

**М. В. Ульянов**, д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр., проф., e-mail: muljanov@mail.ru,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
**М. И. Фомичёв**, аспирант, ст. преподаватель, e-mail: michan94@yandex.ru,  
Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,  
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

## Исследование особенностей применения комбинированного алгоритма для решения асимметричной задачи коммивояжера<sup>1</sup>

*Рассматривается точный алгоритм для решения асимметричной задачи коммивояжера, представляющий собой комбинацию метода ветвей и границ и метаэвристического алгоритма Лина—Кернигана—Хельсгауна, используемого для получения предвычисленного тура при запуске метода ветвей и границ. Сокращение числа вершин порожденного дерева решений в методе ветвей и границ за счет "хорошего" предвычисленного тура приводит к классической дилемме о балансе временных затрат. Тур, близкий к оптимальному, требует временных затрат даже при использовании алгоритма Лина—Кернигана—Хельсгауна, но сокращает время работы метода ветвей и границ. Возникает задача определения области применения такого комбинированного алгоритма, которая решается в данной статье за счет использования специальной характеристики индивидуальных задач коммивояжера — числа изменений направления обхода в поисковом дереве решений, порождаемом методом ветвей и границ. Использование данной характеристики позволило разделить индивидуальные задачи на три категории, для которых на основе экспериментальных данных сформулированы рекомендации по применению комбинированного алгоритма. На основе полученных в вычислительном эксперименте данных (в диапазоне размерностей от 30 до 45) рекомендуется применение комбинированного алгоритма для задач категории III, начиная с  $n = 36$ , и для задач категории II, начиная с  $n = 42$ .*

**Ключевые слова:** задача коммивояжера, метод ветвей и границ, предвычисленный тур, комбинированные алгоритмы, алгоритм Лина—Кернигана—Хельсгауна

### Введение

В настоящее время задача коммивояжера является востребованной задачей дискретной оптимизации, поскольку достаточно много практически значимых постановок в области бизнес-информатики и логистики сводится к классической задаче коммивояжера, причем, как правило, в ее наиболее сложной асимметричной постановке. Задача заключается в поиске гамильтонова цикла с минимальной стоимостью в полном асимметричном графе без собственных петель. Востребованность точных решений приводит к необходимости применения точных алгоритмов ее решения, одним из которых является алгоритм, реализу-

ющий метод ветвей и границ, предложенный Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини и К. Кэрл [1]. Принадлежность задачи коммивояжера к NP-трудным задачам приводит к надполиномиальной сложности всех предложенных сегодня точных алгоритмов. Известно [2], что реализации метода ветвей и границ для этой задачи имеют экспоненциальную временную сложность и логнормальное распределение числа порожденных вершин поискового дерева при фиксированной размерности, что приводит к существенному росту временных затрат для практически востребованных постановок.

Сокращение времени получения точного решения при использовании метода ветвей и границ возможно за счет применения различных модификаций и специальных приемов. Так, например, известный подход, связанный с использованием дополнительной памяти, ис-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00656.

следованный авторами в работах [3, 4], позволяет сократить время решения, но этого явно недостаточно и, более того, требует значительных объемов оперативной памяти. Еще один подход, приводящий к сокращению времени решения задачи коммивояжера, базируется на сокращении числа вершин в поисковом дереве решений. Такое сокращение обеспечивается с помощью тура коммивояжера (так называемого предвычисленного тура), полученного до начала работы метода ветвей и границ некоторым метаэвристическим алгоритмом. Очевидно, что есть смысл использовать только такой метаэвристический алгоритм, который обеспечит не только существенное сокращение поискового дерева решений, но и сокращение суммарного времени решения, включающего в себя и время выполнения программной реализации самого метаэвристического алгоритма. Авторами ранее в работах [5, 6] было проведено исследование различных метаэвристических алгоритмов и показано, что наиболее целесообразно использовать для получения предвычисленного тура алгоритм, предложенный Лином и Керниганом [7], который основан на идее итерационного улучшения случайно полученного тура, и очень успешно модифицированный Хельсгауном [8, 9]. Отметим, что и алгоритм Лина—Кернигана и его модификация Хельсгауном относятся к симметричной задаче коммивояжера. Однако с использованием метода трансформации, предложенного в работе [10], любая несимметричная задача коммивояжера размерности  $n$  может быть преобразована в симметричную задачу коммивояжера размерности  $2n$ . К сожалению, эта трансформация также влияет на время решения несимметричной задачи коммивояжера алгоритмом Лина—Кернигана—Хельсгауна.

В рамках любого комбинированного алгоритма возникает задача определения его области применения, т.е. таких размерностей и таких особенностей задач, при которых применение комбинированного алгоритма было бы целесообразным. Для предложенного авторами в работах [5, 6] комбинированного алгоритма, основанного на методе ветвей и границ с предвычисленным туром, полученным алгоритмом Лина—Кернигана—Хельсгауна, представляет интерес определение размерностей и особенностей индивидуальных задач, при которых программная реализация комбинированного алгоритма показывает лучшую временную эффективность по сравнению с реализацией классического метода ветвей и

границ. Одному из подходов к решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

### Задача коммивояжера и постановка задачи исследования

Приведем используемую далее терминологию и обозначения, связанные с задачей коммивояжера. Асимметричная задача коммивояжера — это задача нахождения гамильтонова цикла минимального веса в полном взвешенном ориентированном графе без собственных петель. Полный взвешенный ориентированный граф с  $n$  вершинами задается взвешенной матрицей смежности  $A$  размерности  $n$ , элементы которой определяют веса дуг между вершинами полного графа. Собственные петли запрещаются специальными значениями на главной диагонали матрицы.

Терминологически в задаче коммивояжера гамильтонов цикл в полном графе называется *туром*, а матрица смежности  $A$  называется *матрицей стоимостей*, поскольку в содержательной постановке задачи коммивояжера веса дуг интерпретируются как стоимости проезда между городами. Число вершин графа  $n$ , определяющее размерность матрицы стоимостей, называется *размерностью задачи коммивояжера*. Далее рассматривается асимметричная задача коммивояжера, которая представляет собой наиболее общую и вычислительно трудную постановку задачи. Очевидно, что начальная вершина тура может быть выбрана произвольно. Таким образом, множество всех возможных туров определяется всеми возможными перестановками остальных вершин и имеет мощность  $(n - 1)!$ . Под термином *индивидуальная задача* будем понимать конкретный экземпляр задачи коммивояжера — это задача, заданная конкретной матрицей стоимостей  $A$  размерности  $n$ .

Постановка задачи в данной статье предполагает определение таких размерностей задачи и таких особенностей индивидуальных задач, при которых целесообразно использовать комбинированный алгоритм метода ветвей и границ и алгоритм Лина—Кернигана—Хельсгауна, применяемый для получения предвычисленного тура.

Очевидным инструментом исследования является вычислительный эксперимент в рамках некоторого диапазона размерностей задачи со значительной по объему выборкой экспериментальных данных.

## Описание вычислительного эксперимента

Эксперименты проводили на стационарном компьютере со следующими характеристиками:

- процессор: Intel i7 3770K 3800 MHz;
- оперативная память: Kingston KHX1600C9D3P1 16 Гбайт;
- материнская плата: ASRock Fatalty Z370 Gaming K6;
- операционная система: GIGABYTE GA-Z77X-D3H.

Для минимизации шумов операционной системы фоновые процессы, которые не нужны для исследования, были отключены, также отсутствовал графический пользовательский интерфейс, а управление операционной системой осуществлялось посредством командной строки.

Алгоритмы были реализованы на языке C++ и скомпилированы в исполняемый файл с помощью компилятора: gcc 4.8.5 20150623.

Для экспериментального анализа были сгенерированы несимметричные задачи коммивояжера для размерностей от 30 до 45 с шагом один. Объем выборки для каждой размерности составил 10 000 индивидуальных задач. Веса дуг для асимметричных матриц индивидуальных задач — целые числа в диапазоне от 1 до  $10^6$  — были сгенерированы равномерным генератором псевдослучайных чисел.

В ходе вычислительного эксперимента были получены времена решения индивидуальной задачи коммивояжера классическим алгоритмом, реализующим метод ветвей и границ (ARS), и комбинированным алгоритмом, реализующим метод ветвей и границ с расчетом предвычисленного тура с помощью алгоритма Лина—Кернигана—Хельсгауна (ARS<sub>LKH</sub>). Кроме того, для каждой индивидуальной задачи коммивояжера в ходе ее решения классическим методом ветвей и границ было определено число изменений направления обхода в поисковом дереве решений. Эта характеристика поискового дерева решений была ранее введена одним из авторов в работе [11].

## Обсуждение и результаты

Предложенная в работе [11] новая характеристика динамики поискового дерева решений, порождаемого методом ветвей и границ для задачи коммивояжера, — число изменений направления обхода дерева — представляется перспективной для выделения категорий задач с предпочтительным использованием комбини-

рованного алгоритма. Обозначим  $J(A)$  — число изменений направления обхода в поисковом дереве решений в классическом алгоритме, где  $A$  — индивидуальная задача коммивояжера размерностью  $n$ . Обозначим  $J_n$  — множество всех значений  $J(A)$ , полученных по результатам вычислительного эксперимента на задачах размерности  $n$ .

Рассматривая  $J_n$  как выборку из случайной величины в 10 000 значений для каждой размерности  $n$ , определим квантили распределения значений  $J(A)$ . В табл. 1 представлены 0.25-, 0.5-, 0.75-, 0.9-, 0.95-, 0.99-, 0.995- и 0.999-квантили  $J_n$  для исследованного диапазона размерностей.

Основываясь на ранее полученных нами результатах [5, 6] по исследованию комбинированного алгоритма, логично предположить, что он будет эффективен по времени для сложных задач, начиная с некоторой размерности. Это наблюдение связано с тем, что для небольших размерностей классический метод ветвей и границ работает достаточно эффективно, а время на вычисление предвычисленного тура не компенсируется эффектом от сокращения поискового дерева решений. В качестве меры такой сложности мы предлагаем использовать значение  $J(A)$  — число изменений направления обхо-

Таблица 1

Квантили  $J_n$

$n$	$q_{0,25}$	$q_{0,5}$	$q_{0,75}$	$q_{0,9}$	$q_{0,95}$	$q_{0,99}$	$q_{0,995}$	$q_{0,999}$
30	98	202	399	728	1060	2081	2681	4595
31	113	235	468	891	1278	2531	3239	4614
32	135	279	560	1040	1525	3020	3671	6447
33	157	331	674	1272	1845	3666	4884	7810
34	184	384	808	1513	2211	4157	5482	9433
35	213	454	948	1788	2587	5319	6674	10444
36	261	548	1144	2211	3209	6815	8692	14524
37	292	637	1341	2586	3919	7832	11186	16525
38	346	770	1645	3251	4792	10115	14920	26924
39	415	895	1949	3878	5723	12452	18274	28192
40	477	1053	2309	4637	7134	15702	21785	38952
41	564	1261	2779	5588	8876	19227	26074	52206
42	655	1431	3272	6671	10163	24215	30738	59467
43	777	1775	3960	7941	12134	27325	39235	65875
44	870	2024	4575	9366	14505	31184	42119	71376
45	1016	2419	5424	11656	18507	42447	57381	124804

Нормированные квантили  $J_n$  по 0,99 квантили

$n$	$\frac{q_{0,25}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,5}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,75}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,9}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,95}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,99}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,995}}{q_{0,99}}$	$\frac{q_{0,999}}{q_{0,99}}$
30	0,047	0,097	0,192	0,35	0,509	1	1,288	2,208
31	0,045	0,093	0,185	0,352	0,505	1	1,280	1,823
32	0,045	0,092	0,185	0,344	0,505	1	1,216	2,135
33	0,043	0,090	0,184	0,347	0,503	1	1,332	2,130
34	0,044	0,092	0,194	0,364	0,532	1	1,319	2,269
35	0,040	0,085	0,178	0,336	0,486	1	1,255	1,964
36	0,038	0,080	0,168	0,324	0,471	1	1,275	2,131
37	0,037	0,081	0,171	0,330	0,504	1	1,428	2,110
38	0,034	0,076	0,163	0,321	0,474	1	1,475	2,662
39	0,033	0,072	0,157	0,311	0,46	1	1,468	2,264
40	0,030	0,067	0,147	0,295	0,454	1	1,387	2,481
41	0,029	0,066	0,145	0,291	0,462	1	1,356	2,715
42	0,027	0,059	0,135	0,275	0,420	1	1,269	2,456
43	0,028	0,065	0,145	0,291	0,444	1	1,436	2,411
44	0,028	0,065	0,147	0,304	0,465	1	1,351	2,289
45	0,024	0,057	0,128	0,275	0,436	1	1,352	2,940

да в поисковом дереве решений в классическом алгоритме. Большие значения  $J(A)$  могут свидетельствовать в пользу применения комбинированного алгоритма для задач данной размерности. На этом основании мы выбрали квантиль 0,99 в качестве базового значения для выделения категории индивидуальных задач. Результаты нормировки значений полученных квантилей по 0,99-квантили представлены в табл. 2.

Заметим, что нормированные значения квантилей 0,95 очень близки к 0,5 для всех исследованных размерностей. На основании полученных экспериментальных результатов мы предлагаем выделить следующие три категории индивидуальных задач:

I. Задачи, для которых  $J(A) < q_{0,95}$  (нормированный квантиль меньше 0,5).

II. Задачи, для которых  $q_{0,95} \leq J(A) < q_{0,995}$  (нормированный квантиль между 0,5 и 1,5).

III. Задачи, для которых  $J(A) \geq q_{0,995}$  (нормированный квантиль больше 1,5).

Таким образом, зная число изменений направления обхода поискового дерева решений, полученное с использованием классического алгоритма, можно отнести каждую задачу из нашей экспериментальной выборки к одной из трех введенных категорий (I, II или III).

В экспериментальном исследовании мы получили времена  $t_{ARS}$  решения индивидуаль-

ных задач коммивояжера классическим алгоритмом, реализующим метод ветвей и границ (ARS), и  $t_{ARS_{LKH}}$  — времена решения комбинированным алгоритмом, реализующим метод ветвей и границ с расчетом предвычисленного тура на основе алгоритма Лина—Кернигана—Хелсгауна (ARS<sub>LKH</sub>). На основе полученных данных о временах решения ( $t_{ARS}$  и  $t_{ARS_{LKH}}$ ) и категории каждой задачи, мы определили долю задач, для которых комбинированный алгоритм работал быстрее в разрезе каждой категории. Эти результаты приведены в табл. 3.

Данные табл. 3 показывают, что для задач категории I применение комбинированного алгоритма практически не целесообразно в исследованном диапазоне размерностей. Для задач, относящихся к категории II, его применение эффективно только в конце диапазона размерностей, а для задач III категории — уже начиная с середины изученного диапазона. Очевидно, остается открытым вопрос об определении сложности индивидуальной задачи в смысле характеристики  $J(A)$ , которую авторы связывают с другой характеристикой сложности индивидуальной задачи  $S(A)$ , исследованию которой посвящена работа [2].

Дополнительно проиллюстрируем данные табл. 3 в виде графиков, которые показаны на рисунке (см. третью сторону обложки).

Таблица 3

Эффективность  $ARS_{LKH}$  по категориям

$n$	Доля задач категории I, для которых эффективен комбинированный алгоритм, %	Доля задач категории II, для которых эффективен комбинированный алгоритм, %	Доля задач категории III, для которых эффективен комбинированный алгоритм, %
30	2,980	11,504	25,49
31	4,906	9,778	21,569
32	2,095	9,556	27,451
33	2,937	9,778	54,902
34	1,758	9,333	52,941
35	1,560	20,701	70,588
36	1,495	26,000	88,235
37	1,516	37,694	86,275
38	1,358	55,333	98,039
39	1,948	67,111	96,078
40	3,432	81,778	98,039
41	5,632	91,131	98,000
42	8,253	95,100	100,000
43	11,907	94,678	100,000
44	16,191	98,222	100,000
45	20,531	99,557	100,000

Полученные экспериментальные результаты позволяют говорить, что предвычисленный тур, полученный с помощью алгоритма Лина—Керниган—Хелсгауна, оказывает существенное влияние, сокращая время по сравнению с классическим алгоритмом, для задач категории III, начиная с  $n = 36$ , и для задач категории II, начиная с  $n = 42$ . Кроме того, с ростом размера задачи предвычисленный тур, полученный алгоритмом Лина—Кернигана—Хелсгауна в комбинированном алгоритме, все более влияет на сокращение суммарного времени точного решения асимметричной задачи коммивояжера для каждой из категорий. Однако доля задач категории I, для которых применение комбинированного алгоритма оправдано, мало даже для  $n = 45$  и составляет только 20,5 %.

### Заключение

Таким образом, на основании полученных экспериментальных результатов можно сделать следующие выводы, связанные с исследованным точным комбинированным алгорит-

мом для решения асимметричной задачи коммивояжера:

- на основании нормированных квантилей значений  $J(A)$  (число изменений направления обхода в поисковом дереве решений) в статье предложено разделение индивидуальных асимметричных задач коммивояжера на три категории в целях выявления задач, для которых применение комбинированного алгоритма (метод ветвей и границ + алгоритм Лина—Кернигана—Хельсгауна) целесообразно в смысле временной эффективности;
- на основе полученных экспериментальных результатов по времени мы констатируем (в рамках исследованного диапазона размерностей от 30 до 45), что применение комбинированного алгоритма целесообразно и сокращает время получения решения по сравнению с классическим алгоритмом для задач категории III, начиная с  $n = 36$ , и для задач категории II, начиная с  $n = 42$ .

Авторы видят дальнейшее развитие исследования в поиске таких алгоритмов, которые позволили бы определить характеристику динамики поискового дерева решений, порождаемого методом ветвей и границ для асимметричной задачи коммивояжера, — число изменений направления обхода с полиномиальной сложностью, позволяя тем самым эффективно принимать решение об использовании комбинированного алгоритма.

### Список литературы

1. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operations Research. 1963. Vol. 11 P. 972—989.
2. Goloveshkin V. A., Zhukova G. N., Ulyanov M. V., Fomichev M. I. Probabilistic Prediction of the Complexity of Traveling Salesman Problems Based on Approximating the Complexity Distribution from Experimental Data // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, Iss. 7. P 1296—1310.
3. Ulyanov M. V., Fomichev M. I. Resource characteristics of ways to organize a decision tree in the branch-and-bound method for the traveling salesman problem // Business Informatics. 2015. № 4 (34). P. 38—46.
4. Ульянов М. В., Фомичев М. И. Подходы к организации поискового дерева решений в методе ветвей и границ для асимметричной задачи коммивояжера // Информационные технологии. 2018. № 11, Т. 24., С. 698—704. DOI: 10.17587/it.24.698-704.
5. Ульянов М. В., Фомичев М. И. Сравнительный анализ комбинаций метода ветвей и границ с метаэвристическими алгоритмами для решения асимметричной задачи коммивояжера. // Информационные технологии. 2019. Т. 25, № 10. С. 590-595. DOI 10.17587/it.25.
6. Zhukova G. N., Ulyanov M. V., Fomichev M. A. Hybrid Exact Algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem: Construction and a Statistical Study of Computational Efficiency

// Automation and Remote Control. 2019. Vol. 80, N. 11. P. 2054–2067. DOI: 10.1134/S0005117919110092

7. **Lin S., Kernighan B. W.** An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem // *Operations Research*. 1973. Vol. 21, N. 2. P. 498–516.

8. **Helsgaun K.** An effective implementation of the Lin–Kernighan traveling salesman heuristic // *European Journal of Operational Research*. 2000. Vol. 126, N. 1. P. 106–130.

9. **Helsgaun K.** An extension of the Lin–Kernighan–Helsgaun TSP solver for constrained traveling salesman and

vehicle routing problems // Technical Report. Roskilde: Roskilde University, 2017.

10. **Jonker R., Volgenant T.** Transforming asymmetric into symmetric traveling salesman problems // *Operations Research Letters*. 1983. N. 2. P. 161–163.

11. **Фомичев М. И.** Об одной оценке индивидуальной задачи коммивояжера // Тезисы XX Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. г. Новосибирск, Россия, 28 октября – 1 ноября. С. 86–87.

**M. V. Ulyanov**, Leading Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, M. V. Lomonosov Moscow State University

**M. I. Fomichev**, Doctoral Student Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev, Lecturer of Faculty of Computer Science, School of Software Engineering National Research University Higher School of Economics

## Research of Features of the Combined Algorithm for Solving the Asymmetric Traveling Salesman Problem

*The exact algorithm that implements the Branch and Bound method with precomputed tour which is calculated by Lin–Kernighan–Helsgaun metaheuristic algorithm for solving the Traveling Salesman Problem is concerned here. Reducing the number of decision tree nodes, which are created by the Branches and Bound method, due to a "good" precomputed tour leads to the classical balancing dilemma of time costs. A tour that is close to optimal one takes time, even when the Lin–Kernighan–Helsgaun algorithm is used, however it reduces the working time of the Branch and Bound method. The problem of determining the scope of such a combined algorithm arises. In this article it is solved by using a special characteristic of the individual Traveling Salesman Problem — the number of changes tracing direction in the search decision tree generated by the Branch and Bound Method. The use of this characteristic allowed to divide individual tasks into three categories, for which, based on experimental data, recommendations of the combined algorithm usage are formulated. Based on the data obtained in a computational experiment (in range from 30 to 45), it is recommended to use a combined algorithm for category III problems starting with  $n = 36$ , and for category II problems starting with  $n = 42$ .*

**Keywords:** Traveling Salesman Problem, branch and bound method, precomputed tour, combined algorithm, Lin–Kernighan–Helsgaun algorithm

**Acknowledgement:** This work was supported by the RFBR grant 18-07-00656.

DOI: 10.17587/it.27.3-8

### References

1. **Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C.** An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, pp. 972–989.

2. **Goloveshkin V. A., Zhukova G. N., Ulyanov M. V., Fomichev M. I.** Probabilistic Prediction of the Complexity of Traveling Salesman Problems Based on Approximating the Complexity Distribution from Experimental Data, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, iss. 7, pp. 1296–1310.

3. **Ulyanov M. V., Fomichev M. I.** Resource characteristics of ways to organize a decision tree in the branch-and-bound method for the traveling salesmen problem, *Business Informatics*, 2015, no. 4(34), pp. 38–46.

4. **Ulyanov M. V., Fomichev M. I.** Approaches to Design Search Decision Tree in the Branch and Bound Method for the Asymmetric Traveling Salesman Problem, *Informacionnie Tekhnologii*, 2018, no. 11, vol. 24, pp. 698–704, DOI: 10.17587/it.24.698-704 (in Russian).

5. **Ulyanov M. V., Fomichev M. I.** Comparative Analysis of the Branch and Bound Method Combinations with Metaheuristic Algorithms for Solving the Asymmetric Traveling Salesman Problem, *Informacionnie Tekhnologii*, 2019, vol. 25, no. 10, pp. 590–595, DOI 10.17587/it.25 (in Russian).

6. **Zhukova G. N., Ulyanov M. V., Fomichev M. A.** Hybrid Exact Algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem: Construction and a Statistical Study of Computational Efficiency, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 11, pp. 2054–2067, DOI: 10.1134/S0005117919110092

7. **Lin S., Kernighan B. W.** An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem, *Operations Research*, 1973, vol. 21, no. 2, pp. 498–516.

8. **Helsgaun K.** An effective implementation of the Lin–Kernighan traveling salesman heuristic, *European Journal of Operational Research*, 2000, vol. 126, no. 1, pp. 106–130.

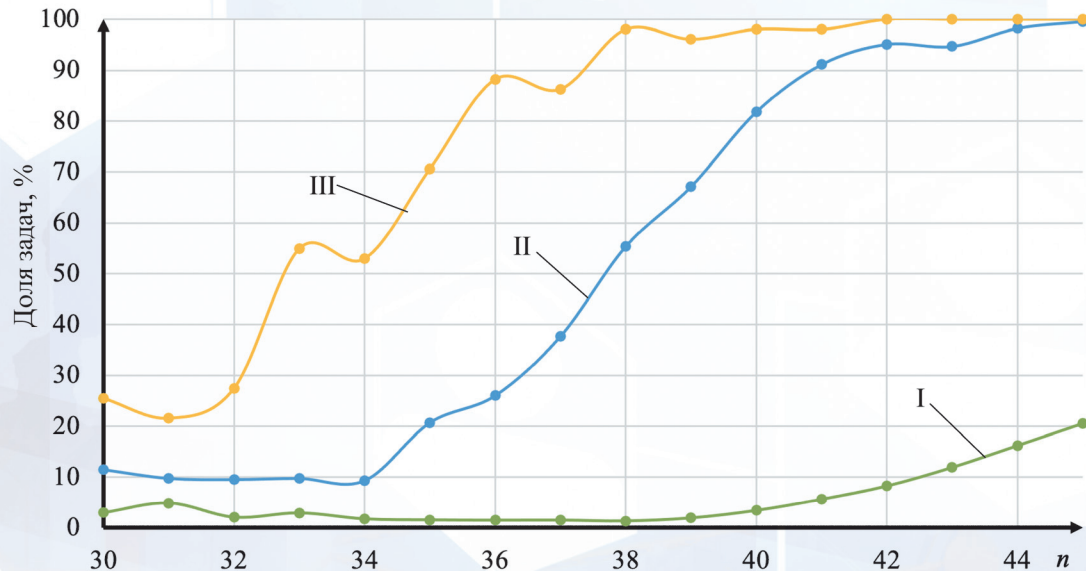
9. **Helsgaun K.** An extension of the Lin–Kernighan–Helsgaun TSP solver for constrained traveling salesman and vehicle routing problems, *Technical Report*, Roskilde, Roskilde University, 2017.

10. **Jonker R., Volgenant T.** Transforming asymmetric into symmetric traveling salesman problems, *Operations Research Letters*, 1983, no. 2, pp. 161–163.

11. **Fomichev M. I.** One Characteristic of the Individual Traveling Salesman Problem, *Tezisy XX Vserossijskoj konferencii molodyh uchonyh po matematicheskomu modelirovaniyu i informacionnym tekhnologiyam. g. Novosibirsk, Rossiya, 28 oktyabrya — 1 noyabrya*, pp. 86–87 (in Russian).

Рисунок к статье М. В. Ульянова, М. И. Фомичёва

## «ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ АСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА»



Доля задач, для которых алгоритм  $ARS_{LKH}$  эффективней в разрезе соответствующей категории