УДК 621.391.1: 621.395 DOI: 10.17587/it.27.291-298

В. Н. Тарасов, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru,
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Системы массового обслуживания с запаздыванием во времени

Рассмотрены различные системы массового обслуживания (СМО), образованные четырьмя законами распределений вероятностей: экспоненциальным, гиперэкспоненциальным, эрланговским и гиперэрланговским второго порядка. Эти четыре закона образуют шестнадцать различных СМО. В отличие от классической теории в данной статье рассмотрены СМО со сдвинутыми вправо от нулевой точки законами распределений. Такие СМО относятся к типу G/G/1, которые являются системами с общими законами распределений интервалов между требованиями входного потока и времени обслуживания. Как известно, для систем G/G/1 нельзя получить решения для основной характеристики СМО — среднего времени ожидания — в общем случае. Поэтому важны исследования таких систем для частных случаев законов распределений. В статье приведен обзор авторских результатов для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме для систем со сдвинутыми вправо от нулевой точки входными распределениями. Для их получения использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Представлены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для восьми систем и с их помощью выведены расчетные формулы для среднего времени ожидания в очереди. Показано, что в системах с запаздыванием среднее время ожидания меньше, чем в обычных системах. Полученные расчетные формулы для среднего времени ожидания расширяют и дополняют известную незавершенную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем G/G/1. Предложенный подход позволяет рассчитать среднее значение и моменты высших порядков времени ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика. Учитывая тот факт, что вариация задержки пакетов (джиттер) в стандарте по телекоммуникациям определяется как разброс времени ожидания вокруг его среднего значения, джиттер можно будет определить через дисперсию времени ожидания.

Ключевые слова: *системы с запаздыванием во времени, сдвинутые законы распределений, преобразование Лапласа, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения*

Введение

При рассмотрении систем G/G/1 будем опираться на метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ), который сыграл большую роль при их исследовании в теории массового обслуживания. Наиболее доступно этот метод на конкретных примерах изложен в классике теории массового обслуживания [1].

Настоящая статья посвящена анализу систем массового обслуживания (СМО) с запаздыванием во времени, т. е. систем со сдвинутыми вправо от нулевой точки входными распределениями.

В работе [2] впервые приведены результаты по исследованию системы M/M/1 с запаздыванием во времени со сдвинутыми вправо от нулевой точки экспоненциальными входными распределениями, которую в отличие от классической системы обозначим $M^-/M^-/1$. Эти результаты получены методом спектрального разложения. Здесь и далее верхний индекс "—" будет означать операцию сдвига закона распределения.

В статье [2] показано, что среднее время ожидания требования в очереди в системе $M^-/M^-/1$ меньше, чем в классической системе M/M/1 при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ становятся меньше единицы из-за ввода параметра запаздывания $t_0 > 0$. Таким образом, операция сдвига закона распределения трансформирует классическую систему M/M/1 в немарковскую систему.

Результаты работы [2] совместно с [1] позволили развить метод спектрального разложения решения (ИУЛ) на системы $H_2^-/H_2^-/1$, $H_2^-/M^-/1$, $M^-/H_2^-/1$, $E_2^-/E_2^-/1$, $E_2^-/M^-/1$, $M^-/E_2^-/1$, $HE_2^-/HE_2^-/1$ с запаздыванием (см. работы [2—4] и другие работы). Все рассматриваемые в статье СМО, образованные четырьмя наиболее известными законами распределений — M, E_2, H_2, HE_2 со сдвинутыми входными распределениями — относятся к типу G/G/1.

В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. При использовании метода спектрального разложения решения ИУЛ для определения среднего времени ожидания будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания Л. Клейнрока [1]. По методике спектрального разложения необходимо найти закон распределения времени ожидания для каждой рассматриваемой системы через спектральное разложение вида

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s),$$

где $A^*(s)$, $B^*(s)$ — преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов входного потока и времени обслуживания соответственно; $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — некоторые дробно-рациональные функции от s, которые возможно разложить на множители. Эти функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно работе [1]:

— для $\mathrm{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

— для $\mathrm{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D — некоторая положительная константа, определяемая из условия $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)/\mathbf{e}^{-Dt} < \infty$.

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s|\to\infty,\, \mathrm{Re}(s)>0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s|\to\infty,\, \mathrm{Re}(s)<D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1.$$

Метод спектрального разложения решения ИУЛ впервые подробно представлен в классической работе по теории массового обслуживания [1], а впоследствии применялся во многих работах, включая [5, 6]. Аналогичный подход к решению ИУЛ использован в работе [7]. Здесь вместо термина "спектральное разложение" использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — компоненты факторизации $\omega_+(z, t)$ и $\omega_-(z, t)$ функции $1 - z \cdot \chi(t)$.

В зарубежной литературе в данной области следует выделить работу [8], где представлены результаты приближения очередей к интернету и мобильным сервисам как очередей с запаздыванием во времени, но безотносительно к СМО. Аппроксимативные методы относительно законов распределений подробно описаны в работах [6, 9], а современные исследования СМО приведены в работах [10, 11].

Постановка задачи

В данной работе ставится задача нахождения решения для основной характеристики — среднего времени ожидания требований в очереди в СМО, образованных четырьмя сдвинутыми вправо от нулевой точки законами распределений: M, E_2, H_2, HE_2. Эти четыре закона распределения образуют 4x4 = 16 различных СМО типа G/G/1, а в данной работе рассмотрены восемь систем.

Для решения поставленной задачи необходимо вначале построить для указанных систем в каждом случае спектральные разложения вида $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ с учетом представленных выше условий.

Решение поставленной задачи

Рассмотрим класс функций плотности $f(t)$, преобразуемых по Лапласу, т. е. функций, для которых существует функция

$$F^*(s) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-st} f(t)dt \equiv L[f(t)].$$

Далее воспользуемся теоремой запаздывания преобразования Лапласа: для любого $t_0 > 0$ справедливо равенство

$$L[f(t - t_0)] = \mathbf{e}^{-st_0} F^*(s), \tag{1}$$

где $\mathrm{Re}(s) > 0$. Функции плотности из табл. 1 относятся к классу функций, преобразуемых по Лапласу.

В работах [2—5] автором с использованием равенства (1) получены спектральные разложения $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ и выведены расчетные формулы для среднего времени ожидания для СМО, образованных экспоненциальными и гиперэкспоненциальными законами распределений, коих всего четыре. На основании этих результатов теперь можно сформулировать теорему для СМО, образованных сдвинутыми вправо законами распределений M, E_2, H_2, HE_2, преобразуемых по Лапласу и наиболее часто используемых в теории массового обслуживания.

Теорема. Спектральные разложения решения ИУЛ $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для всех систем с запаздыванием полностью совпадают со спектральными разложениями для соответствующих обычных систем, т. е. основное выражение спектрального разложения $A^*(-s)B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ инвариантно к операции сдвига во времени функции плотности.

Доказательство. Рассмотрим СМО с запаздыванием, образованные двумя функциями плотности $a(t)$ и $b(t)$, преобразования Лапласа которых обозначим $A^*(s)$ и $B^*(s)$ соответственно. Таким образом, функция плотности распределения интервалов между требованиями входного потока в этом случае имеет вид

$$a(t)=\begin{cases}a(t-t_0), & t\geqslant t_0;\\ 0, & 0\leqslant t<t_0,\end{cases} \tag{2}$$

а для времени обслуживания — вид

$$b(t)=\begin{cases}b(t-t_0), & t\geqslant t_0;\\ 0, & 0\leqslant t<t_0.\end{cases} \tag{3}$$

Функции (2) и (3) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями.

Запишем преобразования Лапласа функций (2) и (3) с учетом свойства (1):

$$L[a(t-t_0)]=\mathbf{e}^{-st_0}A^*(s),\ L[b(t-t_0)]=\mathbf{e}^{-st_0}B^*(s).$$

Тогда выражение $A^*(-s)B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для спектрального разложения решения ИУЛ для системы примет вид

$$\begin{aligned}\psi_+(s)/\psi_-(s)&=\mathbf{e}^{t_0s}A^*(-s)\mathbf{e}^{-t_0s}B^*(s)-1=\\ &=A^*(-s)B^*(s)-1\end{aligned} \tag{4}$$

У экспонент показатели степени с противоположными знаками обнуляются, и операция сдвига тем самым нивелируется. Правая часть выражения (4) полностью совпадает со спектральным разложением решения ИУЛ для обычной системы.

Теорема доказана.

Следствие. Расчетные формулы для среднего времени ожидания для всех систем со сдвинутыми распределениями будут иметь точно такой же вид, как у соответствующих систем с обычными распределениями, но с измененными параметрами вследствие проведения операции сдвига во времени [2—6]. Таким образом, среднее время ожидания для систем с запаздыванием фактически зависит от параметра сдвига $t_0>0$.

Продемонстрируем сказанное выше на примере системы $M^-/M^-/1$. Функция плотности распределения интервалов между требованиями входного потока в этом случае имеет вид

$$a(t)=\begin{cases}\lambda\mathbf{e}^{-\lambda(t-t_0)}, & t\geqslant t_0;\\ 0, & 0\leqslant t<t_0,\end{cases} \tag{5}$$

а для времени обслуживания — вид

$$b(t)=\begin{cases}\mu\mathbf{e}^{-\mu(t-t_0)}, & t\geqslant t_0;\\ 0, & 0\leqslant t<t_0.\end{cases} \tag{6}$$

Функции (5) и (6) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки экспоненциальными распределениями [2].

Запишем преобразования Лапласа функций (5) и (6) с учетом свойства (1):

$$A^*(s)=\frac{\lambda\mathbf{e}^{-t_0s}}{s+\lambda},\quad B^*(s)=\frac{\mu\mathbf{e}^{-t_0s}}{s+\mu}.$$

Тогда выражение $A^*(-s)B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для спектрального разложения решения ИУЛ для системы $M^-/M^-/1$ примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}&=\frac{\lambda\mathbf{e}^{t_0s}}{\lambda-s}\cdot\frac{\mu\mathbf{e}^{-t_0s}}{\mu+s}-1=\\ &=\frac{\lambda\mu-(\lambda-s)(\mu+s)}{(\lambda-s)(\mu+s)}=\frac{s(s+\mu-\lambda)}{(\lambda-s)(\mu+s)}.\end{aligned} \tag{7}$$

У экспонент показатели степени с противоположными знаками обнуляются, и операция сдвига тем самым нивелируется. Правая часть выражения (7) полностью совпадает со спектральным разложением решения ИУЛ для классической системы M/M/1 [1]. Аналогично обстоит дело и со всеми пятнадцатью оставшимися системами.

Далее с учетом условий, приведенных во введении, строим функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$, а с использованием последних определяем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания. Так, для системы $M^-/M^-/1$ имеем:

$$\psi_+(s)=\frac{s(s+\mu-\lambda)}{(\mu+s)},\quad \psi_-(s)=\lambda-s.$$

Заметим, что функция $\psi_+(s)$ не имеет нулей и полюсов в области $\mathrm{Re}(s)>0$, а $\psi_-(s)$ не имеет нулей в области $\mathrm{Re}(s)>\lambda$. Действуя по методике спектрального разложения, определяем постоянную K из условия

$$K=\lim_{s\to0}\frac{\psi_+(s)}{s}=\lim_{s\to0}\frac{s+\mu-\lambda}{s+\mu}=1-\lambda/\mu,$$

где параметры λ и μ определяются следующими выражениями через первые начальные моменты распределений (5) и (6):

$$\overline{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0, \tag{8}$$

$$\overline{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \tag{9}$$

В этом случае отношение λ/μ не определяет коэффициент загрузки, как в случае системы M/M/1, и параметры λ и μ не являются интенсивностями поступления требований и обслуживания соответственно.

Преобразование Лапласа для функции распределения времени ожидания (см. работу [1]), имеет вид

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{(1-\lambda/\mu)(\mu+s)}{s(s+\mu-\lambda)},$$

а преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания — вид

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{(1-\lambda/\mu)(\mu+s)}{(s+\mu-\lambda)}, \tag{10}$$

Значение первой производной функции (10) со знаком минус $-\frac{dW^*(s)}{ds}$ при $s = 0$ даст среднее время ожидания для системы $M^-/M^-/1$:

$$\overline{W} = \frac{\lambda/\mu}{\mu-\lambda},$$

что с учетом выражений (8) и (9) окончательно можно записать в виде

$$\overline{W} = \frac{(\overline{\tau}_\mu - t_0)^2}{\overline{\tau}_\lambda - \overline{\tau}_\mu}. \tag{11}$$

Следовательно, решение для среднего времени ожидания для всех систем с запаздыванием будет функцией параметра сдвига t_0, где $0 < t_0 < \overline{\tau}_\mu$.

Распределения (5) и (6) содержат по два параметра, для их определения методом моментов уравнения (8) и (9) надо дополнить выражениями для начальных моментов второго порядка. В качестве вторых моментов удобнее использовать коэффициенты вариаций:

$$c_\lambda = (1+\lambda t_0)^{-1}; \tag{12}$$

$$c_\mu = (1+\mu t_0)^{-1}. \tag{13}$$

Тогда в качестве входных параметров для расчета СМО $M^-/M^-/1$ задаем значения $t_0, \overline{\tau}_\lambda, c_\lambda, \overline{\tau}_\mu, c_\mu$, а неизвестные параметры λ, μ и t_0 определяем из системы уравнений моментов (8), (9), (12) и (13). Эта система уравнений является переопределенной, и входные параметры будут связаны условием

$$c_\mu = 1 - (1 - c_\lambda)/\rho,$$

где $\rho = \overline{\tau}_\mu/\overline{\tau}_\lambda$ — коэффициент загрузки системы.

Аналогичные рассуждения для других систем с запаздыванием приведут к схожим результатам. Для этого сведем в табл. 1 числовые характеристики рассматриваемых законов распределений, которые использованы в работах [2—4].

Числовые характеристики сдвинутых распределений (табл. 1) явно свидетельствуют о су-

Таблица 1

Числовые характеристики распределений

Распределение	Первый начальный момент $\overline{\tau}_\lambda$	Второй начальный момент $\overline{\tau_\lambda^2}$	Квадрат коэффициента вариации c_λ^2
M	$1/\lambda$	$2/\lambda^2$	1
E_2	$1/\lambda$	$3/(2\lambda^2)$	1/2
H_2	$p/\lambda_1 + (1-p)/\lambda_2$	$2[p/\lambda_1^2 + (1-p)/\lambda_2^2]$	$\frac{(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2}{[(1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$
HE_2	$p/\lambda_1 + (1-p)/\lambda_2$	$3p/(2\lambda_1^2) + 3(1-p)/(2\lambda_2^2)$	$\frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{2[(1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$
M^-	$\frac{1}{\lambda} + t_0$	$2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{t_0}{\lambda}\right) + t_0^2$	$\frac{1}{(1+\lambda t_0)^2}$
E_2^-	$\frac{1}{\lambda} + t_0$	$\frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$	$\frac{1}{2(1+\lambda t_0)^2}$
H_2^-	$\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} + t_0$	$t_0^2 + 2t_0\left[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}\right] + 2\left[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2}\right]$	$\frac{(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$
HE_2^-	$\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} + t_0$	$t_0^2 + 2t_0\left[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}\right] + \frac{3p}{2\lambda_1^2} + \frac{3(1-p)}{2\lambda_2^2}$	$\frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{2[t_0\lambda_1\lambda_2 - p(\lambda_1-\lambda_2) + \lambda_1]^2}$

щественном влиянии на них параметра сдвига t_0. Теперь необходимо определить неизвестные параметры данных распределений. Эти параметры также получены в работах [2—4] и для случаев функций плотности распределения интервалов входных потоков $a(t)$ сведены в табл. 2.

Аналогичные параметры для распределений времени обслуживания $b(t)$ будут иметь место путем замены λ на μ.

В табл. 3 приведены полученные в работах [2—4] преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания в очереди в рас-

Таблица 2

Параметры сдвинутых распределений, полученные методом моментов

Распределение	Плотность $a(t)$	Параметры $p, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$		
M^-	$\lambda \mathbf{e}^{-\lambda(t-t_0)}$	$\lambda = \dfrac{1}{\bar{\tau}_\lambda - t_0}$		
E_2^-	$4\lambda^2 (t-t_0) \mathbf{e}^{-2\lambda(t-t_0)}$	$\lambda = \dfrac{1}{\bar{\tau}_\lambda - t_0}$		
H_2^-	$p\lambda_1 \mathbf{e}^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 \mathbf{e}^{-\lambda_2(t-t_0)}$	$p = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}$	$\lambda_1 = \dfrac{2p}{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)}$	$\lambda_2 = \dfrac{2(1-p)}{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)}$
HE_2^-	$4p\lambda_1^2(t-t_0)\mathbf{e}^{-2\lambda_1(t-t_0)} + 4(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)\mathbf{e}^{-2\lambda_2(t-t_0)}$	$p = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{3(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}$	$\lambda_1 = \dfrac{2p}{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)}$	$\lambda_2 = \dfrac{2(1-p)}{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)}$

Таблица 3

Преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания, компоненты спектральных разложений решения ИУЛ, расчетные выражения для среднего времени ожидания

СМО	Преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания и компоненты спектрального разложения	Расчетные выражения для среднего времени ожидания
$M^-/M^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{(1-\lambda/\mu)(\mu+s)}{(s+\mu-\lambda)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+\mu-\lambda)}{(\mu+s)}$, $\psi_-(s) = \lambda - s$	$\bar{W} = \dfrac{(\bar{\tau}_\mu - t_0)}{(\bar{\tau}_\lambda - \bar{\tau}_\mu)}$
$M^-/E_2^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}$, $\psi_-(s) = \lambda - s$	$\bar{W} = \dfrac{3\rho(\bar{\tau}_\mu - t_0)}{4(1-\rho)}$
$M^-/H_2^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{s_1 s_2 (s+\mu_1)(s+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(s+s_1)(s+s_2)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}$, $\psi_-(s) = \lambda - s$	$\bar{W} = \dfrac{s_1+s_2}{s_1 s_2} - \dfrac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}$, где s_1, s_2 — абсолютные значения отрицательных нулей числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$
$E_2^-/E_2^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{s_1 s_2 (2\mu+s)^2}{4\mu^2 s(s+s_1)(s+s_2)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}$, $\psi_-(s) = -\dfrac{(2\lambda-s)^2}{(s-s_3)}$	$\bar{W} = \dfrac{s_1+s_2}{s_1 s_2} - \dfrac{1}{\mu}$, где $s_1 = (\mu-\lambda) + \sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 8\lambda\mu}$, $s_2 = 2(\mu-\lambda)$
$E_2^-/M^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)}{s+\mu}$, $\psi_-(s) = -\dfrac{(2\lambda-s)^2}{s-s_2}$	$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu$, где $s_1 = (\mu-4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu-4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu-\lambda)}$
$H_2^-/H_2^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{s_1 s_2 (s+\mu_1)(s+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(s+s_1)(s+s_2)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}$, $\psi_-(s) = \dfrac{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)}{s-s_3}$	$\bar{W} = \dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2} - \dfrac{1}{\mu_1} - \dfrac{1}{\mu_2}$, где s_1, s_2 — абсолютные значения отрицательных нулей числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$
$H_2^-/M^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)}{s+\mu}$, $\psi_-(s) = \dfrac{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)}{s-s_2}$	$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu$, где s_1 — абсолютное значение отрицательного нуля числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$
$HE_2^-/HE_2^-/1$	$W^*(s) = \dfrac{s_1 s_2 s_3 s_4 (s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}$, $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{[(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2]}$, $\psi_-(s) = -\dfrac{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2}{(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)}$	$\bar{W} = \dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2} + \dfrac{1}{s_3} + \dfrac{1}{s_4} - \dfrac{1}{\mu_1} - \dfrac{1}{\mu_2}$, где s_1, s_2, s_3, s_4 — абсолютные значения отрицательных нулей числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$

сматриваемых системах, компоненты спектральных разложений решения ИУЛ, а также расчетные формулы для среднего времени ожидания в соответствующих системах.

С подробным изложением алгоритмов расчета среднего времени ожидания для рассматриваемых систем, можно ознакомиться в работах [2—4]. Таким образом, здесь представлены опубликованные результаты по восьми системам из шестнадцати.

Таблица 4

Результаты экспериментов для СМО $M^-/M^-/1$ и $M/M/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	t_0	c_λ	c_μ	для системы $M^-/M^-/1$	для системы $M/M/1$
0,1	0,9	0,91	0,1	0,001	0,111
	0,5	0,95	0,5	0,028	
	0,1	0,99	0,9	0,090	
	0,01	0,999	0,99	0,109	
0,5	0,9	0,55	0,1	0,010	1,000
	0,5	0,75	0,5	0,250	
	0,1	0,95	0,9	0,810	
	0,01	0,995	0,99	0,980	
0,9	0,9	0,19	0,1	0,090	9,000
	0,5	0,55	0,5	2,250	
	0,1	0,91	0,9	7,290	
	0,01	0,991	0,99	8,821	

Таблица 5

Результаты экспериментов для СМО $E_2^-/E_2^-/1$ и $E_2/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	для системы $E_2^-/E_2^-/1$	для системы $E_2/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,000	0,017
	0,672	0,354	0,5	0,002	
	0,700	0,636	0,1	0,013	
	0,706	0,700	0,01	0,016	
0,5	0,389	0,071	0,9	0,001	0,390
	0,530	0,354	0,5	0,081	
	0,672	0,636	0,1	0,309	
	0,704	0,700	0,01	0,382	
0,9	0,134	0,071	0,9	0,034	4,359
	0,389	0,354	0,5	1,057	
	0,643	0,636	0,1	3,519	
	0,701	0,700	0,01	4,271	

Результаты вычислительных экспериментов

В табл. 4—7 приведены данные расчетов в пакете MathCAD для четырех характерных систем $M^-/M^-/1$, $E_2^-/E_2^-/1$, $H_2^-/H_2^-/1$ и $HE_2^-/HE_2^-/1$ для случаев малой, средней и вы-

Таблица 6

Результаты экспериментов для СМО $H_2^-/H_2^-/1$ и $H_2/H_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
ρ	(c_λ, c_μ)	Для системы $H_2^-/H_2^-/1$			Для системы $H_2/H_2/1$
		$t_0 = 0,9$	$t_0 = 0,5$	$t_0 = 0,1$	
0,1	(1,1)	0,06	0,07	0,10	0,11
	(2,2)	0,28	0,36	0,42	0,45
	(4,4)	1,19	1,54	1,73	1,78
	(8,8)	4,81	6,31	6,97	7,11
0,5	(1,1)	0,56	0,75	0,95	1,00
	(2,2)	2,31	3,13	3,87	4,04
	(4,4)	9,29	12,61	15,45	16,13
	(8,8)	37,22	50,50	61,54	64,18
0,9	(1,1)	6,04	8,30	8,91	9,00
	(2,2)	24,14	33,22	35,84	36,20
	(4,4)	96,51	132,30	143,27	144,83
	(8,8)	386,03	527,68	571,47	577,86

Таблица 7

Результаты экспериментов для СМО $HE_2^-/HE_2^-/1$ и $HE_2/HE_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
ρ	(c_λ, c_μ)	Для системы $HE_2^-/HE_2^-/1$			Для системы $HE_2/HE_2/1$
		$t_0 = 0,9$	$t_0 = 0,5$	$t_0 = 0,1$	
0,1	(0,71;0,71)	0,01	0,01	0,02	0,02
	(2;2)	0,29	0,32	0,33	0,34
	(4;4)	1,21	1,55	1,66	1,68
	(8;8)	4,93	6,48	7,05	7,16
0,5	(0,71;0,71)	0,27	0,31	0,39	0,40
	(2;2)	2,32	3,15	3,82	3,98
	(4;4)	9,35	12,94	15,85	16,53
	(8;8)	37,50	52,13	63,96	66,73
0,9	(0,71;0,71)	3,06	4,11	4,39	4,40
	(2;2)	24,42	33,36	35,88	36,21
	(4;4)	97,71	133,3	143,8	145,31
	(8;8)	390,90	532,7	574,5	580,56

сокой нагрузки ρ = 0,1; 0,5; 0,9 для широкого диапазона изменения коэффициентов вариаций c_λ, c_μ и параметра сдвига t_0. Результаты для систем с запаздыванием сравниваются с результатами для обычных систем. Коэффициент загрузки ρ в табл. 4—7 определяется отношением средних интервалов $\rho = \overline{\tau}_\mu / \overline{\tau}_\lambda$. В расчетах для удобства использовано нормированное время обслуживания $\overline{\tau}_\mu = 1$.

Как и следовало ожидать, уменьшение коэффициентов вариации c_λ и c_μ за счет введения параметра сдвига $t_0 > 0$ в законы распределений входного потока и времени обслуживания влечет за собой уменьшение среднего времени ожидания в системах с запаздыванием в несколько раз.

Адекватность представленных результатов, с одной стороны, подтверждается тем, что при стремлении параметра сдвига t_0 к нулю среднее время ожидания в системе с запаздыванием стремится к его значению в обычной системе. С другой стороны, адекватность представленных математических моделей систем с запаздыванием достигается корректным использованием классического метода спектрального разложения ИУЛ для рассмотренных систем.

Заключение

В работе представлены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для восьми систем с запаздыванием, с помощью которых выведены расчетные формулы для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. С использованием данных формул можно рассчитать среднее время ожидания во всех рассмотренных системах.

Операция сдвига во времени для всех систем с запаздыванием, с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы с запаздыванием. Например, для системы с запаздыванием $M^-/M^-/1$ загрузка увеличивается в $(1+\mu t_0)/(1+\lambda t_0)$ раз по сравнению с обычной системой M/M/1. С другой стороны, операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы $M^-/M^-/1$ при загрузке ρ = 0,9 и параметре сдвига t_0 = 0,9 коэффициент вариации интервалов поступления c_λ уменьшается с 1 для обычной системы до 0,19, коэффициент вариации времени обслуживания c_μ уменьшается с 1 до 0,1, а время ожидания уменьшается с 9 единиц времени для обычной системы почти до 0,09 единиц времени для системы с запаздыванием (табл. 4).

Кроме того, введение параметра сдвига приводит к достаточно широкому диапазону изменения коэффициентов вариаций c_λ и c_μ в отличие от обычных систем, которые применимы только в случае фиксированных значений коэффициентов вариаций. Следовательно, системы с запаздыванием расширяют диапазон их применимости в современной теории телетрафика.

Список литературы

1. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Блатов И. А.** Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51—59.
3. **Тарасов В. Н.** Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57—70.
4. **Тарасов В. Н.** Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2018. № 4 (47). С. 61—70.
5. **Brannstrom N.** A Queueing Theory analysis of wireless radio systems // Appllied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. 79 p.
6. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. N. 1. P. 125—147.
7. **Бочаров П. П., Печинкин А. В.** Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
8. **Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E.** Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2019. Vol. 18, N. 1. P. 279—311.
9. **Алиев Т. И.** Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88—93.
10. **Adan I., D'Auria B., Kella O.** Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference // Queueing Systems. 2019. N. 1. P. 1—190. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1.
11. **Legros B.** M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, N. 3. P. 269—301. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7.
12. **Bazhba M., Blanchet J., Rhee CH.** et al. Queue with heavy-tailed Weibull service times // Queueing Systems. 2019. Vol. 93, N. 11. P. 1—32. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z

V. N. Tarasov, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru,
Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation

Queuing Systems with a Time Lag

The article discusses various queuing systems (QS) formed by four laws of probability distributions: exponential, hyperexponential, Erlang and hyper-Erlang of the second order. These four laws form sixteen different QS. In contrast to the classical theory, this article considers QS with distribution laws shifted to the right from the zero point. Such QS are of type G/G/1 with arbitrary laws of the distribution of intervals between the requirements of the input flow and the service time. As you know, for such systems it is impossible to obtain solutions for the main characteristic of QS the average waiting time in the general case. Therefore, studies of such systems are important for special cases of distribution laws. The article provides an overview of the author's results for the average waiting time in a queue in a closed form for systems with input distributions shifted to the right from the zero point. To solve this problem, the spectral decomposition method for solving the Lindley integral equation was used. In the course of solving the problem, spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for eight systems were obtained and with their help calculation formulas were derived for the average waiting time in the queue. It is shown that in systems with delay, the average waiting time is shorter than in conventional systems. The obtained calculation formulas for the average waiting time expand and complement the well-known incomplete formula of the queuing theory for the average waiting time for G/G/1 systems. The proposed approach allows us to calculate the average value and moments of higher orders of waiting time for these systems in mathematical packages for a wide range of changes in traffic parameters. Given the fact that the variation in packet delay (jitter) in the telecommunications standard is defined as the spread of waiting time around its average value, the jitter can be determined through the variance of the waiting time.

Keywords: *time delay system, shifted distributions, Laplace transform, Lindley integral equation, spectral decomposition method*

DOI: 10.17587/it.27.291-298

References

1. **Kleinrock L.** Queuing theory, Moscow, Mashinostroeinie Publ, 1979, 432 p.
2. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A.** Analysis and calculation of queuing system with delay, *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 52, no. 11, pp. 1945—1951/ DOI: 10.1134/S0005117915110041.
3. **Tarasov V. N.** Extension of the Class of Queueing Systems with Delay, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147—2157. DOI: 10.1134/S0005117918120056.
4. **Tarasov V. N.** Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions, *Radio Electronics Computer Science Control*, 2018, vol. 47, no. 4, pp. 61—70. DOI 10.15588/1607-3274-2018-4-6.
5. **Brannstrom N. A.** Queueing Theory analysis of wireless radio systems, *Appllied to HS-DSCH*, Lulea university of technology, 2004, 79 p.
6. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125—147.
7. **Bocharov P. P., Pechinkin A. V.** Teoriya massovogo obsluzhivaniya, Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995, 529 p.
8. **Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E.** Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 18-1 2019, vol. 18, no. 1, pp. 279—311. DOI: https://doi.org/10.1137/18M1170637.
9. **Aliev T. I.** Approksimaciya veroyatnostnyh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya, *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki,* 2013, vol. 84, no. 2, pp. 88—93.
10. **Adan I., D'Auria B., Kella O.** Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference, *Queueing Systems*, 2019, pp. 1—190. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1.
11. **Legros B.** M/G/1 queue with event-dependent arrival rates, *Queueing Systems,* 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269—301. DOI: https://doi.org/10.1007 /s11134-017-9557-7.
12. **Bazhba M., Blanchet J., Rhee CH.** et al. Queue with heavy-tailed Weibull service times, *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 11, pp. 1—32. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z.