МОДЕЛИРОВАНИЕ
MODELING

УДК 517.97 DOI: 10.17587/it.26.387-393

Н. П. Деменков, канд. техн. наук, доц., e-mail: dnp@bmstu.ru,
Е. А. Микрин, д-р. техн. наук, проф.,
И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф., e-mail: intelsyst@mail.ru,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Часть 2. Полумарковские процессы[1]

Рассмотрена немарковская модель случайного процесса, в которой на вход системы поступает простейший поток, а длительность между состояниями распределена по произвольному закону. Составлено уравнение связи полумарковского процесса с нечеткими и четкими состояниями. Приведены различные частные случаи такой связи, когда заданные треугольные функции принадлежностей нечетких состояний модифицируются в их единичные аналоги, а ядра интегральных уравнений представляются показательным распределением. Описан процесс восстановления как частный случай полумарковского процесса и показано появление нечеткого интегрального уравнения.

Ключевые слова: *полумарковский процесс, нечеткие состояния процесса, нечеткое интегральное уравнение*

Введение

Марковские процессы занимают важное место в теории и практике прикладных дисциплин в технике, таких как теория надежности, массового обслуживания, теория восстановления, теория разрывных процессов и других. Во всех этих случаях используется простейшая модель, когда входящие потоки являются пуассоновскими, а длительность между соседними событиями потока, являющаяся случайной величиной, имеет экспоненциальное распределение. При таком представлении удается получить сравнительно простые марковские процессы и их вероятностные и числовые характеристики.

Однако с появлением более сложных систем возникла задача представления марковской модели в виде единичной модели, объединяющей простейшие марковские системы, что привело к постановке новых более сложных задач и к возникновению немарковских моделей. Одной из них является полумарковская модель, в которой на вход системы поступает простейший поток событий, а длительность между событиями распределена по произвольному закону [1—4].

Главная задача в этом случае состоит в нахождении элементов переходной матрицы состояний модели, каждый элемент которой представляется линейным интегральным уравнением Фредгольма II рода типа свертки относительно функции распределения длительности между событиями. Это приводит к линейной системе соответствующих интегральных уравнений, решение которой по методу преобразования Лапласа дает искомую функцию. Если число состояний модели равно n, то очевидно, что размерность системы интегральных уравнений будет равна n^2.

При значительном n возникают сложности в нахождении стационарных режимов, определении начальных и центральных моментов и других характеристик. Один из способов уменьшения размерности модели, приводящего к упрощению вычислений, состоит в ведении нечетких состояний, которые объединяют исходные состояния путем использования лингвистических термов типа "низкая", "средняя", "высокая" и т.п. размерности.

Впервые нечеткие термы были использованы при решении задачи принятия решений для марковских моделей, которые возникают в исследовании операций [5, 6]. Теория, предложенная в работе [5], использовалась для ана-

[1]Часть 1 опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", 2020, т.21, № 6.

лиза функционирования импульсной системы автоматической оптимизации [7—10] методами марковских цепей с нечеткими состояниями. Идея уменьшения размерности путем введения в марковской цепи нечетких состояний реализована в дискретно-непрерывной марковской модели, представляемой уравнениями Колмогорова [11]. В этом случае используется факт близости разностного уравнения, представляющего цепи, и соответствующего дифференциального уравнения.

Интегральные уравнения, которые появляются в полумарковских процессах, широко применяются в моделях традиционной математики, например, при доказательстве теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений, при представлении модели системы управления, охваченной обратной связью, при описании систем управления при воздействии на них возмущений и в других случаях.

Для решения интегральных уравнений используются приближенные и точные методы типа тейлоровской аппроксимации, приближение вырожденными ядрами, приближения Галеркина, Чебышева, наименьших квадратов и др. [12—16]. Применительно к нашей задаче представления переходной матрицы в виде системы линейных уравнений Фредгольма II рода типа свертки и ее решения используется метод преобразования Лапласа.

Целью настоящей работы является рассмотрение задачи о преобразовании переходной матрицы случайных переменных длительности между соседними событиями полумарковского процесса с четкими состояниями в процесс с нечеткими состояниями для стационарного случая, когда время процесса стремится в бесконечность; исследование частных случаев процесса для различных типов его ядер, а также формулировка некоторых типовых задач для полумарковских процессов с нечеткими состояниями.

Новизна предлагаемой работы состоит в разработке методики представления традиционного полумарковского процесса в процесс с нечеткими состояниями, что позволяет упростить вычисления его характеристик и представление их в нечетких термах, обеспечивающих простоту интерпретации.

1. Постановка задачи

Пусть имеем систему $X(t)$, которая в каждый момент времени $t = t_i$, $i = \overline{1, n}$, может находиться в конечном числе фазовых состояний $X(t_i) = Y_i$:

$$X(t = t_1) = X_1, \ldots, X(t = t_n) = X_n,$$

и одношаговые вероятности $p_{ij}(1)$ перехода из состояния x_i в X_j, задаваемые матрицей

$$P(1) = \{p_{ij}(1)\}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Далее полагается, что процесс $X(t = t_m) = X_m$, $m = \overline{1, n}$, определяет марковскую однородную цель, в которой поток событий имеет пуассоновское распределение. Сопоставим каждому ненулевому элементу $p_{ij}(1)$ переходной матрицы $P(1)$ случайную величину T_{ij} с неизвестной априори функцией распределения $F_{ij}(t) = F_{ij}(\tau < t)$ или плотностью вероятности $f_{ij}(t)$. В физических системах T_{ij} обычно трактуется как время ожидания системой $X(t)$, находящейся в состоянии X_i, до ее перехода в состояние X_j.

Согласно теории полумарковских процессов [2] при неизвестной $F_{ij}(t)$ элементы $\Phi_{ij}(t)$ переходной матрицы условных одношаговых вероятностей

$$\Phi(t) = \{\Phi_{ij}(t)\} = \{P(X(t) = X_i | X(t) = X_j)\}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

находятся из системы линейных интегральных уравнений Фредгольма типа свертки:

$$\Phi_{ij}(t) = \delta_{ij}\Psi_i(t) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \int_0^t f_{ij}(\tau)\Phi_{ij}(t-\tau)d\tau, \; i, j = \overline{1, n},$$

$$\Psi_i(t) = 1 - F_i(t),$$

$$F_i(t) = P\{t_i < t\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(1) F_{ij}(t);$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

В краткой форме эти уравнения могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$\Phi(t) = \Psi(t) + (P \otimes f)\Phi(t). \qquad (1)$$

Здесь используются следующие обозначения: $\Phi(t) = \{\Phi_{ij}(t)\}$, $P = \{p_{ij}\}$; $f = \{f_{ij}\}$ — квадратные матрицы размерности $n \times n$; $\Psi(t) = \{\delta_{ij}\Psi_i(t)\}$ — диагональная матрица; $\otimes$ — специальный тип умножения матриц, когда $E = P \otimes f \Rightarrow e_{ij} = p_{ij} f_{ij}$.

В этих условиях необходимо решить следующие задачи:

1.1. По матрице $\Phi(t)$ получить матрицу $\Phi^f(t)$ с нечеткими состояниями.

1.2. Для найденной матрицы $\Phi^f(t)$ определить остальные нечеткие состояния.

1.3. Рассмотреть частные случаи задания ядра интегрального уравнения.

2. Методы решения уравнения с нечеткими состояниями

Для всех перечисленных задач по п. 1.1—1.3 используется известное соотношение между четкими и нечеткими состояниями марковского процесса [5], преобразование Лапласа для четких переменных [17] и решение интегральных уравнений с известными типами их ядер в виде переходных вероятностей: дельта, показательная и константы.

2.1. Получение нечеткой матрицы с нечеткими состояниями

Для решения задачи 1.1 имеем с точностью до обозначений связь нечетких и четких состояний в виде [5]

$$\Phi^f(t) = \Delta\Gamma^{\mathrm{T}}\Phi(t)\Gamma, \qquad (2)$$

где $\Phi(t)$ — квадратная матрица с элементами $\Phi_{ij}(t)$, определяемыми по соотношению (1), $\dim\Phi(t) = n \times n$; $\Gamma = \{r(X_j^f)\}$ — прямоугольная матрица связи четких $j = \overline{1, n}$ и нечетких $j = \overline{1, m} < n$ состояний посредством заданных функций принадлежностей $r^f(X_j)$, $\dim\Gamma = (n \times m)$; $\Delta = \mathrm{diag}\Delta = \{\Delta_i\}$ — диагональная матрица с элементами, зависимыми от четких равновероятных (с вероятностью n^{-1}) начальных условий, $\dim\Delta = m \times m$; $\Phi^f(t)$ — переходная квадратная матрица нечетких состояний, $\dim\Phi^f(t) = m \times m$, $m < n$.

Для уменьшения громоздких преобразований и вычислений положим $n = 3$, $m = 2$, дискретные нечеткие множества задаем треугольными функциями принадлежностей:

$$r(X_i^f) = (1 \mid X_1 + 0{,}5 \mid X_2 + 0 \mid X_3);$$
$$r(X_i^f) = (0 \mid X_1 + 0{,}5 \mid X_2 + 1 \mid X_3),$$

начальные условия в виде равновероятных событий с вероятностью $n^{-1} = 1/3$, тогда выражение (2) будет иметь вид

$$\Phi^f(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{f_1}^{-1} & 0 \\ 0 & m_{f_2}^{-1} \end{pmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}}_{\Gamma^{\mathrm{T}}} \times$$
$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & \Phi_{33}(t) \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Gamma},$$

где

$$m_{f_1}^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{3} r_{f_1}(X_i)\right]^{-1} = [1 + 0{,}5 + 0]^{-1} = 2/3;$$
$$m_{f_2}^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{3} r_{f_2}(X_i)\right]^{-1} = [0 + 0{,}5 + 1]^{-1} = 2/3.$$

В результате вычислений получим переходную матрицу $\Phi^f(t)$ процесса с нечеткими состояниями X_i^f, $i = 1, 2$:

$$\Phi^f(t) = \begin{array}{c|c} X_1^f \quad X_2^f & \\ \hline \begin{pmatrix} \Phi_{11}^f & \Phi_{12}^f \\ \Phi_{21}^f & \Phi_{22}^f \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X_1^f \\ X_2^f \end{array} \end{array},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^f(t) &= 2/3[\Phi_{11}(t) + 0{,}5(\Phi_{12}(t) + \\ &\quad + \Phi_{21}(t)) + 0{,}25\Phi_{22}(t)]; \\ \Phi_{12}^f(t) &= 2/3[\Phi_{13}(t) + 0{,}5(\Phi_{12}(t) + \\ &\quad + \Phi_{23}(t)) + 0{,}25\Phi_{22}(t)]; \\ \Phi_{21}^f(t) &= 2/3[\Phi_{31}(t) + 0{,}5(\Phi_{21}(t) + \\ &\quad + \Phi_{32}(t)) + 0{,}25\Phi_{22}(t)]; \\ \Phi_{22}^f(t) &= 2/3[\Phi_{33}(t) + 0{,}5(\Phi_{23}(t) + \\ &\quad + \Phi_{32}(t)) + 0{,}25\Phi_{22}(t)]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $\Phi_{ij}(t)\,(i, j) = \overline{1, 3}$ — элементы заданной переходной матрицы $\Phi(t)$ процесса с четкими состояниями X_i, $i = \overline{1, 3}$, а $\Phi_{ij}(t)$ — интегральные уравнения (1).

Аналитическое решение системы интегральных уравнений (1) получается путем применения преобразования Лапласа (L):

$$\begin{aligned} &L[\Phi(t)] = L[\Psi(t) + (P \otimes f)\Phi(t)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi^*(s) = \Psi^*(s) + [P \otimes f^*(s)]\Phi^*(s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi^*(s) = [I - P \otimes f^*(s)]^{-1}\Psi^*(s), \end{aligned} \qquad (4)$$

где I — единичная матрица.

Введем в рассмотрение векторы

$$c_1 = (1 \quad 0 \quad 0),\ c_2 = (0 \quad 1 \quad 0)^{\mathrm{T}},\ c_3 = (0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}},$$

тогда преобразование (4) в пространстве изображений будет иметь вид

$$\Phi^{f*}(s) = \{\Phi_{ij}^{f*}\},\ (i, j) = 1, 2, \qquad (5)$$

где

$$\Phi_{11}^{f*}(s) = (2/3)\,[c_1^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_1 + 0{,}5(c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2 +$$
$$+ c_2\Phi^*(s)c_1) + 0{,}25c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2];$$

$$\Phi_{12}^{f*}(s) = (2/3)[c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2 + 0,5(c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2 + c_2\Phi^*(s)c_3) + 0,25c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2];$$

$$\Phi_{21}^{f*}(s) = (2/3)[c_3^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_3 + 0,5(c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2 + c_2\Phi^*(s)c_3) + 0,25c_2^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2];$$

$$\Phi_{22}^{f*}(s) = (2/3)[c_3^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_3 + 0,5(c_2\Phi^*(s)c_3 + c_2\Phi^*(s)c_1) + 0,25c_3^{\mathrm{T}}\Phi^*(s)c_2].$$

2.2. Определение стационарного режима

Для матрицы с нечеткими состояниями находится стационарный режим, когда $t \to \infty$ ($s \to 0$):

$$\Phi^f(\infty) = \lim_{t\to\infty}\Phi^f(t) = \lim_{s\to 0} s\Phi^f(s).$$

Как следует из выражения (5), элементы $\Phi^{f*}(s)$ зависят от $\Phi^*(s)$, поэтому для нахождения $\lim s\Phi^{f*}(s)$ первоначально ищется $\lim s\Phi^*(s)$, а затем осуществляется переход к исходному пределу. Из (5) имеем [2]:

$$\Phi(\infty) = \lim_{s\to 0} s\Phi^*(s) = \lim_{s\to 0}\{s[I - P\otimes f^*(s)]^{-1}\psi^*(s)\} = \lim_{s\to 0}\{s[I - P\otimes f^*(s)]^{-1}\}\lim_{s\to 0}\psi^*(s). \qquad (6)$$

Находятся пределы каждого из сомножителей. Для диагональной матрицы $\psi(s)$ из уравнения (1) имеем:

$$\psi(t) = \{\psi_i(t)\} = \left\{\int_t^\infty \omega_i(t)dt = P(T_i > 1)\right\},$$

$$\omega_i(t) = \sum_{j=1}^n p_{ij} f_{ij}(t),$$

поэтому преобразование Лапласа дает

$$L[\psi(t)] = \{L[\psi_i(t)]\} = \{s^{-1}[1 - \omega_i^*(s)]\} = s^{-1}[I - W(s)],$$

отсюда

$$\lim_{s\to 0}\psi^*(s) = \lim_{s\to 0}\{s^{-1}[I - W^*(s)]\}.$$

Этот предел дает неопределенность типа %. Используя правило Лопиталя раскрытия неопределенности, находим

$$\lim_{s\to 0}\psi^*(s) = \frac{\partial}{\partial s}\psi^*(s=0) = T,$$

где T — диагональная матрица среднего $<\cdot>$ времени ожидания в каждом из состояний:

$$<T_i> = \int_0^\infty t\omega_i(t)dt = \sum_{j=1}^n p_{ij}<T_i>.$$

Для первого сомножителя в соотношении (6) имеем цепочку эквивалентных соотношений:

$$H(s) = s[I - P\otimes f^*(s)]^{-1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow H(s)[I - P\otimes f^*(s)] = sI \Leftrightarrow \Leftrightarrow H(s) - H(s)\cdot P\otimes f^*(s) = sI, \qquad (7)$$

поэтому

$$\lim_{s\to 0} H(s) - \lim_{s\to 0} H(s)\cdot \lim_{s\to 0}[P\otimes f^*(s)] = \lim_{s\to 0} sI.$$

Далее учитывая, что значения пределов

$$\lim_{s\to 0} sI = 0, \lim_{s\to 0} f^*(s) = \lim_{s\to 0}\{L[f_{ij}^*(t)]\} = \lim_{s\to 0}\{\int_0^\infty \mathbf{e}^{-st} f_{ij}(t)dt\} = E,$$

где E — матрица, все элементы которой равны единице, и, применяя определенную выше операцию $\otimes$ умножения матриц, будем иметь:

$$\lim_{s\to 0} H(s) - H(s=0)\cdot P = 0 \Leftrightarrow \lim_{s\to 0} H(s) = H(0)\cdot P.$$

Таким образом, из соотношения (6) получим

$$\Phi^*(t\to\infty) = \{\Phi_{ij}(\infty)\} = H(0)P\cdot T. \qquad (8)$$

Теперь согласно уравнению для финальных вероятностей $\Phi(\infty)$ вложенной цепи Маркова имеем

$$\Phi_i(\infty)P(1) = \Phi_i(\infty), \quad \sum_{i=1}^3 \Phi_i(\infty) = 1.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (8) показывает, что в качестве решения (7) может быть использована квадратная матрица $H(0)_{(3\times 3)}$, строки $H_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})$ которой пропорциональны матрице-строке $P = (p_1, p_2, p_3)$ [2]:

$$H_i = k_i P, \ k_i \in R, \ i = \overline{1,3},$$

поэтому (6) с учетом (7) будет иметь вид

$$\Phi(t\to\infty) = H(s=0)T.$$

Это означает, что элементы матрицы $\Phi(t\to\infty)$ удовлетворяют соотношению

$$\Phi_{ij}(\infty) = h_{ij}(0)<T_j> = k_i p_j <T_j>. \qquad (9)$$

Коэффициенты k_i находятся из условия нормировки ортогональных вероятностей:

$$\sum_{j=1}^{3}\Phi_{ij}(\infty)=k_i\sum_{j=1}^{3}p_j<T_j>\equiv 1,$$

откуда:

$$k_i=\left[\sum_{j=1}^{3}p_j<T_j>\right]^{-1}.$$

В результате из соотношения (9) получаем

$$\{\Phi_{ij}(\infty)\}=\left\{\left[\sum_{j=1}^{3}p_j<T_j>\right]^{-1}p_j<T_j>\right\}=$$

$$=\{\Phi_{ij}^{*}(s=0)\}=\Phi^{*}(s=0),\ \ i,j=\overline{1,3},$$

где

$$<T_j>=\int_0^{\infty}t\omega_j(t)dt,\ \omega_j(t)=\sum_{i=1}^{3}p_{ij}f_{ij}(t),\ j=\overline{1,3},$$

что позволяет из выражения (5) определить матрицу стационарных вероятностей $\Phi^{f^*}(s=0)$ для нечетких $f=2$ состояний.

2.3. Задание ядра интегрального уравнения

Рассмотрим частные случаи заданий ядра интегрального уравнения с нечеткими состояниями и функциями принадлежностей $r(X_j^f)$, $j=\overline{1,3}$.

Пусть имеем:

$$r(X_1^f)=(1/X_1+0/X_2+0/X_3);$$
$$r(X_2^f)=(0/X_1+1/X_2+0/X_3);$$
$$r(X_3^f)=(0/X_1+0/X_2+1/X_3),$$

тогда матрицы Г, $\Gamma^{\text{т}}$ будут равны:

$$\Gamma=\Gamma^{\text{т}}=I_{(3\times 3)}.$$

Матрица Δ в этом случае будет равна единичной $\Delta=I_{(3\times3)}$, поэтому очевидно, что $\Phi^f(t)=\Delta\Gamma^{\text{т}}\Phi(t)\Gamma=I\Phi(t)I=\Phi(t)$.

А. Если теперь положить, что ядро уравнения f_{ij} равно

$$f_{ij}(t)=\delta(t-1)\Rightarrow f_{ij}^{*}(s)=\mathbf{e}^{-s},$$

то далее, как показано в работе [2], получим

$$\Phi(t)=P^n,\ \ n\leqslant t\leqslant n+1.$$

Таким образом, полумарковский процесс обобщает цепь Маркова.

Б. Если теперь положить $f_{ij}(t)=\vartheta\mathbf{e}^{-\vartheta t}\Rightarrow$ $\Rightarrow f_{ij}^{*}(s)=\vartheta/(s+\vartheta)$, тогда [1]

$$\Phi(t)=\exp[-\vartheta(I-P)t].$$

Полумарковский процесс обобщает дискретно-непрерывный марковский процесс.

В. Модель процесса восстановления часто используется для представления системы надежности, в которой отказавший элемент заменяется новым, например, в задачах управления водными ресурсами, в задаче о счетчиках при изучении космических лучей и других [18, 19].

Принято различать следующие типы процессов [2]: простые, модифицированные и стандартные. К модифицированному процессу относится альтернирующий процесс восстановления, который характеризуется наличием процесса, получаемого из двух взаимонезависимых процессов. Первый из них начинается с процесса 1-го типа, в конце его имеется событие 1-го типа, а затем за ним следует процесс 2-го типа, в конце которого появляется событие 2-го типа, затем снова 1-й тип, который сменяется вторым и т.д. Полагают, что смена типов может быть представлена цепью Маркова с двумя состояниями и с известной матрицей перехода.

Покажем, что полумарковский процесс при определенных условиях представляет собой альтернирующий процесс восстановления [2].

Имеем:

$$P=\{p_{ij}\}=\begin{array}{cc} X_1 & X_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}\end{array}\begin{array}{l}\\ X_1\\ X_2\end{array},$$

плотности вероятностей соответствующих времен ожидания:

$$f_{12}(t)=\vartheta_2\exp(-\vartheta_2 t)\leftrightarrow f_{12}^{*}(s)=\vartheta_2(s+\vartheta_2)^{-1};$$
$$f_{21}(t)=\vartheta_1\exp(\vartheta_1 t)\leftrightarrow f_{21}^{*}(s)=\vartheta_1(s+\vartheta_1)^{-1}.$$

В этих условиях из основного уравнения полумарковского процесса (4) будем иметь:

$$\Phi^{*}(s)=s^{-1}\{[I-P\otimes f^{*}(s)]^{-1}\psi(s)\}=$$

$$=s^{-1}\left\{\left[\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{I}-\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}0 & f_{12}^{*}(s)\\ f_{21}^{*}(s) & 0\end{pmatrix}}_{f^{*}(s)}\right]^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\underbrace{\begin{pmatrix}1-f_{12}^{*}(s) & 0\\ 0 & 1-f_{21}^{*}(s)\end{pmatrix}}_{\psi^{*}(s)}\right\}=$$

$$=[s(s+\vartheta_1+\vartheta_2]^{-1}\begin{pmatrix}s+\vartheta_1 & \vartheta_2\\ \vartheta_1 & s+\vartheta_2\end{pmatrix},$$

отсюда получим:

$$Z^{-1}[\Phi^*(s)] = \Phi(t) = (\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \vartheta_1 + \vartheta_2 \exp[-(\vartheta_1 + \vartheta_2)t] & \vartheta_2(1 - \exp[-(\vartheta_1 + \vartheta_2)t]) \\ \vartheta_1(1 - \exp[-(\vartheta_1 + \vartheta_2)t]) & \vartheta_2 + \vartheta_1 \exp[-(\vartheta_1 + \vartheta_2)t] \end{pmatrix}.$$

При $t = 0$ и $t \to \infty$ соответственно имеем:

$$\Phi(t = 0) \equiv P; \ \Phi(t \to \infty) =$$
$$= \begin{pmatrix} \vartheta_1(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1} & \vartheta_2(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1} \\ \vartheta_1(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1} & \vartheta_2(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= (\Phi_1, \Phi_2)^{\mathrm{T}} \big|_{\Phi_2 = \Phi_1} = \Phi_1.$$

Это означает, что в заданных условиях полумарковский процесс обобщает альтернирующий процесс восстановления для двух типов процессов X_1, X_2, которые сменяют друг друга в соответствии с матрицей P с заданными стационарными вероятностями

$$\Phi_1 = (\vartheta_1(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1}, \vartheta_2(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-1}).$$

Г. Пусть теперь в соотношении (2) имеем:

$$r(X_1^f) = (1/X_1 + 0/X_2 + 0/X_3);$$
$$r(X_2^f) = r(X_3^f) = (0/X_1 + 0/X_2 + 0/X_3);$$

тогда из (1) получим $(i, j) = 1$:

$$\Phi_{11}^f(t) = \Phi_{11}(t) - \delta_{11}\psi_1(t) + p_{11}\int_0^t f_{11}(\tau) \cdot \Phi(t - \tau)d\tau$$

или для упрощения записи, опуская индексы и учитывая, что $f_{11}(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ зависят от $\Phi_{11}^f(\cdot)$, а $\delta_{11} = 1$, будем иметь:

$$\Phi(t) = \psi(t) + p\int_0^t f(\tau) \cdot \Phi(t - \tau)d\tau.$$

Это означает, что исходное четкое матричное интегральное уравнение превращается в одномерное, которое является нечетким, так как $\Phi(t) = \Phi^f(t)$, где f — индекс нечеткости. Для его упрощения используются основные положения теории нечетких интегральных уравнений: определение нечеткого уравнения; существование и единственность его решения; методы решения и другие вопросы [12—16]. Далее, так как в результате получается нечеткое интегральное уравнение свертки, то для его решения обычно используется нечеткое преобразование Лапласа, теория и практика которого изложены в работах [20, 21].

Заключение

Рассмотрена немарковская модель случайного процесса, в которой на вход системы поступает простейший поток, а длительность между состояниями распределена по произвольному закону. Составлено уравнение связи полумарковского процесса с нечеткими и четкими состояниями. Приведены различные частные случаи такой связи, когда заданные треугольные функции принадлежностей нечетких состояний модифицируются в их единичные аналоги, а ядра интегральных уравнений представляются показательным распределением. Описан процесса восстановления как частный случай полумарковского процесса и показано появление нечеткого интегрального уравнения.

Рассмотренная тема о нечетких состояниях случайного процесса весьма актуальна применительно к развитию общей теории нечетких случайных процессов, в частности, в модификации четкого полумарковского процесса в его нечеткий аналог. Это позволило с единой позиции представить непрерывный и дискретный процессы восстановления в нечеткой трактовке.

Другой задачей, связанной с нечеткими процессами, является рассмотрение нечетких дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, которые появляются в виде задачи о нечеткой реализации процесса при нахождении нечеткой траектории некоторой частицы

Список литературы

1. **Саати Т. Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971. 520 с.
2. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
3. **Тихоненко О. М.** Модели массового обслуживания в информационных системах. Минск: Технопринт, 2003. 326 с.
4. **Ивченко Г. И. Каштанов В. А., Коваленко И. Н**. Теория массового обслуживания. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2012. 304 с.
5. **Bhattacharyya Malay.** Fuzzy markovian decision process // Fuzzy sets and systems. 1998. N. 99. P. 273—282.
6. **Волков И. К., Загоруйко Е. А.** Исследование операций. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 435 с.
7. **Растригин Л. А.** Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974. 632 с.
8. **Медведев Г. А., Тарасенко В. П.** Вероятностные методы исследования экстремальных систем. М.: Наука, 1967. 456 с.
9. **Казакевич В. В. Родов Н. Б.** Системы автоматической оптимизации. М.: Энергия, 1977. 280 с.
10. **Романовский И. В.** Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977. 352 с.
11. **Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. Н.** Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Часть 1. Марковские процессы // Информационные технологии. 2020. Т. 26, № 6. С. 323—334.

12. **Park J. Y. Jeong J. U.** On existence and uniqueness of solution of fuzzy Volterra-Fredholm integral equation // Fuzzy sets and systems. 2000. Vol. 115. P. 425—431.

13. **Jahantigh M., Allahviaranloo T., Otadi M.** Numerical solution of fuzzy integral equation // Applied mathematical sciences. 2008. Vol. 2, N. 1. P. 33—46.

14. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems // Fuzzy Sets and Systems. 1998. N. 96. P. 201—209.

15. **Jafarian A., S. Measoomy Nia, Tavan S., Banifazel M.** Solving linear Fredholm fuzzy integral equations systems by Taylor expansion method // Applied mathematical sciences. 2012. Vol. 6, N. 83. P. 4103—4117.

16. **Jafarian A., S. Measoomy Nia, Tavan S.** A numerical scheme to solve fuzzy linear Volterra integral equations systems // Jornal of applied mathematics. Vol. 2012, art ID 216923. 17 p.

17. **Деменков Н. П., Микрин Е. А.** Управление в технических системах. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. 452 с.

18. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967. 432 с.

19. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967. 753 с.

20. **Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.** Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Часть 1 // Информационные технологии. 2017. Т. 23, № 4. С. 251—285.

21. **Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.** Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Часть 2 // Информационные технологии. 2017. Т. 23, № 5. С. 362—369.

N. P. Demenkov, Ph.D. Tech. Sciences, Associate Professor, e-mail: dnp@bmstu.ru,
E. A. Mikrin, Dr. Tech. Sciences, Professor,
I. A. Mochalov, Dr. Tech. Sciences, Professor, e-mail: intelsyst@mail.ru,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Markov and Semi-Markov Processes with Fuzzy States. Part 2. Semi-Markov Processes

A non-Markov model of a random process is considered, in which a simple stream arrives at the input of the system, and the duration between states is distributed according to an arbitrary law. The equation of the connection of the semi-Markov process with fuzzy and clear states is compiled. Various particular cases of such a connection are given, when the given triangular membership functions of fuzzy states are modified into their unit analogues, and the kernels of the integral equations are represented by an exponential distribution. A description of the recovery process as a special case of the semi-Markov process and the appearance of a fuzzy integral equation is presented.

Keywords: *semi-Markov process, fuzzy states of the process, fuzzy integral equation*

DOI: 10.17587/it.26.387-393

References

1. **Saati T. L.** E`lementy` teorii massovogo obsluzhivaniya i ee prilozheniya, Moscow, Sov. radio, 1971, 520 p. (in Russian).

2. **Tixonov V. I., Mironov M. A.** Markovskie processy, Moscow, Sov. Radio, 1977, 488 p. (in Russian).

3. **Tixonenko O. M.** Modeli massovogo obsluzhivaniya v informacionny`x sistemax, Minsk, Texnoprint, 2003. 326 p. (in Russian).

4. **Ivchenko G. I. Kashtanov V. A., Kovalenko I. N.** Teoriya massovogo obsluzhivaniya, Moscow, Knizhny`j dom "LIBROKOM", 2012, 304 p. (in Russian).

5. **Bhattacharyya Malay.** Fuzzy markovian decision process, *Fuzzy sets and systems*, 1998, no. 99, pp. 273—282.

6. **Volkov I. K., Zagorujko E. A.** Issledovanie operacij, Moscow, Publishing house of MGTU im. N.E`. Baumana, 2000, 435 p. (in Russian).

7. **Rastrigin L. A.** Sistemy` e`kstremal`nogo upravleniya, Moscow, Nauka, 1974, 632 p. (in Russian).

8. **Medvedev G. A., Tarasenko V. P.** Veroyatnostny`e metody` issledovaniya e`kstremal`ny`x system, Moscow, Nauka 1967, 456 p. (in Russian).

9. **Kazakevich V. V. Rodov N. B.** Sistemy` avtomaticheskoj optimizacii, Moscow, E`nergiya, 1977, 280 p. (in Russian).

10. **Romanovskij I. V.** Algoritmy` resheniya e`kstremal`ny`x zadach, Moscow, Nauka, 1977, 352 p. (in Russian).

11. **Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. N.** Markovskie i polumarkovskie processy` s nechetkimi sostoyaniyami. Chast` 1. Markovskie processy`, *Informacionnye Texnologii*, 2020, vol. 26, no. 6, pp. 323—334 (in Russian).

12. **Park J. Y., Jeong J. U.** On existence and uniqueness of solution of fuzzy Volterra-Fredholm integral equation, *Fuzzy sets and systems*, 2000, 115, pp. 425—431.

13. **Jahantigh M., Allahviaranloo T., Otadi M.** Numerical solution of fuzzy integral equation, *Applied Mathematical Sciences*, 2008, vol. 2, no. 1, pp. 33—46.

14. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, no. 96, pp. 201—209.

15. **Jafarian A. 1, S. Measoomy Nia, Tavan S., Banifazel M.** Solving linear Fredholm fuzzy integral equations systems by Taylor expansion method, *Applied Mathematical Sciences*, 2012, vol. 6, no. 83, pp. 4103—4117.

16. **Jafarian A., S. Measoomy Nia, Tavan S.** A numerical scheme to solve fuzzy linear Volterra integral equations systems, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2012, art ID 216923, 17 p.

17. **Demenkov N. P., Mikrin E. A.** Upravlenie v texnicheskix sistemax, Moscow, Publishing house of MGTU im. N.E`. Baumana, 2017, 452 p. (in Russian).

18. **Feller V.** Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i eyo prilozheniya. T. 1, Moscow, Mir, 1967, 432 p. (in Russian).

19. **Feller V.** Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i eyo prilozheniya. T. 2, Moscow, Mir, 1967, 753 p. (in Russian).

20. **Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. A.** Nechetkoe preobrazovanie Laplasa v zadachax nechetkogo matematicheskogo modelirovaniya. Chast` 1, *Informacionnye Texnologii*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 251—285 (in Russian).

21. **Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. A.** Nechetkoe preobrazovanie Laplasa v zadachax nechetkogo matematicheskogo modelirovaniya. Chast` 2, *Informacionnye Texnologii*, 2017, vol. 23, no. 5, pp. 362—369 (in Russian).