МОДЕЛИРОВАНИЕ
MODELING

УДК 517.97 DOI: 10.17587/it.26.323-334

Н. П. Деменков, канд. техн. наук, доц., e-mail: dnp@bmstu.ru,
Е. А. Микрин, д-р техн. наук, проф.,
И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф., e-mail: intelsyst@mail.ru,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Часть 1. Марковские процессы

Для дискретно-непрерывного случайного процесса Маркова сформулирована и решена задача об уменьшении размерности матричной задачи Коши для матричного уравнения Колмогорова путем введения нечетких состояний с использованием близости этого уравнения матричному разностному уравнению. Решены простейшие задачи надежности и массового обслуживания, с помощью которых продемонстрирована предложенная методика применения техники введения нечетких состояний, позволяющая уменьшить размерность исходной задачи.

Ключевые слова: *нечеткие состояния процесса Маркова, модели надежности и массового обслуживания с нечеткими состояниями*

Введение

Случайные процессы играют важное значение при рассмотрении различных математических моделей для многих физических, биологических и технических систем. Среди множества их типов особое место занимают марковские случайные процессы, поскольку математический аппарат для них хорошо разработан, а основанные на них модели для анализа реальных процессов являются достаточно простыми. Аппарат теории марковских процессов широко используется в различных прикладных направлениях науки и техники, таких как радиотехника, автоматика, теория надежности электронных устройств, теория массового обслуживания, физика, биология и др. Обычно случайные процессы являются одной из возможных математических моделей в представлении неопределенности в описании некоторых физических явлений. Для марковского случайного процесса полагается, что его модель может быть представлена в виде стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа относительно плотности вероятности процесса. В одномерном случае оно трансформируется в различные модификации: цепи, дискретно-непрерывные процессы, последовательности и одномерные непрерывные процессы, описываемые разностными, обыкновенными стохастическими дифференциальными уравнениями и т.д. [1, 2].

Такое представление неопределенности не является единственно возможными. В настоящее время для этих целей широко используется теория нечетких множеств, которая появилась по результатам работ Л. Заде. В частности, разработана теория решения нечетких систем линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) и их модификаций в виде полных систем и систем неполного ранга [3—5]. Отмечается, что НСЛАУ при определенных условиях имеют "сильные/слабые" решения. В работе [6] решена задача нечеткого оценивания по методам моментов, максимального правдоподобия и наименьших квадратов и показано появление "сильных/слабых" оценок. Создана теория решения нечеткой начальной задачи первого порядка [7, 8]. Показано, что при определенных условиях она имеет два типа решения — Buckley—Feuring (BF) и Seikkala (S). Решены нечеткие дифференциальные уравнения в частных производных первого и второго порядков, когда они могут быть трансформированы в уравнения первого порядка, и далее для них также могут быть получены два типа решений, упомянутые выше. Эта теория реализуется для синтеза нечеткого BF- и S-регуляторов и анализа нечеткой системы автоматической оптимизации (САО), реализованной на основе экстремального регулятора (ЭР) с запоминанием экстремума [9]. Показано, что нечеткая САО является многократной системой кратности континуум [10]. Для представления нечеткой начальной задачи n-го порядка используется производная Hukuhara и далее анализируются колебательные процессы в волновом твердотельном гироскопе [11]. В работах [12, 13] представлено нечеткое преобразование Лапласа, с помощью которого решаются нечеткие краевые задачи для дифференциального и интегрального уравнений. В работах [14—18] определяется нечеткая передаточная функция и даются нечеткие фазовые траектории для нечетких систем различных типов, с помощью которых решаются простейшие задачи устойчивости. Можно полагать, что перечисленные выше работы создают предпосылки в представлении элементов теории нечеткого управления, являющейся обобщением соответствующих классических разделов теории управления.

Для нечетких вероятностей, математической статистики, случайных процессов различных типов представлены алгоритмы управления в автоматизированных системах и анализ импульсных САО с помощью нечетких цепей Маркова [19].

Цель настоящей работы состоит в разработке методики, связывающей нечеткие и четкие состояния цепи Маркова для описания нечетких состояний дискретно-непрерывного процесса Маркова, которая реализуется для оценок надежности и систем массового обслуживания.

Новизна работы состоит в использовании известного соотношения для цепей Маркова [19, 20] при уменьшении размерности систем дифференциальных уравнений процесса Маркова путем введения для них нечетких состояний.

1. Постановка задачи

Пусть имеем разностные уравнения, представляющее четкую цепь Маркова:

$$P(n+1) = P(1)P(n), \quad P(0) = P_0, \quad EP(n) = 1, \quad (1)$$

где $P(1)$ — переходная матрица за один шаг для четких состояний цепи; $P(n)$ — вектор четких состояний цепи на n-м такте; $P(0)$ — вектор начальных условий; E — матрица, всен элементы которой равны 1.

Будем полагать, что переход к нечетким состояниям цепи (1) осуществляется путем задания соотношения [19]

$$P_f(1) = \Delta \Gamma^{\mathrm{T}} P(1)\Gamma, \quad (2)$$

где Γ — матрица функций принадлежностей; Δ — диагональная матрица, связанная с начальными условиями.

Для дискретно-непрерывного процесса Маркова, заданного векторным уравнением Колмогорова, уравнения имеют вид

$$\dot{P}(t) = \Lambda_k P(t), \; P(t=0) = P_0, \; EP(t) = 1, \quad (3)$$

где Λ_k — матрица уравнений Колмогорова с четкими состояниями; $P(t)$ — вектор вероятностей нахождения системы в четких состояниях; P_0 — вектор начальных условий.

Относительно задачи Коши для матричного уравнения Колмогорова и при любом векторе начальных состояний системы имеет место неотрицательность компонент решения, которое также удовлетворяет условию нормировки. Необходимо найти аналог (3) с нечеткими состояниями.

2. Метод решения

Метод решения состоит в приближенном равенстве четкого марковского дискретно-непрерывного процесса (3) и четкой цепи Маркова (1) при достаточно малом промежутке времени Δt. Действительно, из уравнений (1) следуют соотношения (3):

$$\begin{gathered} \dot{P}(t) = \Lambda_k P(t), \Rightarrow P(n+1) - P(n) = \\ = \Delta t \Lambda_k P(n) + 0(\Delta t) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(n+1) \simeq P(1)P(n), \; P(1) = I + \Delta t \Lambda_k, \end{gathered} \quad (4)$$

где I — единичная матрица.

Обратно, из соотношений (3) следуют уравнения (1):

$$\begin{gathered} P(n+1) = P(1)P(n) \Rightarrow P(n+1) - P(n) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(n+1) - P(n) = P(1)P(n) - P(n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{P}(t) = \Lambda_k P(t), \; \Lambda_k = [P(1) - I]\Delta t^{-1}. \end{gathered} \quad (5)$$

Очевидно, чем меньше будет шаг Δ_t, тем точнее будет равенство уравнений (1) и (3). В результате может быть сформулировано следующее правило получения нечетких состояний для дискретно-непрерывного марковского процесса.

2.1. По графу $\Sigma_{\text{д-н}}$ дискретно-непрерывного процесса записывается матрица состояний Δ_s и далее с использованием этой матрицы записывается векторное уравнение (3) с матрицей Δ_k. На основе полученной матрицы Δ_k и соотношений (4) находится матрица $P(1)$ за один шаг марковской цепи. Далее возможны следующие варианты.

2.2. *Вариант 1.* По найденному значению $P(1)$ из п. 2.1 задается матрица Δ начальных условий уравнения (1) и матрица Γ, связанная с дискретными функциями принадлежностей, задающие нечеткие состояния "f", и затем по соотношению (4) находится переходная матрица $P_f(1)$ за один шаг для нечетких состояний и далее с точностью до обозначений по разностному уравнению (1) находится $P(n)$.

2.3. *Вариант* 2. По $P_f(t)$ с учетом (5) находится матрица Λ_{fk} Колмогорова, которая задает модель дискретно-непрерывного процесса с нечеткими состояниями и затем по соотношениям (4) находится $P_f(t)$.

В зависимости от способа задания матриц Λ_s, Γ, Δ будем иметь различные типы нечетких моделей в представлении сложных систем.

3. Модель гибели—размножения с нечеткими состояниями

При анализе процессов изменения численности биологических популяций, распространения эпидемий, прогнозировании экономических показателей и других проблем широко используется четкая модель гибели—размножения (г—р), для которой на рис. 1 представлен граф $\Sigma_{\text{д-н}}$.

По графу записывается матрица Λ_s для четких состояний. На главной ее диагонали элементы $\lambda_{ii} = 0, i = \overline{1,n}$, а наддиагональные и поддиагональные элементы соответственно равны $\lambda_{i,i+1}, \lambda_{i+1,i}$, $i = \overline{1,n-1}$, поэтому Λ_s будет иметь вид

$$\Lambda_s = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_{n-1} & X_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \lambda_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1,n} & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{array}\right\} —$$

— четкие состояния.

В соответствии с известными правилами составления уравнений Колмогорова по матрице Λ_s получается матрица Λ_k в следующем виде [21, 22]:

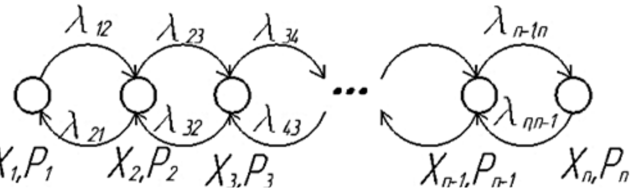

Рис. 1. Граф $\Sigma_{\text{д-н}}$ дискретно-непрерывного марковского процесса гибели—размножения с четкими состояниями $X = \{X_i\}_{i=1}^n$

$$\Lambda_k =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{32} & & 0 \\ & \lambda_{23} & -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) & \lambda_{31} & \\ & & & & \\ 0 & & & & \lambda_{n-1,n} - \lambda_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

Далее в соответствии с (4) по Λ_k записывается $P(1)$ путем использования соответствующих замен, поэтому будем иметь:

$$P(1) \simeq I + \Delta t \Lambda_k,$$

откуда с использованием соотношений (2), (4) получим матрицу нечетких состояний для $P_f(1)$:

$$P_f(1) = \Delta \Gamma^{\text{т}} (I + \Delta t \Lambda_k) \Gamma,$$

где элементы Γ, Δ определены ниже.

Пусть для четких состояний X_1, X_2,..., X_n уравнений Колмогорова задано $m < n$ нечетких состояний X_{f1}, X_{f2},..., X_{fm} с функциями принадлежностей $r(X_{fi})$, $i = \overline{1,m}$, $r \in [0;\ 1] \subset R$ для простоты треугольного типа, тогда для их α_p, $p = \overline{1,n}$, разрезов будем иметь матрицу $\Gamma_{(n \times m)}$ в следующем виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} r_{\alpha_n}(X_{f_1}) & r_{\alpha_n}(X_{f_2}) & \cdots & r_{\alpha_n}(X_{f_m}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{\alpha_1}(X_{f_1}) & r_{\alpha_1}(X_{f_2}) & \cdots & r_{\alpha_1}(X_{f_m}) \end{pmatrix}_{(n \times m)}.$$

Вектор P_0 начальных условий задается в виде

$$P_0 = (p_{10} = n^{-1}, \dots, p_{n0} = n^{-1}),$$

тогда диагональная матрица Δ в уравнении (2) будет иметь вид [16]

$$\Delta = \begin{pmatrix} m(X_{f_1}) & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & m(X_{f_m}) \end{pmatrix},$$

$$m(X_{f_1}) = \left[\sum_{i=1}^{n} r_{\alpha_i}(X_{f_1})\right]^{-1}, \dots, m(X_{f_m}) = \left[\sum_{i=1}^{n} r_{\alpha_i}(X_{f_m})\right]^{-1}.$$

Затем, как и ранее, используем для $P_f(1)$, с точностью до обозначений, соответствующую замену из (5) и получим:

$$\Lambda_{fk} = \Delta t^{-1}[P_f(1) - I].$$

Далее в соответствии с уравнением (3) запишем уравнение Колмогорова для нечетких состояний:

$$\dot{P}_f(t) = \Lambda_{fk} P_f(t);\ P_f(0) = P_{f0};\ EP_f(t) = 1.$$

Результаты, полученные относительно нечетких состояний для общей модели гибели—размножения, далее реализуются для их простейших типов, рассмотренных в теории надежности и массового обслуживания.

3.1. Простейшая модель надежности

Пусть техническая система, состоящая из двух однотипных контроллеров, банкоматов, станков, систем автоматического регулирования и т.д., имеет узлы состояний $X = \{X_i, p_i\}_{i=0}^{2}$, p_i — вероятности нахождения в четких состояниях X_i. На каждый из узлов воздействует простейший поток отказов с интенсивностью λ, из-за которого он находится в состоянии "отказа", обозначаемого (−), в функционировании. В промежутке между двумя соседними отказами узел работает безотказно за счет восстановления (ремонта) узла, который восстанавливается, обозначаемого (+), с интенсивностью μ. Поток восстановления также является простейшим.

Перенумеруем узлы системы в соответствии с табл. 1, в которой "i" узла обозначает число отказов.

Заметим, что номер узла "i" может также обозначать число (+) работающих узлов, тогда табл. 1 будет иметь иной вид.

В соответствии с табл. 1 граф $\Sigma_{\text{д-н}}$ (рис. 2) дискретно-непрерывного процесса гибели—размножения будет иметь матрицу λ_s четких состояний и матрицу λ_k уравнений Колмогорова:

$$\Lambda_s = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_0 & X_1 & X_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \\ 0 & 2\lambda & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{array};$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_{00}^k = -2\mu & \lambda_{01}^k = \lambda & \lambda_{02}^k = 0 \\ \lambda_{10}^k = 2\mu & \lambda_{11}^k = -(\lambda + \mu) & \lambda_{12}^k = 2\lambda \\ \lambda_{20}^k = 0 & \lambda_{21}^k = \mu & \lambda_{22}^k = -2\lambda \end{pmatrix}.$$

После замены $P(1) = I + \Delta t \Delta_k$ элементов матриц λ_k получим переходную матрицу $P(1)$ четкой цепи Маркова:

$$P(1) = I + \Delta t \Lambda_k =$$
$$= \begin{pmatrix} -2\mu\Delta t + 1 & \lambda\Delta t & 0 \\ 2\mu\Delta t & -(\lambda + \mu)\Delta t + 1 & 2\lambda\Delta t \\ 0 & \mu\Delta t & -2\lambda\Delta t + 1 \end{pmatrix}.$$

Далее для четкой цепи выделяются нечеткие состояния X_{f1}, X_{f2}, и для них задаются функции принадлежностей дискретного типа, которые в лингвистических терминах представляются термами (рис. 3):

Таблица 1

Состояние системы

Состояния системы	Узел i системы		Примечания
	1	2	
X_0	+	+	Все узлы функционируют (+)
X_1	−	+	Один узел в отказе (−), другой функционирует (+)
X_2	−	−	Оба узла в отказе (−)

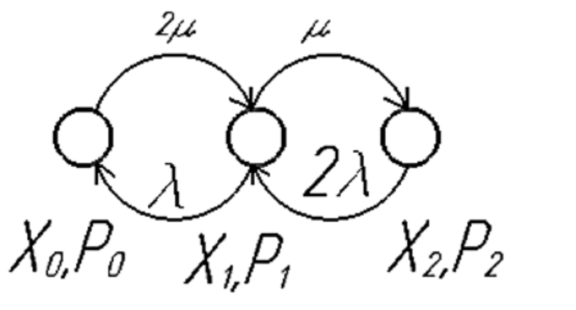

Рис. 2. Граф простейшей модели надежности из двух однотипных элементов с четкими состояниями

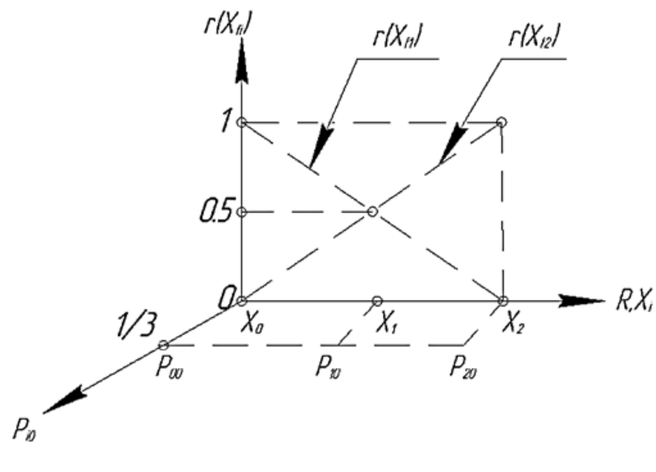

Рис. 3. Нечеткие состояния X_{f_1}, X_{f_2} модели надежности из двух однотипных элементов

$J_1 = r(X_{f1})$ — "высокая надежность",
$r \in [0;\ 1] \subset R$;
$J_2 = r(X_{f2})$ — "низкая надежность",
$r \in [0;\ 1] \subset R$.

Матрица Γ функций принадлежностей нечетких состояний будет равна

$$\Gamma^{\text{т}} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая, что для начальных условий четкой цепи справедливо равенство

$$P(t = 0) = P_1(t = 0) = P_2(t = 0) = 1/3,$$

можно записать:

$$m_{f1} = \left[\sum_{i=1}^{3} r_{\alpha_i}(X_{f1})\right]^{-1} = [1 + 1/2 + 0]^{-1} = 2/3;$$

$$m_{f2} = \left[\sum_{i=1}^{3} r_{\alpha_i}(X_{f2})\right]^{-1} = [1 + 1/2 + 0]^{-1} = 2/3.$$

Тогда матрица Δ будет равна

$$\Delta = \begin{pmatrix} m_{f1} & 0 \\ 0 & m_{f2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} = (2/3)I,$$

где I — единичная матрица.

В результате вычислений Γ, Δ получим переходную матрицу с нечеткими состояниями:

$$P_f(1) = \Delta\Gamma^{\text{т}}P\Gamma = (2/3)\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\mu\Delta t + 1 & \lambda\Delta t & 0 \\ 2\mu\Delta t & -(\lambda + \mu)\Delta t + 1 & 2\lambda\Delta t \\ 0 & \mu\Delta t & -2\lambda\Delta t + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_f(1) = \begin{pmatrix} p_{f_1f_1} \simeq (0,165\lambda - 0,825\mu)\Delta t + 0,825 & p_{f_1f_2} \simeq (0,825\lambda - 0,165\mu)\Delta t + 0,165 \\ p_{f_2f_1} \simeq (-0,165\lambda + 0,825\mu)\Delta t + 0,165 & p_{f_2f_2} \simeq (-0,825\lambda + 0,165\mu)\Delta t + 0,825 \end{pmatrix}.$$

Здесь, как нетрудно убедиться, имеет место асимптотическое выполнение свойства стохастичности $P_f(1)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}(p_{f_1f_1} + p_{f_1f_2}) \simeq 1;\ \lim_{\Delta t \to 0}(p_{f_2f_1} + p_{f_2f_2}) \simeq 1. \quad (7)$$

Далее согласно *варианту 1* имеем, с точностью до обозначений, матричное уравнение (1) в следующем виде:

$$P_f(n+1) = P_f(1)P_f(n),\ P_f(0) = P_{f0},\ EP_f(n) = 1, \quad (8)$$

которое, как известно, может быть решено различными методами: преобразованием Лапласа производящей функции для Z-преобразования или преобразованием $P_f(1)$ к диагональному виду матричным методом.

Будем решать уравнение (8) методом Z-преобразования. В результате его применения получим:

$$[P_f(1) - P_{f0}]z^{-1} = P_{fk}(1)P_f(z).$$

После разрешения этого уравнения относительно $P_f(z)$ будем иметь:

$$P_f(z) = G(z)P_{f0},\ G(z) = [I - zP_{fk}(1)]^{-1}. \quad (9)$$

Находим $G(z)$ и определитель $|G(z)|$:

$$G(z) = \left[\begin{pmatrix} 1 - zp_{f_1f_1} & -zp_{f_1f_2} \\ -zp_{f_2f_1} & 1 - zp_{f_2f_2} \end{pmatrix}\right]^{-1};$$

$$|G(z)| = (p_{f_1f_1}p_{f_2f_2} - p_{f_1f_2}p_{f_2f_1})z^2 - - (p_{f_1f_1} + p_{f_2f_2})z + 1. \quad (10)$$

Из соотношений (6), (7) имеем:

$$\begin{cases} p_{f_1f_1} + p_{f_1f_2} \simeq 1 \\ p_{f_2f_1} + p_{f_2f_2} \simeq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{f_1f_2} \simeq 1 - p_{f_1f_1} \\ p_{f_2f_1} \simeq 1 - p_{f_2f_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{f_1f_2} \cdot p_{f_2f_1} = 1 - p_{f_1f_1} - p_{f_2f_2} - p_{f_1f_1} \cdot p_{f_2f_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{f_1f_2} + p_{f_2f_2} = 1 + p_{f_1f_1} \cdot p_{f_2f_2} - p_{f_1f_2}p_{f_2f_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{f_1f_1} + p_{f_2f_2} = 1 + \alpha,\ \alpha = p_{f_1f_1}p_{f_2f_2} - p_{f_1f_2} \cdot p_{f_2f_1}.$$

С учетом обозначений для α получим

$$|G(z)| = \alpha z^2 - (1 - \alpha)z + 1 = (1 - z)(1 - \alpha z),$$

поэтому для обратной матрицы (10) будем иметь:

$$G(z) = \\ = \begin{pmatrix} a = (1 - zp_{f_1f_1})|G(z)|^{-1} & b = zp_{f_1f_2}|G(z)|^{-1} \\ c = zp_{f_2f_2}|G(z)|^{-1} & d = (1 - zp_{f_1f_1})|G(z)|^{-1} \end{pmatrix}.$$

Разложение по методу неопределенных коэффициентов элементов a, b, c, d на элементарные дроби дает:

$$a = A_1(1-z)^{-1} + B_1(1-\alpha z)^{-1},$$
$$A_1 = (p_{f_2f_2}-1)(\alpha-1)^{-1},\ B_1 = (\alpha - p_{f_2f_2})(\alpha-1)^{-1};$$
$$b = A_2(1-z)^{-1} + B_2(1-\alpha z)^{-1},$$
$$A_2 = -p_{f_1f_2}(\alpha-1)^{-1},\ B_2 = p_{f_1f_2})(\alpha-1)^{-1};$$
$$c = A_3(1-z)^{-1} + B_3(1-\alpha z)^{-1},$$
$$A_3 = p_{f_2f_1}(\alpha-1)^{-1},\ B_3 = p_{f_2f_1}(\alpha-1)^{-1};$$
$$d = A_4(1-z)^{-1} + B_4(1-\alpha z)^{-1},$$
$$A_4 = (p_{f_1f_1}-1)(\alpha-1)^{-1},\ B_4 = (\alpha - p_{f_1f_1})(\alpha-1)^{-1}.$$

В результате получим

$$G(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A(1-z)^{-1} + B(1-\alpha z)^{-1},$$
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Применение обратного z преобразования дает:

$$G(n) = (A + B\alpha^n),$$

поэтому получим решение (8) в виде

$$P_f(n) = P_{f0}(A + B\alpha^n) = P_{f0}A + \alpha^n P_{f0}B.$$

Покажем, что параметр $\alpha < 1$ Действительно, за счет выбора величины Δt, можно в соотношении (6) получить:

$$(p_{f_1f_1}, p_{f_2f_2}) \simeq 0{,}825;\ (p_{f_1f_2}, p_{f_2f_1}) \simeq 0{,}165,$$

поэтому α будет равна

$$\alpha \simeq p_{f_1f_1}p_{f_2f_2} - p_{f_1f_2}p_{f_2f_1} \simeq (0{,}825)^2 - (0{,}165)^2 < 1.$$

Таким образом, для нечетких состояний из (9) будем иметь

$$P_f(n+1) = (A + B\alpha^n)P_{f0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P_f(n+1) = AP_{f0} + \alpha^n BP_{f0}, \alpha < 1,$$

откуда коэффициент готовности $K_{\Gamma f}$ для нечетких состояний будет равен

$$K_{\Gamma f} = \lim_{n\to\infty} P_f(n+1) = AP_{f0}.$$

Теперь, если $P_{f0} = (1,\ 0)^{\text{т}}$, то

$$K_{\Gamma f} = AP_{f0} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A_1, A_3)^{\text{т}},$$

откуда

$K_{\Gamma f_1f_1} = A_1 = (p_{f_1f_1}-1)(\alpha-1)^{-1}$ — коэффициент "высокой готовности — J_1";

$K_{\Gamma f_2f_2} = A_3 = (p_{f_1f_2}-1)(1-\alpha)^{-1}$ — коэффициент "низкой готовности — J_2".

Для $P_{f0} = (1,\ 0)^{\text{т}}$ соответственно получим

$$K_{\Gamma f_1f_1} = AP_{f0} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (A_2, A_4)^{\text{т}},$$

$K_{\Gamma f_1f_2} = A_2 = (p_{f_1f_1}-1)(\alpha-1)^{-1}$ — коэффициент "высокой готовности — J_1";

$K_{\Gamma f_2f_2} = A_4 = (p_{f_1f_2}-1)(1-\alpha)$ — коэффициент "низкой готовности — J_2".

Сравнение компонент вектора $K_{\Gamma f}$ нечетких состояний для различных компонент вектора P_{f0} нечетких начальных состояний показывает, что их значения не зависят от P_f, что косвенно указывает на корректность приведенных выше преобразований.

Матрица M_f среднего числа шагов до первого достижения X_{f_2} из состояния X_{f_1} находится из матричного уравнения

$$M_f = (I - U + EU_0)A_0,$$

где $U = [I + P_f(n) + \Phi]^{-1}$ — фундаментальная матрица; U_0 — диагональная матрица, полученная из U путем замены ее диагональных элементов нулями; A_0 — диагональная матрица с диагональными элементами, равными финальным вероятностям $\lim\limits_{n\to\infty} P_f(n)$ нечетких состояний; матрица I и вектор E были определены ранее.

По *варианту 2.* Используя $P_f(1)$ в соотношении (6) путем замены

$$\Lambda_f = \Delta t^{-1}[P_f(1) - I],$$

получим матрицу Λ_{fs} и далее по ней матрицу Λ_{fk} матричного уравнения Колмогорова:

$$P_f(1) = \begin{pmatrix} p_{f_1f_1} & p_{f_1f_2} \\ p_{f_2f_1} & p_{f_2f_2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{fs} = \begin{pmatrix} p_{f_1f_1}-1 & p_{f_1f_2} \\ p_{f_2f_1} & p_{f_2f_2}-1 \end{pmatrix}\Delta t^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{fk} = \begin{pmatrix} -(p_{f_1f_1}+p_{f_1f_2}-1) & p_{f_2f_1} \\ p_{f_1f_2} & -(p_{f_2f_2}+p_{f_2f_1}-1) \end{pmatrix}\Delta t^{-1}.$$

В результате получим задачу Коши для матричного уравнения Колмогорова при наличии ограничения:

$$\dot{P}_f(t) = \Lambda_{fk} P_f(t),\ P_f(0) = P_{f0},\ EP_f(t) = 1. \quad (11)$$

В работе [1] показано, что эта задача имеет решение в виде матричной экспоненты:

$$P_f^*(t) = \exp(\Lambda_{fk} \cdot t) P_{fo},\ t \in [0, T],\ T > 0 \subset R,$$

которое удовлетворяет условию нормировки $EP_f^*(t) \equiv 1$.

Расчеты по соотношениям (6) показывают, что существует $\lim\limits_{t\to\infty} P_f^*(t) = P_f(\infty)$ и, как следствие, вектор $P_f(\infty)$удовлетворяет матричной системе

$$\begin{cases} \Lambda_{fk} P_f(\infty) = 0; \\ EP_f(\infty) = 1. \end{cases}$$

Вектор ее решения определяет коэффициент готовности "высокая/низкая — J_1/J_2".

Числовая характеристика ET_{f_1} — математическое ожидание случайной переменной T_{f_1} нахождения системы в нечетких состояниях X_{f_1} до первого попадания в процессе блужданий по графу в нечеткое состояние X_{f_2} определяется а основе утверждения о том, что для простейшего потока и восстановления функция $f(T_{f_1})$ случайной переменной T_{f_1} подчиняется показательному закону $f(T_{f_1}) = \lambda_{f_1} \exp(-\lambda_{f_1} t),\ t \in [0, T],\ T > 0,$ поэтому $ET_{f_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f(T_{f_1}) dt = \lambda_f^{-1}$.

3.2. Простейшие модели массового обслуживания

Будем рассматривать модели с нечеткими состояниями при обслуживании потока заявок без ожидания (без очереди — **А**) и с ожиданием (с очередью — **Б**), а также с приоритетным обслуживанием (**С**) полагая при этом, что исходная система имеет конечное число четких состояний.

А. *Обслуживание без очереди с нечеткими состояниями.* Пусть для простоты рассмотрения имеем техническую систему, которая состоит из двух однотипных элементов и находится в четких состояниях $X = \{X_i, p_i\}_{i=0}^2$, где, как и ранее (п. 3.1), p_i — вероятности нахождения в четких состояниях X_i. На каждый из узлов системы воздействует простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью λ, из-за которого узел системы находится в состоянии "занято", обозначаемого далее (−), в функционировании. В промежутке между двумя соседними состояниями "занято" узел находится в состоянии "свободен", обозначаемом (+). В этом состоянии узел имеет производительность (интенсивность) μ, и поток через него также считаем простейшим, аналогично потоку λ.

Нумеруем состояния X_i в соответствии с табл. 2.

В соответствии с табл. 2 граф $\Sigma_{\text{д-н}}$ представлен на рис. 4, а матрицы Λ_s и Λ_k состояний и уравнений Колмогорова имеют вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X_0 & X_1 & X_2 \end{array} \\ \Lambda_s = & \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & 2\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} X_0 \\ X_1; \\ X_2 \end{array} \end{array}$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu \\ 0 & \lambda & -2\mu \end{pmatrix}.$$

После замены $\Lambda_k = \Delta t^{-1}[P(1) - I]$ получим переходную матрицу $P(1)$ четкой цепи Маркова:

$$P(1) = I + \Delta t \Lambda_k =$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda\Delta t + 1 & \mu\Delta t & 0 \\ \lambda\Delta t & -(\lambda+\mu)\Delta t + 1 & 2\mu\Delta t \\ 0 & \lambda\Delta t & -2\mu\Delta t + 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2

Состояние системы

Состояния системы	Число элементов системы		Примечания
X_0	+	+	Оба узла свободны — (+, +)
X_1	−	+	Один узел занят, другой свободен, неважно какой — (−, +), или (+, −)
	+	−	
X_2	−	−	Оба узла заняты — (−, −)

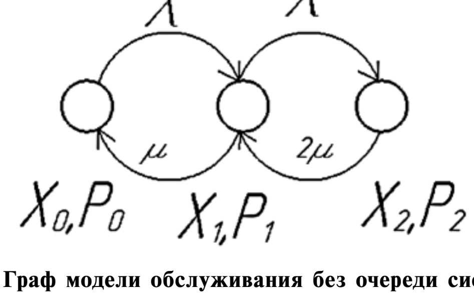

Рис. 4. Граф модели обслуживания без очереди системы из двух однотипных элементов с четкими состояниями

Далее выделяется нечеткое состояние X_{f_1}, X_{f_2} с функциями принадлежностей треугольного типа, подобные тем, которые изображены на рис. 3, и представляемые термами:

$J_1 = r(X_{f_1})$ — "низкий" уровень занятости системы, $r \in [0;\ 1] \subset R$;

$J_2 = r(X_{f_2})$ — "высокий" уровень занятости системы, $r \in [0;\ 1] \subset R$.

Переходная матрицы $P_f(1)$ с нечеткими состояниями будет равна

$$P_f(1) =$$

$$= \Delta\Gamma^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -\lambda\Delta t + 1 & \mu\Delta t & 0 \\ \lambda\Delta t & -(\lambda+\mu)\Delta t + 1 & 2\mu\Delta t \\ 0 & \lambda\Delta t & -2\mu\Delta t + 1 \end{pmatrix} \Gamma =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{f_1 f_1} & p_{f_1 f_2} \\ p_{f_2 f_1} & p_{f_2 f_2} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$p_{f_1 f_1} = (-0,33\lambda + 0,825\mu)\Delta t + 0,825;$$
$$p_{f_1 f_2} = (-0,165\lambda + 1,155\mu)\Delta t + 0,165;$$
$$p_{f_2 f_1} = (0,495\lambda + 0,165\mu)\Delta t + 0,165;$$
$$p_{f_2 f_2} = -0,825\mu\Delta t + 0,825.$$

Очевидно:

$$\lim_{\Delta t \to 0}(p_{f_1 f_1} + p_{f_1 f_2}) \simeq 1;\ \lim_{\Delta t \to 0}(p_{f_2 f_1} + p_{f_2 f_2}) \simeq 1.$$

Согласно *варианту* 1 имеем матричное разностное уравнение (8) с переходной матрицей (12). Решаем его матричным методом. Для этого представляем разностное уравнение в другой форме:

$$P_f(n+1) = P_f(1)P_f(n) \Leftrightarrow P_f(n) = P_f^n(1)P_{f0}$$

и далее используем свойство подобных матриц $P_f(1)$ и U, для которых из определения подобия следует, что $P_f(1) = TUT^{-1}$, T — матрица из собственных векторов $P_f(1)$; U — диагональная матрица из собственных чисел $P_f(1)$.

Для подобных матриц $P(1)$, U справедливо соотношение

$$P_f^n(1) = TU^nT^{-1},$$

$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = (T_1, T_2)$, T_1, T_2 — собственные векторы $P_f(1)$ удовлетворяющие условию: $P_f(1)T_1 = \lambda_{f_1}T_1$, $P_f(1)T_2 = \lambda_{f_2}T_2$, $\lambda_{f_1}, \lambda_{f_2}$ — собственные числа $P_f(1)$.

Числа $\lambda_{f_1}, \lambda_{f_2}$ находятся из уравнения

$$\left|P_f(1) - \lambda_f I\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} p_{f_1 f_1} - \lambda_f & p_{f_1 f_2} \\ p_{f_2 f_1} & p_{f_2 f_2} - \lambda_f \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_f^2 - \beta\lambda_f + \alpha = 0,\ \beta = p_{f_1 f_1} + p_{f_2 f_2};$$

$$\alpha = p_{f_1 f_1}p_{f_2 f_2} - p_{f_1 f_2}p_{f_2 f_1},\ \lambda_{f_1} = \alpha < 1,\ \lambda_{f_2} = 1.$$

Таким образом, $\lambda_{f_1}, \lambda_{f_2}$ являются действительными и различными числами.

Находим собственные векторы T_1, T_2:

$$P_f(1) \cdot T_1 = \lambda_{f_1}T_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_{f_1 f_1} & p_{f_1 f_2} \\ p_{f_2 f_1} & p_{f_2 f_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p_{f_1 f_1} - \alpha)t_{11} + p_{f_1 f_2}t_{12} = 0; \\ p_{f_2 f_1}t_{11} + (p_{f_2 f_2} - \alpha)t_{21} = 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что уравнения (13), (12) линейно зависимы, поэтому достаточно выбрать одно из них. Для определенности выберем (13), тогда:

$$(p_{f_1 f_1} - \alpha)t_{11} + p_{f_1 f_2}t_{21} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{f_2 f_1}t_{11} + p_{f_1 f_2}t_{21} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_{11} = (-p_{f_1 f_2}/p_{f_2 f_1})t_{21}.$$

Положим $t_{21} = p_{f_2 f_1}$, тогда $t_{11} = -p_{f_1 f_2}$, поэтому вектор $T_1^{\mathrm{T}} = (t_{11}, t_{21}) = (-p_{f_1 f_2}, p_{f_2 f_1})$.

Аналогично находится вектор $T_2^{\mathrm{T}} = (t_{12}, t_{21})$:

$$P_f(1)T_2 = \lambda_{f_2}T_2 \Rightarrow P_f(1)T_2 = 1 \cdot T_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T^{\mathrm{T}} = (t_{12} = 1, t_{22} = 1).$$

В результате матрицы T и T^1 будут равны

$$T = \begin{pmatrix} -p_{f_1 f_2} & 1 \\ p_{f_2 f_1} & 1 \end{pmatrix};\ T^{-1} = |T|^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p_{f_2 f_1} & p_{f_1 f_2} \end{pmatrix},$$

$$|T| = p_{f_1 f_2} + p_{f_2 f_1}.$$

Таким образом, получим

$$P_f(1) = TUT^{-1} \Rightarrow P_f^n(1) = TU^nT^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_f^n(1) = |T|^{-1}\begin{pmatrix} -p_{f_1 f_2} & 1 \\ p_{f_2 f_1} & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p_{f_2 f_1} & p_{f_1 f_2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_f^n(1) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$P_{11} = (p_{f_1 f_1}\alpha^n + p_{f_2 f_1})|T|^{-1};$$
$$P_{12} = (-p_{f_1 f_2}\alpha^n + p_{f_1 f_1})|T|^{-1};$$
$$P_{21} = (-p_{f_2 f_1} + \alpha^n)|T|^{-1};$$
$$P_{11} = (p_{f_2 f_1}\alpha^n + p_{f_1 f_2})|T|^{-1}.$$

В результате получим решение $P_f(n)$ в виде

$$P_f(n) = P_f^n(1)P_{f0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_f(n) = \begin{pmatrix} (p_{f_1 f_2}\alpha^n + p_{f_2 f_1})(p_{f_1 f_2} + p_{f_2 f_1})^{-1} \\ (-p_{f_1 f_2}\alpha^n + p_{f_1 f_2})(p_{f_1 f_2} + p_{f_2 f_1})^{-1} \end{pmatrix} P_{f0},$$

$P_{f0} = (p_{f_1 0}, p_{f_2 0})$ — вектор начальных условий, откуда следует, что коэффициент $K_f(\infty)$ занятости системы с нечеткими состояниями не зависит от P_{f0} и будет равен:

$$K_f(\infty) = \lim_{n\to\infty} P_f(n) = \begin{pmatrix} (p_{f_2 f_2} - 1)(\alpha - 1)^{-1} \\ -p_{f_1 f_2}(\alpha - 1)^{-1} \end{pmatrix},$$

$p_{f_i f_j}$ — определены в (12).

По *варианту* 2. Используя в матрице $P_f(1)$, найденной ранее, замену $\Lambda_f = \Delta t^{-1}[P_f(1) - 1]$, получим матрицу Λ_{fs} и далее по ней матрицу Λ_{fk} матричного уравнения Колмогорова. В результате, так же как в п. 3.1, *вариант 2*, будем иметь задачу Коши типа (11) для уравнения Колмогорова при наличии ограничений, с матрицей $P_f(1)$, определяемой по (14).Затем решается матричная система нахождения $K_f(\infty)$.

B. *Обслуживание с очередью и нечеткими состояниями.* Пусть имеем для простоты число $M = 1$ мест в очереди и один элемент для обслуживания потока заявок на обслуживание. Четкие состояния в этом случае нумеруются в соответствии с табл. 3. По таблице граф $\Sigma_{\text{д-н}}$ представлен на рис. 5, матрицы Λ_s, Λ_k будут иметь вид

$$\Lambda_s = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{matrix} & \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & 2\mu & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{matrix} \end{array}; \quad \Lambda_k = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & \lambda & -\mu \end{pmatrix},$$

где λ, μ — интенсивности обслуживания и нахождения в очереди для их простейших потоков.

Переходная матрица $P(1)$ будет иметь вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} -\lambda\Delta t + 1 & \mu\Delta t & 0 \\ \lambda\Delta t & -(\lambda+\mu)\Delta t + 1 & \mu\Delta t \\ 0 & \lambda\Delta t & -\mu\Delta t + 1 \end{pmatrix},$$

Таблица 3

Состояние системы

Состояния системы	Состояние элемента обслуживания A	Состояние очереди $M = 1$	Примечания
X_0	+	+	Узел A свободен — (+), место M свободно — (+)
X_1	—	+	Узел A занят — (–), место M свободно — (+)
X_2	—	—	Узел A занят — (–), место M занято — (–)

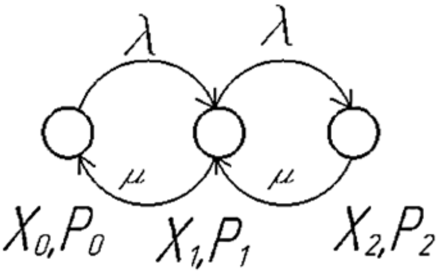

Рис. 5. Граф модели обслуживания с очередью в одно место для системы с одним элементом обслуживания

а нечеткие состояния X_{f_1}, X_{f_2} представляются термами J_1, J_2, связанными с занятостью системы. Далее по аналогии с вышесказанным могут быть реализованы варианты 1 и 2, и находятся стационарные режимы работы систем с нечеткими состояниями.

Замечание. Выше была рассмотрена система с конечным числом четких и нечетких состояний. Однако в прикладных задачах имеются системы с бесконечным числом состояний, например, число мест в очереди $M \to \infty$. В этом случае число состояний в системе также становится бесконечным и в этом случае возникает проблема с представлением символа "∞" в нечетких терминах. Она относительно легко решается путем отбрасывания части уравнений, полагая, что они являются малыми в системе. Тогда размерность соответствующих матриц является конечной, и поэтому к уравнениям может быть применена выше приведенная методика понижения размерности путем введения нечетких состояний.

C. *Приоритетное обслуживание с нечеткими состояниями* [23]. Полагаем, что имеем простейшую систему, когда на ее одноканальный вход поступают два независимых простейших потока с параметрами λ_1, λ_2. Для простоты полагается отсутствие в системе ожидания. Первому потоку присвоен старший абсолютный приоритет. Это означает, что из-за отсутствия ожидания в обслуживании заявки второго типа теряются из-за прерывания в обслуживании потока первого типа. Кроме того, они теряются, если в момент прихода потока второго типа система занята обслуживанием потока первого типа.

Относительно длительности обслуживания потоков обоих типов предполагается, что они являются независимыми случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с соответствующими параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Четкие состояния системы нумеруются в соответствии с табл. 4.

Таблица 4

Состояния системы X_i, $i = \overline{0, 2}$

X_0	Система в момент t свободна
X_1	Система в момент t обслуживает поток 1-го типа
X_2	Система в момент t обслуживает поток 2-го типа

По табл. 4 граф $\Sigma_{\text{д-н}}$ представлен на рис. 6, матрицы Λ_s, Λ_k имеют вид

$$\Lambda_s = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} X_0 & X_1 & X_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & 0 & \lambda \\ \mu_2 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{array} \end{array};$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 \\ \lambda_1 & -\mu_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) \end{pmatrix}.$$

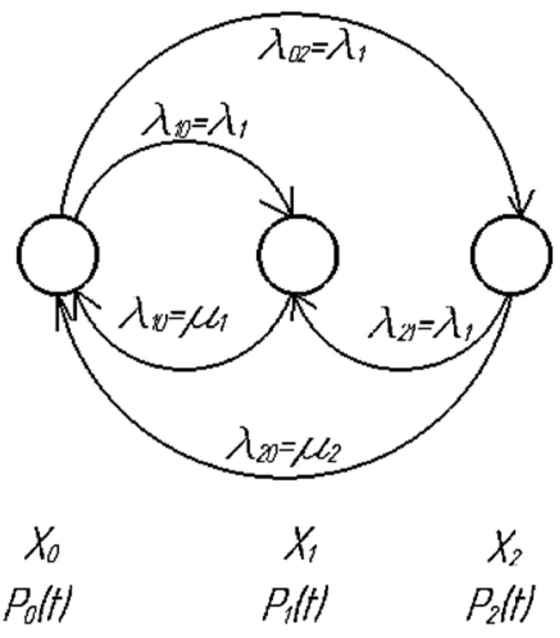

Рис. 6. Граф $\Sigma_{\text{д-н}}$ модели обслуживания с приоритетами

Переходная матрица $P(1)$ будет иметь вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t + 1 & \mu_1 \Delta t & \mu_2 \Delta t \\ \lambda_1 \Delta t & -\mu_1 \Delta t + 1 & \lambda_1 \Delta t \\ \lambda_2 \Delta t & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2)\Delta t + 1 \end{pmatrix}$$

и далее по аналогии с предыдущим могут быть реализованы варианты 1 и 2, а затем по аналогии с предыдущими схемами **А — С** находится стационарный режим функционирования системы с нечеткими состояниями.

4. Выводы

То обстоятельство, что различные характеристики систем обслуживания и надежности получаются стандартным образом, связано с тем, что нечеткие состояния, формируемые функциями принадлежностей, являются по своей сути четкими и поэтому к ним применена вся известная теория четких марковских процессов. Разбиение совокупности четких состояний на нечеткие в некотором смысле подобно представлению четких состояний в виде подмножеств состояний при определении закона распределения случайной величины времени однократного пребывания марковского процесса в произвольном подмножестве четких состояний. Заметим, что задача преобразования четких состояний в укрупненные является типичной и во многих случаях диктуется постановкой задачи.

Заключение

Сформулирована задача преобразования дискретно-непрерывного случайного процесса Маркова с четкими состояниями в процесс с нечеткими состояниями, что позволяет уменьшить размерность исходной задачи.

Метод решения путем такого преобразования состоит в приближенном равенстве четкого дискретно-непрерывного марковского процесса и четкой цепи Маркова, для которой используется известная из теории нечетких множеств трансформация четкой цепи в цепь с нечеткими состояниями.

Сформулированная задача о нечетких состояниях и метод ее решения реализован в модели гибели—размножения применительно к простейшей модели надежности системы, состоящей из двух однотипных ее элементов.

Для простейшей модели массового обслуживания реализована ее модель с нечеткими состояниями без ожидания (без очереди) и с ожиданием (с очередью) с конечным числом состояний.

Отмечено, что в случае с бесконечным числом состояний задача их укрупнения в общем случае неразрешима из-за проблемы представления символа "∞" в нечетких терминах. Однако, если исходная система может быть усечена за счет отбрасывания малой его части и превращения ее в систему с конечным числом состояний, тогда к последней усеченной системе применима предложенная методика о нечетких состояниях.

Список литературы

1. **Волков И. К., Зуева С. М., Цветкова Г. М.** Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. 447 с.
2. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1977. 488 с.
3. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems. 1998. N. 96. P. 201—209.
4. **Ezzati R.** Solving fuzzy linear systems // Soft computing. 2011. Vol. 5(1). P. 193—197.
5. **Ezzati R., Khezerloo S., Yousefzadeh A.** Solving fully fuzzy linear system of equations in general form // Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. 2012. P. 1—11. DOI: 10.5899/2012/jfsva-00117.
6. **Мочалов И. А., Хрисат М. С.** Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. 2014. Т. 20, № 4. С. 251—257.
7. **Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я.** Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 1 // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 3. С. 171—178.
8. **Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я.** Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 11 // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 4. С. 243—250.
9. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, сер. Приборостроение. 2016. № 1(106). С. 59—73.
10. **Казакевич В. В.** Автоколебания (компаж) в компрессорах. М: Машиностроение,1974. 192 с.
11. **Деменков Н. П., Матвеев В. А., Мочалов И. А.** Нечеткие методы моделирования волновых твердотельных гироскопов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, сер. Приборостроение. 2018. № 3. С. 33—47.
12. **Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.** Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 1 // Информационные технологии. 2017. Т. 23, № 4. С. 251—258.
13. **Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.** Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 2 // Информационные технологии. 2017. Т. 23, № 5. С. 362—369.
14. **Jiuping Xu, Zhigao Liao, Juan J. Nieto.** A class of linear differential dynamical systems with fuzzy matrices //J. Math analysis and application. 2010. Vol. 368. P. 52—68. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.12.053.
15. **Jiuping Xu,Zhigao Liao, Zhineng Hu.** A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition//Fuzzy sets & systems. 2007. Vol. 158. P. 2339—2358. DOI: 10.1016/j.fss.2007.04.016.
16. **Pearson D. W.** Aproperty of linear fuzzy differential equations// Appl.math.lett. 1997. Vol.10, N. 3. P. 99—103.
17. **Ghazanfari B., Niazi S., Ghazanfari A. G.** Linear matrix differential dynamical systems with fuzzy matrices //Appl. math. model. 2012. Vol. 36. P. 348—356. DOI: 10.1016/j.apm.2011.05.054.
18. **Sadeghi A., Izani Md., Ismail A., Jameel A. F.** Solving systems of fuzzy differential equation // International Mathematical Forum. 2011. Vol. 6, N. 42. P. 2087—2100.
19. **Мочалов И. А.** и др. Нечеткие вероятностно-статистические методы // Информационные технологии. Приложение. 2003. № 4. С. 1—24.
20. **Bhattacharyya Malay.** Fuzzy markovian decision process // Fuzzy sets and systems. 1998. N. 99(3). P. 273—282. DOI: 10.1016/S0165-0114(96)00400-9.
21. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа. 2000. 383 с.
22. **Лабскер А. Г.** Вероятностное моделирование в финансово-экономической области. М.: Альпина паблишер. 2002. 224 с.
23. **Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.** Теория массового обслуживания. М.: Книжныйдом "ЛИБРОКОМ", 2012. 304 с.

N. P. Demenkov, Ph.D. Tech. Sciences, Associate Professor, e-mail: dnp@bmstu.ru,
E. A. Mikrin, Dr. Tech. Sciences, Professor,
I. A. Mochalov, Dr. Tech. Sciences, Professor, e-mail: intelsyst@mail.ru,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Markov and Semi-Markov Processes with Fuzzy States. Part 1. Markov Processes

For a discrete-continuous random Markov process, the problem of reducing the dimension of the matrix Cauchy problem for the Kolmogorov matrix equation is formulated and solved by introducing fuzzy states using the proximity of this equation to the matrix difference equation. The simplest reliability and mass service problems have been solved, with the help of which the proposed methodology for applying the technique of introducing fuzzy states, which allows us to reduce the dimension of the original problem, is demonstrated.

Keywords: *fuzzy states of the Markov process; reliability and queuing models with fuzzy states*

DOI: 10.17587/it.26.323-334

References

1. **Volkov I. K., Zueva S. M., Tsvetkova G. M.** Random processes,Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Baumana, 2006, 447 p. (in Russian).
2. **Tihonov V. I., Mironov M. A.** Markov processes, Moscow, Sov. Radio, 1977, 488 p. (in Russian).
3. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems, *Fuzzy sets and systems*, 1998, no. 96, pp. 201—209.
4. **Ezzati R.** Solving fuzzy linear systems,*Soft computing*, 2011, vol. 5(1), pp. 193—197.
5. **Ezzati R., Khezerloo S., Yousefzadeh A.** Solving fully fuzzy linear system of equations in general form, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis,* 2012, pp. 1—11. DOI: 10.5899/2012/jfsva-00117.
6. **Mochalov I. A., Hrisat M. S.** *Informatsionnyie Tehnologii*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 251—257 (in Russian).
7. **Mochalov I. A., Hrisat M. S., Shihab Eddin M. Ya.** *Informatsionnyie Tehnologii*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 171—178(in Russian).
8. **Mochalov I. A., Hrisat M. S., Shihab Eddin M. Ya.** *Informatsionnyie Tehnologii*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 243—250 (in Russian).
9. **Demenkov N. P., Mochalov I. A.** *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana, ser. Priborostroenie*, 2016, no. 1(106), pp. 59—73 (in Russian).
10. **Kazakevich V. V.** Self-oscillations (composition) in compressors,Moscow, Mashinostroenie, 1974, 192 p. (in Russian).
11. **Demenkov N. P., Matveev V. A., Mochalov I. A.** *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana, ser. Priborostroenie,* 2018, no. 3, pp. 33—47 (in Russian).
12. **Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. A.** *Informatsionnyie Tehnologii*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 251—258 (in Russian).
13. **Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. A.** *Informatsionnyie Tehnologii*, 2017, vol. 23, no. 5, pp. 362—369 (in Russian).
14. **Jiuping Xu, Zhigao Liao, Juan J. Nieto.** A class of linear differential dynamical systems with fuzzy matrices, *J. Math analysis and application*, 2010, vol. 368, pp. 52—68. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.12.053.
15. **Jiuping Xu, Zhigao Liao, Zhineng Hu.** A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition*, Fuzzy sets & systems,* 2007, vol. 158, pp. 2339—2358. DOI: 10.1016/j.fss.2007.04.016.
16. **Pearson D. W.** Aproperty of linear fuzzy differential equations, *Appl. math. lett.*, 1997, vol. 10, no. 3, pp. 99—103.
17. **Ghazanfari B., Niazi S., Ghazanfari A. G.** Linear matrix differential dynamical systems with fuzzy matrices, *Appl. math. model*, 2012, vol. 36, pp. 348—356. DOI: 10.1016/j.apm.2011.05.054.
18. **Sadeghi A., Izani Md., Ismail A., Jameel A. F.** Solving systems of fuzzy differential equation, *International Mathematical Forum*, 2011, vol. 6, no. 42, pp. 2087—2100.
19. **MochalovI. A.** et al. *Informatsionnyie Tehnologii. Prilojenie*, 2003, no. 4, pp. 1—24 (in Russian).
20. **Bhattacharyya Malay.** Fuzzy markovian decision process. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, no. 99(3), pp. 273—282. DOI: 10.1016/S0165-0114(96)00400-9.
21. **Venttsel E. S., Ovcharov L. A.** The theory of random processes and its engineering applications, Moscow, Vyisshaya shkola, 2000, 383 p. (in Russian).
22. **Labsker A. G.** Probabilistic modeling in the financial and economic field, Moscow, Alpina publisher, 2002, 224 p. (in Russian).
23. **Ivchenko G. I., Kashtanov V. A., Kovalenko I. N.** Queuing theory, Moscow, Knijnyiy dom "LIBROKOM", 2012, 304 p. (in Russian).

УДК 004.021 DOI: 10.17587/it.26.334-341

А. А. Дубанов, канд. техн. наук, доц.,alandubanov@mail.ru,
Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Модель группового преследования одиночной цели на основе следования ранее прогнозируемым траекториям

Приводится описание геометрической модели, когда группа из преследователей преследует одиночную цель. Движение происходит на плоскости, но при необходимости данную модель можно перенести на явно заданную поверхность. Скорость движения всех участников, как преследователей, так и цели, постоянна по модулю. Цели и стратегии каждого из преследователей, несмотря на различие траекторий, объединяет один критерий. Они стремятся подойти к точке пространства, связанной с преследуемым объектом, под заданным направлением, соблюдая ограничения по кривизне траектории. Цель и стратегия объекта преследования определяется поведением одного из преследователей.

Ключевые слова: *преследование, уклонение, убегание, моделирование, алгоритм, цель, преследователь, траектория*

Введение

Квазидискретные модели в задаче преследования — это возможность приближенного вычисления динамических процессов с дальнейшей визуализацией. В нашей задаче вводится период дискретизации по времени, в течение которого преследователь совершает шаг и смену направления движения. В данной статье рассматриваются вопросы следования преследователем заранее смоделированной траектории. Предполагается, что траектория, отвечающая заданным требованиям, будет моделироваться в автоматическом режиме в каждый момент времени. В качестве примера мы рассмотрели группу из четырех преследователей.