомкнутого коэффициента передачи линеаризованной системы, найденного на первом этапе.

4. Для повышения эффективности регулятора в части подавления высокочастотных помех и упрощения его структуры дифференцирующая часть реализует алгоритм численного дифференцирования на базе первых (от одного до трех) слагаемых интерполяционного полинома Ньютона с увеличенным шагом, определяемым из соотношения:

$\Delta t = kT_{\Phi}$ , где  $k = 2, 4, 6, 67$ , — соответственно для алгоритма дифференцирования на базе одного, двух и трех слагаемых. Фильтр высоких частот при этом из регулятора убирается.

#### Список литературы

1. Колосов О. С., Кошоева Б. Б. Алгоритмы численного дифференцирования реального времени для задач автоматизации и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 2. С. 10—15.
2. Колосов О. С., Гармаш В. Б., Деев Р. В., Морозов Р. Б. Повышение помехоустойчивости и эффективности алгоритма регулирования температуры горячего водоснабжения на центральных тепловых пунктах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 18—23.
3. Колосов О. С., Кошоева Б. Б. Выбор шага дискретизации в цифровых алгоритмах управления с дифференцированием // Матер. 6-й науч. конф. "Управление и информационные технологии" (УИТ-2010). СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2010. С. 210—214.
4. Ротач В. Я. Расчет настройки промышленных систем регулирования. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. 344 с.
5. Ротач В. Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. М.: Энергия, 1973. 440 с.
6. Кулаков Г. Т. Инженерные экспресс-методы расчета промышленных систем регулирования: Спр. пособие. Мн.: Выш. шк., 1984. 192 с.
7. Денисенко В. В. ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации // Современные технологии автоматизации. 2006. № 4. С. 66—74. 2007. № 1. С. 78—88.
8. Негушил А. В. Теория автоматического управления. Ч. 2. Под ред. А. В. Негушила: Учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 1972. 432 с.
9. Денисенко В. В. ПИД-регуляторы: вопросы реализации // Современные технологии автоматизации. 2007. № 4. С. 86—97. 2008. № 1. С. 86—98.
10. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. С предисловием Луи Де Бройля: Пер. с франц. под общ. ред. К. С. Шифрина, 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 627 с.
11. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986. 487 с.

УДК 007.004.3

**Л. Г. Быстров,**

инженер-программист 1-й категории,  
**В. В. Сафронов,** д-р техн. наук, проф.,  
 svv@kber.ru,  
 ОАО "КБ Электроприбор", г. Саратов

## Новые компьютерные алгоритмы вычисления матричной экспоненты в приложении к исследованию линейных динамических систем автоматического управления

*Предложен новый метод вычисления матричной экспоненты. Метод универсален в отношении простых или кратных корней характеристического полинома матрицы. Рассмотрены численные примеры.*

**Ключевые слова:** система управления, метод пространства состояний, матричная экспонента

## Введение

При анализе систем автоматического управления (САУ) широкое применение нашли матричные методы с применением таких матриц, как матричная экспонента (переходная матрица, матрица перехода), матрицы Вронского, Фробениуса, Вандермонда и др. [6, 8, 11].

Известно, что матричная экспонента  $e^{At}$  матрицы  $A$  для линейных САУ является одной из важнейших характеристик, поскольку она обладает исчерпывающей полнотой информации о свойствах и поведении системы [6, 8]. Так, матричная экспонента может применяться: для вычисления свободного движения САУ; для вычисления вынужденного движения САУ, в том числе при сингулярных внешних воздействиях; для вычисления полного движения САУ по формуле Коши, в которую матричная экспонента входит дважды [6]:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau.$$

Кроме того, существует ряд специальных задач управления, решение которых сводится к интегралам, содержащим матричную экспоненту [3].

Основными известными методами построения матричной экспоненты являются: разложение в бесконечный ряд Тейлора по степеням исходной матрицы [2]; метод разложения в конечный ряд Лагранжа—Сильвестра [5]; метод разложения в конечный ряд Кэли—Гамильтона [5, 6, 9].

В обзорах [3] приводится около двадцати различных методов построения матричной экспоненты. К сожалению, вычислительная сложность построения матричной экспоненты любым из этих методов настолько резко увеличивается с возрастанием размерности системы, что практическое вычисление матричной экспоненты, даже с применением современных компьютеров, составляет трудную задачу. Так, например, для матрицы двадцатого порядка в системе Maple затрачивается в среднем до 60 мин.

Выход из ситуации следует искать на путях построения новых компьютерных методов с параллельными алгоритмами их реализации.

Представим матричную экспоненту в следующем виде:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{At}_{11} & e^{At}_{12} & \dots & e^{At}_{1n} \\ e^{At}_{21} & e^{At}_{22} & \dots & e^{At}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{At}_{n1} & e^{At}_{n2} & \dots & e^{At}_{nn} \end{bmatrix}.$$

В статье предлагаются новый компьютерный метод и алгоритм построения матричной экспоненты, позволяющий распараллелить вычисления, т. е. найти решение независимо для каждого (в частном случае, для требуемого) элемента  $e^{At}_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) этой матрицы, что обеспечивает возможность применения многопроцессорных решателей в целях исследования системы управления высоких порядков за ограниченное время.

### ***n*-кратное распараллеливание вычислений**

Нетрудно убедиться в справедливости следующих выражений [10]:

$$\begin{bmatrix} e^{At}_{11} & e^{At}_{12} & \dots & e^{At}_{1n} \\ e^{At}_{21} & e^{At}_{22} & \dots & e^{At}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{At}_{n1} & e^{At}_{n2} & \dots & e^{At}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{At}_{11} \\ e^{At}_{21} \\ \dots \\ e^{At}_{n1} \end{bmatrix} \triangleq \text{colon}(e^{At}, 1);$$

$$\begin{bmatrix} e^{At}_{11} & e^{At}_{12} & \dots & e^{At}_{1n} \\ e^{At}_{21} & e^{At}_{22} & \dots & e^{At}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{At}_{n1} & e^{At}_{n2} & \dots & e^{At}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{At}_{12} \\ e^{At}_{22} \\ \dots \\ e^{At}_{n2} \end{bmatrix} \triangleq \text{colon}(e^{At}, 2); \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} e^{At}_{11} & e^{At}_{12} & \dots & e^{At}_{1n} \\ e^{At}_{21} & e^{At}_{22} & \dots & e^{At}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{At}_{n1} & e^{At}_{n2} & \dots & e^{At}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{At}_{1n} \\ e^{At}_{2n} \\ \dots \\ e^{At}_{nn} \end{bmatrix} \triangleq \text{colon}(e^{At}, n),$$

Известно, что решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad (2)$$

с начальными условиями  $X_0 = X(0)$  (нормальной системы Коши) является

$$X(t) = e^{At}X_0. \quad (3)$$

Из (1), (3) непосредственно следует:

- если  $X_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , то  $\text{colon}(e^{At}, 1) = X(t)$ ;
  - если  $\dot{Y}(t) = AY(t)$  и  $Y_0 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , то  $\text{colon}(e^{At}, 2) = Y(t)$ .
- .....
- если  $\dot{Z}(t) = AZ(t)$  и  $Z_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ , то  $\text{colon}(e^{At}, n) = Z(t)$ .

Таким образом, для построения всех столбцов матричной экспоненты достаточно решить нормальную систему Коши (2) с полным набором унитарных начальных условий. Эта процедура обеспечивает *n*-кратное распараллеливание вычислений.

### ***n*<sup>2</sup>-кратное распараллеливание вычислений**

Прежде чем получить решение для любого конкретного элемента  $e^{At}_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) матричной экспоненты, рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для координаты состояния  $x_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Допустим, что начальные условия (НУ)  $X_0 = X(0)$  — произвольные. Тогда элементы матричной экспоненты найдем автоматически, заменив произвольные начальные условия на унитарные. Методика решения задачи следующая:

1. Свернуть (любым известным методом [4, 5, 7]) систему ОДУ (2), или в более подробном виде,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

с исходными начальными условиями

$$X_0 = X(0), \quad (4)$$

или

$$x_{k0} = x_k(0), \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

к одному эквивалентному однородному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} x_k(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_k(t) + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} x_k(t) + \\ + a_1 \frac{d}{dt} x_k(t) + a_0 x_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (6) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_{k0} = x_k(0), \quad \dot{x}_{k0} = \dot{x}_k(t=0), \quad \ddot{x}_{k0} = \ddot{x}_k(t=0), \dots \\ \dots, \quad x_{k0}^{(j)} = x_k^{(j)}(t=0), \quad \dots, \quad x_{k0}^{(n-1)} = x_k^{(n-1)}(t=0). \end{aligned}$$

Известно, что коэффициентами уравнения (6) будут соответствующие коэффициенты характеристического полинома исходной матрицы:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0.$$

2. Определить начальные условия для эквивалентного однородного дифференциального уравнения. Начальные условия для указанного дифференциального уравнения зависят и от  $k$  и от  $j$ .

В настоящее время формализованный пересчет начальных условий отсутствует.

3. Найти решение ОДУ  $n$ -го порядка для полученных начальных условий. Найденное решение и будет искомым элементом  $e_{ij}^{At}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) матричной экспоненты.

Рассмотрим метод и вычислительный алгоритм определения НУ при переходе от системы ОДУ к эквивалентному ОДУ относительно заданной координаты состояния. Заметим, что для определения любой координаты  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , системы (2) используется уравнение (6), но с различными вариантами начальных условий, которые зависят от индекса  $k$  искомой координаты  $x_k$  состояния. Нам известны начальные условия (5) только для координат, но неизвестны остальные НУ для производных от координат до  $(n-1)$ -го порядка включительно. Сложность заключается в том, что неизвестные НУ зависят от номера  $k$ , т. е. номера искомого координат состояния.

Рассмотрим алгоритм вычисления  $k$ -х начальных условий.

Продифференцируем последовательно левую и правую части системы (2) до  $(n-1)$ -го порядка

включительно и, проведя очевидные преобразования, получим:

$$\ddot{X}(t) = A\dot{X}(t) = AAX(t) = A^2X(t); \quad (7)$$

$$\dddot{X}(t) = A\ddot{X}(t) = AA^2X(t) = A^3X(t); \quad (8)$$

$$X^{(n-1)}(t) = AX^{(n-2)}(t) = AA^{n-2}X(t) = A^{n-1}X(t). \quad (9)$$

Найдем из выражений (2), (7)–(9) значения  $\dot{X}_0 = \dot{X}(t=0)$ ,  $\ddot{X}_0 = \ddot{X}(t=0)$ , ...,  $X_0^{(n-1)} = X^{(n-1)}(t=0)$ . С этой целью подставим в указанные выражения известное из (2) значение  $X(t=0) = X_0 = X(0)$ .

Получим

$$\dot{X}_0 = \dot{X}(t=0) = AX_0; \quad (10)$$

$$\ddot{X}_0 = \ddot{X}(t=0) = A^2X_0; \quad (11)$$

$$\dddot{X}_0 = \dddot{X}(t=0) = A^3X_0; \quad (12)$$

$$X_0^{(n-1)} = X^{(n-1)}(t=0) = A^{n-1}X_0. \quad (13)$$

Матрицы (2), (10)–(13) представляют собой матрицы-столбцы. Запишем элементы этих матриц в матрицу начальных условий  $P$  и получим

$$P = \begin{bmatrix} x_{10} & \dot{x}_{10} & \ddot{x}_{10} & \dots & x_{10}^{(n-1)} \\ x_{20} & \dot{x}_{20} & \ddot{x}_{20} & \dots & x_{20}^{(n-1)} \\ x_{30} & \dot{x}_{30} & \ddot{x}_{30} & \dots & x_{30}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n0} & \dot{x}_{n0} & \ddot{x}_{n0} & \dots & x_{n0}^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Каждая  $k$ -я строка  $[x_{k0} \ \dot{x}_{k0} \ \ddot{x}_{k0} \ \dots \ x_{k0}^{(n-1)}]$  матрицы  $P$  представляет собой начальные условия к уравнению (6) с для получения решения для координаты состояния  $x_k$ :

$$x_0 = x_{k0}, \quad \dot{x}_0 = \dot{x}_{k0}, \quad \ddot{x}_0 = \ddot{x}_{k0}, \quad \dots, \quad x_0^{(n-1)} = x_{k0}^{(n-1)}.$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда начальные условия унитарные. Матрица  $X_0$  представляет собой один из столбцов единичной матрицы  $E$   $n$ -го порядка. Число таких матриц равно  $n$ . Для каждой из матриц  $X_0$  можем построить матрицу начальных условий  $P_{uk}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , элементы первого столбца которой будут нулевыми, за исключением элемента  $k$ -й строки, который будет равен единице. Элементы других столбцов находят по выражениям (10)–(13).

### Построение матричной экспоненты для случая произвольной кратности корней

Найдем теперь частное решение ОДУ (6). Для случая простых корней характеристического полинома существует явное аналитическое решение в форме произведения трех матриц, к которым относятся:

1) матрица-строка экспоненциального базиса (символьная)

$$B = [\exp(\lambda_1 t) \exp(\lambda_2 t) \dots \exp(\lambda_n t)],$$

где  $\lambda_i (i = \overline{1, n})$  — простые корни характеристического уравнения

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0;$$

2) обращенная матрица Вандермонда (числовая)

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{bmatrix}^{-1};$$

3) матрица-столбец начальных условий (числовая)

$$N = [x_{k0} \dot{x}_{k0} \dots \dot{x}_{k0}]^T = \text{colon}(P^T, k). \quad (14)$$

Тогда решение ОДУ для координаты состояния  $x_k(t)$  принимает вид

$$x_k(t) = BV^{-1}N = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) \\ \exp(\lambda_2 t) \\ \dots \\ \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{k0} \\ \dot{x}_{k0} \\ \dots \\ x_{k0}^{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Столбец  $\text{colon}(\mathbf{e}^{At}, k)$  и элементы  $\mathbf{e}_{ij}^{At} (i, j = \overline{1, n})$  матричной экспоненты  $\mathbf{e}^{At}$  определяются из следующих выражений:

$$\text{colon}(\mathbf{e}^{At}, k) = (BV^{-1}P_{uk}^T)^T = (B(V^{-1}P_{uk}^T)); \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_{ij}^{At} = (BV^{-1}N) = (B(V^{-1}N)) = ((BV^{-1})N),$$

$$\text{где } N = \text{colon}(P_{uj}^T, i). \quad (17)$$

Для случая кратных корней не получены аналитические выражения, подобные (15)–(17). Рассмотрим метод решения задачи в случае произвольной кратности корней. Пусть корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  имеют кратности, соответственно,  $m_1, m_2, \dots, m_r$ ,

$$\text{причем } \sum_{i=1}^r m_i = n.$$

1. Зададим матрицу-строку экспоненциального базиса в упорядоченной форме:

$$B_m = [\mathbf{e}^{\lambda_1 t} \quad t\mathbf{e}^{\lambda_1 t} \quad \dots \quad t^{m_1-1}\mathbf{e}^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \quad t\mathbf{e}^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad t^{m_2-1}\mathbf{e}^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad \mathbf{e}^{\lambda_r t} \quad t\mathbf{e}^{\lambda_r t} \quad \dots \quad t^{m_r-1}\mathbf{e}^{\lambda_r t}]. \quad (18)$$

2. Вместо матрицы Вандермонда следует поставить матрицу Вронского  $W$ , построенную на заданном базисе (18) (т. е. элементами первой строки являются элементы матрицы  $B_m$ ) с последующей постановкой в нее значения  $t = 0$ .

3. Матрица-столбец начальных условий будет аналогичной (15).

Тогда в этом случае решение ОДУ для координаты состояния  $x_k(t)$  принимает вид

$$x_k(t) = B_m W^{-1} N.$$

Для рассматриваемого случая столбец  $\text{colon}(\mathbf{e}^{At}, k)$  и элементы  $\mathbf{e}_{ij}^{At} (i, j = \overline{1, n})$  матричной экспоненты  $\mathbf{e}^{At}$  определяются из выражений

$$\begin{aligned} \text{colon}(\mathbf{e}^{At}, k) &= (B_m W^{-1} P_{uk}^T)^T = \\ &= ((B_m W^{-1}) P_{uk}^T) = B_m ((W^{-1} P_{uk}^T)); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{e}_{ij}^{At} = (B_m W^{-1} N) = ((B_m W^{-1}) N) = B_m ((W^{-1} N)),$$

$$\text{где } N = \text{colon}(P_{uj}^T, i). \quad (20)$$

### Построение матрицы Вронского в общем случае

Приступим к построению матрицы  $W$  в общем виде. Будем строить искомую матрицу  $W$  по тому же принципу, по которому строится матрица Вандермонда. Этот принцип состоит в том, что матрица Вандермонда  $V$  есть матрица Вронского  $W$ , построенная на модальных (корневых) экспонентах, в которой выполнена подстановка  $t = t_0 = 0$ . Действительно, для случая различных корней характеристического уравнения имеем:

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & \dots & \mathbf{e}^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & \lambda_2 \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n \mathbf{e}^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{(n-1)} \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

В общем случае искомая матрица должна быть также матрицей Вронского с подстановкой  $t = 0$ , но построенная на экспоненциально-степенном базисе (18) (каноническом базисе системы). Пусть корни  $\lambda_i$  имеют кратности  $m_i$ . Тогда канонический базис равен:  $\mathbf{e}^{\lambda_i t}$ ,  $t\mathbf{e}^{\lambda_i t}$ ,  $t^2\mathbf{e}^{\lambda_i t}$ , ...,  $t^{(m_i-1)}\mathbf{e}^{\lambda_i t}$ .

Рассмотрим случай (предельный), когда все  $n$  корней равны. Для корня  $\lambda = \lambda_1$  кратностью  $n$  состав канонического базиса будет следующим:  $\mathbf{e}^{\lambda t}$ ,  $t\mathbf{e}^{\lambda t}$ ,  $t^2\mathbf{e}^{\lambda t}$ , ...,  $t^{(n-1)}\mathbf{e}^{\lambda t}$ . Запишем для последнего случая при  $n = 4$  матрицу Вронского и матрицу Вронского  $W(t=0)$  с подстановкой  $t = 0$ .

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda t} & t\mathbf{e}^{\lambda t} & t^2\mathbf{e}^{\lambda t} & t^3\mathbf{e}^{\lambda t} \\ \lambda\mathbf{e}^{\lambda t} & \mathbf{e}^{\lambda t}(1+\lambda t) & 2t\mathbf{e}^{\lambda t} & 3t^2\mathbf{e}^{\lambda t} \\ \lambda^2\mathbf{e}^{\lambda t} & 2\lambda\mathbf{e}^{\lambda t} & \mathbf{e}^{\lambda t}(2\lambda^2+4\lambda t+1) & \mathbf{e}^{\lambda t}(2\lambda^2 t+6\lambda t^2+6t) \\ \lambda^3\mathbf{e}^{\lambda t} & 3\lambda^2\mathbf{e}^{\lambda t} & 6\lambda t\mathbf{e}^{\lambda t} & \mathbf{e}^{\lambda t}(3\lambda^2 t^2+9\lambda^2 t^2+18\lambda t+6) \end{bmatrix},$$

$$W(t=0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 & 0 \\ \lambda^3 & 3\lambda^2 & 6\lambda & 6 \end{bmatrix}.$$

Сформулируем и докажем **аналитические** соотношения, достаточные для построения элементов матрицы Вронского  $W(t=0)$ :

$$\begin{cases} w_{ij}(t=0) = 0 \quad \forall j > i; \\ w_{ii}(t=0) = (i-1)!, \quad i = \overline{1, n}; \\ w_{i1}(t=0) = \lambda(i-1), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (21)$$

Для остальных значений  $i, j$  имеем:

$$w_{ij}(t=0) = w_{(i-1)(j-1)}(i-1). \quad (22)$$

**Доказательство.** Докажем соотношения (21), (22). Матрица Вронского  $W$  для рассматриваемого случая имеет вид:

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda t} & t\mathbf{e}^{\lambda t} & t^2\mathbf{e}^{\lambda t} & \dots & t^{(n-1)}\mathbf{e}^{\lambda t} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{e}^{\lambda t}) & \frac{d}{dt}(t\mathbf{e}^{\lambda t}) & \frac{d}{dt}(t^2\mathbf{e}^{\lambda t}) & \dots & \frac{d}{dt}(t^{(n-1)}\mathbf{e}^{\lambda t}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(\mathbf{e}^{\lambda t}) & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(t\mathbf{e}^{\lambda t}) & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(t^2\mathbf{e}^{\lambda t}) & \dots & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(t^{(n-1)}\mathbf{e}^{\lambda t}) \end{bmatrix}.$$

Общий элемент матрицы Вронского равен

$$w_{ij}(t) = \frac{d^{(i-1)}(t^{j-1}\mathbf{e}^{\lambda t})}{dt^{(i-1)}}. \quad (23)$$

Вычисление производной (23) может быть осуществлено с использованием формулы Лейбница

(кратного дифференцирования произведения двух функций) [1]:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где  $u, v$  — дифференцируемые функции.

Рассмотрим произвольный элемент матрицы Вронского и воспользуемся формулой Лейбница в этом частном случае:

$$w_{ij}(t) = \frac{d^{(i-1)}(t^{j-1}\mathbf{e}^{\lambda t})}{dt^{(i-1)}} = (t^{j-1}\mathbf{e}^{\lambda t})^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k (t^{j-1})^{(i-1-k)} (\mathbf{e}^{\lambda t})^{(k)}. \quad (24)$$

Проанализируем два характерных случая.

1. Допустим,  $i < j$ . Тогда, как следует из (24), при любом значении  $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$  после вычисления производных любой элемент выражения (24) содержит в качестве множителя переменную  $t$  в степени, большей нулевой. Следовательно,  $w_{ij}(t=0) = 0 \quad \forall i < j$ .

**Пример 1.** Пусть  $j = 5$  и  $i = 3$ , т. е.  $i < j$ . Тогда

$$w_{35}(t) = \frac{d^{(3-1)}(t^{5-1}\mathbf{e}^{\lambda t})}{dt^{(3-1)}} = (t^4\mathbf{e}^{\lambda t})^{(3-1)} = (t^4\mathbf{e}^{\lambda t})^{(2)} = \sum_{k=0}^2 C_2^k (t^4)^{(2-k)} (\mathbf{e}^{\lambda t})^{(k)}.$$

Дифференцируя, получим

$$w_{35}(t) = C_2^0 \cdot 4 \cdot 3t^2\mathbf{e}^{\lambda t} + C_2^1 \cdot 4t^3 \cdot \lambda\mathbf{e}^{\lambda t} + C_2^2 t^4 \lambda^2 \mathbf{e}^{\lambda t}.$$

При  $t = 0$  имеем  $w_{35}(t=0) = 0 + 0 + 0 = 0$ .

2. Пусть теперь  $i \geq j$ . В этом случае единственный элемент суммы (24) будет отличен от нуля. Это произойдет только в случае, когда порядок производной будет равен показателю степени при переменной  $t$ . Остальные элементы суммы будут равны нулю:

а) в случае, если порядок производной больше степени при  $t$  (на некотором шаге будет вычисляться производная от постоянной величины);

б) в случае, если порядок производной меньше степени при  $t$ . В этом случае элемент суммы содержит (после дифференцирования) множитель  $t$  в степени больше нулевой и после подстановки значения  $t = 0$  такой элемент обнуляется.

Найдем элемент суммы, который не равен нулю. Пусть этот элемент будет при значении  $k = q$ .

Из условия  $i-1-q = j-1$  найдем значение  $q = i-j$ . Тогда искомый элемент  $w_{ij}(t)$  будет равен

$$w_{ij}(t) = C_{i-1}^{i-j} (t^{j-1})^{(j-1)} (\mathbf{e}^{\lambda t})^{(j-1)} = \frac{(i-1)!}{(i-j)! \cdot (j-1)!} (j-1)! \lambda^{i-j} \mathbf{e}^{\lambda t}.$$

После упрощения получим  $w_{ij}(t) = \frac{(i-1)!}{(i-j)!} \lambda^{i-j} e^{\lambda t}$ .  
 Полагая  $t = 0$ , найдем элементы матрицы Вронского  $W(t = 0)$ :

$$w_{ij}(0) = \frac{(i-1)!}{(i-j)!} \lambda^{i-j}, \quad i \geq j. \quad (25)$$

**Пример 2.** Пусть  $j = 3$  и  $i = 5$ , т. е.  $i > j$ . Тогда

$$\begin{aligned} w_{ij}(t) &= \frac{d^{(i-1)}(t^{j-1} e^{\lambda t})}{t^{(i-1)}} = (t^{j-1} e^{\lambda t})^{(i-1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k (t^{j-1})^{(i-1-k)} (e^{\lambda t})^k, \\ w_{53}(t) &= \frac{d^{(5-1)}(t^{3-1} e^{\lambda t})}{t^{(5-1)}} = (t^{3-1} e^{\lambda t})^{(5-1)} = \\ &= (t^2 e^{\lambda t})^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k (t^2)^{(4-k)} (e^{\lambda t})^k. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим

$$\begin{aligned} w_{53}(t) &= 0 + 0 + C_4^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + \\ &+ C_4^3 \cdot 2 \cdot t \cdot \lambda^3 e^{\lambda t} + C_4^4 \cdot t^2 \lambda^4 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

При  $t = 0$ :  $w_{53}(t = 0) = 0 + 0 + C_4^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \lambda^2 + 0 + 0 = 6 \cdot 2 \cdot \lambda^2 = 12\lambda^2$ .

Рассмотрим частные случаи, когда  $j = 1$  и  $i = j$ . Из выражения (25) следует, что

$$w_{i1}(0) = \frac{\lambda^{(i-1)}}{(i-1)!} (i-1)! = \lambda^{(i-1)}, \quad j = 1; \quad (26)$$

$$w_{ii}(t = 0) = w_{ii}(0) = (i-1)!, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, все элементы матрицы Вронского  $W(t = 0)$  определены однозначно: при  $i < j$  элементы равны нулю; при  $i \geq j$  элементы определяются из выражений (25), (26). Заметим, однако, что при большой размерности исходной системы вычисление значений факториалов становится трудоемкой процедурой. В целях существенного упрощения вычислений найдем значение отношения элементов  $w_{ij}(0)$  и  $w_{(i-1)(j-1)}(0)$ :

$$R = \frac{w_{ij}(0)}{w_{(i-1)(j-1)}(0)} = \frac{(i-1)!}{(i-2)!} = (i-1).$$

Тогда

$$w_{ij}(0) = (i-1)w_{(i-1)(j-1)}(0). \quad (27)$$

Таким образом, соотношения (21), (22) доказаны.

**Методика вычисления матрицы Вронского  $W(t = 0)$**

1. Если  $i < j$ , то элементы матрицы Вронского  $W(t = 0)$  положить равными нулю.

2. По выражению (26) построить все элементы первого столбца матрицы Вронского  $W(t = 0)$ .

3. С использованием выражения (27) найти все остальные элементы матрицы Вронского  $W(t = 0)$ .

**Пример 3.** Построить матрицу Вронского  $W(t = 0)$ , если  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ .

**Решение.**

1. Элементы  $w_{ij}(t = 0)$  полагаем равными нулю, если  $i < j$ .

2. Строим элементы первого столбца по выражению (26).

3. По выражению (27) найдем остальные элементы, например,  $w_{22}(t = 0) = (2-1)w_{11}(t = 0) = (2-1) \cdot 1 = 1$ ;  $w_{32}(t = 0) = (3-1) \cdot \lambda = 2\lambda$ ;  $w_{42}(t = 0) = (4-1) \cdot \lambda^2 = 3\lambda^2$  и т. д.

$$\text{В итоге получим } W(t = 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 & 0 \\ \lambda^3 & 3\lambda^2 & 6\lambda & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Пример 4. Дано: матрица } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) найти элемент матричной экспоненты — только  $e_{32}^{At}$ ;

2) построить второй столбец  $\text{colon}(e^{At}, 2)$  (только второй) матричной экспоненты.

**Решение.**

1. Запишем характеристическое уравнение  $s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4 = 0$ , найдем его корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$  и их кратности  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 2$ .

2. Матрица-строка экспоненциально-степенного базиса  $B_m = [e^{-t} \quad te^{-t} \quad e^{-2t} \quad te^{-2t}]$ .

3. Исходные начальные условия (первый столбец матрицы  $P_{u2}$ ) для поставленной задачи будут унитарными, причем  $X_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ .

4. Для построения матриц  $P_{u2}$ ,  $P_{u2}^T$ ,  $N$  проведем промежуточные вычисления, а именно, найдем матрицы  $A^2 = \begin{bmatrix} -13 & -6 & 1 & 0 \\ 66 & 23 & -6 & 1 \\ -4 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{bmatrix} 66 & 23 & -6 & 1 \\ -231 & -72 & 23 & -6 \\ 156 & 68 & -12 & 0 \\ 52 & 24 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$AX_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2X_0 = \begin{bmatrix} -6 \\ 23 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad A^3X_0 = \begin{bmatrix} 23 \\ -72 \\ 68 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$P_{u2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 23 \\ 1 & -6 & 23 & -72 \\ 0 & 0 & -12 & 68 \\ 0 & 0 & -4 & 24 \end{bmatrix}, P_{u2}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & -12 & -4 \\ 23 & -72 & 68 & 24 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 68 \end{bmatrix}.$$

5. Построим матрицы  $W$ ,  $W^{-1}$  на экспоненциально-степенном базисе с подстановкой  $t = 0$ :

$$W(t=0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -8 & 12 \end{bmatrix};$$

$$W^{-1}(t=0) = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -9 & -2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. С использованием выражений (19), (20) найдем  $e^{At}$  и  $\text{colon}(e^{At}, 2)$ . Для нахождения  $e^{At}$  предварительно вычислим

$$(W^{-1}N) = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -9 & -2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 8 \\ 28 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$e^{At} = [e^{-t} \quad te^{-t} \quad e^{-2t} \quad te^{-2t}] \begin{bmatrix} -28 \\ 8 \\ 28 \\ 20 \end{bmatrix} =$$

$$= -28e^{-t} + 8te^{-t} + 28e^{-2t} + 20te^{-2t}.$$

Для нахождения  $\text{colon}(e^{At}, 2)$  предварительно вычислим

$$W^{-1}P_{u2}^T = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -9 & -2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & -12 & -4 \\ 23 & -72 & 68 & 24 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 5 & -28 & -12 \\ 1 & -1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 28 & 12 \\ 4 & -8 & 20 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \text{colon}(e^{At}, 2) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ e^{-2t} \\ te^{-2t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -4 & 5 & -28 & -12 \\ 1 & -1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 28 & 12 \\ 4 & -8 & 20 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4e^{-t} + te^{-t} + 4e^{-2t} + 4te^{-2t} \\ 5e^{-t} - te^{-t} - 4e^{-2t} - 8te^{-2t} \\ -28e^{-t} + 8te^{-t} + 28e^{-2t} + 20te^{-2t} \\ -12e^{-t} + 4te^{-t} + 12e^{-2t} + 8te^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что время вычисления матричной экспоненты для исходной матрицы 20-го порядка составляет, в среднем, 3 с, а для матрицы 50-го порядка — 212 с.

### Метод Кэли—Гамильтона построения матричной экспоненты для случая кратных корней характеристического уравнения

Полученные результаты позволяют строить матричную экспоненту с использованием метода Кэли—Гамильтона для случая кратных корней характеристического уравнения. В соответствии с методом Кэли—Гамильтона матричную экспоненту находят из выражения [6]

$$e^{At} = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1},$$

где неизвестные коэффициенты  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , получают из уравнения  $[\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1}]^T = (W^T(t=0))^{-1}B_m^T$ .

**Пример 5.** Для исходных данных, приведенных в примере 4, найти матричную экспоненту по методу Кэли—Гамильтона.

**Решение.** Найдем  $W^T(t=0)$  и  $(W^T(t=0))^{-1}$ :

$$W^T(t=0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix}; (W^T(t=0))^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 5 & 2 \\ -12 & 8 & 12 & 5 \\ -9 & 5 & 9 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 5 & 2 \\ -12 & 8 & 12 & 5 \\ -9 & 5 & 9 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ e^{-2t} \\ te^{-2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4e^{-t} + 4te^{-t} + 5e^{-2t} + 2te^{-2t} \\ -12e^{-t} + 8te^{-t} + 12e^{-2t} + 5te^{-2t} \\ -9e^{-t} + 5te^{-t} + 9e^{-2t} + 4te^{-2t} \\ -2e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-2t} + te^{-2t} \end{bmatrix}.$$



Согласно теореме Кэли—Гамильтона имеем

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0(t) \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \alpha_2(t) \begin{bmatrix} -13 & -6 & 1 & 0 \\ 66 & 23 & -6 & 1 \\ -4 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3(t) \begin{bmatrix} 66 & 23 & -6 & 1 \\ -231 & -72 & 23 & -6 \\ 156 & 68 & -12 & 0 \\ 52 & 24 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

После подстановки значений  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 3$ , получим

$$e^{At} = [\text{colon}(e^{At}, 1) \text{ colon}(e^{At}, 2) \text{ colon}(e^{At}, 3) \text{ colon}(e^{At}, 4)],$$

где

$$\text{colon}(e^{At}, 1) = \begin{bmatrix} -19e^{-t} + 5te^{-t} + 20e^{-2t} + 16te^{-2t} \\ 24e^{-t} - 5te^{-t} - 24e^{-2t} - 32te^{-2t} \\ -132e^{-t} + 40te^{-t} + 132e^{-2t} + 80te^{-2t} \\ -56e^{-t} + 20te^{-t} + 56e^{-2t} + 32te^{-2t} \end{bmatrix};$$

$$\text{colon}(e^{At}, 2) = \begin{bmatrix} -4e^{-t} + te^{-t} + 4e^{-2t} + 4te^{-2t} \\ 5e^{-t} - te^{-t} - 4e^{-2t} - 8te^{-2t} \\ -28e^{-t} + 8te^{-t} + 28e^{-2t} + 20te^{-2t} \\ -12e^{-t} + 4te^{-t} + 12e^{-2t} + 8te^{-2t} \end{bmatrix};$$

$$\text{colon}(e^{At}, 3) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - te^{-t} - 3e^{-2t} - 2te^{-2t} \\ -4e^{-t} + te^{-t} + 4e^{-2t} + 4te^{-2t} \\ 20e^{-t} - 8te^{-t} - 19e^{-2t} - 10te^{-2t} \\ 8e^{-t} - 4te^{-t} - 8e^{-2t} - 4te^{-2t} \end{bmatrix};$$

$$\text{colon}(e^{At}, 4) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-2t} + te^{-2t} \\ 3e^{-t} - te^{-t} - 3e^{-2t} - 2te^{-2t} \\ -12e^{-t} + 8te^{-t} + 12e^{-2t} + 5te^{-2t} \\ -4e^{-t} + 4te^{-t} + 5e^{-2t} + 2te^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Результаты решения, полученные различными методами, совпадают.

## Заключение

Предложен новый универсальный (в отношении кратности корней характеристического полинома) метод построения матричной экспоненты, использующий матрицу Вронского на каноническом базисе.

Получены аналитические выражения для элементов матрицы Вронского, не требующие выполнения операции дифференцирования, и разработан алгоритм построения этой матрицы на экспоненциально-степенном базисе. Высокая производительность алгоритма основана на выявленном соотношении между смежными элементами матрицы Вронского, что позволило исключить громоздкие вычисления факториалов.

Метод позволяет проводить параллельные вычисления как отдельных элементов матричной экспоненты, так и, по желанию, отдельных столбцов.

Метод может быть использован для расширения возможностей известных методов построения матричной экспоненты, например, метода Кэли—Гамильтона.

## Список литературы

1. **Бугров Я. С., Никольский С. М.** Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 432 с.
2. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 576 с.
3. **Голуб Дж., Ч. Ван Лоун.** Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
4. **Данко П. Е., Попов А. Г.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1974. 464 с.
5. **Егоров А. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.
6. **Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5 томах; 2-е изд. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егунова. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 656 с.**
7. **Пантелеев А. В., Якимов А. С., Босов А. В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учеб. пособие. М.: Высш. школа, 2001. 376 с.
8. **Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 712 с.**
9. **Сигорский В. П.** Математический аппарат инженера. Киев: Техника, 1975. 768 с.
10. **Суевалов Л. Ф.** Справочник по расчетам судовых автоматических систем. 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Судостроение, 1989. 408 с.
11. **Сю Д., Майер А.** Современная теория управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972.

УДК 621.317.33

**В. С. Мелентьев**, д-р техн. наук, зав. кафедрой,  
vs\_mel@mail.ru,

**В. И. Батищев**, д-р техн. наук, зав. кафедрой,  
vib@list.ru,

**А. М. Смолина**, аспирант,  
Самарский государственный  
технический университет

## Метод измерения параметров емкостных датчиков положения и перемещения\*

*Исследуется новый метод измерения параметров емкостных датчиков по мгновенным значениям двух переходных процессов. Основное внимание уделено анализу погрешности, обусловленной отклонением реального переходного процесса от заложенного в модели измерительной цепи. Приводятся результаты анализа, позволяющие оптимально выбрать параметры измерительного процесса.*

**Ключевые слова:** емкостные датчики, переходный процесс, мгновенные значения, погрешность

### Введение

Современное состояние техники характеризуется широкой автоматизацией технологических процессов, невозможных без измерения и контроля различных величин. Датчики положения и перемещения находят очень широкое применение, поскольку контроль данных характеристик является важным элементом правильного функционирования большого числа разнообразных машин и механизмов и автоматического управления производственными процессами. В то же время многие физические величины измеряются с помощью их первичного преобразования в перемещения, которое они вызывают в образцах: это относится к измерению сил, давлений, ускорений, температур и т. д. [1].

В настоящее время успешно развивается направление, связанное с разработкой методов и средств измерения параметров емкостных датчиков (ЕД) по отдельным мгновенным значениям переходного процесса в измерительной цепи (ИЦ) при подключении к ней напряжения постоянного тока. В данных методах время измерения не зависит от постоянной времени цепи  $\tau$ , а определяется в основном временем измерения мгновенных значений пере-

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-08-00039-а).

ходного процесса и реализации алгоритма обработки измеренных значений [2].

Дальнейшее сокращение времени измерения может быть обеспечено за счет использования нескольких переходных процессов. Большинство методов измерения параметров ЕД по мгновенным значениям двух переходных процессов [3] предполагают наличие вспомогательной ИЦ с известными и, следовательно, стабильными элементами. Однако реализация высокостабильных реактивных элементов достаточно затруднительна.

В работе [4] авторами предложен метод измерения параметров ЕД по мгновенным значениям переходных процессов с использованием двух образцовых резисторов. Недостатком данного метода и реализующих его средств измерений является непосредственная связь момента подачи напряжения на ИЦ с моментом начала измерения, что не всегда выполнимо в реальных условиях.

Предлагаемый метод позволяет начинать измерение в произвольный момент времени после начала переходного процесса в ИЦ.

### Метод измерения параметров емкостных датчиков с использованием двух образцовых элементов

Метод заключается в том, что на измерительную цепь, состоящую из последовательно включенных двух образцовых сопротивлений и емкости, подают напряжение постоянного тока. В произвольный момент времени одновременно измеряют мгновенные значения напряжений на участке цепи, содержащем второе образцовое сопротивление и емкость, и емкости относительно общего вывода ИЦ. Через образцовый интервал времени с момента первого измерения измеряют мгновенное значение напряжения на том же участке цепи относительно общего вывода и определяют неизвестную емкость по измеренным значениям.

Временные диаграммы, поясняющие метод, представлены на рис. 1.

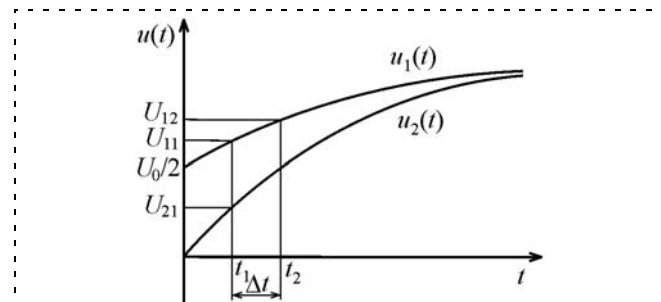


Рис. 1. Временные диаграммы, поясняющие метод

После подключения источника напряжения постоянного тока  $U_0$  к измерительной цепи напряжения на участке цепи, содержащем второе образцовое сопротивление  $R_0$  и емкость  $C_X$ , и на емкости относительно общего вывода ИЦ изменяются в соответствии с выражениями

$$u_1(t) = U_0 \left[ 1 - \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{2} \right]; \quad (1)$$

$$u_2(t) = U_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

где  $\tau = 2C_X R_0$  — постоянная времени активно-емкостной ИЦ.

В произвольный момент времени  $t_1$  мгновенные значения напряжений на участке цепи  $R_0-C_X$  и на емкости относительно общего вывода ИЦ примут вид

$$U_{11} = U_0 \left[ 1 - \frac{\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)}{2} \right]; \quad (2)$$

$$U_{21} = U_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right].$$

Через образцовый интервал времени  $\Delta t$  в момент времени  $t_2$  мгновенное значение напряжения на том же участке цепи  $R_0-C_X$  относительно общего вывода соответствует выражению

$$U_{12} = U_0 \left[ 1 - \frac{\exp\left(-\frac{t_1 + \Delta t}{\tau}\right)}{2} \right]. \quad (3)$$

Из отношения  $\frac{2U_{11} - U_{21} - U_{12}}{U_{11} - U_{21}} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)$  после преобразований следует, что

$$\tau = -\frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{2U_{11} - U_{21} - U_{12}}{U_{11} - U_{21}}\right)}. \quad (4)$$

В соответствии с (4) для активно-емкостной ИЦ

$$C_X = -\frac{\Delta t}{2R_0 \ln\left(\frac{2U_{11} - U_{21} - U_{12}}{U_{11} - U_{21}}\right)}. \quad (5)$$

При больших постоянных времени ИЦ и малых значениях  $\Delta t$  целесообразно изменить конфигурацию измерительной цепи, поменяв местами емкость со вторым образцовым сопротивлением.

Временные диаграммы, поясняющие рассматриваемый случай, представлены на рис. 2.

После подключения источника напряжения постоянного тока к измерительной цепи напряжение на участке цепи, содержащем емкость и второе образцовое сопротивление, относительно общего вы-

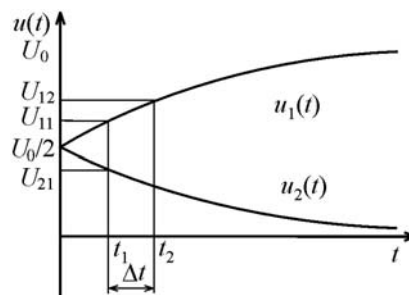


Рис. 2. Временные диаграммы, поясняющие метод при модифицированной активно-емкостной цепи

вода ИЦ будет изменяться в соответствии с выражением (1), а на втором сопротивлении напряжение будет равно  $u_2(t) = \frac{U_0}{2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$ .

В произвольный момент времени  $t_1$  мгновенное значение напряжения на том же участке цепи  $C_X-R_0$  соответствует выражению (2), а на втором сопротивлении напряжение будет равно  $U_{21} = \frac{U_0}{2} \times \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]$ .

Через образцовый интервал времени  $\Delta t$  в момент времени  $t_2$  мгновенное значение напряжения на участке цепи  $C_X-R_0$  относительно общего вывода ИЦ соответствует выражению (3).

Из отношения  $\frac{2U_{21} - U_{12}}{2U_{21} - U_{11}} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)$  после преобразований следует, что

$$\tau = -\frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{2U_{21} - U_{12}}{2U_{21} - U_{11}}\right)}. \quad (6)$$

В соответствии с (6) для активно-емкостной цепи

$$C_X = -\frac{\Delta t}{R_0 \ln\left(\frac{2U_{21} - U_{12}}{2U_{21} - U_{11}}\right)}. \quad (7)$$

#### Анализ погрешности метода из-за отклонения реального переходного процесса от заложенного в модели

При рассмотрении вопросов проектирования средств измерения параметров датчиков одним из главных является построение схемы замещения измерительных цепей на основе априорной информации об объекте исследования и непосредственное измерение значений параметров элементов, из которых составляется структура (топология) ИЦ.

Реальные измерительные цепи датчиков содержат кроме элемента, параметр которого является информативным, ряд других элементов, параметры

которых обычно называют паразитными. Если при тех же значениях образцовых резисторов  $R_0$  не учитывать активное сопротивление соединительных проводников  $R_{\Pi}$  и его изменение при колебаниях температуры, а также сопротивление контактов, то это приведет к погрешности определения емкости.

Наличие активного сопротивления проводников  $R_{\Pi}$  можно имитировать увеличением постоянной времени цепи  $\tau$  и считать, что постоянная времени реальной цепи  $\tau_p = (2R_0 + R_{\Pi})C_X$ .

Оценку влияния составляющих погрешности, обусловленных несоответствием модели виду реального переходного процесса, на погрешность результата измерения можно провести, используя расчетное значение параметра реальной ИЦ и определение относительной погрешности:

$$\delta_C = \frac{C - C_p}{C_p} = -\frac{R_{\Pi}}{2R_0 + R_{\Pi}}, \quad (8)$$

где  $C_p$  — расчетное значение емкости.

График зависимости погрешности от отношения  $R_{\Pi}/R_0$  согласно (8) представлен на рис. 3.

Анализ (8) и рис. 3 показывает, что зависимость  $\delta_C$  от  $R_{\Pi}/R_0$  носит линейный характер.

Рассмотрим другую методику оценки с помощью определения погрешности измерения параметров как функции, аргументы которой заданы приближенно с погрешностью, соответствующей отклонению модели от реального сигнала.

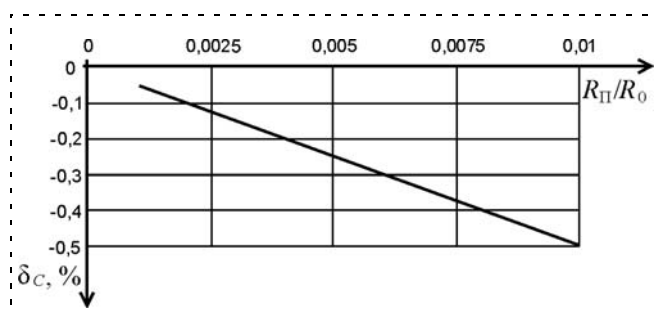


Рис. 3. График зависимости погрешности, обусловленной отклонением реального переходного процесса от модели

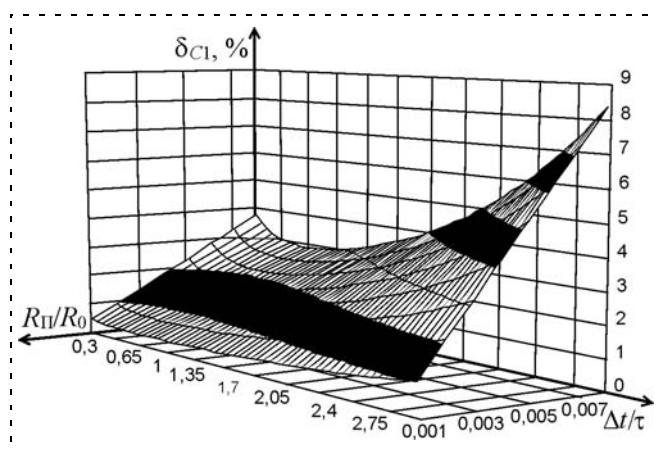


Рис. 4. График зависимости  $\delta_{C1}$  от  $R_{\Pi}/R_0$  и  $\Delta t/\tau$  при оценке погрешности по наибольшему отклонению модели от реального сигнала

нению модели от реального сигнала. Как известно, погрешность вычисления значения какой-либо функции, аргументы которой заданы приближенно, может быть оценена с помощью дифференциала этой функции. Погрешность функции есть не что иное, как возможное приращение функции, которое она получит, если ее аргументам дать приращения, равные их погрешностям. В зависимости от того, как производится оценка отклонения модели от реального сигнала, возможны два основных подхода к определению погрешности [5].

В случае, когда предельные абсолютные погрешности аргументов соответствуют наибольшему отклонению параметров модели от реального переходного процесса в ИЦ  $\Delta U_{\max}$ , абсолютная погрешность измерения емкости в соответствии с (5) и (7) равна

$$\Delta C_X = [|(C_X)'_{U_{11}}| + |(C_X)'_{U_{21}}| + |(C_X)'_{U_{12}}|] \Delta U_{\max}. \quad (9)$$

В общем случае можно считать, что предельное значение  $\Delta U_{\max}$  равно

$$\Delta U_{\max} = \sup \left[ \frac{U_0}{2} \left| \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) \right| \right], \quad (10)$$

т. е. зависит от отношения  $\tau/\tau_p$  и может быть вычислено путем решения уравнения  $\left[ \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) \right]' = 0$ .

Тогда предельная относительная погрешность измерения емкости при использовании первой ИЦ в соответствии с (9) с учетом (5) и (10) равна

$$\delta_{C1} = \frac{\tau(2R_0 + R_{\Pi}) \left[ 2 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]}{\Delta t R_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)} \times \left| \exp\left(\frac{\ln \frac{\tau_p}{\tau}}{\frac{R_{\Pi}}{R_0}}\right) - \exp\left(\frac{\ln \frac{\tau_p}{\tau}}{\frac{R_{\Pi}}{R_0}} \cdot \frac{\tau}{\tau_p}\right) \right|. \quad (11)$$

На рис. 4 представлен график зависимости погрешности  $\delta_{C1}$  от отношений  $\Delta t/\tau$  и  $R_{\Pi}/R_0$  при  $t_1/\tau = 0,01$  согласно (11).

Относительная погрешность измерения емкости при использовании модифицированной ИЦ в соответствии с (9) с учетом (7) и (10) равна

$$\delta_{C2} = \frac{\tau(2R_0 + R_{\Pi}) \left[ 7 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]}{3 \Delta t R_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \left[ 2 + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]} \times \left| \exp\left(\frac{\ln \frac{\tau_p}{\tau}}{\frac{R_{\Pi}}{R_0}}\right) - \exp\left(\frac{\ln \frac{\tau_p}{\tau}}{\frac{R_{\Pi}}{R_0}} \cdot \frac{\tau}{\tau_p}\right) \right|. \quad (12)$$

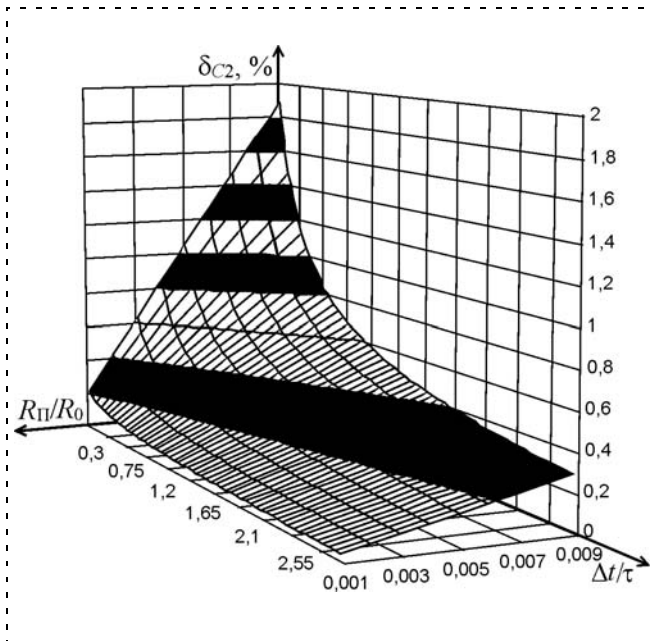


Рис. 5. График зависимости  $\delta_{C2}$  от  $R_n/R_0$  и  $\Delta t/\tau$  при оценке погрешности по наибольшему отклонению модели от реального сигнала для модифицированной ИЦ

На рис. 5 представлен график зависимости погрешности  $\delta_{C2}$  от отношений  $\Delta t/\tau$  и  $R_n/R_0$  при  $t_1/\tau = 0,01$  согласно (12).

Если считать, что предельные абсолютные погрешности аргументов соответствуют отклонению модели от реального сигнала, определяемому через среднеквадратическую погрешность  $\sigma$ , то абсолютная погрешность измерения индуктивности равна

$$\Delta C_X = [|(C_X)'_{U_{11}}| + |(C_X)'_{U_{21}}| + |(C_X)'_{U_{12}}|] \sigma. \quad (13)$$

Среднеквадратическая погрешность определяется выражением

$$\sigma^2 = \frac{U_0^2}{2T_{и}(\tau + \tau_p)} \left\{ \tau \tau_p \left[ \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]^2 + \left[ \tau_p \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_p}\right) - \tau \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]^2 - \tau \tau_p \left[ \exp\left(-\frac{T_{и}}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{T_{и}}{\tau}\right) \right]^2 - \left[ \tau_p \exp\left(-\frac{T_{и}}{\tau_p}\right) - \tau \exp\left(-\frac{T_{и}}{\tau}\right) \right]^2 \right\}, \quad (14)$$

где  $T_{и}$  — время измерения.

Заменяя в (14)  $T_{и}$  на  $\Delta t$ , с учетом (5) и (13) можно получить относительную погрешность измерения емкости при использовании первой ИЦ

$$\delta_{C1} = \frac{\tau(2R_0 + R_n) \left[ 2 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]}{\Delta t \sqrt{2\Delta t(\tau + \tau_p)} R_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)} \times$$

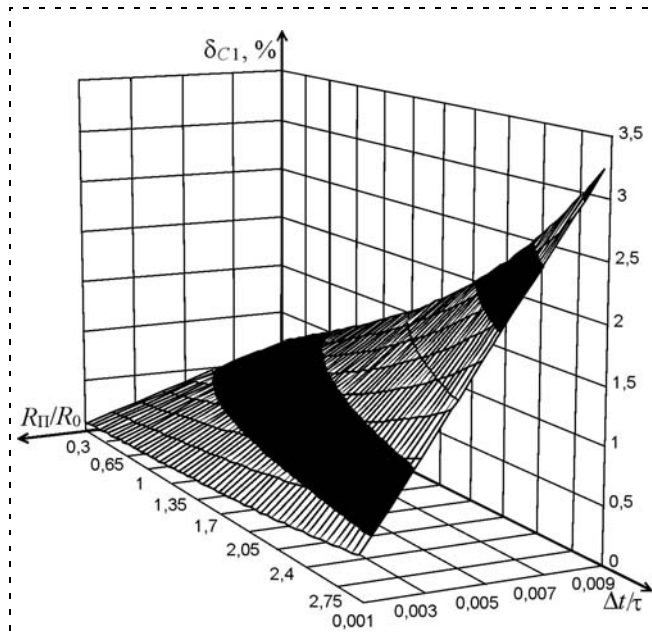


Рис. 6. График зависимости  $\delta_{C1}$  от  $R_n/R_0$  и  $\Delta t/\tau$  при оценке погрешности через среднеквадратическую погрешность

$$\times \left\{ \tau \tau_p \left[ \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]^2 + \left[ \tau_p \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_p}\right) - \tau \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]^2 - \tau \tau_p \left[ \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]^2 - \left[ \tau_p \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

На рис. 6 представлен график зависимости погрешности  $\delta_{C1}$  от  $\Delta t/\tau$  и  $R_n/R_0$  при  $t_1/\tau = 0,01$  в соответствии с (15).

Относительная погрешность измерения емкости при использовании модифицированной ИЦ в соответствии с (14) с учетом (7) и (13) равна

$$\delta_{C2} = \frac{\tau(2R_0 + R_n) \left[ 7 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]}{3\Delta t \sqrt{2\Delta t(\tau + \tau_p)} R_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \left[ 2 + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]} \times \left\{ \tau \tau_p \left[ \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]^2 + \left[ \tau_p \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_p}\right) - \tau \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right]^2 - \tau \tau_p \left[ \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]^2 - \left[ \tau_p \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

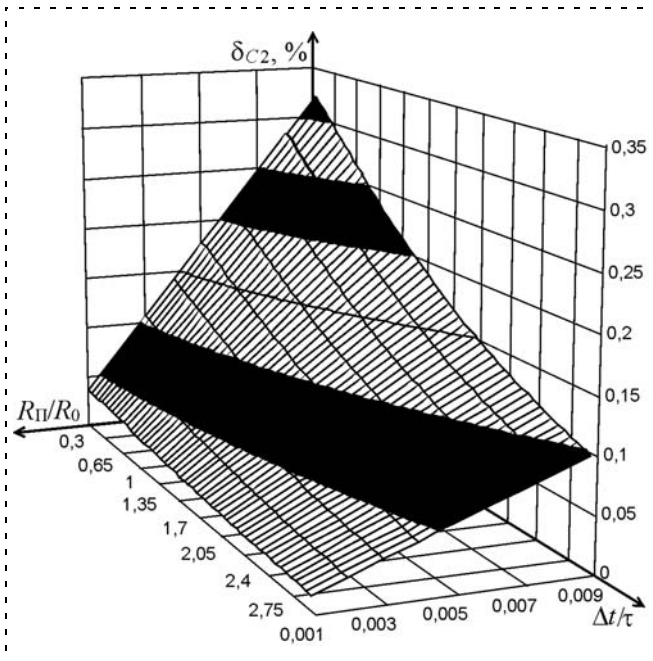


Рис. 7. График зависимости  $\delta_{C2}$  от  $R_{П}/R_0$  и  $\Delta t/\tau$  при оценке погрешности через среднеквадратическую погрешность для модифицированной ИЦ

На рис. 7 представлен график зависимости погрешности  $\delta_{C2}$  от  $\Delta t/\tau$  и  $R_{П}/R_0$  при  $t_1/\tau = 0,01$  в соответствии с (16).

### Заключение

Предлагаемый метод измерения параметров ЕД по мгновенным значениям переходных процессов с использованием двух образцовых резисторов позволяет начинать измерение в произвольный момент времени после начала переходного процесса в ИЦ. Реализация метода не требует использования вспомогательной ИЦ с известными реактивными элементами, что повышает точность измерения.

Проведенный анализ показывает, что оценка погрешности по наибольшему отклонению значений модели от соответствующих значений реального переходного процесса в ИЦ в соответствии с (11) дает, в общем случае, завышенные результаты и целесообразна для использования только при малых значениях  $R_{П}/R_0$  и  $0,5 \leq \Delta t/\tau \leq 2$ . Данный вид погрешности значительно уменьшается при использовании модифицированной ИЦ.

Оценка погрешности измерения информативного параметра ЕД по отклонению модели от реального сигнала, определяемому через среднеквадратическую погрешность, существенно зависит от отношения образцового интервала времени к постоянной времени ИЦ и значительно снижается при уменьшении отношения  $\Delta t/\tau$  для первой измерительной цепи и увеличении данного отношения для модифицированной цепи. Кроме того, погрешность зависит также от момента начала измерения и с увеличением отношения  $t_1/\tau$  возрастает.

Таким образом, погрешность, обусловленную отклонением модели от реального переходного процесса, можно значительно снизить за счет соответствующего выбора параметров измерительного процесса.

### Список литературы

1. Батищев В. И., Мелентьев В. С. Измерение параметров емкостных датчиков положения и перемещения. М.: Машиностроение-1, 2005.
2. Мелентьев В. С. Аппроксимационные методы измерения параметров линейных электрических цепей // Измерительная техника. 2010. № 10. С. 57–59.
3. Мелентьев В. С. Новое в измерениях параметров емкостных датчиков по мгновенным значениям переходных процессов // Датчики и системы. 2010. № 2. С. 26–29.
4. Мелентьев В. С., Батищев В. И., Костенко Е. В. Анализ погрешности метода измерения параметров линейных электрических цепей с двумя опорными элементами // Матер. конф. "Современные информационные технологии". Пенза. 2011. Вып. 13. С. 81–84.
5. Батищев В. И., Мелентьев В. С. Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики. М.: Машиностроение-1, 2007.

## К сведению читателей

Текст ссылки в № 6, 2012 на странице 47 (внизу) считать неверным. Правильной считать ссылку в следующей редакции: "Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Государственный контракт от 12.10.2011 № 07.514.11.4062) и грантов РФФИ".

**Е. С. Лобусов**, канд. техн. наук, доц.,  
evgeny.lobusov@yandex.ru,  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Использование средств инерциальной навигации для определения пространственного углового положения цилиндрических тел

*Рассматриваются вопросы, связанные с получением математического описания и алгоритмов обработки данных для устройства, с помощью которого можно определять пространственное угловое расположение круговых цилиндрических тел, положение которых задается фиксированным вектором относительно задаваемой системы координат. Предлагается использовать векторный измеритель угловой скорости (ВИУС), который жестко установлен на перемещаемой оператором платформе, а оси чувствительности ВИУС образуют систему координат платформы.*

*Приводятся алгоритмы, которые позволяют выполнить обработку данных и получить оценку пространственного углового положения цилиндрического тела.*

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, измеритель угловой скорости (лазерный), цилиндрическое тело, кинематические уравнения в кватернионах, моделирование

### Введение

Аппаратные и алгоритмические средства инерциальной навигации можно продуктивно использовать для решения разнообразных задач [1], одной из которых является задача определения относительного пространственного углового положения некоторого фиксированного направления. Так, в частности, в работе [2] описывается аппаратная реализация подобного устройства, которое используется в сталелитейной и бумажной промышленности (название системы "Paralign") для правильной пространственной установки цилиндрических ва-

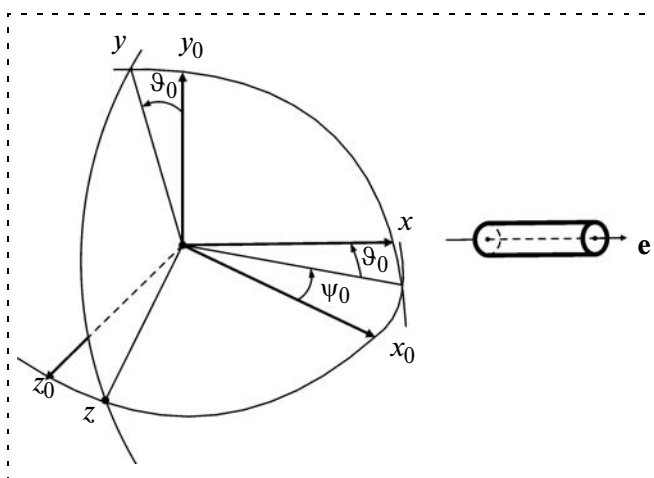


Рис. 1. Угловая ориентация неизвестного направления

лов, однако математическое описание и алгоритмы обработки не приводятся.

Рассмотрение данной задачи с точки зрения получения математического описания и соответствующих алгоритмов обработки и составляет предмет данной работы.

Некоторое неизвестное, но фиксированное направление, связанное с центральной осью кругового цилиндрического тела, определим единичным вектором  $e$ , положение которого задается двумя неизвестными углами  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$  в последовательности поворотов типа 2—3. Именно эти углы и следует определить относительно эталонной системы координат  $(x_0, y_0, z_0)$  (рис. 1).

Система координат СК<sub>0</sub>  $(x_0, y_0, z_0)$  является неподвижной относительно Земли. Само цилиндрическое тело находится в некоторой ограниченной окрестности эталонной системы координат СК<sub>0</sub>.

Для измерения неизвестного углового положения вектора  $e$  воспользуемся кинематическим подходом. Для этой цели введем вторую *подвижную систему координат* СКП  $(x, y, z)$ , связанную с платформой, имеющей выделенную ось  $x$ , текущее угловое положение которой непрерывно определяется. В идеальном случае при совмещении выделенной оси СКП с вектором  $e$  углы  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$  автоматически определяются.

В основе данного кинематического подхода лежит процедура интегрирования кинематических уравнений углового движения подвижной платформы, с которой жестко связана система координат СКП. Информацию о текущей угловой скорости выдает векторный (например, лазерный) измеритель угловой скорости (ВИУС), жестко установленный на перемещаемой платформе. Оси чувствительности ВИУС и формируют оси подвижной системы координат СКП платформы.

В начальный момент времени оси двух систем координат СК<sub>0</sub> и СКП совпадают. В процессе переноса платформы с некоторой угловой скоростью ее текущее угловое положение определяется углами последовательных поворотов типа 2-3-1. Перенос платформы осуществляется оператором.

Процесс переноса платформы заканчивается установкой ее горизонтальной плоскости на поверхность цилиндрического тела. После этого деятельность оператора, заключающаяся в перемещении платформы без ее отрыва от поверхности цилиндрического тела, происходит по инструкции. По измеряемым угловым скоростям платформы и, соответственно, ее текущему угловому положению с помощью соответствующей обработки находят углы ориентации вектора  $e$ .

Положение платформы на поверхности цилиндрического тела характеризуется последовательностью углов  $\psi_0, \vartheta_0, \gamma, \Delta\psi$ , где  $\psi_0, \vartheta_0$  — истинные углы ориентации оси цилиндра (рис. 1),  $\Delta\psi$  и  $\gamma$  — углы, определяющие положение платформы на данной цилиндрической поверхности, причем угол  $\Delta\psi$  рассматривается как погрешность (рис. 2).

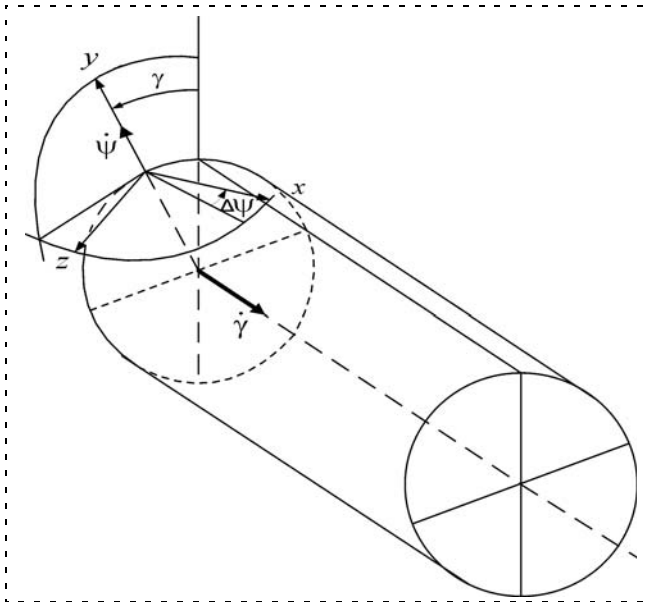


Рис. 2. Кинематика движения платформы по поверхности цилиндрического тела

Тем самым, возникает последовательность поворотов платформы 2-3-1-2, определяющая текущее положение СКП на поверхности цилиндрического тела относительно СК<sub>0</sub>.

Результирующая матрица направляющих косинусов (МНК) **A** положения платформы представляется в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2(\Delta\psi)\mathbf{A}_{231}(\psi, \theta, \gamma); \mathbf{A} = [a_{ij}], i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Матрицы  $\mathbf{A}_{231}$  и  $\mathbf{A}_2(\Delta\psi)$  соответственно равны

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{231} &= \mathbf{A}_1(\gamma)\mathbf{A}_3(\theta)\mathbf{A}_2(\psi) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\theta & -\cos\theta \sin\psi \\ -\cos\gamma \cos\psi \sin\theta + \sin\gamma \sin\psi & \cos\gamma \cos\theta & \cos\gamma \sin\theta \sin\psi + \sin\gamma \cos\psi \\ \sin\gamma \cos\psi \sin\theta + \cos\gamma \sin\psi & -\sin\gamma \cos\theta & -\sin\gamma \sin\theta \sin\psi + \cos\gamma \cos\psi \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

(матрицы  $\mathbf{A}_1(\gamma)$ ,  $\mathbf{A}_3(\theta)$ ,  $\mathbf{A}_2(\psi)$  — элементарные матрицы поворотов по соответствующим осям);

$$\mathbf{A}_2(\Delta\psi) = \begin{bmatrix} \cos\Delta\psi & 0 & -\sin\Delta\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Delta\psi & 0 & \cos\Delta\psi \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Элементы матрицы **A**:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\Delta\psi \cos\theta \cos\psi - \\ &- \sin\Delta\psi (\sin\gamma \sin\theta \cos\psi + \cos\gamma \sin\psi); \\ a_{12} &= \cos\Delta\psi \sin\theta + \sin\Delta\psi \sin\gamma \cos\theta; \\ a_{13} &= -\cos\Delta\psi \cos\theta \sin\psi - \\ &- \sin\Delta\psi (-\sin\gamma \sin\theta \sin\psi + \cos\gamma \cos\psi); \\ a_{21} &= -\cos\gamma \cos\psi \sin\theta + \sin\gamma \sin\psi; \\ a_{22} &= \cos\gamma \cos\theta; \\ a_{23} &= \cos\gamma \sin\theta \sin\psi + \sin\gamma \cos\psi; \\ a_{31} &= \sin\Delta\psi \cos\theta \cos\psi + \\ &+ \cos\Delta\psi (\sin\gamma \sin\theta \cos\psi + \cos\gamma \sin\psi); \\ a_{32} &= \sin\Delta\psi \sin\theta - \cos\Delta\psi \sin\gamma \cos\theta; \\ a_{33} &= -\sin\Delta\psi \cos\theta \sin\psi + \\ &+ \cos\Delta\psi (-\sin\gamma \sin\theta \sin\psi + \cos\gamma \cos\psi). \end{aligned} \quad (4)$$

В соотношениях (3) и (4)  $\theta = \vartheta_0$ ,  $\psi = \psi_0$ , угол  $\vartheta_0 < 90^\circ$ .

### Кинематические соотношения

Текущее угловое положение платформы, как это было упомянуто выше, определяется путем интегрирования уравнений кинематического движения платформы.

В кватернионной форме данные кинематические уравнения могут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_I &= \frac{1}{2} \mathbf{B}_I \circ \boldsymbol{\omega}^B, \\ \dot{\mathbf{S}}_I &= \frac{1}{2} \mathbf{S}_I \circ \boldsymbol{\omega}_e^S, \\ \mathbf{B}_I(0) &= \mathbf{1} \text{ при } t_0, \\ \mathbf{S}_I(0) &= \mathbf{1} \text{ при } t_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{и } \mathbf{B}_S = \tilde{\mathbf{S}}_I \circ \mathbf{B}_I, \quad (6)$$

где  $\boldsymbol{\omega}^B \triangleq [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  — вектор абсолютной угловой скорости в осях подвижной СК (СКП), измеряемый ВИУС и состоящий из двух слагаемых

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e,$$

$\boldsymbol{\omega}_r$  — вектор относительной угловой скорости, связанный только с движением СКП;  $\boldsymbol{\omega}_e \equiv \boldsymbol{\omega}_\oplus^S$  — вектор переносной угловой скорости (угловая скорость вращения Земли) в осях эталонной системы координат СК<sub>0</sub>;  $\mathbf{B}_S \triangleq \{b_{ij}\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , — нормированный кватернион  $\sum_{i=0}^3 b_i^2 = 1$ , определяющий

текущее положение подвижной СКП относительно неподвижной к Земле СК<sub>0</sub>;  $\mathbf{S}_I$  — кватернион, определяющий переносное движение системы координат СК<sub>0</sub> с угловой скоростью, равной угловой скорости

Земли  $\boldsymbol{\omega}_e \equiv \boldsymbol{\omega}_\oplus^S$  (вектор  $\boldsymbol{\omega}_\oplus^S$  оценивается предварительно) относительно инерциального пространства;  $\mathbf{B}_I$  — кватернион, определяющий абсолютное угловое положение платформы в инерциальном пространстве;  $\circ$  — символ умножения кватернионов.

Интегрирование уравнения для переносного движения, происходящего с медленноменяющейся скоростью  $\boldsymbol{\omega}_e$  на шаге интегрирования, может выполняться как аналитически, так и на основе численных процедур.

При практически постоянной скорости переносного движения интегрирование целесообразно проводить аналитически. В этом случае кватернион переносного движения представляется в виде

$$\mathbf{S}_{I|m} = \mathbf{S}_{I|m-1} \circ \mathbf{N}_{S|m},$$

где  $\mathbf{N}_{S|m}$  — кватернион приращения на шаге интегрирования;



$$\mathbf{N}_{S|m} = \left\langle \cos \frac{\nabla \chi^S}{2}, \frac{\nabla \chi_1^S}{\nabla \chi^S} \sin \frac{\nabla \chi^S}{2}, \frac{\nabla \chi_2^S}{\nabla \chi^S} \sin \frac{\nabla \chi^S}{2}, \frac{\nabla \chi_3^S}{\nabla \chi^S} \sin \frac{\nabla \chi^S}{2} \right\rangle, \quad (7)$$

где  $\nabla \chi^S = [\nabla \chi_1^S, \nabla \chi_2^S, \nabla \chi_3^S]^T$  — вектор приращения угла поворота;  $\nabla \chi^S = |\omega_e|(t_m - t_{m-1})$  — модуль приращения;  $\left. \frac{\nabla \chi^S}{\nabla \chi^S} \right|_m = \left. \frac{\omega_e}{|\omega_e|} \right|_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  — индексная переменная дискретного времени.

В получаемом численном решении (5), (6), (7) можно выделить два источника погрешностей: погрешности в оценке измеряемой угловой скорости  $\hat{\omega}$  и погрешности интегрирования.

Собственные погрешности измерения угловой скорости сводятся к минимальным предварительной калибровкой ВИУС.

Погрешности интегрирования связаны с методом интегрирования кинематических соотношений в форме (5).

Расчитанный кватернион далее преобразуется в МНК по известным соотношениям.

### Проведение измерений и обработка их результатов

Рассмотрим более подробно процесс проведения измерений. Он состоит из трех этапов.

*Первый этап* — этап оценки угловой скорости Земли. Первоначально измерительная платформа находится на опорном столе, который и задает определенное фиксированное положение эталонной системы координат. Для этого положения в течение определенного промежутка времени осуществляется обработка показаний ВИУС для нахождения вектора угловой скорости Земли при зафиксированном положении платформы. Данные такой обработки в виде значений проекций вектора угловой скорости Земли  $\omega_{\oplus}^S$  на оси эталонной системы координат СК<sub>0</sub>, совпадающей в начальный момент с СКП платформы, используются в алгоритме интегрирования кинематики (5). Особенностью этапа является измерение малых значений угловых скоростей, так как значение угловой скорости Земли  $|\omega_{\oplus}^S| = 7,2921152 \cdot 10^{-5}$  рад/с.

*Второй этап* — этап переноса платформы — начинается с момента включения алгоритма интегрирования уравнений кинематики (5), последующим

переносом платформы из исходного положения на поверхность цилиндрического тела и установкой выделенной оси платформы  $x$  по образующей цилиндра (ось  $x$  платформы выставляется оператором визуально по предполагаемому направлению вектора  $e$  — оси цилиндрического тела).

*Третий этап* — этап проведения измерений углов ориентации цилиндрического тела. На этом этапе продолжается дальнейшее интегрирование уравнений кинематики, но оператор уже манипулирует положением платформы на поверхности цилиндрического тела без потери контакта с отслеживанием предполагаемого направления оси цилиндрического тела.

Начало каждого из трех этапов фиксируется по времени и на всех трех этапах осуществляется регистрация данных с выбранным временным тактом.

Наиболее важным является третий этап.

Рассмотрим кинематические уравнения относительного движения платформы по поверхности цилиндрического тела.

В соответствии с рис. 2 кинематические уравнения движения имеют следующий вид в осях СКП:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} \cos \Delta\psi; \\ \omega_y &= \Delta\dot{\psi}; \\ \omega_z &= \dot{\gamma} \sin \Delta\psi, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где вектор относительной угловой скорости платформы  $\omega_r \triangleq [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ .

Так как можно считать угол относительного вращения платформы малым  $\Delta\psi \approx 0$  (можно предполагать, что  $|\Delta\psi| < 0,1$  рад), то при угловой скорости  $\omega_x \neq 0$  из кинематических уравнений (8) следует

$$\frac{\omega_z}{\omega_x} = \operatorname{tg} \Delta\psi, \quad (9)$$

т. е. текущее значение положения выделенной оси платформы относительно вектора  $e$  определяется отношением угловых скоростей. Знание функции  $\operatorname{tg} \Delta\psi$  в нашем случае однозначно определяет функции  $\sin \Delta\psi$  и  $\cos \Delta\psi$ .

*В целях повышения точности угол  $\Delta\psi$  следует вычислять при возможно большем значении угловой скорости качения платформы:  $\omega_x \gg 0$ .*

Найденное по соотношению (9) значение оценки угла  $\Delta\psi$  можно устранить из элементов  $\mathbf{A}$  МНК (1) и получить преобразованную МНК-оценку матрицы (2)  $\mathbf{A}_{231}$ , равную произведению  $\mathbf{A}_2(-\Delta\psi)\mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}_2(-\Delta\psi)$  — элементарная матрица (3).

Элементы преобразованной МНК имеют вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cos \Delta\psi + a_{31} \sin \Delta\psi & a_{12} \cos \Delta\psi + a_{32} \sin \Delta\psi & a_{13} \cos \Delta\psi + a_{33} \sin \Delta\psi \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} \sin \Delta\psi + a_{31} \cos \Delta\psi & -a_{12} \sin \Delta\psi + a_{32} \cos \Delta\psi & -a_{13} \sin \Delta\psi + a_{33} \cos \Delta\psi \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для определения оценок углов ориентации  $\hat{\psi}_0$  и  $\hat{\vartheta}_0$  вектора  $\mathbf{e}$  воспользуемся полученными элементами матрицы (10).

Так как элементы вычисляемой матрицы (10) являются оценками, то оценки элементов первой строки матрицы (10) после их раскрытия могут быть представлены в виде

$$(\cos \hat{\vartheta}_0 \cos \psi) = (\cos \vartheta_0 \cos \psi_0) + \delta m_{11};$$

$$(\sin \hat{\vartheta}) = (\sin \vartheta_0) + \delta m_{12};$$

$$-(\cos \hat{\vartheta} \sin \psi) = -(\cos \vartheta_0 \cos \psi_0) + \delta m_{13},$$

где  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$  — точные значения углов ориентации;  $\delta m_{11}$ ,  $\delta m_{12}$ ,  $\delta m_{13}$  — погрешности вычисления соответствующих элементов матрицы  $\mathbf{A}_{231}$ .

В развернутом виде выражения для результирующих погрешностей элементов первой строки с точностью до членов второго порядка малости имеют вид

$$\begin{aligned} \delta m_{11} &\cong (\sin \gamma \sin \vartheta_0 \cos \psi_0 + \cos \gamma \sin \psi_0) \delta_{\psi} + \\ &+ \delta_{11} \cos \Delta \psi + \delta_{31} \sin \Delta \psi; \\ \delta m_{12} &\cong (-\sin \gamma \cos \vartheta_0) \delta_{\psi} + \delta_{12} \cos \Delta \psi + \delta_{32} \sin \Delta \psi; \\ \delta m_{13} &\cong (-\sin \gamma \sin \vartheta_0 \sin \psi_0 + \cos \gamma \cos \psi_0) \delta_{\psi} + \\ &+ \delta_{13} \cos \Delta \psi + \delta_{33} \sin \Delta \psi, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\delta_{\psi}$  — погрешность определения угла  $\Delta \psi$ ;  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{31}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{32}$ ,  $\delta_{13}$ ,  $\delta_{33}$  — погрешности вычислений соответствующих элементов матрицы  $\mathbf{A}$ .

Погрешность  $\delta_{\psi}$ , связанная с определением угла  $\Delta \psi$ , может быть значительно уменьшена выбором наиболее благоприятных положений платформы по углу  $\gamma$  на цилиндрической поверхности. Эти положения для угла  $\gamma$  получаются из соотношений (11) обнулением коэффициентов при  $\delta_{\psi}$ :

$$\begin{aligned} (\sin \gamma_{11} \sin \vartheta_0 \cos \psi_0 + \cos \gamma_{11} \sin \psi_0) &\approx 0; \\ (-\sin \gamma_{12} \cos \vartheta_0) &\approx 0; \\ (-\sin \gamma_{13} \sin \vartheta_0 \sin \psi_0 + \cos \gamma_{13} \cos \psi_0) &\approx 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из приведенных условий (12) и находятся наиболее благоприятные угловые положения платформы  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  при определении элементов 11, 12, 13. Выражения, стоящие слева в соотношениях (12), приблизительно соответствуют элементам 31, 32 и 33 преобразованной матрицы (10).

Нахождение оценки угла наклона  $\hat{\vartheta}_0$  целесообразно проводить при угле  $\gamma_{12} \approx 0$  (второе уравнение из (12)).

Расчет благоприятных положений для оценок углов  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{13}$  проводится по формулам (12) при предварительно найденной оценке угла  $\vartheta_0$  и грубой оценке угла  $\hat{\psi}_0$  (здесь используются вычисленные элементы матрицы (10)) с последующим уточнением по результатам обработки.

После манипуляций положением платформы в окрестностях соответствующих углов  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{13}$  далее находятся уточненные оценки  $(\cos \hat{\vartheta}_0 \cos \psi)$  и  $(-\cos \hat{\vartheta} \sin \psi)$  матрицы  $\mathbf{A}_{231}$ , по которым уже непосредственно находится и уточненная оценка угла  $\hat{\psi}_0$ .

### Результаты моделирования

Функционирование рассмотренного алгоритма проверено математическим моделированием. Для этой цели сформирован комплекс моделирования, на котором проводится отработка и оценка точности предлагаемых алгоритмов для всех этапов. Ниже приведены результаты проверки алгоритма обработки для третьего этапа как наиболее важного. На рис. 3 приведена схема моделирования третьего этапа.

Закрашенный блок соответствует имитатору перемещения платформы по поверхности цилиндрического тела. Функционирование лазерного ВИУС также имитируется с учетом его импульсного функционирования. Оставшиеся блоки составляют обобщенный алгоритм обработки.

Графики и результаты получены при следующих условиях:

- исходное положение цилиндрического тела —  $\psi_0 = 60^\circ$ ;  $\vartheta_0 = 45^\circ$ ;
- параметры ВИУС — цена импульса  $0,29''/\text{имп.}$ ;
- положение системы координат  $\text{СК}_0$  — широта  $60^\circ$ ; азимут  $30^\circ$ .

Имитируется случайный характер изменения угла  $\Delta \psi$  при выполнении оператором гармонического движения, происходящего в окрестности оценки соответствующего угла  $\gamma$ .

Рассматривается получение оценки элемента 12 матрицы  $\mathbf{A}_{231}$  (область нулевого угла  $\gamma_{12} \approx 0$ , рис. 4–6).

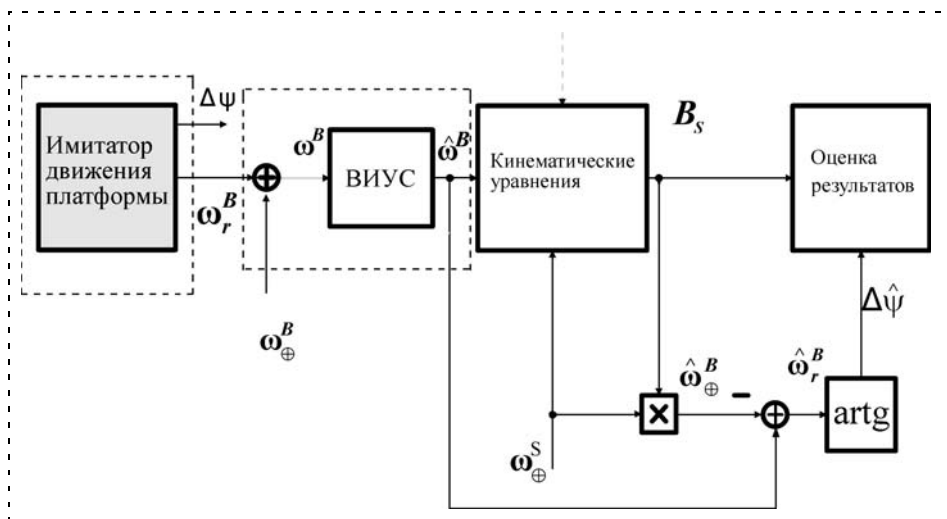


Рис. 3. Схема моделирования третьего этапа

Угловая установка платформы на цилиндре: начальный угол  $\gamma = 10^0$ , начальный угол  $\Delta\psi = 2^0$ .

Наиболее благоприятная оценка элемента 12 матрицы  $A_{231}$  соответствует значению текущего угла  $\gamma(t) = 0$  (~ 6 с или ~10 с на графике).

Уточненная оценка элемента 11:

$$\sin \hat{\vartheta}_0 = 7,071087e - 001.$$

Точное значение  $\sin \vartheta_0 = 7,071068e - 001$ .

$$\hat{\vartheta}_0 = 7,854008e - 001.$$

Точное значение  $\vartheta_0 = 7,853982e - 001$ .

Точность определения угла  $\approx 0,27e - 5$  рад.

Подобным образом происходит оценка элементов 13 и 11 матрицы (10) при соответствующих этим элементам значениях найденных углов  $\gamma_{13}$  и  $\gamma_{11}$ , что позволяет вычислить уточненную оценку угла  $\hat{\psi}_0$ .

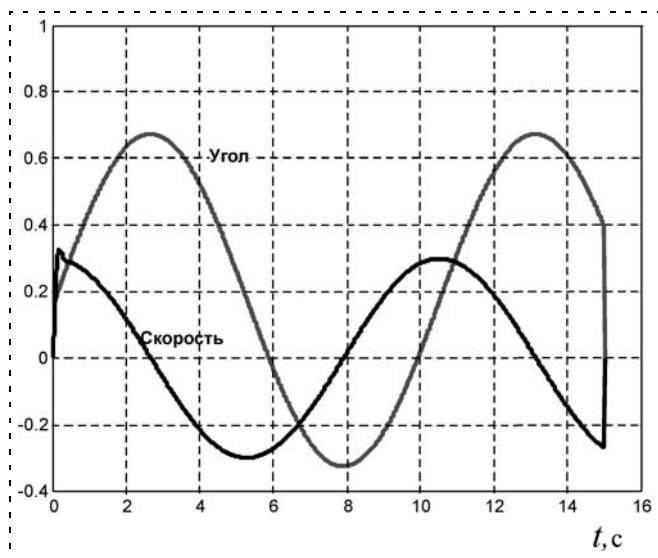


Рис. 4. Угол  $\gamma(t)$  и угловая скорость  $\dot{\gamma}(t)$

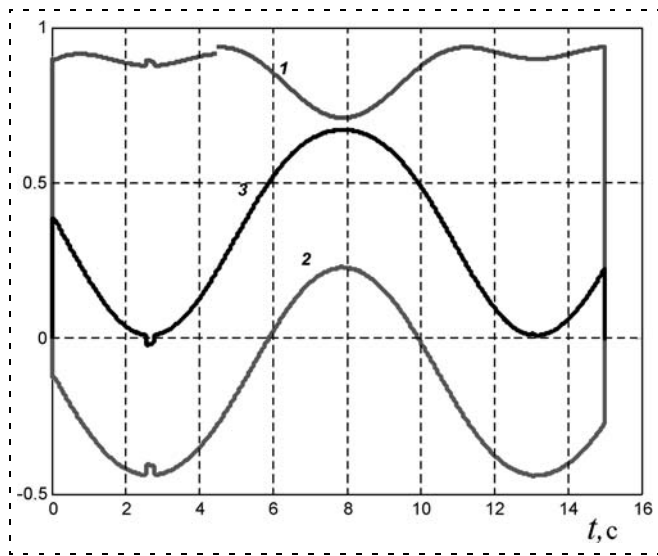


Рис. 5. Коэффициенты влияния при  $\delta_\psi$  (область нулевого угла  $\gamma_{12} \approx 0$ ):

1 — на элемент 11; 2 — на элемент 12; 3 — на элемент 13

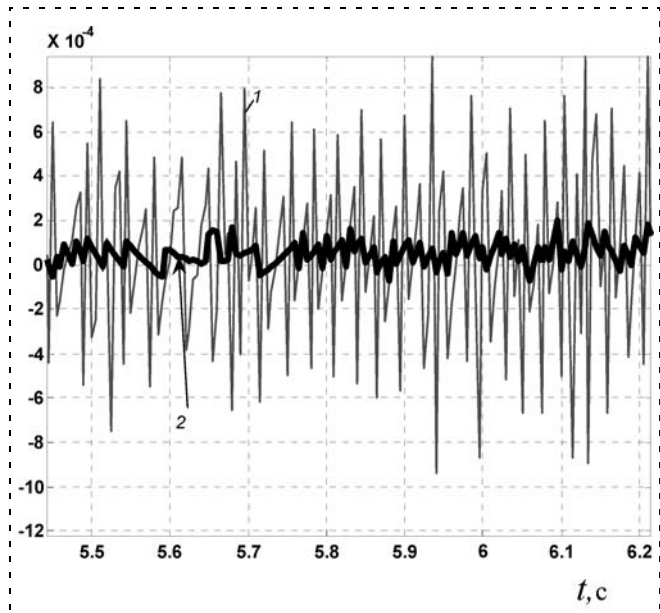


Рис. 6. Точность оценки угла  $\Delta\psi$  (р) (область нулевого угла  $\gamma_{12} \approx 0$ ): 1 — по не сглаженным данным; 2 — по сглаженным данным. Отчетливо видно влияние импульсной работы ВИУС

Результирующая точность оценки угла  $\hat{\psi}_0$

$$\arctg(6,123731e - 001/3,535536e - 001) = 1,047198e + 000 \text{ рад}$$

или  $6,000001e + 001^\circ$ , т. е. точность  $\sim 0,3e - 6$  рад.

Таким образом, результаты проведенного моделирования показывают возможность использования полученного алгоритма обработки для решения поставленной задачи с высокой степенью точности (менее угловой секунды) при принятых предположениях.

### Выводы

1. Предлагается подход к определению ориентации цилиндрического тела, основанный на использовании средств инерциальной навигации.
2. Рассматриваются процедуры определения указанной ориентации.
3. Приводятся результаты математического моделирования, показывающие реальность применения предлагаемого подхода.

Данный подход можно распространить и на случай конической поверхности.

Автор приносит благодарность руководству предприятия ЗАО "НПК "Электрооптика" (г. Москва) за большую помощь в работе, без которой данная статья не была бы написана.

### Список литературы

1. Savage P. G. Strapdown Analytics / Published by: Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, Minnesota, 2000. P. 1. 847 p.; P. 2. 723 p.
2. Titterton D. H., Weston J. L. Strapdown Inertial Navigation Technology. 2nd ed. The Institution of Electrical Engineers, 2004. P. 492—493.

**А. Н. Якунин**, канд. техн. наук, доц.,  
yan@olvs.miee.ru,  
Национальный исследовательский  
университет МИЭТ

## Использование оператора кватерниона для определения относительной угловой ориентации квазистационарного объекта

*Рассматривается аппарат векторных кватернионов, даются указания по вычислению матрицы координатных преобразований оператора кватерниона, формулируется и приводится решение задачи определения относительной угловой ориентации квазистационарного объекта с использованием оператора кватерниона.*

**Ключевые слова:** ориентация, матрица координатных преобразований, кватернион, акселерометр, датчик ускорения, магнитный датчик

### Введение

Для контроля параметров функционирования в специализированных вычислительных устройствах используются датчики различных физических величин (температуры, давления, влажности, света, звука, радиации, ускорения, электрического и магнитного поля и др.). В квазистационарных (медленно изменяющих свое угловое положение) объектах может возникнуть необходимость автономного определения относительной угловой ориентации в пространстве (изменения угловой ориентации относительно начального положения). На сегодняшнем этапе развития электронной техники не существует датчиков в интегральном исполнении, выходные данные которых были бы напрямую связаны с его угловыми координатами в трехмерном пространстве. Поэтому решение поставленной задачи должно опираться на показания датчиков других физических величин, параметры которых косвенно связаны с угловым перемещением объекта.

На первый взгляд, наиболее подходящим датчиком, связанным с угловым перемещением, является датчик угловых скоростей (ДУС), который широко представлен многими производителями. Проинтегрировав угловую скорость, можно получить текущее угловое положение объекта. Однако на практике такое решение неприменимо вследствие того, что реальные ДУС всегда имеют случайную погрешность выходной величины, непрерывное интегрирование которой для вычисления угловых координат неизменно приведет к постоянно увеличивающейся погрешности вычисляемых угловых координат объекта.

В данной статье для решения поставленной задачи предлагается алгоритм, использующий показания трехосевых датчиков двух разных физиче-

ских величин, например ускорения [1] (акселерометр) и магнитного поля [2]. В квазистационарном объекте акселерометр будет измерять составляющие проекции вектора гравитации, а магнитный датчик — вектора магнитного поля Земли. Тогда в системе координат, связанных с объектом, при изменении угловой ориентации будут изменяться проекции двух неколлинеарных векторов на чувствительные оси используемых датчиков, установленных внутри объекта.

С учетом высокой стабильности во времени векторов гравитации и магнитного поля планеты становится возможным определение изменения угловой ориентации объекта в пространстве относительно его начального расположения. Для этого нужно найти такой пространственный поворот, при котором в связанной с объектом системе координат начальное положение вектора гравитации совместится с его текущим положением, и то же самое должно быть выполнено для вектора магнитного поля. Такой поворот будет единственным. Осуществление такого же поворота с любым заданным единичным вектором даст решение задачи. Получение этого алгоритма и является целью данной статьи.

### Аппарат кватернионов

Решение задачи найдем с применением оператора кватерниона. Кватернионы впервые были введены У. Р. Гамильтоном в 1843 г., а математический аппарат далее был развит У. К. Клиффордом [3]. Под оператором кватерниона в нашем случае понимается оператор, осуществляющий вращение геометрического объекта вокруг произвольного вектора  $\mathbf{a}$  на заданный угол  $\varphi$ , как показано на рис. 1. Заметим также, что выполнение оператора поворота, как и любое другое координатное преобразование, может быть задано в виде матрицы координатных преобразований размерностью  $n \times n$ , где  $n$  — размерность пространства [4]. В дальнейшем будем считать, что все операции проводятся в трехмерном пространстве ( $n = 3$ ). Следовательно, параметрами оператора кватерниона является четыре действительных числа: три — для составляющих координат

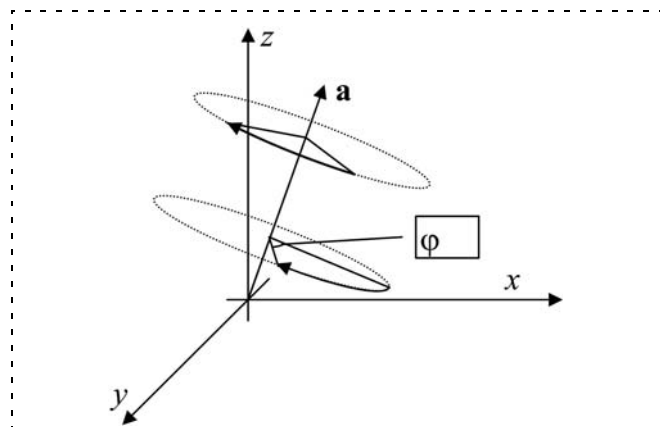


Рис. 1. Выполнение оператора кватерниона

вектора в трехмерном пространстве и одно — для угла вращения.

Решения поставленной задачи опирается на две вспомогательные подзадачи:

- нахождение  $(3 \times 3)$ -матрицы координатных преобразований оператора кватерниона с вектором  $\mathbf{a}$  и углом  $\varphi$  (подзадача *Quaternion*);
- определение параметров оператора кватерниона — вектора  $\mathbf{v}$  и угла вращения  $\varphi$ , таких что если подействовать этим оператором кватерниона на вектор  $\mathbf{v}_1$ , то результатом будет вектор  $\mathbf{v}_2$  (подзадача *FindQuatern*).

### Решение подзадачи *Quaternion*

*Входные данные:* вектор  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ , угол вращения  $\varphi$ .

*Выходные данные:*  $\mathbf{C}$  —  $(3 \times 3)$ -матрица координатных преобразований.

*Решение подзадачи* удобно разбить на несколько шагов.

1. Если  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ , тогда  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; конец.

Это вырожденный случай, вращение вокруг нулевого вектора невозможно. Однако так как любой алгоритм должен вернуть какое-либо выходное значение, примем за решение единичную матрицу.

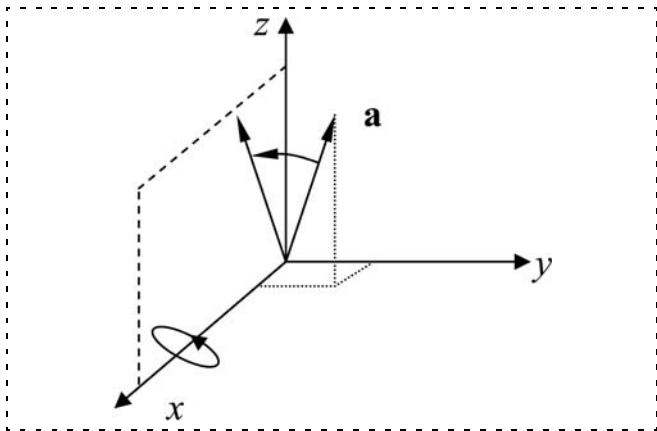


Рис. 2. Осуществление вращения вокруг оси  $OX$

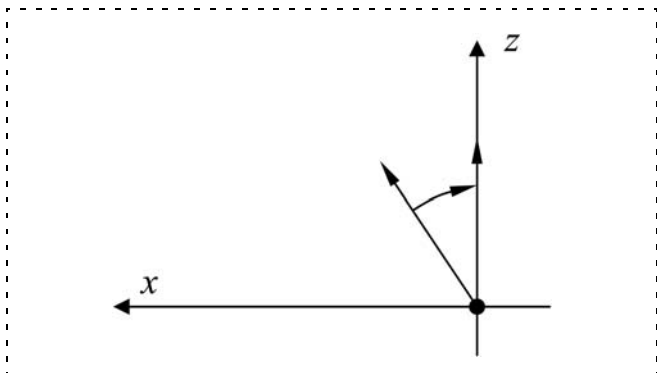


Рис. 3. Осуществление вращения вокруг оси  $OY$

2. Если  $(a_y = 0)$  и  $(a_z = 0)$ , тогда

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \text{конец. Это также вырожденный}$$

случай, заключающийся во вращении вокруг оси  $OZ$ .

3. Если не выполняются условия, описанные в п. 1 и п. 2, тогда преобразование вращения вокруг произвольного вектора осуществляется за пять шагов. На каждом шаге вычисляются  $(3 \times 3)$ -матрицы координатных преобразований  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5$ . Результирующая матрица  $\mathbf{C}$  будет получена перемножением пяти полученных матриц. Введем вспомогательные переменные (вещественные числа):

$$M_{yz} = \sqrt{a_y^2 + a_z^2}; M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

4. Выполним поворот вокруг оси  $OX$  до совмещения вектора  $\mathbf{a}$  с плоскостью  $XOZ$  (рис. 2).

При этом матрица координатных преобразований будет равна

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_z}{M_{yz}} & \frac{a_y}{M_{yz}} \\ 0 & \frac{a_y}{M_{yz}} & -\frac{a_z}{M_{yz}} \end{pmatrix}.$$

5. Выполним поворот вокруг оси  $OY$  до совмещения вектора с осью  $OZ$  (рис. 3).

Матрица координатных преобразований будет равна

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \frac{M_{yz}}{M} & 0 & \frac{a_x}{M} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_x}{M} & 0 & \frac{M_{yz}}{M} \end{pmatrix}.$$

6. Выполнение поворота вокруг оси  $OZ$  на угол  $\varphi$  эквивалентно умножению на матрицу координатных преобразований:

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Осуществление поворота вокруг оси  $OY$  на угол, противоположный тому, на который был осуществлен поворот в п. 5:

$$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} \frac{M_{yz}}{M} & 0 & -\frac{a_x}{M} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_x}{M} & 0 & \frac{M_{yz}}{M} \end{pmatrix}.$$

8. Осуществление поворота вокруг оси  $OX$  на угол, противоположный тому, на который был осуществлен поворот в п. 4:

$$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_z}{M_{yz}} & -\frac{a_y}{M_{yz}} \\ 0 & \frac{a_y}{M_{yz}} & -\frac{a_z}{M_{yz}} \end{pmatrix}.$$

9. Результирующая матрица координатных преобразований вычисляется как произведение пяти предыдущих матриц  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ :

$$C = C_1(C_2(C_3(C_4C_5))).$$

### Решение подзадачи FindQuatern

*Входные данные:*  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  — векторы.

*Выходные данные:*  $\mathbf{v}$  — вектор,  $\varphi$  — угол.

*Решение подзадачи* выполним за несколько шагов.

1. Введем вспомогательную переменную  $M$  (вещественное число), равную произведению модулей векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ :

$$M = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} \cdot \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2}.$$

2. В случае, если оба вектора  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  ненулевые (если  $M \neq 0$ ), вычислим вспомогательную величину  $S$  (вещественное число), равную косинусу угла между этими векторами, используя скалярное произведение векторов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} = \\ &= |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\cos \angle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Тогда

$$S = \frac{v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}}{M}.$$

3. При выполнении предыдущего шага может оказаться, что  $M = 0$  (один из векторов нулевой). В этом случае подзадача не может быть решена в силу отсутствия решения. Если же на предыдущем шаге окажется  $S = 1$ , значит векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  сонаправлены. При возникновении обеих ситуаций алгоритм должен вернуть следующие значения:  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ ;  $\varphi = 0$ ; конец.

4. Случай  $S = -1$  означает, что векторы  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  противоположно направлены, следовательно, вращение должно осуществляться на угол  $\varphi = \pi$  вокруг любого вектора  $\mathbf{v}$ , перпендикулярного к  $\mathbf{v}_1$  или  $\mathbf{v}_2$ . Найдем нормальный вектор из условия, что скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов должно быть равным нулю, т. е.  $v_{1x}v_x + v_{1y}v_y + v_{1z}v_z = 0$ :

- если  $v_{1x} \neq 0$ , тогда  $\mathbf{v} = (-(v_{1y} + v_{1z})/v_{1x}, 1, 1)$ ;  $\varphi = \pi$ ; конец алгоритма;
- если  $v_{1y} \neq 0$ , тогда  $\mathbf{v} = (1, -(v_{1x} + v_{1z})/v_{1y}, 1)$ ;  $\varphi = \pi$ ; конец алгоритма;

- если  $v_{1z} \neq 0$ , тогда  $\mathbf{v} = (1, 1, -(v_{1x} + v_{1y})/v_{1z})$ ;  $\varphi = \pi$ ; конец алгоритма.

5. Наиболее общий случай. Вектор вращения  $\mathbf{v}$  найдем из векторного произведения, учитывая, что векторное произведение  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  — это вектор, перпендикулярный им обоим. Угол вращения находим из скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}, v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z}, v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}); \\ \varphi &= \arccos S; \text{ конец алгоритма.} \end{aligned}$$

### Решение основной задачи

Пусть  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{h}$  — начальные показания инерционного и магнитного датчика (значения векторов гравитации и магнитного поля Земли). Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{m}$  — текущие показания этих векторов. Алгоритм должен найти матрицу координатных преобразований, обеспечивающих переход одной пары векторов в другую.

*Входные данные:*  $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{a}, \mathbf{m}$  — векторы.

*Выходные данные:*  $C$  — матрица координатных преобразований.

*Решение задачи.*

1. Найдем такой оператор кватерниона (вектор и угол вращения), чтобы действие оператора на исходный вектор  $\mathbf{g}$  совместило его с вектором  $\mathbf{a}$  (рис. 4).

$$(\mathbf{v}_1, \varphi_1) = \text{FindQuatern}(\mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

2. Вычислим матрицу координатных преобразований найденного кватерниона:

$$C_1 = \text{Quaternion}(\mathbf{v}_1, \varphi_1).$$

3. При выполнении координатного преобразования, найденного в п. 2 данного алгоритма, вектор  $\mathbf{g}$  совместится с вектором  $\mathbf{a}$ , однако магнитный вектор  $\mathbf{h}$  перейдет в какой-то новый вектор  $\mathbf{h}'$ . Найдем его:

$$\mathbf{h}' = \mathbf{h}C_1.$$

4. Найдем  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{m}_1$  — проекции векторов  $\mathbf{h}'$  и  $\mathbf{m}$  на плоскость, перпендикулярную к вектору  $\mathbf{a}$  (рис. 5).

$$\text{Обозначим } t_1 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{h}')}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; t_2 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{m})}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Тогда  $\mathbf{h}_1 = (h'_x - a_x t_1, h'_y - a_y t_1, h'_z - a_z t_1)$ ;  
 $\mathbf{m}_1 = (m_x - a_x t_2, m_y - a_y t_2, m_z - a_z t_2)$ .

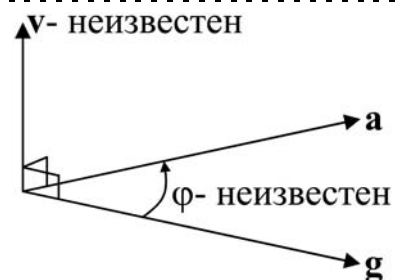


Рис. 4. Совмещение векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{a}$  выполнением оператора кватерниона

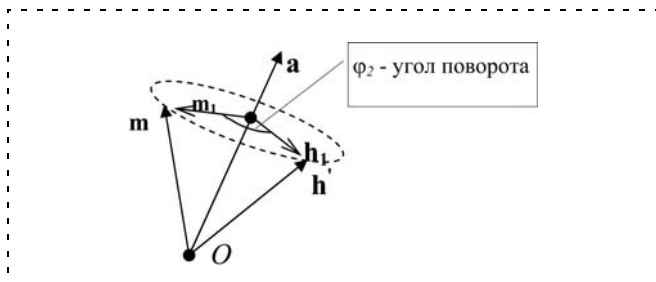


Рис. 5. Нахождение проекций векторов  $h'$  и  $m$  на плоскость, нормальную к  $a$

5. Находим такой кватернион (вектор и угол вращения), чтобы его действие на вектор  $h_1$  привело к совмещению его с вектором  $m_1$  (действие, аналогичное п. 1):

$$(v_2, \varphi_2) = \text{FindQuatern}(m_1, h_1).$$

6. Вводим поправку таким образом, чтобы вращение выполнялось вокруг вектора  $a$ . Это не может быть выполнено в том случае, если  $h_1$  и  $m_1$  — коллинеарные. Тогда функция *FindQuatern* может вернуть произвольный вектор вращения, а в нашем случае необходим либо  $a$ , либо  $-a$ :

Если  $(a, v_2) \geq 0$ , тогда  $v_2 = a$ , иначе  $v_2 = -a$ .

7. Вычислим матрицу координатных преобразований найденного кватерниона:

$$C_2 = \text{Quaternion}(v_2, \varphi_2).$$

8. Результирующая матрица координатных преобразований вычисляется как произведение матриц  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C = C_1 C_2.$$

### Выводы

Для решения задачи определения изменения относительной угловой ориентации квазистационарного объекта предложено использовать исходные и текущие показания трехосевых магниточувствительных датчиков и акселерометров. Предложенный алгоритм использует кватернионный подход для вычисления матрицы координатных преобразований  $C$ . Найденная матрица может быть применена для преобразования любого единичного эталонного вектора для нахождения его нового положения, что и будет являться решением поставленной задачи.

### Список литературы

1. Якунин А. Н., Саблин А. В., Соловьев А. Н., Проскуряков Д. В., Савченко Ю. В. Методика калибровки инерциальных сенсоров // Известия Тульского государственного университета. Сер. "Радиотехника и радиооптика". 2002. Т. III. Вып. 1.
2. Якунин А. Н., Саблин А. В., Соловьев А. Н., Савченко Ю. В. Методика калибровки магнитных сенсоров // Известия Тульского государственного университета. Сер. "Радиотехника и радиооптика". 2003 Т. I. Вып. 2.
3. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.
4. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / Под ред. Я. А. Фурман. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 456 с.

## ИНФОРМАЦИЯ

6—7 декабря 2012 года в конгресс-центре МТУСИ состоится

### XI Международная научно-практическая конференция

## "Инженерные и научные приложения на базе технологии National Instruments — 2012"

Организаторами конференции выступают филиал корпорации National Instruments в России, СНГ и Балтии, Российский университет дружбы народов

На конференции будут представлены работы, посвященные применению инновационных технологий National Instruments при решении промышленных, образовательных и научных задач, а также рассмотрены преимущества использования современного оборудования и программного обеспечения National Instruments.

### ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

#### Пленарные выступления

В конференц-зале конгресс-центра будут обсуждаться успешные проекты в промышленности, области научных исследований и последние тенденции в инженерном образовании.

#### Технические саммиты

На технических саммитах специалисты National Instruments расскажут участникам о новинках компании.

#### Дискуссии с экспертами

Живые дискуссии по таким направлениям, как "Кооперация ВУЗ-Промышленность" и "Инженерные стартапы"

Тел. для справок: +7 (495) 783-68-51; Электр, почта: conference.russia@ni.com

Сайт конференции: <http://www.labview.ru/conference/>

УДК 621.865.8:621

**Л. Д. Певзнер**, д-р техн. наук, проф.,  
**С. Е. Бабаков**, аспирант,  
babac@mail.ru,

Московский государственный горный университет

## Математическая модель динамики карьерного экскаватора как объекта управления

*Описывается динамика движения рабочего органа карьерного экскаватора путем сведения его расчетной схемы к схеме эквивалентного пятизвенного манипуляционного робота по методу И. Р. Белоусова. Получена математическая модель кинематики центра масс ковша экскаватора и коэффициенты уравнений его динамики. На основе рассчитанных уравнений динамики и кинематики манипулятора в приложении Simulink MATLAB построена имитационная модель.*

**Ключевые слова:** экскаватор, карьерный экскаватор, динамика, объект управления, манипулятор

Повышение производительности мощных горных карьерных экскаваторов достижимо лишь путем автоматизации их технологического процесса. Это, в первую очередь, связано с усталостью и утомляемостью, а в некоторых случаях и недостаточным профессионализмом машиниста.

Для автоматизации горных экскаваторов типа "мехлопата" (далее — экскаватор) необходимы эффективные алгоритмы управления, создание которых требует более совершенных моделей объектов автоматизации. Различают два класса таких моделей: модели, в которых рассматриваются движения отдельных механизмов экскаватора без учета их взаимовлияния, и комплексные робототехнические модели. Примером модели первого класса является модель движения ковша экскаватора, вызванного лишь работой механизмов напора и подъема, без учета поворотных движений. При этом поворотное движение рассматривается отдельно [5, 7]. Примером модели второго класса является модель Кравцова [4], в которой расчетная схема экскаватора была сведена к схеме манипуляционного робота, и затем с помощью представления Денавита—Хартенберга [1, 2] и метода Лагранжа были получены уравнения динамики экскаватора. Между тем известно [8], что в основе эффективных алгоритмов управления экскаватором лежит совмещение работы напорного и подъемного механизмов с поворот-

ным при повороте на разгрузку, возврате ковша в забой. Известны способы работы экскаватора, при которых разгрузка ковша выполняется без остановки поворотного движения, если выполняется не погрузка породы в забой, а транспортирование ее в отвал.

Последнее неоспоримо говорит в пользу моделей второго класса, однако метод получения таких моделей является сложной задачей в силу неэффективности представления Денавита—Хартенберга. Этот недостаток может быть устранен путем применения более эффективного и наглядного метода И. Р. Белоусова [3], разработанного в Институте прикладной математики РАН им. М. В. Келдыша. Этот метод позволяет получать систему уравнений Лагранжа II рода для манипулятора, получать зависимости координат схвата манипулятора (в случае с экскаватором — ковша) в базовой системе координат в зависимости от обобщенных координат. В данной статье предлагается описание математической модели экскаватора, основанное на применении данного метода.

### Структура математической модели динамики карьерного экскаватора

Карьерный экскаватор является сложным техническим объектом, включающим в себя сочетания различных механических и электрических подсистем. Условно в нем можно выделить главные и вспомогательные механизмы и приводы. Главными механизмами являются механизм и привод поворота, приводы подъема и напора, а также канатная система, передающая развиваемые этими приводами усилия рукояти экскаватора и, тем самым, приводящая ковш в движение. К вспомогательным относятся механизм и привод открывания днища ковша, механизмы системы смазки и вентиляции и т. д. Для синтеза алгоритмов управления движениями ковша достаточно иметь математические модели главных механизмов и приводов экскаватора совместно с уравнениями движения его механической подсистемы.

Модель механической подсистемы представляет собой систему дифференциальных уравнений движения поворотной платформы, седлового подшипника и рукояти с ковшом. Подсистема главных приводов и механизмов состоит из уравнений электроприводов механизмов поворота, подъема и напора, а также уравнений обобщенных моментов, развиваемых канатной системой напора и подъема (рис. 1).





Рис. 1. Структура математической модели экскаватора

Главные электроприводы современных экскаваторов выполнены по системе ТП-Г-Д (тиристорный преобразователь — генератор — двигатель). Вопросы моделирования и настройки этой системы исчерпывающе изложены в литературе, потому в этой статье не приводятся. Их модели выполнены в соответствии с оптимальной структурой экскаваторного электропривода [9].

#### Робототехнический подход к построению математической модели

Идея применения робототехнического подхода к моделированию динамики экскаватора заключается в сведении расчетной схемы экскаватора к схеме эквивалентного манипулятора с последующим применением к эквивалентной схеме метода описания динамики и кинематики И. Р. Белоусова.

Сведение расчетной схемы экскаватора к схеме эквивалентного манипулятора включает в себя выполнение трех операций:

- устранение голономной связи через подъемный канат с заменой ее действия силой, равной реакции этой связи;
- представление кинематической пары в подъемно-напорном механизме в виде композиции вращательного и поступательного сочленений;
- приведение движущих моментов механизмов к осям сочленений.

После выполнения этих преобразований расчетная схема механической системы экскаватора принимает вид, показанный на рис. 2. В этой схеме кинематическая цепь экскаватора разорвана и включает следующие элементарные звенья:

- подвижное основание — нижнюю раму с ходовой тележкой;

- поворотную платформу с размещенным на ней оборудованием, соединенную с основанием через вращательное сочленение;
- стрелу, связанную с платформой шарнирным сочленением;
- седловой подшипник, соединенный со стрелой через шарнирное сочленение;
- рукоять с ковшом, совершающую поступательное движение относительно седлового подшипника.

При этом стрела считается "фиктивным" звеном, которое введено только для упрощения формирования уравнений движения системы. Звенья соединены между собой с помощью шарниров  $O_1, \dots, O_4$ . Шарниры  $O_1, O_2, O_3$  являются вращательными, а шарнир  $O_4$  — поступательным.

Для применения метода И. Р. Белоусова звено-рукоять с ковшом разбито на два отдельных звена — рукоять и ковш, и в месте перехода рукояти в ковш введен дополнительный фиктивный вращательный шарнир  $O_5$  и дополнительный фик-

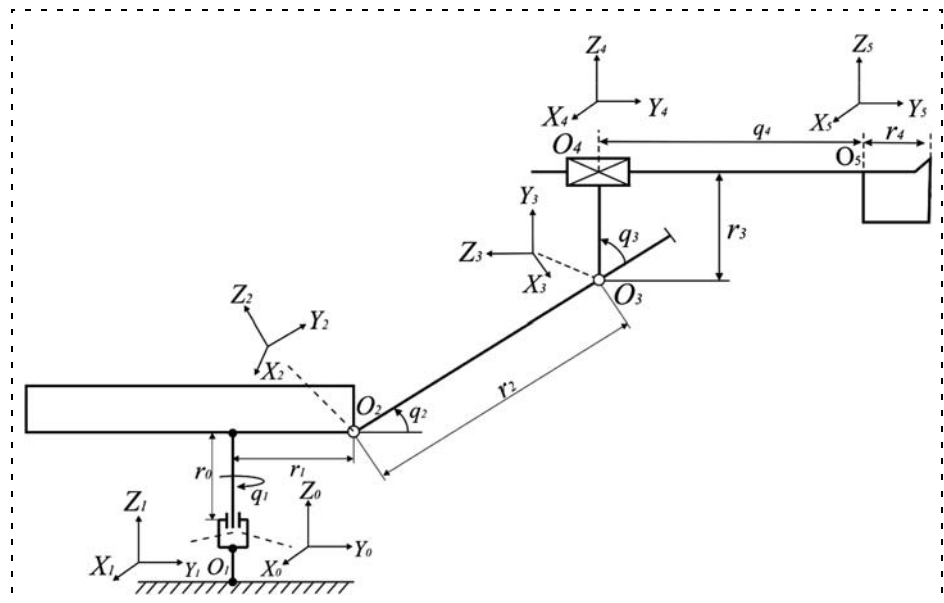


Рис. 2. Эквивалентная расчетная манипуляционная схема экскаватора

тивный угол  $q_5 = 0$ . Место крепления поворотной платформы на подвижную основу принято за основание манипулятора. При этом полагаем, что в ходе технологического цикла подвижное основание экскаватора не совершает движений, и при перемещении экскаватора положения всех звеньев фиксированы.

Были введены неподвижная (базовая) и подвижные системы координат, связанные со звеньями эквивалентного манипулятора, и в них обобщенные координаты системы:

- $q_1$  — угол поворота платформы вокруг своей оси;
- $q_2$  — угол наклона стрелы экскаватора;
- $q_3$  — угол наклона седлового подшипника;
- $q_4$  — выдвигание рукояти;
- $q_5$  — фиктивный угол поворота ковша экскаватора.

### Уравнения координат ковша экскаватора в базовой системе

Согласно методике описания кинематики манипуляторов найдем векторы переноса центров систем координат и матрицы поворотов систем координат вокруг соответствующих осей. Они имеют вид:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix}; \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{I}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_2 & -\sin q_2 \\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos q_3 & \sin q_3 \\ 0 & -\sin q_3 & -\cos q_3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{E}; \mathbf{C}_5 = \mathbf{C}_x = \mathbf{E},$$

где  $r_0$  — расстояние от центра поворотного редуктора до поворотной платформы;  $r_1$  — расстояние от оси вращения поворотной платформы до места крепления стрелы;  $r_2$  — длина секции стрелы от места крепления до оси седлового подшипника;  $r_3$  — половина длины седлового подшипника;  $r_4$  — расстояния от центра фиктивного пятого шарнира до наружной кромки зубьев ковша экскаватора.

Для получения координат зубьев ковша экскаватора в зависимости от обобщенных координат ис-

пользовано соотношение для координат схвата эквивалентного манипулятора в неподвижной системе

$$\mathbf{R}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{1i} \mathbf{I}_i = \mathbf{C}_1 \mathbf{I}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{I}_3 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_4 \mathbf{I}_4 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_4 \mathbf{C}_5 \mathbf{I}_5.$$

Для экскаватора ЭКГ-15 эти выражения имеют вид

$$\mathbf{R}_G = \begin{pmatrix} \sin q_1 (1839 \cos(q_2 + q_3)/500 - 9 \cos q_2 + q_4 \cos(q_2 + q_3) - 16/5) \\ -\cos q_1 (1839 \cos(q_2 + q_3)/500 - 9 \cos q_2 + q_4 \cos(q_2 + q_3) - 16/5) \\ -1839 \sin(q_2 + q_3)/500 + 9 \sin q_2 - q_4 \sin(q_2 + q_3) - 243/50 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Построены поверхности (рис. 3, см. третью сторону обложки), описываемые ковшом экскаватора как функции координат центра ковша от угла поворота платформы и угла наклона рукояти при различных выдвиганиях рукояти.

### Уравнения динамики главных элементов экскаватора

Для построения модели динамики будем использовать уравнения Лагранжа II рода, записанные в удобных для манипуляторов [1, 2, 3] скалярном

$$\sum_{s=1}^n d_{ks} \ddot{q}_s + \sum_{s,t=1}^n h_{kst} \dot{q}_s \dot{q}_t + p_k = \tau_k, \quad k = \overline{1,5}, \quad (3)$$

или матричном виде

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{p}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

где  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  — симметричная, положительно определенная матрица инерции манипулятора с элементами  $d_{ks}$ ;  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  — вектор кориолисовых и центробежных сил  $h_k = \sum_{s,t=1}^n h_{kst} \dot{q}_s \dot{q}_t$ ;  $\mathbf{p}$  — вектор гравитационных сил с компонентами;  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор моментов обобщенных сил в шарнирах, обусловленный работой приводов и воздействием внешних нагрузок.

И. Р. Белоусовым предложены формулы для вычисления этих составляющих уравнений:

И. Р. Белоусовым предложены формулы для вычисления этих составляющих уравнений:

$$d_{ks} = \sum_{i=\max(k,s)}^n \left[ m_i \left( \sum_{p=k}^i \tilde{V}_{pk} \mathbf{r}_p, \sum_{l=s}^i \tilde{V}_{ls} \mathbf{r}_l \right) + \text{tr}(\tilde{V}_{ik} \tilde{J}_i \tilde{V}_{is}^T) \right];$$

$$h_{kst} = \sum_{i=\max(k,s,t)}^n \left[ m_i \left( \sum_{p=k}^i \tilde{V}_{pk} \mathbf{r}_p, \sum_{l=\max(s,t)}^i \tilde{V}_{ls} \mathbf{r}_l \right) + \text{tr}(\tilde{V}_{ik} \tilde{J}_i \tilde{V}_{ist}^T) \right];$$

$$p_k = \sum_{i=k}^n -m_i (\mathbf{g}, \sum_{p=k}^i \tilde{V}_{pk} \mathbf{r}_p), \quad (4)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -го звена;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорений свободного падения.

В этих уравнениях используются компоненты скоростей ковша экскаватора, вычисляемые с помощью следующих соотношений:

$$V_{ab} = \begin{cases} V_{aa}(1 - \text{ind}_a) + C_{1a}\text{ind}_a/q_a & \text{при } a = b; \\ V_{aa}(1 - \text{ind}_a) & \text{при } a < b; \end{cases}$$

$$V_{ab} = C_1 C_2 \dots C_{b-1} Q_b C_b \dots C_a, \quad (5)$$

в которых  $Q_b$  — вспомогательные матрицы, используемые для вычисления производных от матриц поворотов:

$$Q_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ при}$$

$C_b = \{C_x, C_y, C_z\}$  соответственно;  $a \in \{p, l, i\}$ ,  $b \in \{k, s\}$ .

Параметр  $\text{ind}_a$ , характеризует тип шарнира:  $\text{ind}_a = 1$  — для вращательного шарнира,  $\text{ind}_a = 0$  — для поступательного;

$$\tilde{V}_{ast} = \frac{\partial \tilde{V}_{as}}{\partial q_t}, \quad a \in \{l, i\}; \quad (6)$$

$$r_a = \begin{cases} \mathbf{I}_a & \text{при } a < i; \\ \mathbf{r}_{C,i} + \mathbf{I}_i \text{ind}_i & \text{при } a = i, a \in \{l, p\}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{r}_{C,i}$  — вектор координат центра масс  $i$ -го звена в  $i$ -й системе координат;

$$\tilde{J}_i = J_i - m_i \mathbf{r}_{C,i} \mathbf{r}_{C,i}^T, \quad (7)$$

$J_i$  — матрица инерции  $i$ -го звена манипулятора.

Матрица инерции звена манипулятора вычисляется через компоненты тензора инерции манипулятора по известной формуле [1, 2, 3]:

$$J_i = \begin{pmatrix} \frac{-(I_i)_{xx} + (I_i)_{yy} + (I_i)_{zz}}{2} & (I_i)_{xy} & (I_i)_{xz} \\ (I_i)_{yx} & \frac{(I_i)_{xx} - (I_i)_{yy} - (I_i)_{zz}}{2} & (I_i)_{yz} \\ (I_i)_{zx} & (I_i)_{zy} & \frac{(I_i)_{xx} + (I_i)_{yy} - (I_i)_{zz}}{2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $I_i$  — тензор инерции  $i$ -го звена манипулятора.

Тензоры инерции звеньев эквивалентного манипулятора могут быть получены путем сведения их к телам правильной геометрической формы по известным формулам с применением теоремы о параллельных осях и имеют следующий вид:

- тензор инерции поворотной платформы

$$I_1 = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(L^2 + h^2) + m(y_c^2 + z_c^2) & m x_c y_c & m x_c z_c \\ m x_c y_c & \frac{m}{12}(a^2 + h^2) + m(x_c^2 + z_c^2) & m y_c z_c \\ m x_c z_c & m y_c z_c & \frac{m}{12}(L^2 + a^2) + m(x_c^2 + y_c^2) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $m, h, L, a$  — ее масса, высота, длина и ширина соответственно;

$$x_c = 0; y_c = \frac{L}{2} - R_k; z_c = \frac{h}{2} + d,$$

где  $R_k$  — радиус вращения кузова;  $d$  — просвет под поворотной платформой;

- тензор инерции стрелы экскаватора

$$I_2 = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} + \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $m, L$  — ее масса и длина;

- тензор инерции седлового подшипника

$$I_3 = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{12} + \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} + \frac{mr^2}{3} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $m, L, r$  — ее масса, длина и радиус;

- тензор инерции рукоятки

$$I_4 = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $m, L$  — ее масса и длина;

- тензор инерции ковша экскаватора

$$I_5 = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(L^2 + h^2) + m(y_c^2 + z_c^2) & m x_c y_c & m x_c z_c \\ m x_c y_c & \frac{m}{12}(a^2 + h^2) + m(x_c^2 + z_c^2) & m y_c z_c \\ m x_c z_c & m y_c z_c & \frac{m}{12}(L^2 + a^2) + m(x_c^2 + y_c^2) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $m, h, L, a$  — его масса с учетом массы зачерпнутой породы, высота, длина и ширина соответственно;  $x_c = 0, y_c = \frac{L}{2}, z_c = \frac{h}{2}$ .

С учетом того, что две обобщенные координаты  $q_2, q_5$  являются фиктивными и не изменяются, система уравнений (3) имеет вид

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{13}\ddot{q}_3 + d_{14}\ddot{q}_4 + h_{111}\dot{q}_1\dot{q}_1 + h_{113}\dot{q}_1\dot{q}_3 + h_{114}\dot{q}_1\dot{q}_4 + h_{131}\dot{q}_3\dot{q}_1 + h_{133}\dot{q}_3\dot{q}_3 + h_{134}\dot{q}_3\dot{q}_4 + h_{141}\dot{q}_4\dot{q}_1 + h_{143}\dot{q}_4\dot{q}_3 + h_{144}\dot{q}_4\dot{q}_4 + p_1 = \tau_1;$$

$$\begin{aligned}
& d_{31}\ddot{q}_1 + d_{33}\ddot{q}_3 + d_{34}\ddot{q}_4 + h_{311}\dot{q}_1\dot{q}_1 + h_{313}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \\
& + h_{314}\dot{q}_1\dot{q}_4 + h_{331}\dot{q}_3\dot{q}_1 + h_{333}\dot{q}_3\dot{q}_3 + h_{334}\dot{q}_3\dot{q}_4 + \\
& + h_{341}\dot{q}_4\dot{q}_1 + h_{343}\dot{q}_4\dot{q}_3 + h_{344}\dot{q}_4\dot{q}_4 + p_3 = \tau_3; \\
& d_{41}\ddot{q}_1 + d_{43}\ddot{q}_3 + d_{44}\ddot{q}_4 + h_{411}\dot{q}_1\dot{q}_1 + h_{413}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \\
& + h_{414}\dot{q}_1\dot{q}_4 + h_{431}\dot{q}_3\dot{q}_1 + h_{433}\dot{q}_3\dot{q}_3 + h_{434}\dot{q}_3\dot{q}_4 + \\
& + h_{441}\dot{q}_4\dot{q}_1 + h_{443}\dot{q}_4\dot{q}_3 + h_{444}\dot{q}_4\dot{q}_4 + p_4 = \tau_4.
\end{aligned}$$

Найденные координаты центров масс звеньев позволили определить в символьном виде коэффициенты уравнений динамики модели экскаватора ЭКГ-15. Расчет производили с применением *Symbolic Math Toolbox* программы *MATLAB*.

Система уравнений динамики с учетом нулевых коэффициентов и нулевых производных принимает вид

$$\begin{aligned}
& d_{11}\ddot{q}_1 + h_{113}\dot{q}_1\dot{q}_3 + h_{131}\dot{q}_3\dot{q}_1 = \tau_1; \\
& d_{33}\ddot{q}_3 + d_{34}\ddot{q}_4 + h_{311}\dot{q}_1\dot{q}_1 + h_{314}\dot{q}_1\dot{q}_4 + h_{334}\dot{q}_3\dot{q}_4 + \\
& + h_{341}\dot{q}_4\dot{q}_1 + h_{344}\dot{q}_4\dot{q}_4 + h_{343}\dot{q}_4\dot{q}_3 + p_3 = \tau_3; \quad (14) \\
& d_{43}\ddot{q}_3 + d_{44}\ddot{q}_4 + h_{411}\dot{q}_1\dot{q}_1 + h_{433}\dot{q}_3\dot{q}_3 + p_4 = \tau_4.
\end{aligned}$$

#### Уравнения обобщенных моментов

Были получены выражения для обобщенных моментов, прикладываемых к звеньям.

Для получения момента, развиваемого механизмом поворота, были использованы соотношения, приведенные в [6]:

$$\begin{aligned}
& M_d = 0,5M_{\text{элект}} - F_d(M_y; \dot{\phi}_d; b) - F_c(\dot{\phi}_d; M_{\text{с.д}}); \\
& \alpha = \phi_d - \rho q_1; \\
& M_y = K \text{dez}(\alpha; 0,5\Delta); \\
& \ddot{\phi}_d = 1/J_d M_d; \\
& \tau_1 = 2\rho M_y - F_{\text{с.п}}(\dot{q}_1; M_{\text{с.п}}); \quad (15) \\
& F_d(M_y; \dot{\phi}_d; b) = M_y(1 + b \text{sgn} M_y \text{sgn} \dot{\phi}_d); \\
& F_c(\dot{\phi}_d; M_{\text{с.д}}) = M_{\text{с.д}} \text{sgn} \dot{\phi}_d; \\
& F_{\text{с.п}}(\dot{q}_1; M_{\text{с.п}}) = M_{\text{с.п}} \text{sgn} \dot{q}_1,
\end{aligned}$$

где  $\phi_d, \dot{\phi}_d$  — угол поворота вала двигателя и круговая частота его вращения;  $M_d$  — момент, развиваемый одним двигателем;  $M_{\text{э}}$  — электромагнитный момент двигателя привода;  $M_y$  — упругий момент валопровода, приведенный к валу двигателя;  $M_{\text{с.д}}, M_{\text{с.п}}$  — абсолютные значения моментов статического сопротивления движению двигателя и поворотной платформы;  $F_c$  — сила сопротивления вращению двигателя механизма поворота;  $F_d(\dots)$  — динамический момент сил сопротивления движению;  $b$  — коэффициент, связанный с КПД механизма поворота;  $\rho, \alpha$  — передаточное число редук-

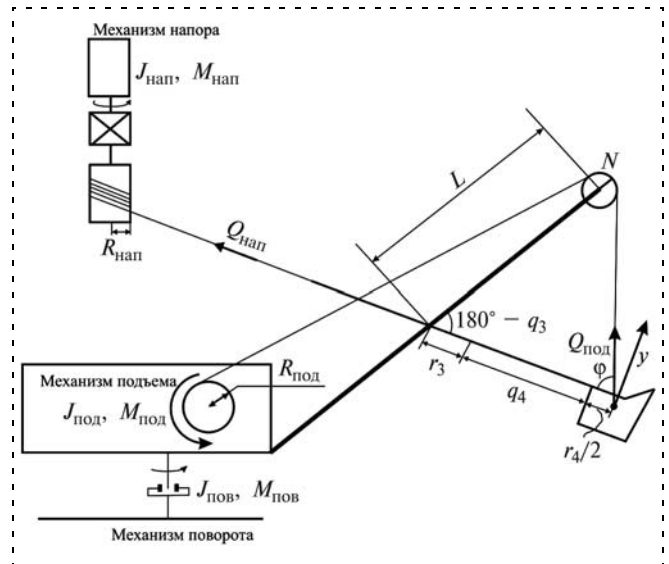


Рис. 4. К выводу уравнений обобщенных моментов и сил

тора механизма поворота и приведенный к валу двигателя угол закручивания валопровода;  $K, \Delta$  — приведенные к валу двигателя жесткость валопровода и кинематический зазор;  $J_d$  — момент инерции двигателя;  $\text{dez}(\cdot, \cdot)$  — функция зоны нечувствительности.

Для вывода уравнений обобщенных моментов третьего и четвертого звеньев обратимся к рис. 4. Из него видно, что на рукоять действует вращающий момент, создаваемый проекцией силы натяжения подъемного каната на ось, перпендикулярную рукояти. Для учета сопротивления породы движению ковша введен момент силы сопротивления движению, пропорциональный скорости движения ковша в забое:

$$\tau_3 = 2Q_{\text{п}}(q_4 + r_3 + r_4/2)\sin\phi, \quad (16)$$

где  $Q_{\text{п}}$  — упругая сила в подъемном канате.

Выражение для упругой силы, возникающей в подъемном канате  $Q_{\text{п}}$ , имеет вид [7]

$$\begin{aligned}
& Q_{\text{п}} = \frac{M_{\text{упр.мех}}}{R_{\text{п}}}, \text{ где} \\
& \frac{dM_{\text{упр.мех}}}{dt} = C_{\text{п.мех}} \left( \frac{\dot{\phi}_d}{i_{\text{п}}^2} - \frac{V_{\text{п}}}{R_{\text{п}}} \right), \\
& i_{\text{п}} = i_{\text{ред}} i_{\text{пол}}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Здесь  $M_{\text{упр.мех}}$  — упругий момент в механизме подъема, приведенный к вторичному валу редуктора;  $R_{\text{п}}$  — радиус подъемного барабана;  $i_{\text{п}}$  — обобщенное передаточное число подъемного механизма;  $i_{\text{ред}}$  — передаточное отношение редуктора;  $i_{\text{пол}}$  — передаточное отношение полиспаста;  $C_{\text{п.мех}}$  — жесткость подъемного каната, приведенная к вторич-

ному валу редуктора;  $V_{\Pi}$  — скорость движения подъемного каната:

$$V_{\Pi} = \left. \frac{dl_n}{dt} \right|_{q_4 = \text{const}} = \frac{L(q_4 + r_3 + r_4) \sin q_3 \dot{q}_3}{\sqrt{(q_4 + r_3 + r_4)^2 + 2L(q_4 + r_3 + \frac{r_4}{4}) \cos q_3}}, \quad (18)$$

$$\sin \varphi = \frac{L \cos q_3}{l_{\Pi}},$$

$l_{\Pi} = \sqrt{(q_4 + r_3 + r_4)^2 + L^2 + 2L(q_4 + r_3 + r_4) \cos q_3}$  — длина участка подъемного каната от головного блока стрелы до блока к рукояти в данный момент.

Выражение обобщенной силы, действующей на четвертое звено-рукоять, имеет вид

$$\tau_4 = Q_H - Q_{\Pi} \cos \varphi, \quad (19)$$

где  $Q_H$  — усилие в напорном канате;  $Q_{\Pi}$  — усилие в подъемном канате;

$$\frac{dM_{\text{упр.мех}}}{dt} = C_{\text{н.мех}} \left( \frac{\dot{\varphi}_d}{i_H^2} - \frac{\dot{q}_4}{R_H} \right);$$

$$Q_H = \frac{M_{\text{упр.мех}}}{R_H}; \quad (20)$$

$$i_H = i_{\text{ред}} i_{\text{пол}};$$

$M_{\text{упр.мех}}$  — упругий момент в механизме напора, приведенный к вторичному валу редуктора;  $R_H$  — радиус напорного барабана;  $i_H$  — обобщенное передаточное число напорного механизма;  $i_{\text{ред}}$  — передаточное отношение редуктора;  $i_{\text{пол}}$  — передаточное отношение полиспаста;  $C_{\text{н.мех}}$  — жесткость напорного каната, приведенная к вторичному валу редуктора.

С учетом выражения (18) получаем

$$\tau_4 = Q_H - Q_{\Pi} \sqrt{1 - \frac{L^2 \sin^2 q_3}{l_{\Pi}^2}}. \quad (21)$$

### Имитационная модель динамики экскаватора

По уравнениям модели движения (14)–(16), (21) построена компьютерная модель динамики экскаватора-мехлопаты ЭКГ-15 в приложении *Simulink* программы MATLAB (рис. 5). Она состоит из трех основных подсистем: *"Motors"*, реализующей модели электроприводов и канатной системы экскаватора, *"Excavator"*, реализующей модель механической части экскаватора, и подсистемы *"Kinem"* вычисления координат ковша в базовой системе. Команды машиниста имитируются блоком *"Signal Builder"*. Модель учитывает рост массы ковша в процессе черпания. Подсистема *"Motors"* состоит из трех блоков моделей приводов и блоков вычисления обобщенных моментов в канатной системе. Подсистема *"Excavator"* содержит три блока моделей уравнений

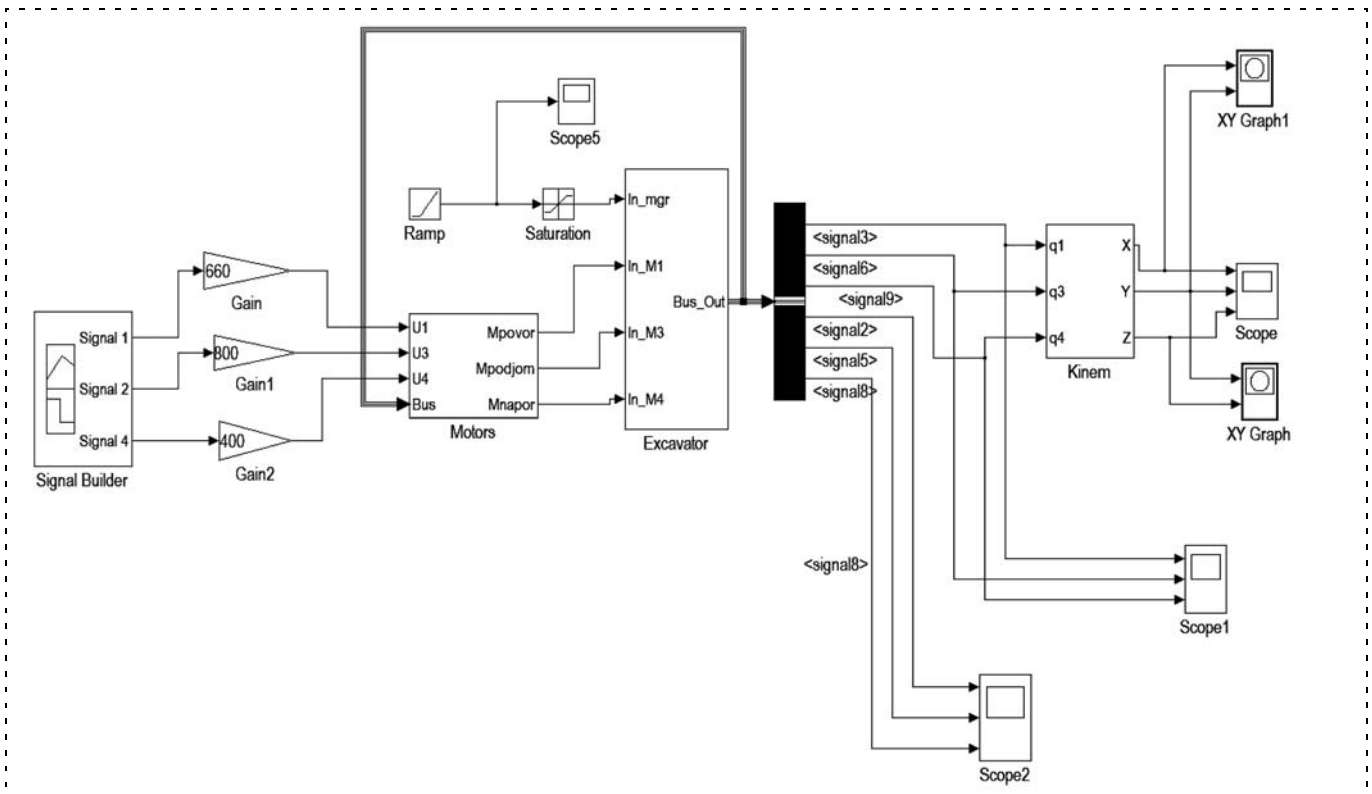


Рис. 5. Имитационная модель динамики экскаватора

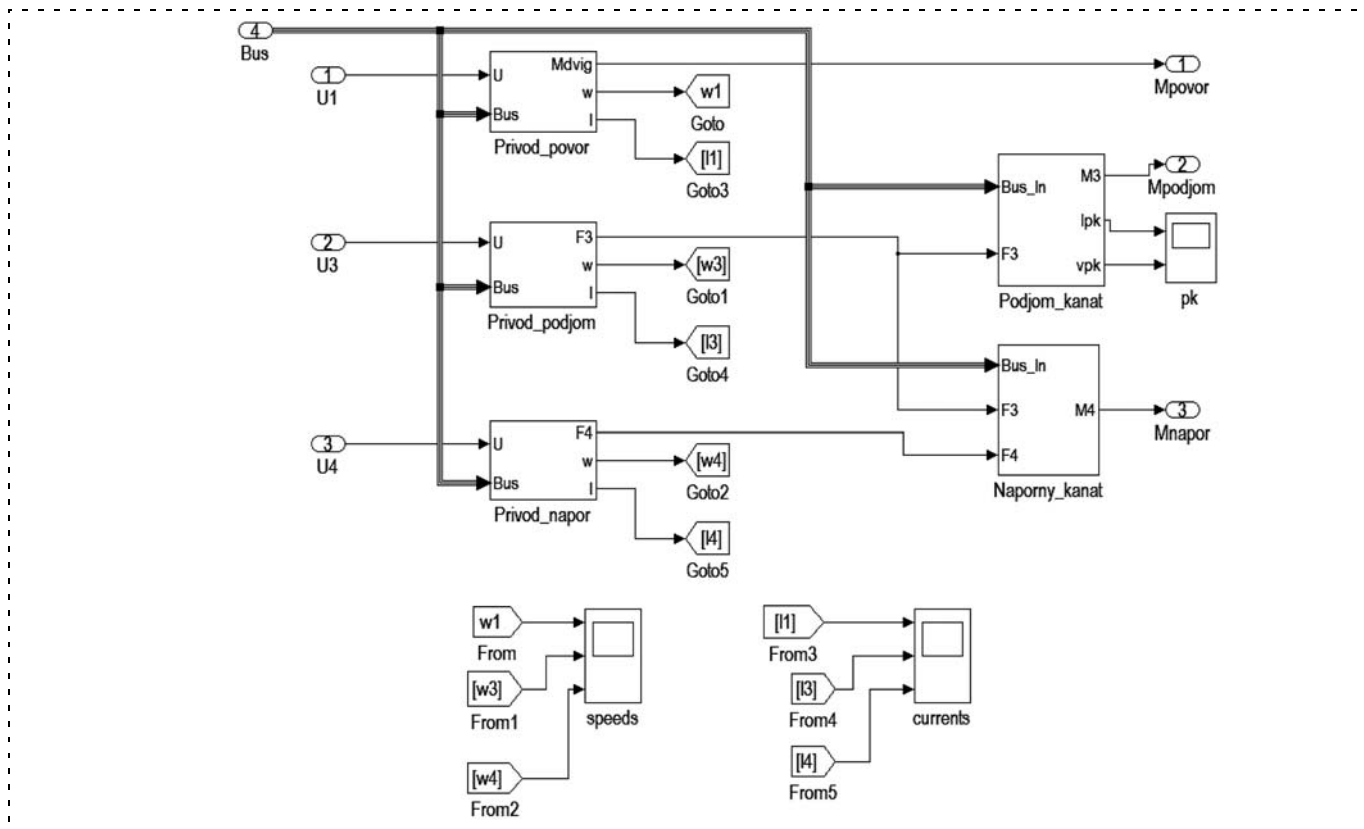


Рис. 6. Подсистема "Motors"

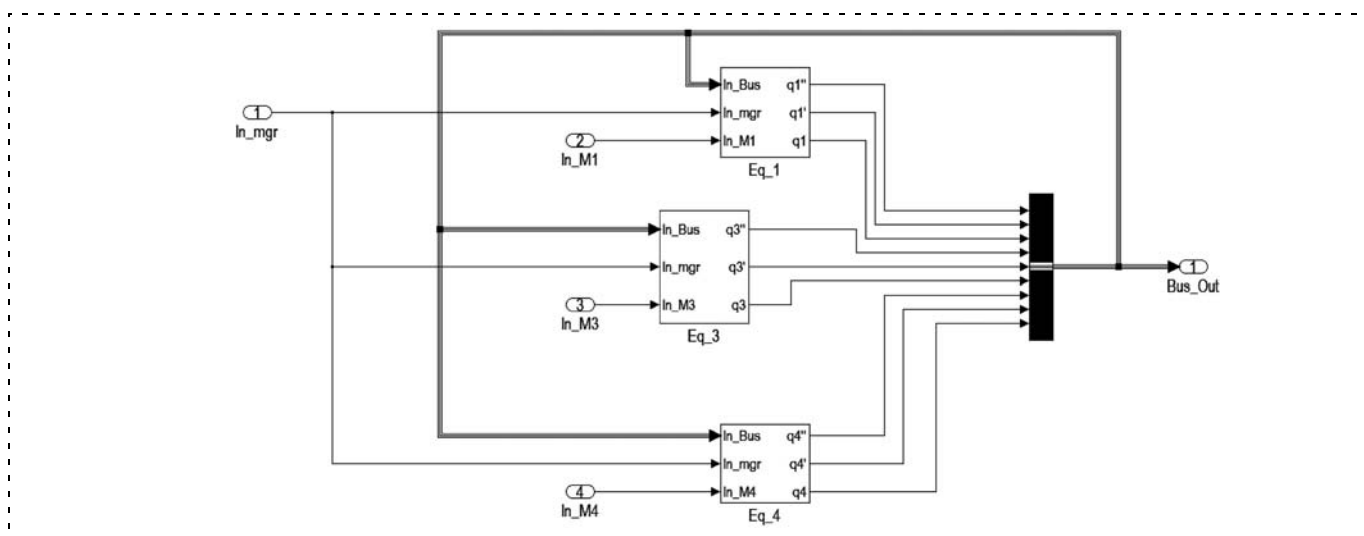


Рис. 7. Подсистема "Excavator"

динамики движения звеньев. Модель позволяет получать переходные процессы по скоростям, токам и ускорениям в приводах, скоростям и ускорениям обобщенных координат, длине и скорости ее изменения для подъемного каната, обобщенным координатам, координатам ковша в базовой системе.

Подсистема "Motors" (рис. 6) состоит из программной реализации моделей главных приводов — поворота, подъема и напора (соответственно, подсистемы "Privod\_povor", "Privod\_podjom", "Privod\_napor") —

и блоков вычисления обобщенных моментов, развиваемых канатными системами напора и подъема (подсистемы "Podjom\_kanat" и "Naporny\_kanat" соответственно).

Подсистема "Excavator" (рис. 7) содержит реализацию уравнений динамики движения поворотной платформы ( $Eq_1$ ), седлового подшипника ( $Eq_3$ ) и рукояти ( $Eq_4$ ).

Выполнено моделирование последовательности действий машиниста, соответствующей черпанию: в начале черпания осуществляется небольшое вы-

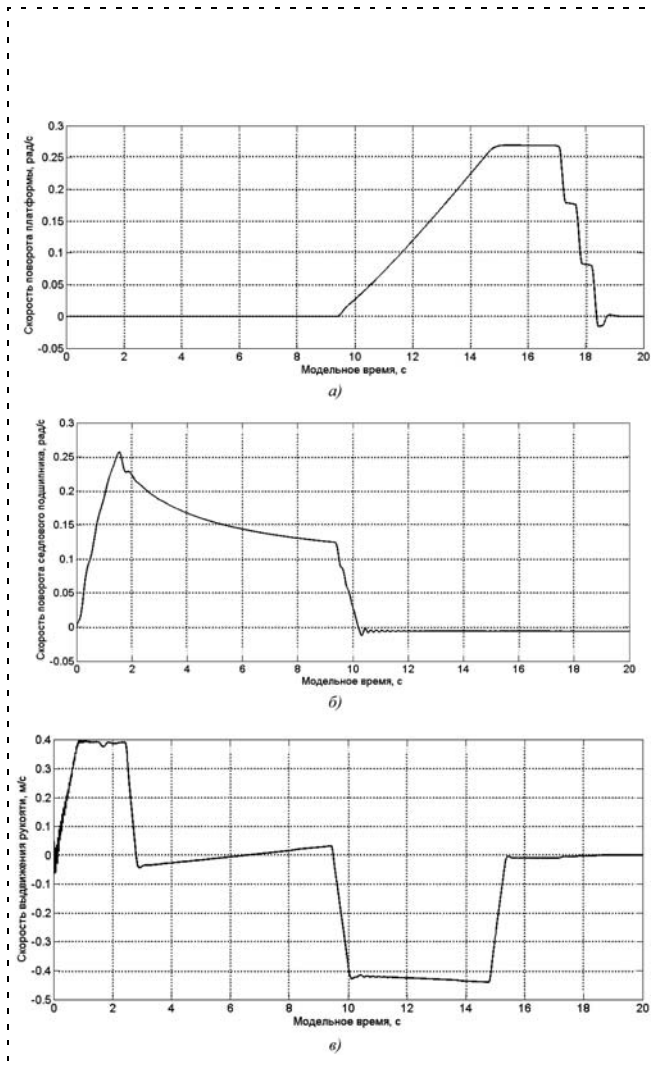


Рис. 9. Переходные процессы по скоростям изменения обобщенных координат

движение рукоятки, затем поворот на разгрузку. После окончания черпания степень выдвижения рукоятки немного уменьшается. Результаты моделирования представлены на рис. 8 (см. третью сторону обложки), рис. 9, 10.

Анализ полученных результатов показал, что значения скоростей напора, поворота и подъема блетки к паспортным значениям. Характер и времена переходных процессов хорошо согласуются с полученными по ранее известным методикам. Все вместе это позволяет говорить об адекватности полученной модели.

#### Список литературы

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир, 1989.
2. Шахинпур М. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.

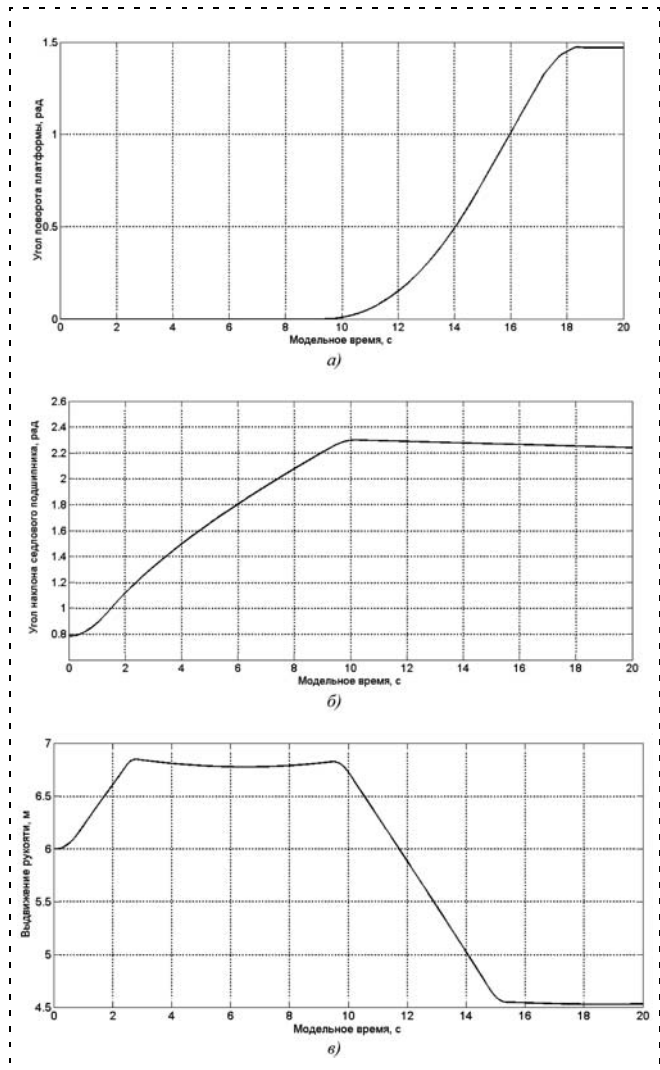


Рис. 10. Переходные процессы по обобщенным координатам

3. Белоусов И. Р. Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. № 45.2002.

4. Кравцов В. А. Дисс. "Разработка автоматизированной системы управления транспортными операциями экскаватора-мехлопаты". М.: МГИ, 1998.

5. Годжиев А. А. Автореф. дисс. "Исследование и разработка систем управления электроприводами подъемно-напорного механизма экскаваторов". М., 1995.

6. Мейлахс А. Л. Дисс. "Разработка и исследование интеллектуальных алгоритмов управления мощным драглайном для расширения его технологических возможностей". М.: МГУ, 2004.

7. Семькина И. Ю. Автореф. дисс. "Снижение динамических нагрузок в электроприводах карьерных экскаваторов". Кемерово, 2007.

8. Беляков Ю. И. Экскаваторные работы: Справочник рабочего. М.: Недра, 1992.

9. Вуль Ю. Я., Ключев В. И., Седаков Л. В. Наладка экскаваторных электроприводов. М.: Недра, 1975.

**И. А. Данилушкин**, канд. техн. наук, докторант,  
idanilushkin@mail.ru,  
**М. А. Гусева**, аспирант,  
guseva\_m.a@mail.ru,  
Самарский государственный  
технический университет

## Численно-аналитическое моделирование систем с распределенными параметрами

*Предлагается подход к моделированию объектов и систем с распределенными параметрами в компьютерных пакетах моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами. Подход основан на аппроксимации по пространственной координате распределенных сигналов структурного представления распределенных систем. С помощью предлагаемого подхода разработана модель процесса нагрева потока жидкости, учитывающая взаимное влияние температурных полей стенки и потока. Приведены результаты моделирования, а также сравнительный анализ поведения численно-аналитической и конечно-элементной моделей.*

**Ключевые слова:** структурное моделирование распределенных систем, объект с распределенными параметрами, численно-аналитическая модель, аппроксимация распределенного сигнала, модальное представление

### Введение

Исследование статических и динамических свойств объектов и систем с распределенными параметрами может осуществляться разными способами. Можно выделить несколько принципиально различающихся подходов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

1. Численные методы анализа — применение разнообразных компьютерных пакетов, ориентированных на моделирование объектов и систем с распределенными параметрами методом конечных элементов: ANSYS®, Comsol® Multiphysics®, Dymola®, MathModelica® [1]. Преимущества такого подхода хорошо известны: учет нелинейных зависимостей свойств среды от значений моделируемых полей, учет сложной геометрии границ и т. п.

2. Представление объектов с распределенными параметрами (ОРП) как многосвязных объектов с сосредоточенными параметрами — метод исходной дискретизации [2]. Такой подход основан на опосредованном учете особенностей поведения пространственно распределенного объекта и в ряде случаев может привести к потере свойств, присущих ОРП. К преимуществам подхода следует отнести возможность использования хорошо разработанного аппарата теории управления объектами с сосредоточенными параметрами и возможностью исследования модели многосвязной системы в

современных пакетах компьютерного моделирования нелинейных динамических сосредоточенных систем Matlab® Simulink®, VisSim [3].

3. Аналитические методы исследований — поиск точных решений систем уравнений в частных производных. Развитием этого подхода занимается структурная теория распределенных систем [4, 5]. С помощью передаточных функций ОРП и связывающих их распределенных сигналов система уравнений в частных производных представляется в виде структуры, подобной используемым в классической теории автоматического управления при исследовании систем с сосредоточенными параметрами. Однако при внешнем сходстве подходов анализ полученных структур гораздо сложнее, поскольку прохождение распределенного сигнала через каждый блок структуры означает операцию пространственного интегрирования произведения распределенной передаточной функции и распределенного сигнала [4].

Подход, предлагаемый в статье, относится к методам завершающей дискретизации [2] и позволяет эффективно использовать преимущества аналитических решений дифференциальных уравнений в частных производных при моделировании систем с распределенными параметрами в пакетах компьютерного моделирования нелинейных динамических сосредоточенных систем.

### Структурное представление систем с распределенными параметрами

Формирование распределенного сигнала  $Q(x, p)$  на выходе передаточной функции ОРП  $W(x, \xi, p)$  определяется выражением [4]

$$Q(x, p) = \int_D W(x, \xi, p) \omega(\xi, p) d\xi, \quad x \in D, \quad (1)$$

где  $W(x, \xi, p)$  — изображение по Лапласу функции Грина краевой задачи, описывающей ОРП;  $\omega(x, p)$  — стандартизирующая функция, позволяющая учесть неоднородность уравнения в частных производных, неоднородные граничные условия и ненулевое начальное распределение сигнала.

Благодаря известным решениям, найденным для различных уравнений математической физики при граничных условиях разного рода [6, 7], структурное моделирование систем с распределенными параметрами осуществляется за счет набора структуры системы из блоков типовых ОРП. Прохождение распределенного сигнала через блок связано с пространственным интегрированием (1), из-за чего нахождение передаточной функции полученной структуры часто оказывается невозможным. Например, типичная для исследования динамических систем задача поиска передаточной функции  $W_3(x, \xi, p)$  замкнутой системы (рис. 1) приводит к необходимости решения интегрального уравнения Фред-



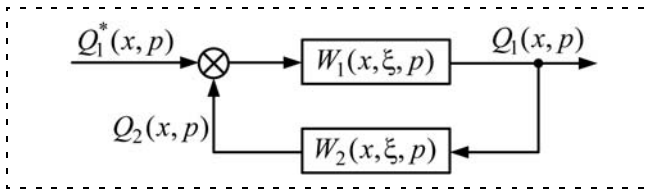


Рис. 1. Пример структурного представления системы с распределенными параметрами

гольма второго рода [4], точное решение которого не всегда существует:

$$W_3(x, \xi, p) = W_1(x, \xi, p) + \int_D \int_D W_1(x, \zeta, p) W_2(\zeta, \eta, p) d\zeta W_3(\eta, \xi, p) d\eta.$$

Более сложные структуры систем с распределенными параметрами оказываются непригодными для анализа по той же причине: невозможно получить выражение передаточной функции для системы в целом. Однако полученная структура системы с распределенными параметрами может эффективно использоваться для построения численно-аналитической модели системы путем обособления каждого блока структуры за счет аппроксимации распределенных сигналов по пространственной координате.

### Пространственная аппроксимация распределенных сигналов

Распределенный сигнал  $U(x, p)$  может быть представлен в виде некоторой аппроксимации  $U_A(x, p)$ , которая определяется вектором сосредоточенных параметров  $\mathbf{u}(p) = [u_n(p)]_{N \times 1}$ . Компоненты вектора  $\mathbf{u}(p)$  имеют смысл коэффициентов разложения в некоторый ряд по функциям  $\varphi_n(x)$ :

$$U_A(x, p) = \sum_{n=1}^N u_n(p) \varphi_n(x), \quad x \in D. \quad (2)$$

В качестве функционального ряда может выступать степенной ряд

$$\varphi_n(x) = x^{n-1}, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad x \in D$$

или полная в смысле определения, принятого в работе [5], система ортонормированных функций, таких что

$$\int_D \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m; \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases} \quad n, m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Возможно использование других способов пространственной аппроксимации распределенного сигнала: сплайн-аппроксимация [8], вейвлет-разложение [9] и т. д.

Задача аппроксимации распределенного сигнала  $U(x, p)$  сводится к нахождению элементов вектора  $\mathbf{u}(p)$  и, в общем случае, решается разными способами в зависимости от используемого метода ап-

проксимации. Для степенного ряда коэффициенты  $u_n(p)$  определяются из уравнения

$$\sum_{n=1}^N u_n(p) x^{n-1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\partial^{(n-1)} U(x_0, p)}{\partial x^{(n-1)}} (x - x_0)^{n-1}; \quad (3)$$

для разложения по системе ортонормированных функций —

$$u_n(p) = \int_D U(x, p) \varphi_n(x) dx, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4)$$

Воспользоваться решениями (3), (4) невозможно, если выражение для сигнала  $U(x, p)$  не задано в явном виде. Однако, если распределенный сигнал представить в виде набора сосредоточенных измерений в нескольких точках области определения  $D$  пространственной координаты

$$\mathbf{U}(p) = [U_m(p)]_{M \times 1} = [U(x_j, p)]_{M \times 1}, \quad x_m \in D, \quad m \in \{1, 2, \dots, M\},$$

коэффициенты аппроксимации могут быть найдены при  $M = N$  из системы уравнений [2, 10]

$$\sum_{n=1}^N u_n(p) \varphi_n(x_m) = U(x_m, p), \quad m = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Введя обозначение  $\Phi = [\varphi_n(x_m)]_{N \times M}$ , можно записать систему уравнений (5) в матричном виде:

$$\Phi \mathbf{u}(p) = \mathbf{U}(p), \quad (6)$$

откуда

$$\mathbf{u}(p) = \Phi^{-1} \mathbf{U}(p).$$

С учетом введенных обозначений, при  $M > N$  решение системы (6) может быть найдено методом квазиобращений:

$$\mathbf{u}(p) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}(p). \quad (7)$$

Приведенные выкладки позволяют реализовать следующую последовательность операций для вычисления результата прохождения распределенного сигнала через блок ОРП с известной передаточной функцией.

1. Распределенный сигнал  $u(x, p)$  на входе передаточной функции ОРП представляется вектором измерений значений в некоторых фиксированных точках области определения пространственной координаты  $\mathbf{U}(p)$ .

2. С помощью решения системы уравнений (6) находится вектор  $\mathbf{u}(p)$  коэффициентов аппроксимации распределенного сигнала  $u(x, p)$  на входе блока ОРП.

3. Распределенный сигнал на выходе блока  $Q(x, p)$  рассчитывается согласно (1). Благодаря представ-

лению входного сигнала в виде суммы (2), результирующее выражение принимает вид

$$\begin{aligned} Q(x, p) &= \int_D W(x, \xi, p) U_A(\xi, p) d\xi = \\ &= \int_D W(x, \xi, p) \sum_{n=1}^N u_n(p) \varphi_n(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^N u_n(p) \int_D W(x, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

4. По аналогии с п.1 распределенный сигнал на выходе блока ОРП  $Q(x, p)$  может быть представлен вектором измерений выходной величины в фиксированных точках  $x_k$ :  $\mathbf{Q}(p) = [Q_k(p)]_{K \times 1} = [Q(x_k, p)]_{K \times 1}$ . С учетом (8)

$$\begin{aligned} Q_k(p) &= Q(x_k, p) = \\ &= \sum_{n=1}^N u_n(p) \int_D W(x_k, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (9)$$

Введя обозначение

$$\mathbf{W}(p) = [W_{kn}(p)]_{K \times N} = \left[ \int_D W(x_k, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi \right]_{K \times N}, \quad (10)$$

можно записать (9) в матричной форме

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{W}(p)\mathbf{u}(p).$$

Таким образом, преобразование распределенного сигнала в результате прохождения его через передаточную функцию ОРП может быть представлено в виде многосвязной системы с сосредоточенными параметрами, которая, тем не менее, сохраняет свойства, порожденные пространственной распределенностью объекта.

### Использование пространственной аппроксимации распределенных сигналов при моделировании системы с распределенными параметрами

В качестве примера использования предложенного подхода рассматривается задача построения динамической модели системы с распределенными параметрами, описывающей взаимное влияние температурных полей стенки и потока по длине проточного нагревателя [11]. Математическая модель объекта представлена системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + \beta_1 Q(x, t) &= \\ &= \frac{1}{c\gamma} \cdot F(x, t) + \beta_1 \Theta(x, t); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} + \beta_1 \Theta(x, t) &= \beta_2 Q(x, t), \quad (12) \\ 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad a \neq 0, \end{aligned}$$

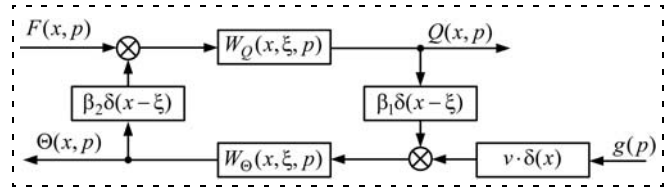


Рис. 2. Структурное представление системы с распределенными параметрами

с граничными и начальными условиями:

$$\left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad Q(x, 0) = 0, \quad (13)$$

$$\Theta(0, t) = g(t), \quad \Theta(x, 0) = 0,$$

где  $Q(x, t)$  — распределение температуры стенки трубы по длине;  $F(x, t)$  — удельная мощность внутреннего тепловыделения;  $\Theta(x, t)$  — распределение температуры потока жидкости по длине;  $v$  — скорость потока жидкости;  $\beta_1, \beta_2$  — приведенные коэффициенты конвективного теплообмена стенки с потоком и потока со стенкой, учитывающие конструктивные особенности теплообменного аппарата;  $a = \lambda / (c\gamma)$  — коэффициент температуропроводности материала стенки;  $\lambda, c, \gamma$  — соответственно теплопроводность, удельная теплоемкость и плотность материала стенки;  $L$  — длина нагревателя.

На рис. 2 представлена структурная схема объекта (11)—(12). Передаточные функции ОРП определяются выражениями [6]

$$W_Q(x, \xi, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(\xi)}{p + (\beta_1 + ai^2 \pi^2 / L^2)}, \quad (14)$$

где  $\phi_i(x)$  — собственные функции решения задачи (10) с граничными условиями (13):

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{1/L}, & i = 0; \\ \sqrt{2/L} \cos(i\pi x/L), & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

Распределенная передаточная функция температуры потока имеет вид

$$W_{\Theta}(x, \xi, p) = 1(x - \xi) \cdot \frac{1}{v} \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta_2}{v} \cdot (x - \xi)\right), \quad (16)$$

где  $1(x - \xi)$  — единичная функция:

$$1(x - \xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \xi; \\ 1 & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

Для удобства реализации модели в пакете моделирования динамических сосредоточенных систем согласно предлагаемой методике необходимо получить выражения звеньев для реализации структурной схемы, представленной на рис. 3.

На схеме (рис. 3) приняты следующие обозначения:  $\mathbf{F}(p)$ ,  $\mathbf{U}(p)$ ,  $\mathbf{Q}(p)$ ,  $\mathbf{\Theta}(p)$ ,  $\mathbf{\Theta}_g(p)$  — векторы значений соответствующих температурных распределений в точках  $x_m \in [0, L]$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ;  $\mathbf{u}(p)$ ,  $\mathbf{q}(p)$  — векторы коэффициентов разложения распределенных сигналов в ряд по системе ортонормированных функций; БВК — блок вычисления

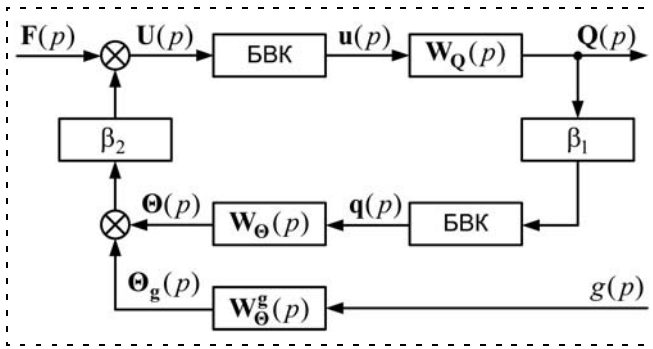


Рис. 3. Структурная схема модели системы с сосредоточенными параметрами

коэффициентов, реализует расчет коэффициентов разложения по формуле (7).

Для удобства организации вычислительных операций все распределенные сигналы в системе аппроксимируются путем разложения в ряд по собственным функциям температурного распределения стенки трубы (15):

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x), n \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (17)$$

Матрицы передаточных функций  $W_Q(p)$  и  $W_\Theta(p)$  состоят из сосредоточенных передаточных функций, которые рассчитываются аналогично (10):

$$\diamond W_Q(p) = \left[ \int_0^L W_Q(x_k, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi \right]_{K \times N},$$

с учетом (15) и (17)

$$\int_0^L W_Q(x_k, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi = \frac{\varphi_{n-1}(x_k)}{p + (\beta_1 + a(n-1)^2 \pi^2 / L^2)};$$

$$\diamond W_\Theta(p) = \left[ \int_0^L W_\Theta(x_k, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi \right]_{K \times N},$$

с учетом (16) и (17)

$$\int_0^L W_\Theta(x_k, \xi, p) \varphi_n(\xi) d\xi = \frac{1}{v} \cdot \int_0^{x_k} \exp\left(-\frac{p + \beta_2}{v} \cdot (x - \xi) \varphi_n(\xi)\right) d\xi = \begin{cases} \sqrt{1/L} \cdot \frac{1}{p + \beta_2} (1 - \exp(-(p + \beta_2)x_k/v)), \\ \text{при } n = 1; \\ \sqrt{2/L} \left[ \frac{v(n-1)\pi L \sin((n-1)\pi x_k/L)}{L^2(p + \beta_2)^2 + v^2(n-1)^2 \pi^2} \right] + \\ + \frac{[\cos((n-1)\pi x_k/L) - \exp(-(p + \beta_2)x_k/v)](p + \beta_2)}{(p + \beta_2)^2 + v^2(n-1)^2 \pi^2} \end{cases} \text{при } n > 1.$$

Передаточная функция  $W_\Theta^g(p)$  служит для расчета влияния температуры потока на входе в нагреватель  $g(p)$  на температурное распределение потока. Для учета влияния сосредоточенного воздействия на систему с распределенными параметрами в структурной теории распределенных систем используются переходные  $x$ -блоки [4]. На рис. 2 таким блоком является блок с передаточной функцией  $v \cdot \delta(x)$ . Формально сигнал после него является распределенным, однако его пространственная аппроксимация с приемлемой точностью невозможна. Поэтому влияние сосредоточенного сигнала  $g(p)$  на распределение температуры потока по длине нагревателя  $\Theta_g(p)$  должно быть рассчитано отдельно и только потом просуммировано с сигналом  $\Theta(p)$ , учитывающим влияние стенки нагревателя на температурное распределение потока (рис. 3). Имеем

$$W_\Theta^g(p) = [W_{\Theta k}^g(p)]_{K \times 1} = \begin{bmatrix} \int_0^L W_\Theta(x_k, \xi, p) v \delta(\xi) d\xi \\ \vdots \\ \int_0^L W_\Theta(x_k, \xi, p) v \delta(\xi) d\xi \end{bmatrix}_{K \times 1};$$

$$\int_0^L W_\Theta(x_k, \xi, p) v \delta(\xi) d\xi = v W_\Theta(x_k, 0, p) = \exp(-(p + \beta_2)x_k/v).$$

Полученные выражения для передаточных функций позволяют реализовать модель системы с распределенными параметрами в пакете компьютерного моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами.

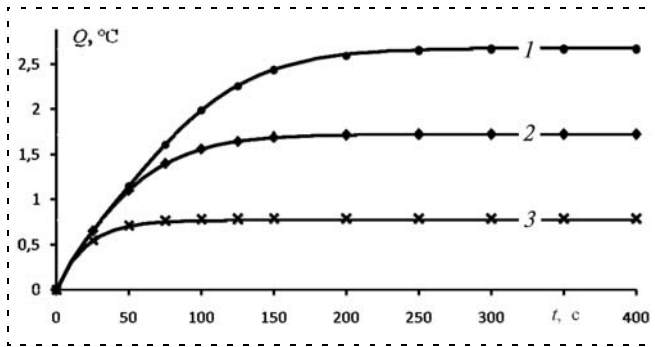
#### Сравнение численной и численно-аналитической модели

Численно-аналитическая модель, представленная на рис. 3, была реализована в пакете Matlab® Simulink® [3] для нагревателя длиной 1 м. Характеристики материала стенки нагревателя:  $\lambda = 33,5$  Вт/(м · °С);  $c = 600$  Дж/(кг · °С);  $\gamma = 7830$  кг/м<sup>3</sup>. Приведенные коэффициенты конвективного теплообмена между средами приняты равными  $\beta_1 = \beta_2 = 0,05$  1/с. Скорость потока  $v = 0,02$  м/с, температура на входе  $g(p) = 0$  °С, удельная мощность тепловыделения  $F(x, t) = 180\,000$  Вт/м<sup>3</sup>. Векторы измерений соответствующих температурных распределений  $F(p)$ ,  $U(p)$ ,  $Q(p)$ ,  $\Theta(p)$ ,  $\Theta_g(p)$  формируются в точках

$$x_m = \frac{m-1}{M-1} \cdot L, m \in \{1, 2, \dots, M\},$$

при  $M = 11$ .

Точность разработанной модели оценивали в сравнении с численной моделью системы (11)–(12) в компьютерном пакете конечно-элементного моделирования с теми же параметрами. Графики изменения температуры стенки в трех точках ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L/2$ ,  $x_3 = L$ ) представлены на рис. 4. Марке-



**Рис. 4. Температура стенки нагревателя в трех точках:**  
 1 — температура в точке  $x_1 = 0$ ; 2 — температура в точке  $x_2 = L/2$ ;  
 3 — температура в точке  $x_3 = L$

рами показаны значения температур, рассчитанные в пакете конечно-элементного моделирования.

Максимальное значение относительного отклонения численно-аналитической модели от конечно-элементной модели составляет 2,11 %. Максимальное отклонение наблюдается в начале теплообменника, в точке  $x_1 = 0$ , в двух других точках отклонение не превышает 0,65 %. Такая точность вполне приемлема при разработке моделей, ориентированных на задачи построения систем автоматического управления.

### Заключение

Исследование численно-аналитической модели, реализованной в пакете компьютерного моделирования нелинейных динамических сосредоточенных систем, показало работоспособность предложенного подхода.

Предложенный подход численно-аналитического моделирования объектов и систем с распределенными параметрами обеспечивает приемлемую точность динамического поведения моделей, проблемно ориентированных на задачи управления.

В общем случае для аппроксимации каждого из распределенных сигналов можно использовать ин-

дивидуальный способ аппроксимации, который определяется удобством реализации конкретной системы. С точки зрения реализации модели в пакете компьютерного моделирования, наиболее компактные выражения получаются при разложении сигнала по системе собственных функций распределенной передаточной функции, на вход которой он поступает. Если распределенная передаточная функция не представляется в виде бесконечной суммы произведений собственных функций и сосредоточенных передаточных функций по временным модам, то имеет смысл раскладывать распределенный сигнал по базису, который позволяет описать сигнал с требуемой точностью наименьшим числом функций-компонент базиса.

### Список литературы

1. Дудников Е. Е. Универсальные программные пакеты для моделирования систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 3—24
2. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 368 с.
3. Черных И. В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений / Под общ. ред. В. Г. Потемкина. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. 496 с.
4. Бутковский А. Г. Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
5. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
6. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.
7. Полянин А. Д. Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 575 с.
8. Шикин Е. В., Плис Л. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по слайдам для пользователей. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. 240 с.
9. Addison P. S. The Illustrated Wavelet Transform Handbook. Institute of Physics, 2002. 362 p.
10. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2005. 292 с.
11. Гусева М. А. Синтез системы модального управления многосекционным индукционным нагревателем нефти // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технич. науки. 2011. № 4 (32). С. 113—119.

## К сведению читателей

Статья Красильникьянца Е. В., Варкова А. А., Тютикова В. В. "Программное обеспечение системы управления IntNCR манипуляционным роботом", опубликованная в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление" № 3, 2012 г., выполнена по Госконтракту № 13.G25.31.0057 с Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства.

# ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



## Управление и информатика в авиакосмических и морских системах

№ 8  
АВГУСТ  
2012

**Главный редактор:**

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

**Ответственный секретарь:**

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционная коллегия:**

АЛЕКСЕЕВ В. В.  
БАРАНОВ Л. А.  
БЕЛОКОНОВ И. В.  
БУКОВ В. Н.  
ВАСИЛЬЕВ В. И.  
ГОДУНОВ В. А.  
ГУРЕВИЧ О. С.  
ГУРСКИЙ Б. Г.  
ЕФИМОВ В. В.  
ЗАЙЦЕВ А. В.  
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.  
НЕСТЕРОВ В. А.  
ОХТИЛЕВ М. Ю.  
ПАНКРАТОВ В. М.  
РАСПОПОВ В. Я.  
САБО Ю. И.  
СТЕПАНОВ О. А.  
СОЛДАТКИН В. М.  
ФИЛИМОНОВ Н. Б.  
ЧЕБУРАХИН И. Ф.  
ШИРЯЕВ В. И.  
ШКОЛИН В. П.

**Редакция:**

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

**Инсаров В. В., Ким В. Я., Тихонова С. В.**

Методы оценки качества статических изображений, полученных при дистанционном зондировании сложноструктурированных наземных сцен. . . . . 54

**Девятисильный А. С., Числов К. А.**

Модель векторной гравиметрии на базе модели интеграции двухкомпонентной инерциальной, спутниковой и астронавигационной систем . . . . . 61

**Филаретов В. Ф., Юхимец Д. А., Мурсалимов Э. Ш.**

Метод комплексирования данных с навигационных датчиков подводного аппарата с использованием нелинейного фильтра Калмана . . . . . 64

**В. В. Инсаров,**

д-р техн. наук, зам. начальника отделения,

**В. Я. Ким,** начальник сектора,

**С. В. Тихонова,** ведущий инженер,

william@gosniias.ru,

ФГУП Государственный

научно-исследовательский институт

авиационных систем, г. Москва

## **Методы оценки качества статических изображений, полученных при дистанционном зондировании сложноструктурированных наземных сцен\***

*Рассмотрены методы определения абсолютных и сравнительных количественных оценок качества статических изображений многообъектных, сложноструктурированных наземных сцен с применением метрик различного типа. Такие оценки могут быть использованы в автоматических системах обнаружения, распознавания и сопровождения объектов наземных сцен, реализующих технологии машинного зрения.*

**Ключевые слова:** статические изображения, абсолютные и сравнительные оценки качества, метрики, статистические характеристики

### **Введение**

Во всех задачах получения, обработки, передачи, хранения и использования изображения как носителя информации общим является вопрос его качества. Существуют различные подходы к решению проблемы оценки качества изображений, определяемые, прежде всего, физической сущностью рассматриваемой задачи и поставленными требованиями, принадлежностью изображения к тому или иному классу, техническими характеристиками системы машинного зрения (параметрами датчика изображения, интервалами дискретизации, соотношением сигнал/шум и т. д.), используемой мерой оценки качества изображения. Очевидно, что качество изображения можно оценивать двояко: либо определять верность воспроизведения изображения, либо оценивать дешифрируемость изображения [1]. Для этого используется как экспертное рассмотрение, позволяющее получить качественные (субъективные) оценки изображения, так и разнообразные математические методы и вычислительные алгоритмы, позволяющие получить количественные (объективные) значения таких оценок. И в первом, и во втором случаях могут использоваться методы определения абсолютных оценок, полученных при

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-08-00703-а.

изучении свойств непосредственно рассматриваемого изображения (анализа его структуры до или после некоторых преобразований), и сравнительных оценок, определяемых при взаимном анализе двух изображений. В последнем случае используются различные метрики — меры близости или отклонения рассматриваемого изображения относительно некоторого другого, выбранного в качестве эталонного. Во многих практических приложениях при оценке качества изображений подразумевается, в явной или неявной форме, присутствие человека в качестве конечного пользователя и оценщика полученных результатов. Широкое распространение такие подходы получили в задачах медицины, мониторинга окружающей среды, дистанционного зондирования Земли, в авиационных системах улучшенного и синтезированного видения и обзорно-прицельных системах и многих других.

В большинстве этих задач рассматриваются субъективные абсолютные и сравнительные оценки, связанные со стремлением к повышению дешифрируемости изображения (повышению разрешающей способности, резкости, контрастности и т. п.). Однако в ряде задач возникает необходимость получения количественных оценок качества изображений в автоматическом режиме без участия человека, причем практически в реальном масштабе времени. Примером этому могут служить задачи построения систем автоматического управления подвижными роботами, систем самонаведения беспилотных летательных аппаратов. В этих случаях необходима количественная оценка качества входных изображений в автоматических многоканальных системах обнаружения, распознавания и сопровождения объектов наземных сцен в различных условиях наблюдения, при выделении наиболее информативных и робастных признаков, слиянии разносспектральных изображений, при анализе ситуаций и принятии решений и т. п. Исходя из этого в статье рассматриваются методы получения именно количественных, абсолютных и сравнительных, оценок качества изображений. Разумеется, субъективные оценки в качестве дополнительной информации могут с успехом использоваться во многих случаях при сравнительном анализе изображений на этапах разработки системы машинного зрения, выбора алгоритмов получения количественных оценок и анализа возможности реализации этих алгоритмов.

Можно предъявлять различные требования к методам определения количественных оценок качества изображения, используя различные метрики для таких оценок в зависимости от особенностей рассматриваемых задач. В достаточно общем виде эти требования сформулированы, например, в работах [2, 3]. К этим требованиям добавляются и другие, зависящие от особенностей рассматриваемой конкретной задачи. Анализ многочисленных работ в этом направлении позволяет отметить сле-

дующие основные особенности используемых в настоящее время подходов:

- предъявление требования к одному из параметров качества изображения: контрастности, резкости и т. д. или набору этих параметров с априори выбранными весовыми коэффициентами в интегрированной оценке;
- определение значений количественных оценок качества (абсолютных и сравнительных) не зашумленных и зашумленных изображений для последующего выбора методов их обработки и сравнения эффективности этих методов;
- стремление к совмещению субъективных и количественных оценок в процессе определения в конечном счете собственно количественных оценок качества;
- выбор той или иной метрики из многообразия возможных в зависимости от особенностей рассматриваемой задачи, вычислительной реализуемости, субъективных предпочтений исследователя;
- определение значений количественных оценок для некоторой совокупности метрик, повышающих достоверность оценки качества изображения в целом.

В значительной степени эти подходы реализуются в отношении класса телевизионных систем различного назначения, а рассмотренные метрики учитывают свойства человеческого зрения. При этом широко используются метрики, базирующиеся на определении корреляционных связей как между отдельными пикселями или их группами, так и в изображении в целом. В данной статье рассматриваются методы определения количественных оценок качества применительно к реальным наземным изображениям на основе вычисления значений метрик вероятностного или разностного типов. Очевидно, что дистанционное визирование наземных сцен связано с оценками их геометрических, энергетических, спектральных характеристик по результатам обработки и анализа соответствующих изображений. Точность и достоверность таких оценок определяется точностью установления соответствия между спектральной яркостью точек наземной сцены и элементами изображений, полученных датчиками дистанционного зондирования (аэрокосмического, наземного базирования) в различных спектральных диапазонах. Указанные соответствия могут быть определены двумя независимыми характеристиками: геометрическими и яркостными (радиометрическими). Различным аспектам решения проблемы такого соответствия посвящено достаточно большое число работ, например [1, 4]. Учитывая это, в дальнейшем будем исходить из следующих предположений:

- проведены все необходимые геометрические и яркостные преобразования для установления соответствия характеристик наблюдаемой сцены и изображений этих сцен, полученных датчиками дистанционного зондирования; в дальнейшем

эти изображения будем называть текущими изображениями (ТИ);

- различные яркостные искажения, нарушающие соответствие характеристик наблюдаемой сцены ее изображению, представлены моделями, адекватно описывающими реальные процессы искажения ТИ аддитивного или мультипликативного характера;
- представленные изображения, полученные при дистанционном зондировании датчиками различных спектральных диапазонов — видимого и инфракрасного, — рассматриваются в виде цифровых моделей — массивов отсчетов (матриц) значений функции яркости  $F(i, j)$ ,  $i = \overline{1, L}$ ;  $j = \overline{1, N}$ , где  $L, N$  — число строк и столбцов матрицы яркости;
- изображения одной и той же сцены в различных спектральных диапазонах приведены к одному формату, т. е. значения  $L, N$  совпадают для всех изображений, а значения координат каждой  $i, j$ -й точки одного изображения полностью идентичны значениям координат каждой  $i, j$ -й точки других изображений.

#### Методы определения абсолютных оценок качества изображения

##### ♦ Вероятностные методы

При определении абсолютных оценок качества изображения используют такие характеристики, как корреляционная и ковариационная зависимости яркости двух элементов изображения и дисперсия яркости отдельного элемента, определяемые, соответственно, выражениями

$$R(i_1, j_1; i_2, j_2) = M\{F(i_1, j_1)F(i_2, j_2)\}; \quad (1)$$

$$K(i_1, j_1; i_2, j_2) = M\{[F(i_1, j_1) - M\{F(i_1, j_1)\}][F(i_2, j_2) - M\{F(i_2, j_2)\}]\}; \quad (2)$$

$$\sigma^2(i, j) = K(i, j; i, j). \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем символ  $M$  характеризует операцию математического ожидания, при этом математическое ожидание изображения есть матрица, содержащая математические ожидания элементов  $i, j$ . Более часто используются такие характеристики, как математическое ожидание яркости всего изображения и его дисперсия:

$$M\{F(i, j)\} = \frac{1}{LN} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N F(i, j); \quad (4)$$

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{LN} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N [F(i, j) - M\{F(i, j)\}]^2. \quad (5)$$

Одна из весьма информативных вероятностных характеристик изображения — его гистограмма, являющаяся оценкой распределения вероятностей

значений яркости первого порядка  $P(b)$  и определяемая соотношением

$$P(b) = S(b) \text{ или } P(b) = \frac{S(b)}{LN}, \quad (6)$$

где  $0 \leq b \leq 255$  — уровни квантования яркости;  $S(b)$  — число элементов с уровнем яркости  $b$ ; деление на  $LN$  — операция нормирования. Очевидно, что по форме гистограммы можно судить о свойствах изображения, например, узкая гистограмма соответствует низкому контрасту, мультимодальный характер гистограммы говорит о наличии областей повышенной контрастности относительно соседних областей и т. д. Среди основных признаков всего изображения, которые можно вычислить по гистограмме первого порядка, — среднее значение яркости  $M(b)$ , дисперсия  $\sigma_F^2$  и энтропия  $H_F$ :

$$M\{F(i, j)\} = M(b) = \sum_{b=0}^{255} bP(b);$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{b=0}^{255} [b - M\{b\}]^2 P(b); \quad (7)$$

$$H_F = - \sum_{b=0}^{255} P(b) \log_2 [P(b)].$$

При необходимости определения характеристик совместного распределения пар элементов изображения используется гистограмма яркостей второго порядка, определяемая, например, как

$$P(a, b|\Delta) = \frac{S(a, b|\Delta)}{G(\Delta)}, \quad (8)$$

где  $S(a, b|\Delta)$  — число случаев, когда  $F(i, j) = a$  и  $F(i + \Delta_x, j + \Delta_y) = b$ ,  $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y)$  — некоторый вектор смещения;  $a, b$  — яркости пар точек изображения, смещенных на вектор  $\Delta$  относительно друг друга;  $G(\Delta)$  — число этих пар. В этом случае основные признаки, которые можно вычислить по гистограмме яркостей второго порядка, — ковариация, автокорреляция и энтропия. Последняя в этом случае определяется соотношением

$$H_F(\Delta) = - \sum_{a=0}^{255} \sum_{b=0}^{255} P(a, b|\Delta) \log_2 [P(a, b|\Delta)]. \quad (9)$$

Применение этих и других характеристик, вычисляемых по гистограмме яркостей второго порядка, может быть использовано при текстурном анализе изображений.

Приведенные выше примеры статистических оценок качества изображений отнюдь не исчерпывают всего многообразия существующих. Например, в работе [5] приведены выражения для сред-

некватратичной лапласиановой погрешности и отношения сигнал/шум:

$$\sigma_{\text{л}}^2 = \frac{\sum_{i=2}^L \sum_{j=2}^N [Q(F(i, j)) - Q\{M\{F(i, j)\}\}]^2}{\sum_{i=2}^L \sum_{j=2}^N [Q(F(i, j))]^2}, \quad (10)$$

где  $Q(F(i, j)) = F(i + 1, j) + F(i - 1, j) + F(i, j + 1) + F(i, j - 1) - 4F(i, j)$ ;

$$S/N = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N [(F(i, j))]^2}{\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N [(F(i, j)) - M\{F(i, j)\}]^2} \right\}. \quad (11)$$

#### ♦ Разностные методы

Для оценки важнейших характеристик изображения — резкости и контраста, — во многом определяющих пригодность изображения к дальнейшей обработке, удобно использовать разностные методы. Например, меру резкости изображения  $S$  (степень размытости границы между двумя соседними участками изображения с разным уровнем яркости) можно определить путем нахождения угла наклона профиля яркости изображения на границе перепада:

$$S_k = \frac{G}{w} = \frac{F(i_k, j_k) - F(i_{k+1}, j_{k+1})}{w},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (12)$$

где  $n$  — число краевых пикселей на изображении;  $w$  — ширина зоны перепада яркости;  $G$  — разница между значениями яркостей соседних пикселей  $F(i_k, j_k)$  и  $F(i_{k+1}, j_{k+1})$ .

Возможный алгоритм решения задачи нахождения меры резкости [5, 6] может состоять из последовательности следующих операций:

- выделение краевых пикселей с использованием детектора краев, например детектора Кани;
- определение направления градиента в цикле для каждого краевого пикселя;
- нахождение в цикле вдоль направления градиента для каждого краевого пикселя ближайших пикселей с максимальным  $F(i, j)_{\max}$  и минимальным  $F(i, j)_{\min}$  значениями яркостей и расстоянием между ними  $w$ ;
- вычисление меры резкости для каждого краевого пикселя  $S_k$  путем подстановки  $w$ ,  $F(i, j)_{\max}$  и  $F(i, j)_{\min}$  в (12);
- определение максимального значения из всех полученных  $S_k$ , являющегося мерой резкости изображения  $S$ :  $S = \max\{S_k\}$ .

Еще одним параметром, который определяет качество изображений, является контраст — градиентная характеристика черно-белого изображения по различию в светлоте его наиболее ярких и



наиболее темных участков. Поскольку изображение имеет сложный сюжетный характер, то это порождает необходимость при определении его контрастности исходить из контраста отдельных комбинаций элементов изображения. При этом все элементы считаются равнозначными, и контраст каждой их пары вычисляется по формуле

$$LC = \frac{F(i_1, j_1) - F(i_2, j_2)}{F(i_1, j_1) + F(i_2, j_2)}, \quad (13)$$

где  $F$  — значения яркости соответствующих элементов изображения. Пиксели для сравнения можно выбирать различными способами. Наиболее простой способ — сравнение яркостей соседних пикселей в горизонтальном и вертикальном направлениях. Проводя затем усреднение матрицы локальных контрастов, получаем суммарный контраст. Может быть использован и иной метод оценки качества изображения, основанный на гипотезе о нормальном законе распределения яркостей его элементов. Кроме количественной оценки качества изображения данный метод позволяет получить информацию о наличии и весовом соотношении яркостных градаций изображения. Результаты оценки качества изображения, полученные по данному методу, во многих случаях хорошо коррелируются с субъективной оценкой визуального качества изображения [5].

При подстановке выражения (13) в (12) получится комбинированная оценка резкости и контраста изображения. К группе разностных оценок, использующих оценки изменения амплитуд перепадов яркости между соседними элементами по всему изображению, можно отнести критерий вида

$$\frac{1}{2LN - L - N} \left[ \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^N [(F(i, j) - F(i+1, j))^2 + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N-1} [(F(i, j) - F(i, j+1))^2] \right]. \quad (14)$$

### Методы определения сравнительных оценок качества изображения

Примером одной из простейших количественных сравнительных оценок качества изображения может служить значение параметра резкости всего изображения или некоторой интересующей его области. В этом случае последовательность процедур для оценки резкости может быть основана на вычислении меры эксцесса двумерного спектра Фурье изображения и включает следующие шаги:

- выделение прямоугольной области на изображении;
- преобразование выделенной области интереса в частотную область;
- вычисление меры эксцесса двумерного спектра Фурье полученной области, определяемой как

отношение четвертого центрального момента  $\mu_4$  и квадрата второго центрального момента  $\mu_2$ :

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \quad (15)$$

- сравнение меры эксцесса спектра Фурье исходного изображения и меры эксцесса спектра Фурье изображения, обработанного каким-либо фильтром, например фильтром Гаусса.

Так как высоких пространственных частот на резком изображении больше, чем на размытом, двумерное распределение спектра Фурье для резкого изображения будет шире. Очевидно, что более резкому изображению соответствует большее значение эксцесса.

Для оценки разницы между двумя изображениями  $F_1$  и  $F_2$  можно использовать норму Минковского вида

$$p_p = \left[ \frac{1}{LN} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N |F_1(i, j) - F_2(i, j)|^p \right]^{\frac{1}{p}}; \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Однако норма Минковского далеко не всегда соответствует даже визуальной оценке сходства изображений, имеющих одинаковое значение нормы при различных значениях параметра  $p$  [6], поскольку не учитывает структурного подобия этих изображений. Эта метрика учитывает лишь отдельные характерные особенности изображений при оценке их качества.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в разработке методов получения количественных оценок качества изображения, следует отметить ограниченные возможности большинства рассмотренных в литературе метрик. Введенные критерии позволяют найти приемлемые оценки лишь в каждом частном случае. Предлагается, например, некая удобная для анализа и вычислений метрика, а затем оцениваются ее свойства.

С учетом важной роли структурной информации при сравнительной оценке качества изображений наиболее целесообразными представляются попытки использования соответствующих метрик, не зависящих от типа решаемых задач. Одним из примеров такой метрики может служить предложенный в работе [7] универсальный индекс изображения  $Q_0$  как мера структурных искажений (структурного подобия — SSIM) между двумя изображениями.

Используя выражение для ковариации яркостей двух изображений  $F_1, F_2$ ,

$$\sigma_{F_1 F_2} = \frac{1}{LN-1} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N [F_1 - M\{F_1\}][F_2 - M\{F_2\}], \quad (17)$$

представим меру качества рассматриваемого изображения  $F_1 = F_1(i, j)$  относительно некоторого другого изображения  $F_2 = F_2(i, j)$ , принимаемого за эталонное, в виде индекса

$$Q_0(F_1, F_2) = \frac{4\sigma_{F_1 F_2} M\{F_1\} M\{F_2\}}{[M\{F_1\}^2 + M\{F_2\}^2][\sigma_{F_1}^2 + \sigma_{F_2}^2]},$$

значения которого лежат в диапазоне значений —  $1 \leq Q_0 \leq +1$ , или в несколько иной записи

$$Q_0(F_1, F_2) = \frac{\sigma_{F_1 F_2}}{\sigma_{F_1} \sigma_{F_2}} \cdot \frac{2M\{F_1\} M\{F_2\}}{M\{F_1\}^2 + M\{F_2\}^2} \cdot \frac{2\sigma_{F_1 F_2}}{\sigma_{F_1}^2 + \sigma_{F_2}^2}. \quad (18)$$

В последнем выражении первый множитель есть коэффициент корреляции между изображениями  $F_1, F_2$ , второй множитель отражает, в некотором роде, среднее искажение яркости и может принимать значения в диапазоне  $[0, 1]$ . Третий множитель характеризует меру искажения контраста. Его значения также лежат в диапазоне  $[0, 1]$ . Разумеется, при идентичности изображений  $F_1, F_2$  индекс принимает значение  $Q_0 = 1$ .

Так как рассматриваемый класс изображений нестационарен, целесообразно осуществить последовательное вычисление значений  $Q_0$  для локальных областей  $Q_0(F_1, F_2|w)$ , где  $w$  — скользящее окно неизменного размера (например  $11 \times 11, 5 \times 5$ ), просматривающее пиксель за пикселем все изобра-

жение. Глобальный индекс определяется осреднением всех локальных качественных индексов

$$Q_0(F_1, F_2) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} Q_0(F_1, F_2|w). \quad (19)$$

В приведенном выражении  $W$  — множество всех окон  $w$ ,  $|W|$  — число элементов  $W$ . Очевидно, что чем выше значение меры сходства изображений, тем лучше выполнена обработка изображения. Поскольку на статических изображениях сцены отсутствует изменяемость формы и подвижность объектов, меру сходства можно вычислять сразу по всему изображению.

#### Примеры значений абсолютных и сравнительных оценок качества изображения многообъектных наземных сцен

На рис. 1, 2 приведены изображения двух реальных сцен в видимом (а) и ИК (б) диапазонах (3...5 мкм), полученные при настильных углах зондирования, и соответствующие им гистограммы (в).

Из приведенных на рис. 1 гистограмм видно, что для изображения в видимом диапазоне (ТВ) наблюдается равномерность распределения яркостей всех оттенков серых тонов со значительной долей светлых тонов, соответствующей достаточно большому размеру ясного неба в данном изображении. Для изображения в ИК диапазоне имеет место очевидное смещение пиков гистограммы в сторону темных тонов.

По гистограммам другой сцены (рис. 2, а, б) нетрудно заметить, что для изображения видимого диапазона значения яркости распределены достаточно равномерно, с некоторым преимуществом среднесерых тонов (значения яркости 100...160) и белых тонов. Уменьшение размера ясного неба в данном изображении по сравнению с предыдущим случаем (см. рис. 1, а) соответствует существенному уменьшению доли светлых тонов. В ИК изображении наблюдается преимущество темных и темносерых тонов и небольшой пик в максимальных яркостях.

На рис. 3, 4 приведены изображения сцены (см. рис. 2) в видимом и ИК диапазонах, зашумленные равномерным шумом различного уровня ( $\sigma_{ш} = 6...30$ ), и соответствующие им гистограммы; пунктиром изображены гистограммы, соответствующие незашумленным изображениям.

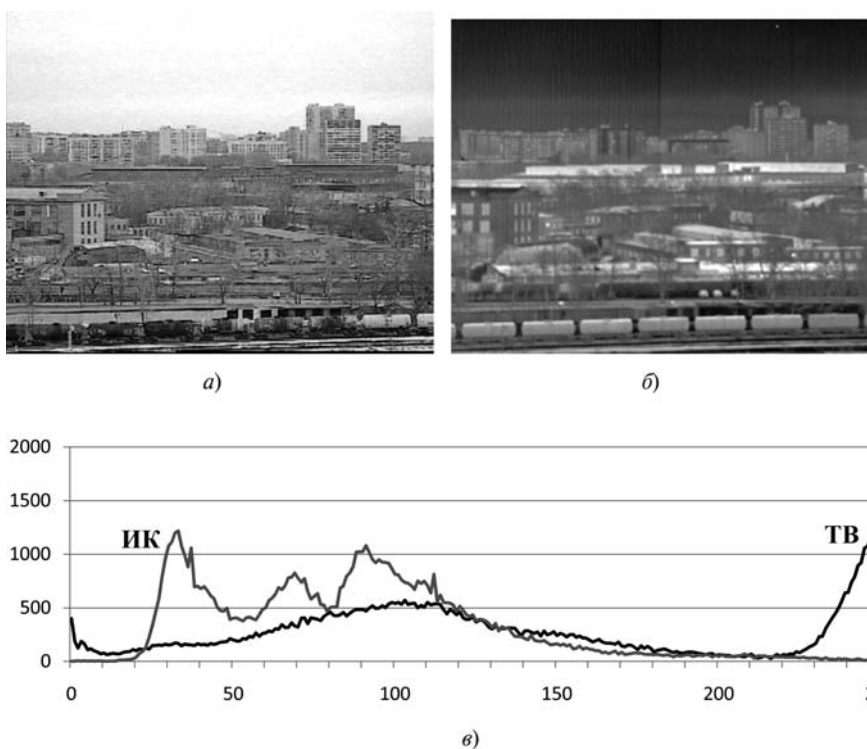


Рис. 1. Изображения реальной сцены 1 в видимом (а) и ИК (б) диапазонах (3...5 мкм), полученные при настильных углах зондирования, и соответствующие им гистограммы (в)

Сравнение гистограмм незашумленных (см. рис. 2, а, б) и соответствующих зашумленных (рис. 3, 4) изображений показывает, что зашумление изображения равномерным шумом вызывает размытие гистограммы, говорящее об уменьшении общего контраста изображения.

В табл. 1 приведены количественные значения ряда абсолютных оценок для изображений двух сцен, приведенных на рис. 1, 2:  $\sigma_F^2$  — дисперсия гистограммы;  $H_F$  — энтропия гистограммы;  $LC$  — оценка по локальному контрасту;  $H_F(\Delta)$  — энтропия гистограммы второго порядка ( $\Delta = (2, 2)$ );  $S/N$  — сигнал/шум, определяемые выражениями (7), (13), (9), (11) соответственно.

В табл. 2 приведены количественные значения абсолютных оценок для изображений, приведенных на рис. 2, а, б и соответствующих им зашумленных равномерным шумом различной интенсивности изображений (рис. 3, 4). Сравнительный анализ значений абсолютных оценок позволяет в принципе оценить тенденцию изменения качества изображений реальных сцен при воздействии шумовых помех, атмосферной изменчивости и других возмущающих факторов.

В табл. 3 приведены значения сравнительных оценок качества, использующих метрики Минковского ( $p_p$ ) и структурного подобия SSIM ( $Q_0$ ), включая составляющие последней ( $Q_1, Q_2, Q_3$ ), и определяемых выражениями (16), (18) соответственно, для изображений на рис. 2, а и 3 и на рис. 2, б и 4. При вычислении метрики  $Q_0$  использовалось, в соответствии с (19), скользящее окно неизменного размера  $w = 11 \times 11$ ; в качестве эталонных принимались незашумленные изображения (рис. 2, а, б).

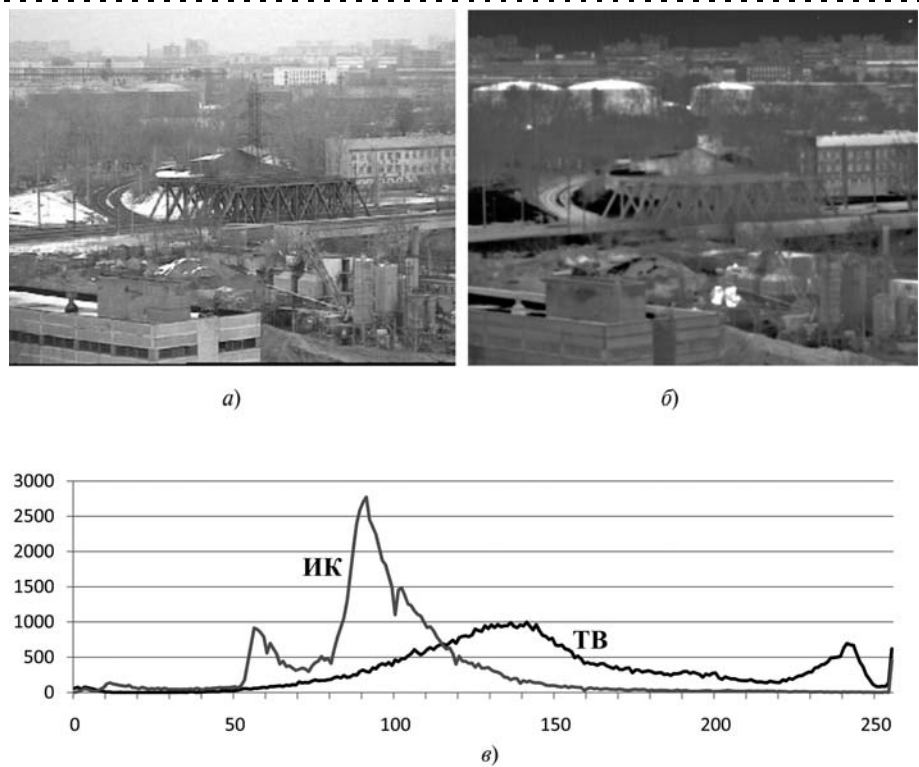


Рис. 2. Изображения реальной сцены 2 в видимом (а) и ИК (б) диапазонах (3...5 мкм), полученные при настильных углах зондирования, и соответствующие им гистограммы (в)

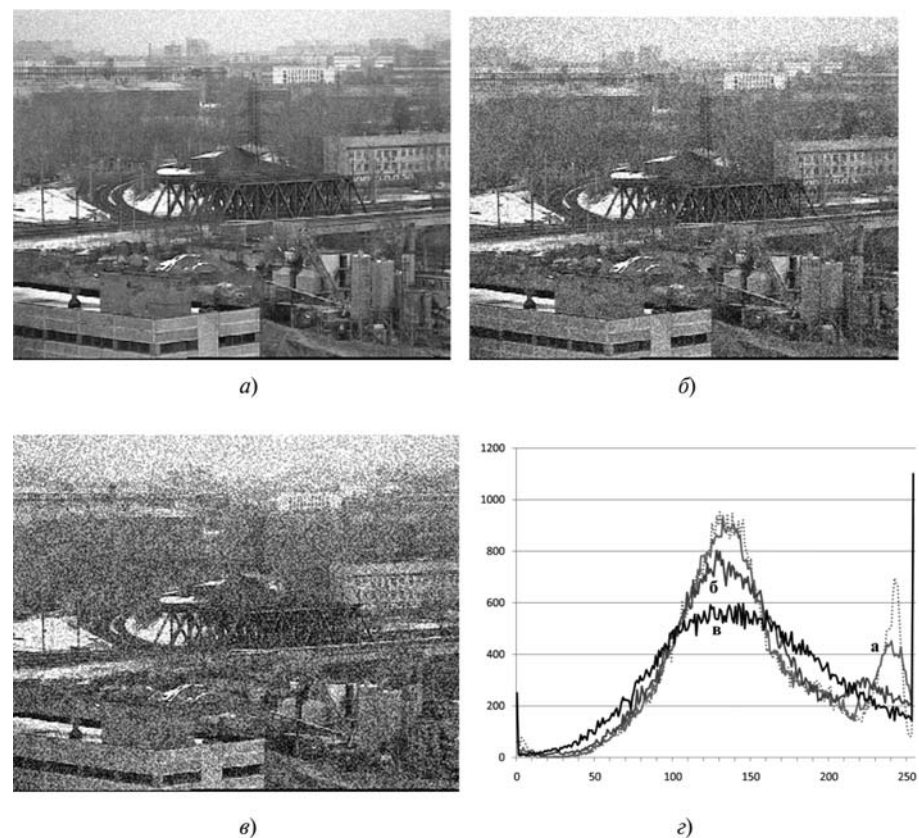


Рис. 3. Изображения сцены 2 в видимом диапазоне, зашумленные равномерным шумом различного уровня ( $\sigma_{ш} = 6...30$ ) и соответствующие им гистограммы (г): а —  $\sigma_{ш} = 6$ ; б —  $\sigma_{ш} = 16$ ; в —  $\sigma_{ш} = 30$

## Заключение

Рассмотренные в работе абсолютные оценки позволяют судить только о качестве конкретного изображения (до или после некоторых его преобразований, например при воздействии шумов), используя такие количественные характеристики, как гистограммы первого и второго порядка, дисперсия и энтропии гистограммы первого и второго порядка, отношение сигнал/шум, локальный контраст.

Сравнительные оценки позволяют судить о качестве конкретного изображения относительно некоторого эталонного. Такие оценки можно получить по-разному:

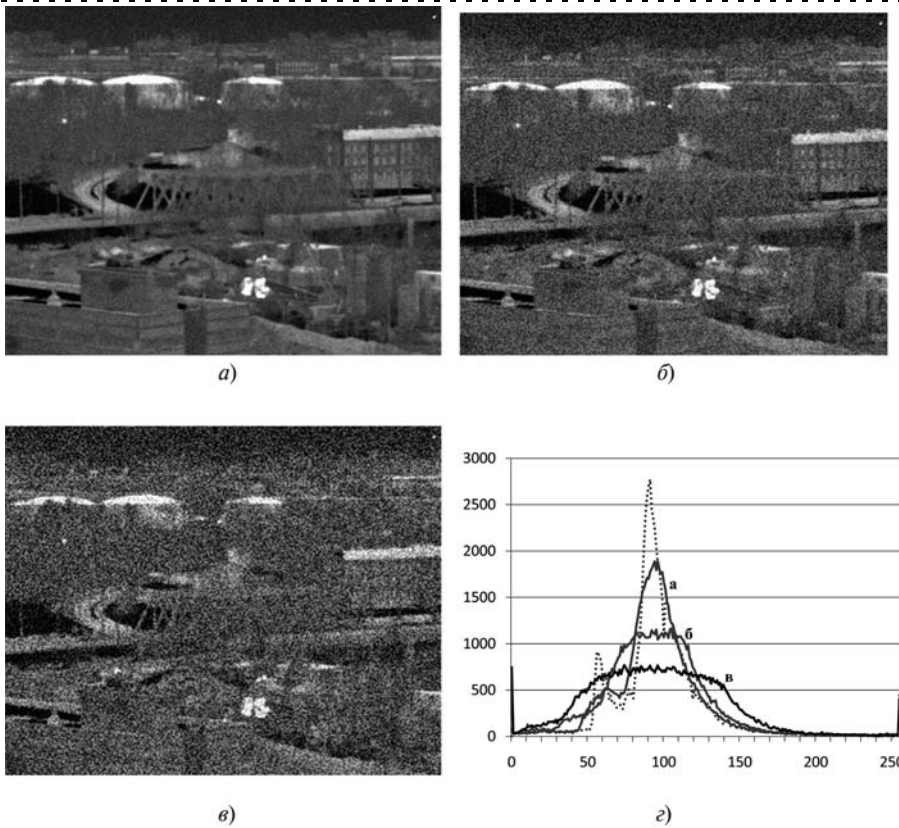
- путем сравнения числовых значений соответствующих абсолютных оценок каждого из изображений (гистограммы, энтропии и т. п.);
- с использованием различных метрик, например, Минковского, структурного подобия, и др., с оценкой отличия рассматриваемого изображения от эталонного.

Количественные меры качества изображения необходимы при проектировании и оценке систем воспроизведения изображений; эти меры во многом помогают избавиться от трудоемкой и неточной оценки изображений посредством субъективной экспертизы; при этом следует использовать не одну отдельно взятую меру, а их набор; один из возможных наборов рассмотрен в данной статье.

На основе количественных мер можно развивать методы оптимизации систем обработки изображений и, в частности, методов оценки качества слияния разномасштабных изображений.

## Список литературы

1. **Pratt W.** Digital Image Processing. Third Edition. Wiley, 2001.
2. **Winkler S.** Digital Video Quality. Vision models and metrics. Wiley, 2005
3. **Грибунин В.** Объективные метрики для оценки качества видеокодеков // Технология защиты. 2008. № 2.
4. **Злобин В. К., Еремеев В. В.** Обработка аэрокосмических изображений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2006.
5. **Журавель И. М.** Краткий курс теории обработки изображений, MATLAB & Toolboxes.
6. **Монич Ю. И., Старовойтов В. В.** Оценки качества для анализа цифровых изображений // Искусственный интеллект. 2008. № 4 (Минск, Беларусь).
7. **Wang Z. and Bovik A. C.** A universal image quality index // IEEE Signal Processing Letters. 2002. V. 9. N 3.



**Рис. 4.** Изображения сцены 2 в ИК диапазоне, зашумленные равномерным шумом различного уровня ( $\sigma_{ш} = 6...30$ ) и соответствующие им гистограммы (e):  
 a —  $\sigma_{ш} = 6$ ; б —  $\sigma_{ш} = 16$ ; в —  $\sigma_{ш} = 30$

Таблица 1

Сцена	$\sigma_F^2$	$H_F$	LC	$H_F(\Delta)$	S/N
Рис. 1, а (ТВ)	6135	7,36	-0,038	16,09	6,76
Рис. 1, б (ИК)	1842	7,21	0,31	15,48	6,11
Рис. 2, а (ТВ)	2446	7,416	0,045	16,466	10,09
Рис. 2, б (ИК)	938	6,58	-0,16	14,49	9,89

Таблица 2

Шум $\sigma_{ш}$	$\sigma_F^2$	$H_F$	S/N	$\sigma_F^2$	$H_F$	S/N
	ТВ изображение			ИК изображение		
0	2446	7,416	10,09	938	6,58	9,89
6	2504	7,46	10,05	971	6,75	9,74
16	2668	7,49	9,79	1173	7,00	8,92
30	3127	7,55	9,16	1765	7,35	7,15

Таблица 3

Диапазоны	$\sigma_{ш}$	$p_p (p=2)$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_0$
ТВ	6	6,03	0,99	1	0,99	0,98
	16	15	0,95	0,999	0,95	0,9
	30	29,15	0,85	0,999	0,849	0,725
ИК	6	6,029	0,98	1	0,98	0,96
	16	15,9	0,88	1	0,88	0,779
	30	29,92	0,7	0,999	0,67	0,475

**А. С. Девятисильный,**

д-р техн. наук, гл. науч. сотр.,  
devyatis@iacp.dvo.ru,

**К. А. Числов,** канд. техн. наук, науч. сотр.,  
kirillche@rambler.ru,

Институт автоматики и процессов управления  
ДВО РАН, г. Владивосток

## Модель векторной гравиметрии на базе модели интеграции двухкомпонентной инерциальной, спутниковой и астронавигационной систем

*Показано, что включение в модель двухкомпонентной инерциальной навигационной системы, корректируемой по астро- и спутниковой информации, дополнительных условий, интерпретирующих общее уравнение динамики в проекции на радиус-вектор местоположения движущегося объекта, позволяет реализовать в интегрированной системе функцию определения напряженности гравитационного поля Земли.*

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, астросистема, ньютонометр, гироскоп, обратная задача, навигационная спутниковая система

### Введение

В работе [1] исследована модель навигационной интегрированной системы (ИС), отождествляемая с моделью трехкомпонентной (3D) инерциальной навигационной системы (ИНС), корректируемой измерениями, доставляемыми навигационной спутниковой системой (НСС) типа ГЛОНАСС и бортовой астросистемой, визирующей одну звезду. В такой корректируемой 3D-ИНС показания трех ньютонометров (акселерометров), представляющие собой измеренные значения трех компонент вектора кажущегося ускорения [2], непосредственно используются в алгоритме функционирования системы при интегрировании векторного уравнения Ньютона, или динамической группы уравнений (ДГУ) (что и лежит в основе понятия трехкомпонентности) [3], моделирующих движение материальной точки в гравитационном поле Земли (GE-поле). Наличие в составе ИС астросистемы, визирующей только одну звезду, не обеспечивает возможности независимого решения кинематической задачи — оценки параметров вращения приборного координатного трехгранника, что является и причиной невозможности надления такой ИС функцией оценки напряженности GE-поля. Однако, как следует из работы [1], эта ИС при достаточно точных представлениях о GE-поле решает, причем вполне успешно, полную навигационную задачу — задачу определения места объекта и его ориента-

ции (или, что, по сути, то же самое — ориентации приборного трехгранника) в пространстве.

Вместе с тем, в работе [3] показано, что если в состав ИС включена астросистема, визирующая более одной звезды, то ИС может интерпретироваться в качестве векторной гравиметрической ИС, т. е. системы, наделенной способностью оценки напряженности GE-поля.

В данной статье показано, что в ИС с такой же астросистемой, как описана в работе [3], возможность оценки напряженности GE-поля может быть сохранена и в рамках представлений о двухкомпонентных (2D) ИНС, отличающихся от 3D-ИНС тем, что в их алгоритме функционирования используются измерения только двух — "горизонтальных" — ньютонометров, и соответственно, интегрируется только часть уравнений из ДГУ [4].

### Основные модели

Идеализированная математическая модель ИС (на основе модели 3D-ИНС) в форме обратной задачи вида "состояние—измерение" [5] представляется двумя группами дифференциальных уравнений — динамической (ДГУ) и кинематической (КГУ) [6] (из которых первая описывает траекторию, а вторая эволюцию ортогональной системы отсчета  $oq = oq_1q_2q_3$  относительно выбранной инерциальной системы отсчета  $o\xi = o\xi_1\xi_2\xi_3$ ), — а также двумя группами уравнений измерений, доставляющих информацию от НСС о месте объекта и от астросистемы — об ортах направлений на известные звезды.

Не нарушая общности, примем, что система отсчета  $oq$  является геоцентрической с осью  $oq_3$ , направленной по радиус-вектору объекта-носителя, и с осями  $oq_1$  и  $oq_2$ , направленными соответственно на Восток и Север; осям системы  $oq$  коллинеарны оси сопровождающего идеального приборного трехгранника, который физически реализуется на борту подвижного объекта и в котором выполняются измерения и интегрирование дифференциальных уравнений обеих групп. С учетом изложенного указанная модель ИС может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= -e_{ikj}\omega_k q_j + p_i, q_i(0) = q_i, 0; \\ \dot{p}_i &= -e_{ikj}\omega_k p_j + G_i(\mathbf{q}) + F_i, p_i(0) = p_i, 0; \\ \dot{A}_{kj} &= -e_{kus}\omega_u A_{sj}, A_{kj}(0) = A_{kj}, 0; \\ z_j &= q_j, \\ z_j^{(w)} &= l_j^{(w)}, i, j, k, s, u = \overline{1, 3}; w = \overline{1, 2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q_i$  и  $p_i$  — переменные ДГУ, или компоненты векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , — соответственно радиус-векторы места объекта и его абсолютной линейной скорости (удельного импульса);  $\omega_k$  — компонента вектора абсолютной угловой скорости ( $\omega$ ) вращения приборного трехгранника;  $A_{kj}$  — переменные КГУ, или элементы матрицы ( $\mathbf{A}$ ) взаимной ориентации систем отсчета  $oq$  и  $o\xi$ , так что  $\mathbf{q} = \mathbf{A}\xi$ ;  $z_i$  — компонента

вектора измерений ( $\mathbf{z}$ ), доставляемых НСС;  $z_j^{(w)}$  — компонента вектора измерений ( $\mathbf{z}^{(w)}$ ), доставляемых астросистемой;  $l_j^{(w)}$  — компонента орта ( $\mathbf{I}^{(w)}$ ) направления на  $w$ -ю звезду;  $G_i(\mathbf{q})$  — компонента вектора напряженности ( $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ ) GE-поля;  $F_i$  — компонента вектора равнодействующей ( $\mathbf{F}$ ) удельных сил негравитационной природы;  $q_i(0)$ ,  $p_i(0)$  и  $A_{kj}(0)$  — начальные (при  $t=0$ ) значения элементов векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  и матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $e_{ikj}$  — символ Леви—Чивита; здесь и далее устанавливается правило суммирования по повторяющимся индексам.

При переходе к модели идеализированной ИС на базе модели 2D-ИНС с учетом ориентации координатных осей приборного трехгранника в уравнениях (1) полагаем  $i = \overline{1, 2}$ ;  $|\mathbf{q}| = q_3 = r$ ;  $z_3 = r$ ;  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(q_1, q_2, z_3) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, r)$ , где  $\mathbf{x} = (q_1, q_2)^T$ ,  $p_3 = \dot{z}_3 - \omega_2 q_1 + \omega_1 q_2$ , т. е., что существенно, переход к новой модели требует оценки производной измеряемой НСС координаты  $q_3$ , т. е.  $\dot{z}_3$ .

Обращаясь к физическим реалиям, отметим наличие погрешностей в измерениях, в определении начальных значений, а также в представлениях о напряженности GE-поля. Дополнительно к этому отметим и то, что при визировании двух и более звезд возможно точечное оценивание параметров ориентации приборного трехгранника, т. е. матрицы  $\mathbf{A}$ , с погрешностями, обусловленными инструментальными погрешностями наблюдения звезд. Полагая достаточно малыми все указанные погрешности, выполним переход к линейным представлениям в вариациях, сформулировав, таким образом, обратную задачу "в малом":

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_i &= -e_{ikj} \omega_k \delta q_j + \delta p_i - e_{ikj} v_k q_j, \quad \delta q_i(0) = \delta q_i, 0; \\ \delta \dot{p}_i &= \left( \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, r)}{\partial q_i} \right) \delta q_i - e_{ikj} \omega_k \delta p_j + \left( \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, r)}{\partial r} \right) \varepsilon_r - \\ &- e_{ikj} v_k p_j + g_i + f_i, \quad p_i(0) = p_i, 0; \\ \beta_u &= -e_{ukj} \omega_k \beta_j + v_u, \quad \beta_u(0) = \beta_u, 0; \\ \dot{g}_i &= \chi_i(t), \quad g_i(0) = g_i, 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\delta z_1 = \varphi_{\text{ИНС}} - \varphi_{\text{НСС}} = \frac{\delta q_2}{r} - \beta_1 + \varepsilon_1;$$

$$\delta z_2 = \frac{\lambda_{\text{ИНС}} - \lambda_{\text{НСС}}}{\cos \varphi} = -\frac{\delta q_1}{r} - \beta_2 + \varepsilon_2;$$

$$\delta z_s = \beta_s + \varepsilon_s; \quad i = \overline{1, 2}; \quad (j, u, k) = \overline{1, 3}, \quad s = \overline{3, 5},$$

где  $\delta q_i = q_i - \tilde{q}_i$ ;  $\delta p_i = p_i - \tilde{p}_i$ ;  $g_i = G_i(\mathbf{q}) - \tilde{G}_i(\mathbf{x}, r)$ ;

$$\tilde{G}_i(\mathbf{x}, r) = -\frac{\mu q_i}{r^3} \text{ — } i\text{-я компонента центральной со-}$$

ставляющей модели напряженности GE-поля;  $\chi_i(t)$  — скорость изменения  $g_i$  на траектории движения носителя;  $\tilde{q}_i$  и  $\tilde{p}_i$  — результат интегрирования ДГУ с использованием измеренных значений  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) и  $F_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) с замещением в модели  $\tilde{G}_i(\mathbf{x}, r)$  зна-

чения  $r$  значением  $z_3 = \tilde{r} = r + \varepsilon_3$ ;  $v_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) и  $f_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) — осевые компоненты инструментальных погрешностей гироскопов и ньютонометров;  $\varepsilon_k$  — погрешности определения координат носителя с помощью НСС;  $\beta_u$  — погрешности интегрирования КГУ;  $\varepsilon_u$  — инструментальные погрешности астросистемы;  $\varphi$  — широта места объекта.

Задача (2) разрешима относительно вектора состояния  $(\delta q_1, \delta p_1, \delta q_2, \delta p_2, g_1, g_2)^T$ , но при ее решении, что очевидно, не оценивается компонента GE-поля  $g_3 = G_3 - \tilde{G}_3$ , поэтому она может рассматриваться только как задача коррекции 2D-ИНС, но не задача векторной гравиметрии. Это объясняется тем, что в случае 2D-схемы доступны только две модельные компоненты вектора  $\mathbf{q}$  (т. е.  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$ ), вследствие чего построение линейной невязки измерения, подобной той, что имела место в случае 3D-ИНС, невозможно, и, следовательно, невозможно постановка в подобном же виде (представляемом уравнениями (2) с невязкой  $\delta z = \delta q_3 + \varepsilon_3$ ) и обратной задачи "в малом".

В качестве отправной точки дальнейших построений, доказывающих возможность постановок обратных задач "в малом" вида "состояние—измерение" с уравнениями (2), обратимся к движению объекта по сфере известного радиуса с центром в начале системы отсчета  $oq$ . При движении по сфере очевидны равенства  $p_3 = 0$  и  $\dot{p}_3 = 0$ , которые с учетом третьего и шестого уравнений ДГУ в (1) можно представить в виде следующих условий такого движения [4]:

$$\dot{q}_3 - \omega_2 q_1 + \omega_1 q_2 = 0; \quad (3)$$

$$\omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 + G_3 + F_3 = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3) q_1 - (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) q_2 + \\ + \omega_1 p_2 - \omega_2 p_1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) q_3 = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3) q_1 - (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) q_2 + \\ + G_3 + F_3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) q_3 = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 + (\dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3) q_1 - (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) q_2 + \\ + 2\omega_2 p_1 - 2\omega_1 p_2 + G_3 + F_3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) q_3 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где (5) — результат дифференцирования (3), а (6) и (7) — соответственно сумма и разность (4) и (5), причем (7) — это формальная запись реализации на оси  $oq_3$  принципа Д'Аламбера.

Заметим также, что при движении по сфере утверждения (3)—(7) эквивалентны утверждению ( $\dot{q}_3 = 0$ ,  $\ddot{q}_3 = 0$ ,  $F_3 = -G_3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)r$ ), а при движении по произвольной поверхности условия (3)—(6), вообще говоря, нарушаются, но условие (7) — принцип Д'Аламбера — остается в силе. Иное имеет место при интегрировании ДГУ 2D-ИНС, выполняемом, как отмечалось выше, в условиях

присутствия погрешностей в измерениях и оценках начальных состояний. В этом случае вне зависимости от того, движется ли объект по сфере или не по ней, нарушаются все условия (3)—(7). Такие нарушения можно интерпретировать как дополнительные невязки измерений при постановке обратных задач "в малом" (по сути задач коррекции 2D-ИНС) с уравнениями вида (2).

Из пяти условий (3)—(7) наиболее приемлемы для реализации в задачах коррекции условия (3) и (4), так как они не содержат производных угловой скорости вращения системы отсчета, что при построении невязок освобождает от нахождения оценок этих производных и в общем случае требуется при обращении к условиям (5)—(7). Поэтому остановимся на невязках (3) и (4). Они представляются следующим образом:

$$\delta z_a = \varepsilon_{\dot{r}} - \omega_2 \delta q_1 + \omega_1 \delta q_2, \quad (8)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}$  — частота Шулера [2];  $\varepsilon_{\dot{r}}$  — погрешность оценивания значения  $\dot{r}$  по измеренному значению  $r$ , т. е. по  $z_3 = r + \varepsilon_3$ ;

$$\delta z_b = \omega_2 \delta p_1 - \omega_1 \delta p_2 + g_3 + f_3 + 3\omega_0^2 \varepsilon_3 + \varepsilon_{\ddot{r}}, \quad (9)$$

где  $f_3$  — инструментальная погрешность дополнительного (к схеме 2D-ИНС) ньютонометра при таком (только для формирования невязки) нетрадиционном (в сравнении со схемой 3D-ИНС) его использовании;  $\ddot{r} = \ddot{r} + \varepsilon_{\ddot{r}}$  — оценка значения  $\ddot{r}$  по измеренным значениям  $r$ , т. е. по  $z_3$ ;  $\varepsilon_{\ddot{r}}$  — погрешность оценивания значения  $\ddot{r}$ .

Учитывая (9), дополним динамическую часть системы уравнений (2) уравнением эволюции значения  $g_3$ :

$$\dot{g}_3 = \chi_3(t), \quad g_3(0) = g_{3,0}, \quad (10)$$

где  $\chi_3(t)$  — скорость изменения  $g_3$  на траектории движения объекта.

Тогда в рамках концепции векторной гравиметрии возможны два варианта модели обратной задачи "в малом". Первый представляется уравнениями (2), (10), (8) и (9); второй — уравнениями (2), (10) и (9). Последний как базовый и был исследован в вычислительном эксперименте.

### Вычислительный эксперимент

Цель численного исследования — верификация численной разрешимости задачи (2), (10), (9) в условиях конечной точности вычислений и измерений, или, по сути, преемственности этого свойства системы, сконструированной на базе 2D-ИНС, от аналогичной системы на базе 3D-ИНС [3].

При проведении эксперимента использованы те же, что и в работе [3], значения параметров движения и погрешностей, а именно: предполагалось, что объект движется на широте  $\varphi = 45^\circ$  в восточном

направлении с относительной (к Земле) скоростью  $V = 100$  м/с, а среднеквадратические значения компонент погрешностей  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\varepsilon_{\dot{r}}$ ,  $\varepsilon_{\ddot{r}}$ , соответственно, есть  $\sigma_f = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>,  $\sigma_v = 10^{-3}$  °/ч,  $\sigma_{\boldsymbol{\beta}} = 10^{-6}$  рад,  $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 5$  м,  $\varepsilon_{\dot{r}} = 10^{-2}$  м/с,  $\varepsilon_{\ddot{r}} = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>.

Обусловленность задачи (2), (10), (9) характеризуется сингулярными числами обусловленности  $\mu$  и  $\mu_N$ , соответствующими исходному и нормированному по столбцам конечномерному оператору задачи, и верифицировалась при относительной компьютерной точности представления чисел  $e_1 = 2,2 \cdot 10^{-16}$  по той же методике, что применялась в работах [1, 3]. Оценки значений чисел обусловленности —  $\mu = 10^7$  и  $\mu_N = 4$  — сравнивали с критическим для оператора значением  $\mu^* = 10^{10}$ . При этом гарантирующее сохранение свойства наблюдаемости условие ( $\mu_N < \mu < \mu^*$ ) при возмущении оператора задачи вычислительной средой так же, как и в работе [1], выполняется.

Численное решение задачи выполнялось с применением методологии и алгоритма динамического обращения калмановского типа [7]; анализ решения показал, что его характеристики близки тем, что были в случае системы на базе 3D-ИНС [1], а именно, эмпирические среднеквадратические погрешности оценивания значений  $\delta q_i$ ,  $\delta p_i$ ,  $\beta_i$ ,  $g_i$  соответственно равны  $\sigma_q = 4$  м,  $\sigma_p = 0,3$  м/с,  $\sigma_{\boldsymbol{\beta}} = 5 \cdot 10^{-7}$  рад,  $\sigma_g = 10^{-4}$  м/с<sup>2</sup>.

### Заключение

В работе показано, что при построении векторной гравиметрической системы на базе 2D-ИНС возможна такая ее организация, при которой сохраняются все функциональные свойства, которые реализуются в системе на базе 3D-ИНС.

*Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ-ДВО (грант № 11-01-98501-р\_восток\_а) и ДВО РАН (грант № 12-1-0-03-005).*

### Список литературы

1. **Девятисильный А. С., Числов К. А.** Модели интеграции инерциальной, спутниковой и астронавигационной систем // Мехатроника, автоматика, управление. 2011. № 11. С. 64—66.
2. **Ишлинский А. Ю.** Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
3. **Девятисильный А. С.** Модель корректируемой инерциальной навигационной системы с функцией определения напряженности гравитационного поля Земли // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 1. С. 143—146.
4. **Девятисильный А. С., Числов К. А.** Методы построения устойчивых двухкомпонентных инерциальных навигационных систем на основе интерпретации радиальной позиционной информации // Мехатроника, автоматика, управление. 2011. № 8. С. 8—11.
5. **Калман Р., Фалб П., Арbib М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с. (Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A. Topics in mathematical system theory. New York: McGraw-Hill, 1969).
6. **Андреев В. Д.** Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
7. **Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.** Задачи динамического обращения // Вестник РАН. 2006. Т. 76. № 7. С. 615—624.

**В. Ф. Филаретов**, д-р техн. наук, проф.,  
filaret@pma.ru,

**Д. А. Юхимец**, канд. техн. наук, доц.,  
undim@iacp.dvo.ru,

**Э. Ш. Мурсалимов**, аспирант,  
murs@iacp.dvo.ru,

Институт автоматики и процессов управления  
ДВО РАН,  
Дальневосточный федеральный университет,  
г. Владивосток

## Метод комплексирования данных с навигационных датчиков подводного аппарата с использованием нелинейного фильтра Калмана<sup>1</sup>

*Предлагается метод формирования полного вектора состояния ПА на основе комплексной обработки данных с ограниченного набора его навигационно-пилотажных датчиков с учетом различной частоты обновления сильно зашумленных сигналов, поступающих с этих датчиков. Указанный метод использует сигма-точечный фильтр Калмана, а размерность вектора и функции измерений меняются в зависимости от "актуальности" показаний соответствующих датчиков на текущем шаге дискретизации входного сигнала СУ ПА, что позволяет снизить вычислительную сложность построенного алгоритма. Результаты выполненного моделирования полностью подтвердили работоспособность и высокую эффективность разработанного метода и алгоритма комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА.*

**Ключевые слова:** подводный аппарат, комплексная обработка данных, навигационно-пилотажные датчики, сигма-точечный фильтр Калмана

### Введение

Расширение области применения подводной робототехники приводит к необходимости выполнения все более сложных технологических операций, требующих создания высокоточных систем управления (СУ) движением подводных аппаратов (ПА). При этом функционирование указанных СУ невозможно без создания точных бортовых навигационных систем, которые позволяют определять все используемые параметры движения ПА с требуемой точностью. Однако создание указанных систем является весьма сложной задачей. Это объясняется тем, что, во-первых, набор навигационно-пилотажных датчиков ПА часто ограничен ввиду ограничения массогабаритных показателей и стоимости ПА. Во-вторых, данные, поступающие с этих датчиков,

сильно зашумлены и периодически могут выдавать прерывающиеся и недостоверные данные. В-третьих, информация с различных датчиков часто поступает с разной частотой, которая может быть много меньше частоты дискретизации используемых СУ ПА. Поэтому на каждом шаге этой дискретизации информация с отдельных датчиков может оказаться недоступной.

В настоящее время решение указанных проблем актуально не только для ПА, но и для других типов мобильных роботов и автоматических систем. При этом используются различные подходы. В частности, в работе [1] получены аналитические выражения для определения ориентации летательного аппарата на основе измерения его угловых скоростей и линейных ускорений. Однако указанный подход не позволяет учесть шумы и разные периоды дискретизации данных с бортовых датчиков.

Для комплексирования данных с бортовых датчиков различных мобильных роботов часто используют подходы, основанные на методе наименьших квадратов [2]. Однако эффективно использовать эти подходы можно только для динамических объектов, описываемых линейными моделями, что для ПА справедливо только в отдельных простых режимах движения.

В настоящее время для решения проблемы увеличения точности навигационных систем мобильных роботов различного назначения [3] часто используются подходы, основанные на применении фильтров Калмана. Это объясняется положительным опытом их применения, способностью указанных фильтров подавлять шумы и восстанавливать неизмеряемые компоненты вектора состояния динамического объекта. Пример использования фильтра Калмана для решения задачи создания навигационной системы колесных роботов на основе комплексирования данных с локальной и глобальной навигационных систем, поступающих с разной частотой, рассматривается в работе [4]. В работе [5] предложен подход к построению системы локальной навигации колесного робота на основе нелинейного фильтра Калмана, учитывающий проскальзывание его колес. Однако, несмотря на высокую эффективность существующих методов комплексной обработки информации с навигационных датчиков мобильных роботов, их использование в ПА затрудняется его более сложной математической моделью. Кроме того, многие датчики ПА имеют различный и недопустимо большой период дискретизации, а на точность получаемой информации с этих датчиков большое влияние оказывают параметры внешней среды.

Таким образом, задача создания метода эффективного комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА, который позволил бы увеличить точность получения этих данных, определить неизмеряемые параметры движения ПА, а также точно сформировать полный вектор его состояния на каждом шаге дискретизации сигналов СУ,

<sup>1</sup> Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (государственный контракт № 07.514.11.4085 от 17.10.2011 г.) и подддержана РФФИ (гранты 10-07-00395, 11-07-98502).



по-прежнему остается нерешенной и актуальной. Мировой опыт показывает, что создавать этот метод целесообразно на основе фильтра Калмана, хорошо зарекомендовавшего себя при решении подобных задач, но обязательно с учетом специфики ПА.

### Описание математической модели ПА и постановка задачи

Для разработки метода комплексирования сигналов с различных датчиков ПА необходимо задаться его математической моделью. Наиболее полная динамическая модель пространственного движения ПА, описанная в работе [6], задается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые в матричной форме имеют вид

$$M\dot{v} + C(v) + g(\eta) + D(v - \tilde{v}_c)(v - \tilde{v}_c) = \tau; \quad (1)$$

$$\dot{\eta} = J(\eta)v, \quad (2)$$

где  $M \in R^{6 \times 6}$  — матрица инерции (включающая присоединенные массы и моменты инерции жидкости);  $C(v) \in R^{6 \times 6}$  — матрица кориолисовых и центробежных сил;  $D(v - \tilde{v}_c) \in R^{6 \times 6}$  — матрица гидродинамических сил и моментов;  $g(\eta) \in R^6$  — вектор гидростатических сил и моментов;  $\tau = [T_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z]^T \in R^6$  — вектор проекций упоров движителей ПА на оси связанной с ним системы координат (ССК);  $v = [v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \in R^6$  — вектор проекций линейной и угловой скоростей движения ПА на оси ССК;  $\tilde{v}_c = [\tilde{v}_{cx}, \tilde{v}_{cy}, \tilde{v}_{cz}, 0, 0, 0]^T \in R^6$  — вектор проекций скорости течения на оси ССК;  $\eta = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T \in R^6$  — вектор положения и ориентации ПА в абсолютной системе координат (АСК);  $J(\eta)$  — блочная матрица перехода из ССК в АСК, которая имеет следующий вид [6]:

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} J_1(\eta) & 0 \\ 0 & J_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$J_1(\eta) = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & -\sin\psi \cos\theta & -\cos\psi \sin\theta \sin\varphi & \sin\psi \sin\theta + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\psi \cos\theta & \cos\psi \cos\theta & \sin\varphi \sin\theta \sin\psi & -\cos\psi \sin\theta + \sin\theta \sin\psi \cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$J_2(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi \operatorname{tg}\theta & \cos\varphi \operatorname{tg}\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{bmatrix}.$$

Состав датчиков бортовой навигационной системы ПА зависит от его типа и назначения. Большинство ПА, предназначенных для автономного выполнения различных миссий, имеют следующий набор навигационно-пилотажных датчиков:

- акселерометры, измеряющие линейные ускорения  $[\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z]$  по всем трем осям ССК;

- доплеровский лаг, измеряющий линейные скорости  $[v_{dx}, v_{dy}, v_{dz}]$  ПА относительно окружающей среды по всем трем осям ССК;
- датчики угловых скоростей (ДУС)  $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$  по трем осям ССК;
- датчик ориентации ПА, измеряющий углы крена, дифферента и курса  $[\varphi, \theta, \psi]$  в АСК;
- гидроакустическая навигационная система (ГАНС), измеряющая линейные координаты ПА  $[x, y]$  в АСК;
- датчик глубины ПА, измеряющий координату  $z$  в АСК.

Сигналы с этих датчиков содержат шумы, обусловленные наличием электромагнитных помех и особенностями их конструкции. Периоды обновления данных, получаемых с указанных датчиков, могут различаться в десятки раз, а некоторые из них могут в разы превышать период выработки сигналов управления ПА, что существенно снижает точность его управления, особенно при движении на высоких скоростях. Поэтому одна из главных задач системы комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА заключается в формировании всех необходимых для выработки сигнала управления данных с периодом, равным периоду дискретизации входных сигналов его СУ.

Следует отметить, что для коррекции текущих показаний бортовых датчиков ПА и расчета неизмеряемых параметров его движения все алгоритмы комплексирования данных должны использовать математическую модель движения этого ПА. Это можно сделать, учитывая только кинематическую модель (выражения (2), (3)), так как она связывает все параметры движения ПА и переменные, измеряемые его навигационно-пилотажными датчиками. Кроме того, эта модель не содержит переменных или неопределенных коэффициентов, что позволяет обеспечить высокую точность работы алгоритма комплексирования.

Таким образом, в данной работе ставится и решается следующая задача. На основе кинематической модели движения ПА, описываемой выражениями (2)—(3), разработать метод и алгоритм комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА, позволяющий определять все необходимые параметры его движения (включая неизмеряемые) и обеспечивать обновление указанных данных на каждом шаге дискретизации входных сигналов его СУ. При этом алгоритм должен обладать вычислительной сложностью, позволяющей формировать все сигналы управления с использованием бортовой ЭВМ ПА в реальном масштабе времени.

### Алгоритм комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА

При построении алгоритма комплексирования данных будет использован фильтр Калмана, широко применимый для решения подобных задач [3].

Кроме того, с его помощью будет решена и задача подавления шумов датчиков, и задача определения неизмеряемых параметров движения ПА.

Поскольку модель (2)—(3) является существенно нелинейной, то целесообразно использовать сигма-точечный фильтр Калмана (СТФК) [7, 8], позволяющий работать с подобными моделями без их линеаризации.

Предлагаемый алгоритм комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА, построенный на основе СТФК, работает следующим образом. На каждом шаге его работы формируется вектор измерений, состоящий только из актуальных данных, получаемых с указанных датчиков. Под актуальными понимаются данные, с момента обновления которых прошло не более одного периода дискретизации входных сигналов СУ. Поскольку периоды обновления данных с разных датчиков различны, то указанный вектор измерений имеет переменный размер. Этот вектор поступает на вход СТФК, параметры которого динамически меняются в зависимости от размерности вектора измерений. На выходе СТФК на основе модели (2)—(3) формируются оценки всех необходимых параметров движения ПА.

Обычно при решении задачи комплексирования данных, имеющих разные периоды дискретизации, полагается, что большее время обновления данных от датчика соответствует более зашумленному сигналу. На основании этого вводят дополнительные весовые коэффициенты, с помощью которых снижается правдоподобность данных от этого датчика [9]. Предлагаемый подход не требует введения этих коэффициентов, а также проведения дополнительных расчетов для устаревших данных.

Рассмотрим более подробно работу СТФК при комплексировании данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА. Этот фильтр работает с нелинейными моделями вида

$$X_{k+1} = F(X_k) + \xi_k; \quad (4)$$

$$Y_k = H(X_k) + \zeta_k, \quad (5)$$

где  $X_k \in R^n$  — вектор состояния системы, имеющей порядок  $n$ ;  $Y_k \in R^m$  — вектор измерений;  $F(X_k) \in R^n$  — вектор-функция, описывающая переход системы из состояния  $X_k$  в  $X_{k+1}$ ;  $H(X_k) \in R^m$  — вектор-функция измерения;  $\xi_k \in R^n$  и  $\zeta_k \in R^m$  — векторы шумов системы и измерений соответственно, которые считаются гауссовскими случайными процессами.

Вектор параметров движения ПА имеет вид

$$X = [a^T, v^T, \eta^T]^T \in R^{18},$$

где  $a = [\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z]^T$  — вектор линейных и угловых ускорений ПА в ССК. Так как в предлагаемом алгоритме используется кинематическая

модель движения ПА (см. выражения (2), (3)), то вектор-функция  $F(X_k)$  имеет вид

$$F(X_k) = \begin{bmatrix} a_k \\ \dots \\ a_k \Delta t + v_k \\ \dots \\ \tilde{J}_k \Delta t + \eta_k \\ \dots \\ v_{СК} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $a_k, v_k, \eta_k$  — значения соответствующих векторов для состояния  $X_k$ ;  $\Delta t$  — период дискретизации входных сигналов СУ;  $\tilde{J}_k = J(\eta_k)v_k$ .

Модель (6) можно использовать только тогда, когда скорость подводного течения равна нулю. Это объясняется тем, что доплеровский лаг измеряет скорость движения ПА не относительно АСК, а только относительно окружающей среды. Поэтому при наличии течения модель (6) необходимо представить в следующем виде:

$$F(\bar{X}_k) = \begin{bmatrix} a_k \\ \dots \\ a_k \Delta t + v_k \\ \dots \\ \tilde{J}_k \Delta t + \eta_k \\ \dots \\ v_{СК} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $\bar{X} = [a^T, v^T, \eta^T, v_c^T]^T \in R^{21}$  — вектор состояния системы, включающий вектор состояния ПА  $X$  и вектор проекций скорости подводного течения  $v_c = [v_{cx}, v_{cy}, v_{cz}] \in R^3$  на оси АСК. Для модели (7) можно не только использовать показания доплеровского лага, но и оценивать скорость течения, что важно для реализации высокоточного управления движением ПА.

В общем случае вектор-функция  $H(Y_k)$  (см. выражения (5)) описывает нелинейные взаимосвязи между измерениями датчиков и элементами вектора состояния ПА. В рассматриваемом случае практически все навигационно-пилотажные датчики аппарата, за исключением доплеровского лага, непосредственно измеряют параметры его движения. Поэтому уравнение (5) можно представить в следующем виде:

$$Y_k = H(\bar{X}_k) + \zeta_k = \bar{H}(\eta_k)\bar{X}_k + \zeta_k, \quad (8)$$

$$\text{где } \bar{H}(\eta_k) = \begin{bmatrix} A \\ \dots \\ V(\eta_k) \\ \dots \\ \Omega \\ \dots \\ S \\ \dots \\ D \\ \dots \\ \Phi \end{bmatrix} \in R^{15 \times 21},$$

$Y_k = [\dot{v}_x(k), \dot{v}_y(k), \dot{v}_z(k), v_{dx}(k), v_{dy}(k), v_{dz}(k), \omega_x(k), \omega_y(k), \omega_z(k), x(k), y(k), z(k), \varphi(k), \theta(k), \psi(k)]^T$  — вектор измерений на шаге  $k$ ;  $v_{dx}, v_{dy}, v_{dz}$  — данные с доплеровского лага;  $A = [I_3 \times 3 \ 0_3 \times 18] \in R^{3 \times 21}$ ;  $V = [0_{3 \times 6} \ I_3 \times 3 \ \tilde{J}_k(\eta_k)] \in R^{3 \times 21}$ ;  $\Omega = [0_{3 \times 9} \ I_3 \times 3 \ 0_3 \times 9] \in$

$\in R^{3 \times 21}$ ;  $S = [0_{2 \times 12} \ I_2 \times 2 \ 0_{2 \times 7}] \in R^{2 \times 21}$ ;  $D = [0_{1 \times 14} \ 1 \ 0_{1 \times 6}] \in R^{1 \times 21}$ ;  $\Phi = [0_{3 \times 15} \ I_3 \times 3 \ 0_{3 \times 3}] \in R^{3 \times 21}$ ;  $0$  и  $I$  — нулевые и единичные матрицы соответствующих размерностей;  $\tilde{J}_k(\eta_k) = -J_1(\eta_k)^{-1} \in R^{3 \times 3}$ .

Как отмечалось ранее, в данной работе с учетом разных периодов обновления показаний датчиков ПА предлагается так изменять размер вектора измерений  $Y_k$ , чтобы он содержал только актуальные данные этих датчиков. При этом следует изменять и элементы блочной матрицы  $\bar{H}(\eta)$ .

Например, если на текущем шаге  $k$  дискретизации СУ актуальными являются данные с акселерометров, ДУС и датчика ориентации ПА, то вектор  $Y_k$  уже имеет вид:  $Y_k = [\dot{v}_x(k), \dot{v}_y(k), \dot{v}_z(k), \omega_x(k), \omega_y(k), \omega_z(k), \varphi(k), \theta(k), \psi(k)]^T$ , а соответствующая

ему блочная матрица  $\bar{H}_k$  — вид  $\bar{H}_k = \begin{bmatrix} A \\ \Omega \\ \Phi \end{bmatrix}$ .

После формирования вектора  $Y_k$  и соответствующей ему матрицы  $\bar{H}_k$  с помощью СТФК можно провести оценку параметров движения ПА, используя следующий алгоритм [7].

1. Инициализация  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= E[\bar{X}_0]; \\ P_0 &= E[(\bar{X}_0 - \hat{X}_0)(\bar{X}_0 - \hat{X}_0)^T], \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $\hat{X}_k \in R^n$  — оценка вектора состояния ПА и вектора течений;  $P_k \in R^{n \times n}$  — ковариационная матрица ошибок оценки вектора  $\bar{X}$ ;  $n = 21$  — размерность вектора состояния системы;  $E[\cdot]$  — символ математического ожидания.

2. Вычисление значений сигма-точек на шаге  $k \in \{1, \dots, \infty\}$ :

$$\chi_{k-1} = [\hat{X}_{k-1}, \hat{X}_{k-1} + \gamma\sqrt{P_{k-1}}, \hat{X}_{k-1} - \gamma\sqrt{P_{k-1}}];$$

$$W_0^{(a)} = \frac{\mu}{n + \mu};$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\mu}{n + \mu} + 1 - \delta^2 + \vartheta; \quad (10)$$

$$W_i^{(a)} = W_i^{(c)} = \frac{\mu}{2(n + \mu)}, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

где  $\chi \in R^{n \times (2n + 1)}$  — матрица сигма-векторов;  $W^{(a)} \in R^{2n + 1}$ ,  $W^{(c)} \in R^{2n + 1}$  — векторы весовых коэффициентов;  $\vartheta$  — константа, содержащая в себе предварительную информацию о законе распределения элементов вектора  $\bar{X}$  (для гауссовского распределения  $\vartheta = 2$  [10]);  $\delta$  — константа, определяющая диапазон рассеивания сигма-точек вокруг элементов вектора  $\hat{X}_k$ ;  $\gamma = n + \mu$ ;  $\mu$  — масштабирующий коэффициент.

3. Обновление соответствующих выражений на очередном шаге  $k \in \{1, \dots, \infty\}$ :

$$\begin{aligned} \chi_{k|k-1}^* &= F(\chi_{k-1}); \\ \hat{X}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(a)} \chi_{i,k|k-1}^*; \\ P_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{X}_k^-) \times \\ &\times (\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{X}_k^-)^T + Q_{UKF}; \\ \chi_{k|k-1} &= [\chi_{k|k-1}^*, \chi_{0,k|k-1}^* + \\ &+ \gamma\sqrt{P_k^-}, \chi_{0,k|k-1}^* - \gamma\sqrt{P_k^-}]; \\ Y_{k|k-1}^* &= H(\chi_{k|k-1}); \\ \hat{Y}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(a)} Y_{i,k|k-1}^*, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\chi_k^* \in R^{n \times (2n + 1)}$  — матрица преобразованных с помощью вектор-функции  $F(\cdot)$  сигма-векторов;  $\hat{X}_k^- \in R^n$  — апостериорная оценка вектора состояния;  $Y_k^* \in R^{m \times (2n + 1)}$  — матрица преобразованных с помощью вектор-функции  $H(\cdot)$  сигма-векторов;  $\hat{Y}_k^- \in R^m$  — апостериорная оценка вектора измерений;  $P_k^- \in R^{n \times n}$  — апостериорная оценка ковариационной матрицы ошибки оценивания вектора состояния;  $Q_{UKF} \in R^{n \times n}$  — матрица ковариаций шумов системы.

4. Обновление измерения:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (Y_{i,k|k-1} - \hat{Y}_k^-) \times \\ &\times (Y_{i,k|k-1} - \hat{Y}_k^-)^T + R_{UKF}; \\ P_{x_k y_k} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{X}_k^-) (Y_{i,k|k-1} - \hat{Y}_k^-)^T; \\ K_k &= P_{x_k y_k} P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k}^{-1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (Y_k - \hat{Y}_k^-);$$

$$P_k = P_k^- - K_k P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k} K_k^T,$$

где  $P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k} \in R^{m \times m}$ ,  $P_{x_k y_k} \in R^{m \times n}$  — промежуточные матрицы с переменными элементами;  $K_k \in R^{n \times m}$  — матрица коэффициентов усиления;  $R_{UKF} \in R^{m \times m}$  — матрица ковариаций шумов измерений, размерность которой меняется в соответствии с размерностью вектора измерений  $Y_k$ .

Выражения (9)–(12) в указанном выше алгоритме позволяют получить оценку  $\hat{X}_k$  полного вектора состояния ПА, которую можно использовать для формирования управляющих сигналов. При этом,

как видно из этих выражений, размерность вектора измерений  $Y_k$  существенно влияет на число операций при вычислении значений  $Y_k^*$ ,  $\hat{Y}_k$ ,  $P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k}$ ,  $P_{x_k y_k}$  и  $K_k$ , уменьшаясь с уменьшением размерности этого вектора. Поэтому предлагаемое в данной работе автоматическое уменьшение размерности вектора  $Y_k$  в случаях, когда актуальными являются данные, получаемые только с части датчиков ПА, позволяет существенно снизить вычислительную сложность всей процедуры комплексирования. При этом вектор состояния ПА обновляется с высокой частотой на каждом шаге дискретизации его СУ независимо от периодов обновления данных на выходах всех его навигационно-пилотажных датчиков.

### Результаты численных экспериментов

Для проверки работоспособности и эффективности предложенного метода комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА было проведено численное моделирование. В процессе моделирования шаг дискретизации СУ ПА принимали равным  $\Delta t = 0,1$  с, что во много раз меньше постоянных времени ПА. Параметры бортовых навигационно-пилотажных датчиков приведены в таблице, где ДУС — датчик угловых скоростей, а ГАНС — гидроакустическая навигационная система. Из этой таблицы видно, что три датчика, установленные на борту ПА, обновляют информацию с периодом, меньшим периода дискретизации СУ ПА, поэтому данные с этих датчиков являются актуальными на каждом шаге дискретизации СУ. Периоды обновления данных с других датчиков значительно превышают период дискретизации СУ, что может значительно снизить точность управления при его движении на больших скоростях. Элементы диагональных матрицы ковариаций  $R_{UKF}$  и  $Q_{UKF}$  имеют следующие значения:

$$Q_{UKF} = 10^{-5} \cdot I^{1 \times 21}; R_{UKF} = \text{diag}(6 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 0,4, 0,4, 0,03, 2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}).$$

Шум в сигналах датчиков моделировали как аддитивный белый шум с амплитудой, равной погрешности в соответствующем датчике (см. таблицу).

Движение ПА осуществлялось под действием упоров  $T_x = 50$  Н,  $T_y = 0$ ,  $T_z = 10$  Н и моментов  $M_x = 0$  (Н·м),  $M_y = 2$  (Н·м),  $M_z = 3 \sin(0,2t)$  (Н·м), создаваемых его движителем комплексом. Во время этого движения у ПА изменялись все компоненты его вектора состояния. Вектор скорости течения принят равным  $v_c = [0,3 \ -0,4 \ 0,2]$  (м/с).

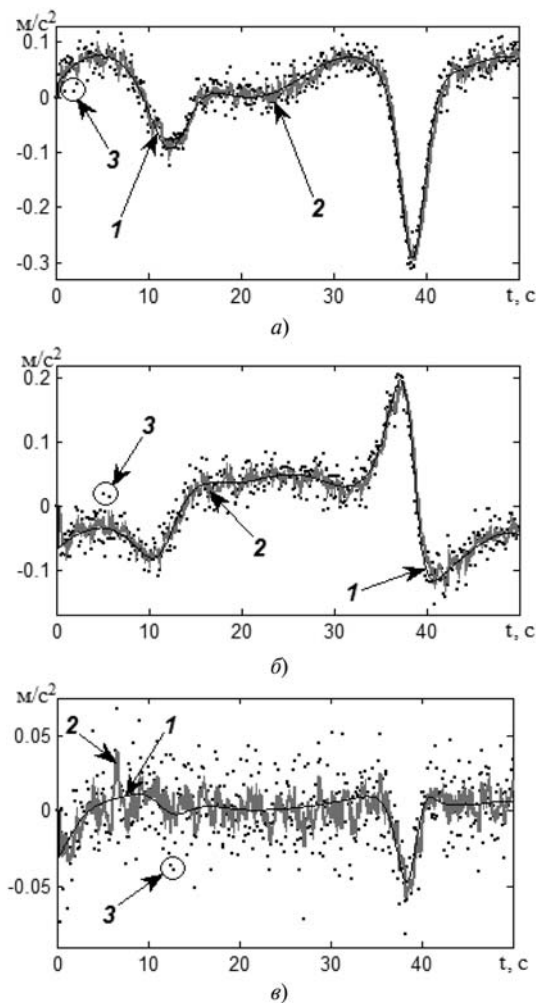


Рис. 1. Результат оценивания линейных (а —  $\dot{v}_x$ , б —  $\dot{v}_y$ , в —  $\dot{v}_z$ ) ускорений ПА с использованием разработанного алгоритма

Результаты моделирования работы предложенного алгоритма комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА показаны на рис. 1—3. На этих рисунках цифрой 1 обозначена кривая, соответствующая реальному значению конкретной переменной (сплошная черная линия), цифрой 2 — кривая, соответствующая значению этой переменной, формирующемуся на выходе СТФК (сплошная серая линия), а цифрой 3 — данные, поступающие с соответствующего навигационно-пилотажного датчика ПА.

На рис. 1 показаны результаты оценивания вектора линейных (рис. 1, а—в) ускорений ПА. Как уже отмечалось выше, данные с акселерометров обновляются на каждом шаге работы СУ ПА, поэтому основная задача при обработке этих данных

### Основные характеристики навигационно-пилотажных датчиков ПА

Характеристики	Акселерометры	Доплеровский лаг	ДУС	ГАНС	Датчик глубины	Датчик ориентации
Период обновления, с	0,005	1,5	0,005	3,5	0,6	0,005
Погрешность $\sigma$	0,04 м/с <sup>2</sup>	0,15 м/с	0,02 рад/с	2 м	0,2 м	0,02 рад

состояла в подавлении помех. Из рис. 1, *a–в* видно, что в результате работы алгоритма комплексирования происходит эффективное подавление помех в сигналах, поступающих с акселерометров, измеряющих линейные ускорения. Максимальное отклонение сигнала с выхода СТФК от реального значения соответствующего линейного ускорения не превышает  $0,02 \text{ м/с}^2$ , что в два раза меньше среднего значения допустимой погрешности (см. таблицу) сигнала с выхода этого датчика.

При оценке с помощью предложенного алгоритма угловых ускорений наблюдаются достаточно большие запаздывания по отношению к реальным значениям, которые обусловлены определенной инерционностью СТФК. Поэтому указанные координаты, если они необходимы для формирования сигналов управления ПА, лучше измерять с помощью соответствующих датчиков, например, датчика угловых ускорений МТАА-2033 [11].

На рис. 2 показаны результаты работы алгоритма комплексирования при оценке линейных (рис. 2, *a–в*) и угловых (рис. 2, *г–е*) скоростей движения ПА.

Из рис. 2, *a–в* видно, что сигналы с доплеровского лага значительно отличаются от реальных значений скорости ПА. Это обусловлено наличием течения (пунктирные линии под номером 4, на рис. 2, *a–в*). В результате работы предложенного алгоритма комплексирования сигналов с соответствующих датчиков ПА удается разделить скорость течения в АСК и скорость движения ПА в ССК. При этом точность восстановления скорости течения (сплошные черные линии под номером 5 на рис. 2, *a–в*) составляет  $0,015 \text{ м/с}$ , а скорости движения ПА —  $0,028 \text{ м/с}$ , что почти в 6 раз меньше

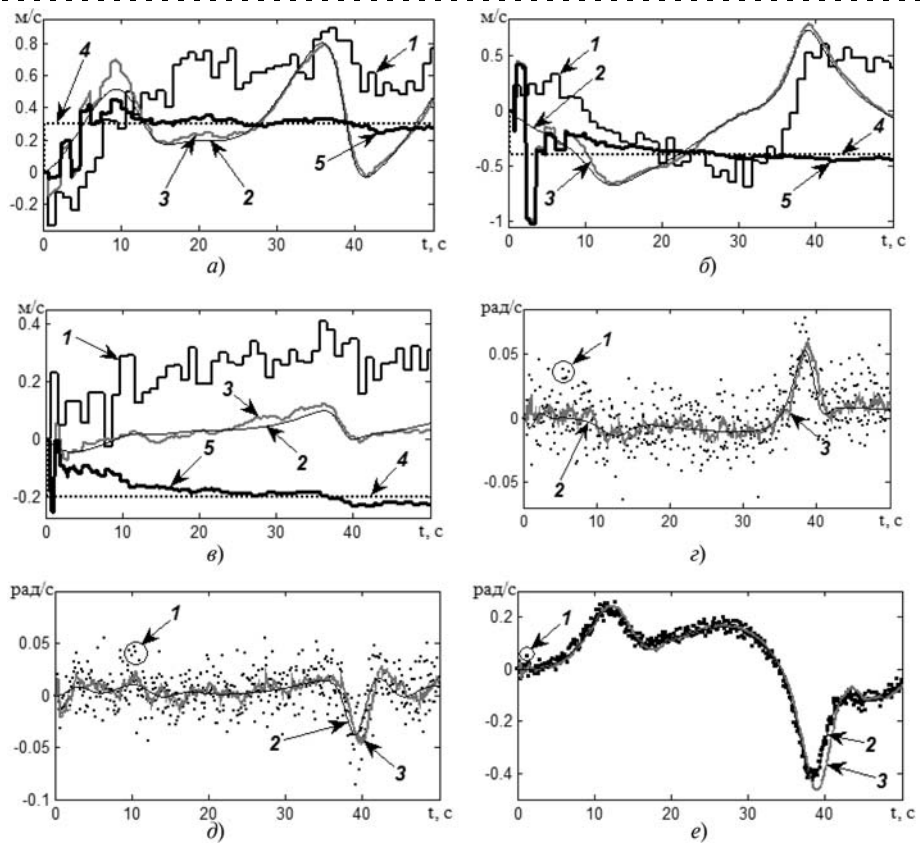


Рис. 2. Результат оценивания линейных (*a* —  $v_x$ , *б* —  $v_y$ , *в* —  $v_z$ ) и угловых (*г* —  $\omega_x$ , *д* —  $\omega_y$ , *е* —  $\omega_z$ ) скоростей движения ПА с использованием разработанного алгоритма

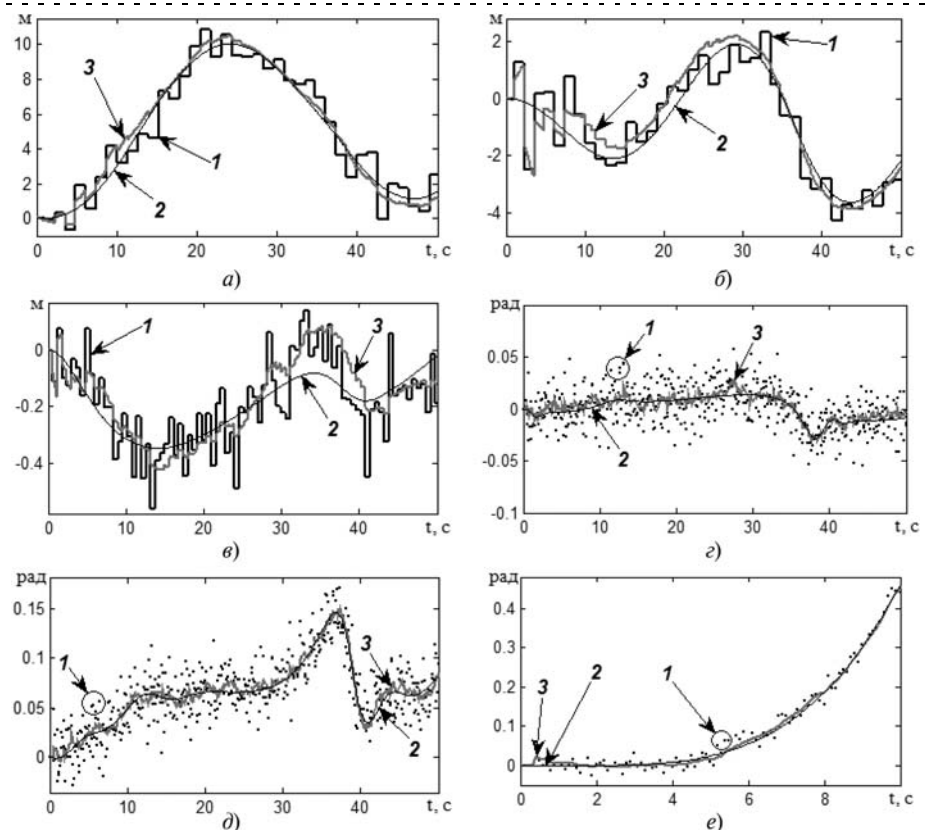


Рис. 3. Результат оценивания линейных (*a* —  $x$ , *б* —  $y$ , *в* —  $z$ ) и угловых (*а* —  $\varphi$ , *б* —  $\theta$ , *в* —  $\psi$ ) координат ПА с использованием разработанного алгоритма

погрешности доплеровского лага. Кроме того (рис. 2,  $a-e$ ), сигналы линейных скоростей, оцененные с помощью СТФК, обновляются с периодом в 0,1 с, а не 1,5 с, как у лага. Погрешности на начальном этапе оценки соответствующих величин объясняются переходными процессами в СТФК, которые завершаются после 10 с работы системы.

Так как сигналы с ДУС обновляются с периодом, намного меньшим периода дискретизации СУ ПА, то основная задача, стоящая перед алгоритмом комплексирования при оценке угловых скоростей движения ПА, заключалась в подавлении помех, содержащихся в сигналах соответствующих датчиков. Как видно из рис. 2,  $z-e$ , максимальное отклонение сигналов, формирующихся на выходе СТФК, от их реальных значений не превышает 0,008 рад/с, что в 2,5 раза меньше, чем погрешность измерений ДУС.

На рис. 3 показаны результаты оценивания положения (рис. 3,  $a-e$ ) и ориентации (рис. 3,  $z-e$ ) ПА. Из рис. 3,  $a$  и 3,  $b$  видно, что сигналы, соответствующие координатам  $x$  и  $y$ , формирующиеся на выходе СТФК, имеют отклонения от реальных значений не более 0,35 м. Это почти в шесть раз меньше средней погрешности ГАНС. При этом после обновления данных с ГАНС происходит и коррекция сигнала на выходе СТФК, а в промежутках между обновлением указанных данных координаты ПА оцениваются на основе информации, поступающей от других навигационно-пилотажных датчиков.

На рис. 3,  $b$  показан результат работы предложенного алгоритма при оценке глубины ПА (координата  $z$ ). Из рис. 3,  $b$  видно, что сигнал этой оценки, формирующийся на выходе СТФК, в некоторых местах имеет заметную погрешность. Это объясняется тем, что диапазон изменения координаты  $z$  очень мал (всего от 0,5 м до -0,5 м). Однако предложенный алгоритм, уменьшая в шесть раз период обновления информации о глубине ПА, в среднем позволяет уменьшить отклонение измерения от реального значения до 0,1 м, а это в два раза меньше средней погрешности измерений датчика глубины (см. таблицу).

На рис. 3,  $z-e$  показаны результаты работы алгоритма комплексирования при оценке ориентации ПА. В данном случае основной целью измерений также было подавление помех в сигналах датчика ориентации ПА. Из рис. 3,  $z-e$  видно, что отклонение сигналов на выходе СТФК от реальных значений углов ориентации ПА не превышает 0,005 рад. Это в четыре раза меньше уровня помех в сигналах датчика ориентации.

Таким образом, результаты моделирования подтвердили не только работоспособность, но и эффективность предложенного алгоритма комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА. При этом указанный алгоритм обеспечивает обновление информации о векторе состояния ПА с периодом, равным периоду дискретизации

СУ ПА, независимо от периода обновления данных, поступающих со всех навигационно-пилотажных датчиков ПА, значительно подавляя помехи измерений.

### Заключение

В данной статье предложен новый метод формирования полного вектора состояния ПА на основе комплексной обработки данных с ограниченного набора его навигационно-пилотажных датчиков с учетом различной частоты обновления сильно зашумленных сигналов, поступающих с этих датчиков. Указанный метод использует сигма-точечный фильтр Калмана, позволяющий работать с нелинейными моделями динамических объектов. Особенности формирования вектора и функции измерений в зависимости от "актуальности" показаний соответствующих датчиков на текущем шаге дискретизации входного сигнала СУ ПА позволяет снизить вычислительную сложность построенного алгоритма, а также упростить настройку используемого им фильтра. Кроме того, предложенный метод комплексирования данных позволяет оценить неизвестную по величине и направлению скорость подводных течений, что для качественного управления аппаратом является особенно важным. Результаты выполненного моделирования полностью подтвердили работоспособность и высокую эффективность разработанного метода и алгоритма комплексирования данных с навигационно-пилотажных датчиков ПА.

### Список литературы

1. Кизимов А. Т., Березин Д. Р., Карабаш Д. М., Летунов Д. А. Бесплатформенная инерциальная курсоверткаль для легкого беспилотного летательного аппарата // Датчики и системы. 2011. № 4. С. 37–42.
2. Li R., Zhu Y. M., Han C. Z. Unified optimal linear estimation fusion // Proc. of International Conference on Information Fusion, MoC2.10–MoC2.17, Paris, France, 2000. P. 486–492.
3. Raol J. R. Multi-sensor data fusion with MATLAB. CRC Press, 2010. 570 p.
4. Павловский В. Е., Забегаев А. Н., Калинин А. В., Павловский В. В. Объединенная система навигации мобильного робота по маякам и видеоориентирам // Мехатроника, автоматизация и управление. 2011. № 10. С. 66–71.
5. Anjum M. L., Park J., Hwang H. and other. Sensor Data Fusion using Unscented Kalman Filter for Accurate Localization of Mobile Robots // Proc. of International Conference on Control, Automation and Systems 2010, Gyeonggi-do, Korea, 2010. P. 947–952.
6. Fossen T. I. Guidance and control of ocean vehicles, John Wiley & Sons Ltd., 1994, 494 p.
7. Haykin S. Kalman filtering and neural networks, John Wiley and Sons, 2001, 298 p.
8. Julier S. J., Uhlmann J. K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems // Proc. of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace: Defence Sensing, Simulation and Controls, 1997.
9. Misra P. Augmentation of GPS/LAAS with GLONASS: Performance Assessment // ION GPS-98 Proc., Nashville, 1998.
10. Julier S. J. The scaled unscented transformation // Proc. of the 2002 American Control Conference. Jefferson City, MO, USA. 2002. V. 6. P. 4555–4559.
11. MET Tech [Электронный ресурс]: вебсайт содержит информацию о компании MET Tech, занимающейся созданием различных видов инерциальных датчиков. URL: <http://www.met-technology.com/angular-sensors/>

# CONTENTS

**Osipov Yu. M., Shcherbinin S. V.** About a Mechatronics as to a Scientific Basis of Hi-Tech Production Creation 2

*The objects of mechatronics — multiaxis movement systems with electric direct-acting, based on the synergetic merger, according to the optimization criterion of "price-quality", mechanical, electrical, electronic and computer components that providing design and production of competitive high-tech products — are considered. The fundamentals of the theory of a high-tech products — classification and structure multiaxis of motion systems with electric movement of direct action — are offered.*

**Keywords:** optimization criterion "price-quality", multiaxis movements systems, electric direct-action, multi-axis kinematic combinatorics theory, intelligent circuitry designing and intelligent motion control

**Efanov V. N., Mufazzalov D. F.** Stabilization of Nonlinear Control System in the Given Area of State Space . . . . . 7

*Propose a method stabilization of nonlinear control system within a given area of state space. The method is based on the use of the concept of superstability as applied to the linearized interval model of original nonlinear system.*

**Keywords:** stabilization, robust, superstability, complex system, interval matrix

**Kolosov O. S., Koshoeva B. B.** Methods of Implementation of Algorithms for Numerical Differentiation in the Law Regulating Step with the Increased Sampling . . . . . 13

*The technique of realization of algorithms of numerical differentiation on the basis of real-time derivative of the Newton interpolation polynomial in the PD and PID controllers with a larger sampling interval to reduce the influence of high frequency noise in the transmission path of the control signal and reduce the number of positives actuator while maintaining the required accuracy and quality of industrial control systems object.*

**Keywords:** algorithm of numerical differentiation of real-time, bandwidth, accuracy of differentiation, Interpolation polynomials Newton, PD and PID controller, the sampling step

**Bystrov L. G., Safronov V. V.** New Computer-Aided Algorithms for Calculus of Matrix Exponential in Control Systems Applications . . . . . 18

*The method developed in the paper is universal with respect to multiplicity of roots of characteristic polynomial and capable to parallel algorithmization.*

**Keywords:** control systems, space state method, matrix exponential

**Melentiev V. S., Batishchev V. I., Smolina A. M.** Method of Measurement of Parameters of Capacitor Sensors of Position and Moving . . . . . 26

*The new method of measurement of parameters of capacitor sensors on instant values of two transients is investigated. The basic attention in work is given to the analysis of the error caused by a deviation of real transient from incorporated in model of a measuring circuit. The results of the analysis allowing optimum to choose parameters of measuring process are resulted.*

**Keywords:** capacitor sensors, transient, instant values, an error

**Lobusov E. S.** Inertial Navigation Facilities Usage for Attitude Calculation of Cylindric Bodies . . . . . 31

*Description and data processing questions are considered for a device being used for attitude determination of cylindric bodies in designated reference frame. It is suggested to apply three axes laser rate gyros with rigid fastening to a platform being carried by operator and dragged on body surface after. It is shown that the suggested approach gives opportunity to get data and process them on-line or post. Simulation carried out showed high accuracy results relying upon platform and body program imitator for attitude determination.*

**Keywords:** inertial navigation, laser rate gyro, cylindric body, attitude quaternion equations, simulation

**Yakunin A. N.** Using the Quaternion to Determine the Relative Angular Orientation to the Quasi-Stationary Object . . . . . 36

*In article is presented the vector quaternion operator, provides guidance on the calculation of the matrix of coordinate transformation for the quaternion operator. The solution of the problem of determining the relative angular orientation of the quasi-stationary electronic object using operator quaternion is formulated and solved.*

**Keywords:** orientation, the matrix of coordinate transformation, quaternion, accelerometer, acceleration sensor, magnetic sensor.

**Pevzner L. D., Babakov S. E.** Mathematical Model of Dynamics Quarry Power-Shovels as an Object Control . 40

*Description over of dynamics of motion of working organ of quarry power-shovel is brought taking of his calculation chart to the chart of equivalent five link manipulation robot on the method of Belousova (Institute of the applied mathematics of Russian Academy of Sciences the name of M. V. Keldish). The mathematical model of kinematics of centre-of-mass of scoop of power-shovel and coefficients of equalizations of his dynamics are got. On the basis of the expected equalizations of dynamics and kinematics of manipulator a simulation model is built in the appendix of Simulink of the program Matlab.*

**Keywords:** excavator, quarry power-shovels, dynamics, control object, manipulator

**Danilushkin I. A., Guseva M. A.** Numerical Analytical Modeling of Systems with Distributed Parameters . . . . . 48

*The paper proposes an approach to modeling of objects and systems with distributed parameters in simulation software for dynamic systems with lumped parameters. The approach is based on a spatial approximation of distributed signals of structural representation of distributed systems. The simulation model of fluid flow heating process is developed with using the proposed approach, taking into account the mutual influence between temperature fields of flow and heater's wall. Simulation results and comparative analysis of the behavior of the numerical-analytical model as well as the finite element model are presented.*

**Keywords:** structural modeling distributed systems, object with distributed parameters, numerical analytical model, spatial approximation of distributed signal, modal presentation

**Inсарov W. V., Kim V. Ya., Tikhonova S. V.** Methods of an Estimation of Quality of the Static Images Received at Remote Sounding of Land Scenes of Complex Structure . . . . . 54

*Methods of definition of absolute and comparative quantitative estimations of quality of static images of multiobjective land scenes with application of metrics of various type are considered. Such estimations can be used in automatic systems of detection, recognition and support of objects of the land scenes realising technologies of machine vision.*

**Keywords:** static images, absolute and comparative estimations of quality, the metrics, statistical characteristics

**Dev'yatisil'nyi A. S., Chislov K. A.** The Model Vector Gravimetry on the Base of Two-Component Inertial, Satellite and Astronavigation Systems . . . . . 61

*In the paper is shown, that the including of the additional conditions, which interpret common equation of dynamics in projection on radius-vector of the moving object position, allows to realize the function of Earth gravitational field strength determination.*

**Keywords:** inertial navigation, astro-system, gyroscope, newtonometer, inverse problem, navigation satellite system

**Filaretov V. F., Yukhimets D. A., Mursalimov E. Sh.** Method of Data Fusion from Navigation Sensors of Underwater Vehicle with Using Nonlinear Kalman Filter . . . . . 64

*In this paper the method of full state vector forming of underwater vehicle (UV) is offered. It based on data fusion from limited set of navigation sensors with a glance of them different updating rate and noisiness of these sensors signals. Obtained method uses the unscented Kalman filter and dimensions of measurement vector and function are chosen in depend on actuality of measurements of corresponding sensors on current sample rate of input signal of control system of UV. This approach is allowed to reduce of computational complexity of designed algorithm and to simplify adjustment of using them filter. The results of simulation fully confirmed functionality and high efficiency of developed method and algorithm of data fusion from navigation sensors of UV.*

**Keywords:** underwater vehicle, data fusion, navigation sensor, unscented Kalman filter

---

**Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.*

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Т. В. Пчелкина.*

---

Сдано в набор 29.05.2012. Подписано в печать 17.07.2012. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН812. Цена договорная.

---

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
105120, г. Москва, ул. Нижняя Сыромятническая, д. 5/7, стр. 2, офис 2.