УДК 621.391.1: 621.395 DOI: 10.17587/it.26.195-202

В. Н. Тарасов, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru,
Н. Ф. Бахарева, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: nadin1956_04@inbox.ru,
Э. Г. Ахметшина, аспирант, e-mail: elyamalusha@mail.ru,
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Модели телетрафика на основе двойственных систем с запаздыванием с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными распределениями

В теории массового обслуживания широко используются системы G/M/1 и M/G/1, при этом для первой системы до сих пор не существует решения в конечном виде в общем случае. Здесь G в первой системе по символике Кендалла означает произвольный закон распределения интервалов между требованиями входного потока, M — экспоненциальный закон времени обслуживания, а во второй системе — ровно наоборот. В статье рассматривается задача определения характеристик систем массового обслуживания (СМО) $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$ с запаздыванием с гиперэкспоненциальным (H_2) и экспоненциальным (M) распределениями. Данная задача решается с использованием классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. В качестве входных распределений для рассматриваемых систем выбраны вероятностные смеси сдвинутых вправо от нулевой точки экспоненциальных распределений и сдвинутые экспоненциальные распределения. Для таких законов распределений метод спектрального разложения позволяет получить решение в замкнутой форме. Показано, что в таких системах с запаздыванием среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычных системах. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. СМО $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$ с запаздыванием вполне могут быть использованы в качестве математической модели современного телетрафика.

Ключевые слова: *система с запаздыванием, двойственная пара $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$, преобразование Лапласа, среднее время ожидания в очереди, интегральное уравнение Линдли*

Введение

Для моделирования работы каналов в системах передачи данных широко используют теорию массового обслуживания на основе законов распределений, преобразуемых по Лапласу. Однако в научной литературе нет данных по результатам исследований систем массового обслуживания (СМО) с запаздыванием, хотя в науке и технике вообще известны системы с запаздыванием. В работе [1] рассмотрен пример работы дилера по продаже автомобилей как системы с несколькими запаздываниями безотносительно к системам массового обслуживания. В статье [2] представлены результаты приближения очередей запросов к сети Интернет и мобильным сервисам в виде очередей с запаздыванием во времени. Показано, что если информация задерживается достаточно долго, может происходить бифуркация Хопфа, которая может вызвать нежелательные колебания в очередях.

В работе [3] впервые приведены результаты по исследованию классической системы M/M/1 со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями как системы с запаздыванием во времени, полученные классическим методом спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) [4]. В работе [3] показано, что среднее время ожидания требования в очереди в такой системе меньше, чем в классической системе M/M/1 при одинаковом коэффициенте загрузки, за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ становятся меньше единицы при параметре запаздывания $t_0 > 0$. Таким образом, операция сдвига во времени трансформирует марковскую систему в немарковскую. За счет параметра сдвига $t_0 > 0$ законов распределений такое предположение о среднем времени ожидания можно сделать и для других систем массового обслуживания. Идея работы [3] развита для системы с запаздыванием во времени $H_2/H_2/1$ с гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка в статье [5].

Другой подход к решению уравнения Линдли использован в работе [6]. Здесь вместо термина "спектральное разложение" [4] использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — компоненты факторизации $\omega_+(z, t)$ и $\omega_-(z, t)$ функции $1 - z\chi(t)$, где $\chi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ с произвольной функцией распределения $C(t)$, а z — любое число из интервала $(-1, 1)$.

Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для среднего времени ожидания требований в очереди для двойственной пары СМО с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$, а также для этих систем со сдвинутыми распределениями. Последние, в отличие от обычных систем, обозначим $H_2^-/M^-/1$ и $M^-/H_2^-/1$. Из теории массового обслуживания известно, что все остальные характеристики СМО являются производными от среднего времени ожидания. Для решения поставленной задачи выбираем классический метод спектрального разложения решения ИУЛ, в котором сохраним стандартные обозначения [4]. Таким образом, нам предстоит вначале найти закон распределения случайной величины — времени ожидания в системе — через спектральное разложение вида: $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — некоторые рациональные функции от s, которые возможно разложить на множители, $A^*(s)$ и $B^*(s)$ — преобразования Лапласа функций плотности $a(t)$ и $b(t)$, описывающих работу СМО. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять определенным условиям согласно работе [4]:

- для $\mathrm{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- для $\mathrm{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D — некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t\to\infty} a(t)/\mathbf{e}^{-Dt} < \infty.$$

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s|\to\infty,\, \mathrm{Re}(s)>0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s|\to\infty,\, \mathrm{Re}(s)<D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1.$$

Решение задачи для системы $H_2/M/1$ с запаздыванием

Рассмотрим СМО $H_2^-/M^-/1$, на вход которой поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены с функцией плотности

$$a(t) = \begin{cases} p\lambda_1\mathbf{e}^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2\mathbf{e}^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \end{cases} \quad (1)$$

а время обслуживания

$$b(t) = \begin{cases} \mu\mathbf{e}^{-\mu(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases} \quad (2)$$

В функции (1) вероятность $p \in (0, 1)$, так как это распределение представляет собой сдвинутую вправо от нулевой точки на величину t_0 вероятностную смесь экспоненциальных распределений с тремя параметрами $(p, \lambda_1, \lambda_2)$. Теперь нужно решить задачу определения параметров распределений (1) и (2). Для этого определим числовые характеристики интервала между соседними требованиями входного потока для новой системы, воспользовавшись преобразованием Лапласа функции (1):

$$A^*(s) = \left[p\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right]\mathbf{e}^{-t_0 s}.$$

Значение первой производной функции $A^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ равно:

$$-\frac{dA^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями:

$$\overline{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Значение второй производной функции $A^*(s)$ в точке $s = 0$ дает второй начальный момент интервала поступления:

$$\overline{\tau_\lambda^2} = 2[p\lambda_1^{-2} + (1-p)\lambda_2^{-2}] + t_0^2 + 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}].$$

Используя полученные выражения для начальных моментов, определим значение квадрата коэффициента вариации интервала между поступлениями требований:

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}.$$

Далее для определения неизвестных параметров распределения (1) λ_1, λ_2, p запишем следующую систему уравнений по известному методу моментов:

$$p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0 = \overline{\tau}_\lambda; \quad (3)$$

$$\frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2} = c_\lambda^2. \quad (4)$$

Исходя из вида уравнения (3) положим

$$\lambda_1 = 2p/(\overline{\tau}_\lambda - t_0); \;\; \lambda_2 = 2(1-p)/(\overline{\tau}_\lambda - t_0) \quad (5)$$

и потребуем выполнения условия (4). Подставив решение (5) в равенство (4), получим уравнение четвертой степени относительно параметра p. Решив его с учетом условия $0 < p < 1$, отбросив тривиальные решения $p = 0$ и $p = 1$, определяем параметр p:

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\overline{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\overline{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2\overline{\tau}_\lambda^2]}}, \quad (6)$$

при этом можно воспользоваться любым из этих значений для p. Такой подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением описан в работе [7]. Заметим, что в соотношении (4) коэффициент вариации $c_\lambda > 0$. Подобный подход к аппроксимации законов распределений применен в работах [8—15].

Для определения числовых характеристик времени обслуживания для распределения (2) воспользуемся полученными в работе [3] равенствами для среднего значения $\overline{\tau}_\mu$ и коэффициента вариации времени обслуживания c_μ:

$$\mu^{-1} + t_0 = \overline{\tau}_\mu; \quad (7)$$

$$(1 + \mu t_0)^{-1} = c_\mu. \quad (8)$$

Заметим, что здесь коэффициент вариации $c_\mu < 1$ [3]. Из выражения (7) выразим интенсивность обслуживания

$$\mu = (\overline{\tau}_\mu - t_0)^{-1} \quad (9)$$

и, подставив (9) в (8), найдем параметр сдвига t_0

$$t_0 = \overline{\tau}_\mu(1 - c_\mu). \quad (10)$$

Выражение (10) будет определять диапазон изменения параметра сдвига t_0 для данной системы.

Вывод решения для среднего времени ожидания в системе $H_2^-/M^-/1$

Запишем преобразования Лапласа для функций (1) и (2) при $t_0 = 0$, т.е. для обычных распределений без сдвига:

$$A^*(s) = p\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}; \;\; B^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s}.$$

Тогда выражение для спектрального разложения решения ИУЛ $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для обычной системы $H_2/M/1$:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p)\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right]\frac{\mu}{\mu+s} - 1 = \frac{-s(s+s_1)(s-s_2)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu+s)}, \quad (11)$$

где $-s_1 = -(\sqrt{c_1^2/4 + c_0} - c_1/2)$ — отрицательный корень; $s_2 = \sqrt{c_1^2/4 + c_0} + c_1/2$ — положительный корень многочлена $s^2 - c_1 s - c_0$ с коэффициентами $c_0 = \mu[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] - \lambda_1\lambda_2$ и $c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$, которые выражаются через параметры распределений (1) и (2) при $t_0 = 0$.

Теперь найдем преобразования Лапласа для сдвинутых функций (1) и (2). Для этого воспользуемся теоремой запаздывания как свойством преобразования Лапласа: для преобразуемой по Лапласу функции $f(t)$ при любом $t_0 > 0$ справедливо равенство $L[f(t - t_0)] = \mathbf{e}^{-st_0}F^*(s)$, где $\mathrm{Re}(s) > 0$. Тогда справедливы равенства

$$A^*(s) = \left[p\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right]\mathbf{e}^{-t_0 s};$$

$$B^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}\mathbf{e}^{-t_0 s}.$$

Спектральное разложение решения ИУЛ $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы $H_2^-/M^-/1$ примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p)\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right] \times \mathbf{e}^{t_0 s}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\mathbf{e}^{-t_0 s} - 1 = \frac{s(s^2 - c_1 s - c_0)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu+s)} = \frac{-s(s+s_1)(s-s_2)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu+s)}.$$

Здесь показатели степени у экспонент в выражении для спектрального разложения обнуляются, и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Таким образом, основное выражение $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для метода спектрального разложения для системы с запаздыванием $H_2^-/M^-/1$ имеет такой же вид (11), как и для обычной системы $H_2/M/1$, следовательно, спектральное разложение в этом случае инвариантно к операции сдвига во времени закона распределения.

В последнем выражении $-s_1 = c_1/2 - \sqrt{c_1^2/4 + c_0}$ — отрицательный корень, а $s_2 = c_1/2 + \sqrt{c_1^2/4 + c_0}$ — положительный корень многочлена $s^2 - c_1 s - c_0 = 0$ в числителе разложения с коэффициентами $c_0 = \mu[(1 - p)\lambda_1 + p\lambda_2] - \lambda_1\lambda_2$ и $c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$. Компоненты спектрального разложения $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ с учетом условий, которым они должны удовлетворять, в данном случае имеют вид: $\psi_+(s) = s(s + s_1)/(s + \mu)$, $\psi_-(s) = (s - \lambda_1)(\lambda_2 - s)/(s - s_2)$.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K:

$$K = \lim_{|s|\to 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s|\to 0} \frac{(s + s_1)}{(s + \mu)} = \frac{s_1}{\mu},$$

которая представляет собой вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной. Построим функцию $\Phi_+(s) = K/\psi_+(s)$, через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания: $W^*(s) = s\Phi_+(s) = \dfrac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}$. Производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ и даст среднее время ожидания:

$$-\left.\frac{dW^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}\right]\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно среднее время ожидания в системе в стационарном режиме, определяемом условием $0 < \rho = \bar{\tau}_\mu/\bar{\tau}_\lambda < 1$, где ρ — коэффициент загрузки системы, выражается формулой

$$\overline{W} = 1/s_1 - 1/\mu, \qquad (12)$$

где $s_1 = (\sqrt{c_1^2/4 + c_0} - c_1/2)$ — абсолютное значение отрицательного корня $-s_1$.

Тем самым, мы можем воспользоваться для системы с запаздыванием $H_2^-/M^-/1$ известным результатом по среднему времени ожидания для обычной системы $H_2/M/1$ (12), но уже с измененными вследствие операции сдвига параметрами согласно выражениям (5), (6), (9) и (10).

Тогда алгоритм определения среднего времени ожидания для системы $H_2^-/M^-/1$ при заданных входных параметрах $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ сводится к последовательному нахождению неизвестных параметров распределений (1) и (2) λ_1, λ_2, p, μ из выражений (5), (6), (9), затем — к нахождению нужного корня $-s_1$ квадратного уравнения $s^2 - c_1 s - c_0 = 0$ и к применению расчетной формулы (12).

В табл. 1 приведены результаты расчетов времени ожидания для системы $H_2^-/M^-/1$ в пакете MathCAD при коэффициентах загрузки $\rho = 0{,}1$; 0,5 и 0,9 при нормированном времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$ и коэффициентах вариаций $c_\lambda = 2$; 4; 8 и $c_\mu = 0{,}1$; 0,5, 0,9. В этом случае перечисленным значениям c_μ согласно (8) соответствуют значения параметра запаздывания $t_0 = 0{,}9$; 0,5 и 0,1. В правой колонке для сравнения приведены результаты для обычной системы $H_2/M/1$. Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания в системе с запаздыванием.

Как видно из табл. 1, с уменьшением значения параметра сдвига t_0 среднее время ожидания в системе с запаздыванием $H_2^-/M^-/1$ стремится к значению среднего времени ожидания в обычной системе $H_2/M/1$, что подтверждает полную адекватность построенной модели. Вместе с тем, операция сдвига в зависимости от параметра сдвига t_0 во много раз уменьшает среднее время ожидания в системе с запаздыванием $H_2^-/M^-/1$.

Таблица 1

Результаты вычислительных экспериментов для СМО $H_2^-/M^-/1$ и $H_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
ρ	c_μ / c_λ	Для СМО $H_2^-/M^-/1$			Для СМО $H_2/M/1$
		$c_\mu = 0{,}1$ ($t_0 = 0{,}9$)	$c_\mu = 0{,}5$ ($t_0 = 0{,}5$)	$c_\mu = 0{,}9$ ($t_0 = 0{,}1$)	
0,1	2	0,001	0,05	0,15	0,19
	4	0,002	0,06	0,18	0,23
	8	0,002	0,06	0,20	0,25
0,5	2	0,02	0,60	1,82	2,16
	4	0,02	0,84	3,80	4,83
	8	0,02	0,95	7,02	10,40
0,9	2	0,92	15,46	21,12	22,41
	4	1,35	57,91	73,18	75,79
	8	1,64	227,6	281,2	289,1

Вывод решения для среднего времени ожидания в системе $M^-/H_2^-/1$

В двойственной системе $M^-/H_2^-/1$ распределения (1) и (2), а также их преобразования Лапласа поменяются местами. Закон распределения интервалов между соседними требованиями входного потока в виде функции плотности будет иметь вид

$$a(t) = \begin{cases} \lambda \mathbf{e}^{-\lambda(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \end{cases} \tag{13}$$

а время обслуживания задается функцией плотности

$$b(t) = \begin{cases} q\mu_1 \mathbf{e}^{-\mu_1(t-t_0)} + (1-q)\mu_2 \mathbf{e}^{-\mu_2(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{14}$$

Преобразования Лапласа функций (13) и (14) будут соответственно равны

$$A^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right) \mathbf{e}^{-t_0 s};$$

$$B^*(s) = \left[q\frac{\mu_1}{s+\mu_1} + (1-q)\frac{\mu_2}{s+\mu_2}\right] \mathbf{e}^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение для решения ИУЛ для системы $M^-/H_2^-/1$ будет иметь вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right) \mathbf{e}^{t_0 s} \left[q\frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q)\frac{\mu_2}{\mu_2 + s}\right] \mathbf{e}^{-t_0 s} - 1 =$$

$$= \frac{s(s^2 + l_1 s + l_0)}{(\lambda_1 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}{(\lambda_1 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)},$$

где $-\sigma_1 = -(l_1/2 - \sqrt{l_1^2/4 - l_0})$, $-\sigma_2 = -(l_1/2 + \sqrt{l_1^2/4 - l_0})$ — два различных действительных отрицательных корня квадратного уравнения $s^2 + l_1 s + l_0 = 0$ с коэффициентами $l_0 = \mu_1\mu_2 - \lambda[(1-q)\mu_1 + q\mu_2]$ и $l_1 = \mu_1 + \mu_2 - \lambda$.

Здесь опять показатели степени у экспонент в выражении обнуляются, и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Таким образом, основное выражение $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для метода спектрального разложения для системы с запаздыванием $M^-/H_2^-/1$ будет иметь такой же вид, как и для обычной системы $M/H_2/1$. Окончательно спектральное разложение можно записать в виде

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}{(\lambda_1 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}. \tag{15}$$

Наличие таких корней σ_1 и σ_2 следует из существования и единственности такого разложения [4] или же факторизации [6].

Компоненты спектрального разложения $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ в данном случае имеют вид $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}$, $\psi_-(s) = \lambda - s$. Далее по методике спектрального разложения найдем константу K:

$$K = \lim_{|s|\to 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s|\to 0} \frac{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\mu_1\mu_2}.$$

Через константу K найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s\frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{\sigma_1\sigma_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}.$$

Производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ и даст среднее время ожидания:

$$-\left.\frac{dW^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\sigma_1\sigma_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}\right]\Bigg|_{s=0} =$$

$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2}.$$

Окончательно среднее время ожидания в стационарном режиме в этом случае примет вид

$$\bar{W} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2}. \tag{16}$$

Для практического применения расчетной формулы (16) требуется записать выражения для определения неизвестных параметров (13) и (14). Для среднего значения интервала входного потока требований $\bar{\tau}_\lambda$ и коэффициента вариации c_λ имеем:

$$\lambda^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\lambda; \tag{17}$$

$$(1 + \lambda t_0)^{-1} = c_\lambda. \tag{18}$$

Заметим, что здесь коэффициент вариации $c_\lambda < 1$ при $t_0 > 0$ [2]. Из выражения (17) выразим интенсивность входного потока:

$$\lambda = (\bar{\tau}_\lambda - t_0)^{-1}. \tag{19}$$

Неизвестные параметры распределения (14) μ_1, μ_2, q определяются аналогично для системы $H_2^-/M^-/1$ заменой символа λ на μ:

$$\mu_1 = 2q/(\bar{\tau}_\mu - t_0);$$
$$\mu_2 = 2(1-q)/(\bar{\tau}_\mu - t_0); \qquad (20)$$
$$q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{\tau}_\mu^2]}}.$$

Запишем квадрат коэффициента вариации времени обслуживания:

$$\frac{[(1-q^2)\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 q(1-q) + q(2-q)\mu_2^2]}{[t_0\mu_1\mu_2 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2} = c_\mu^2$$

и оценим влияние на него параметра сдвига $t_0 > 0$. Сравнение с квадратом коэффициента вариации времени обслуживания при $t_0 = 0$, т.е. в случае несдвинутого распределения, показывает, что c_μ уменьшается в $1 + t_0\mu_1\mu_2/[\mu_1(1 - q) + q\mu_2]$ раз.

Тогда алгоритм определения времени ожидания для системы с запаздыванием $M^-/H_2^-/1$ сводится к последовательному решению уравнений (20), (19), (18) при заданных входных параметрах: $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ, t_0, а затем к нахождению отрицательных корней σ_1, σ_2 многочлена $s^2 + h_1 s + h_0$ и использованию расчетной формулы (16). В табл. 2 приведены результаты расчетов времени ожидания в пакете MathCAD при коэффициентах загрузки $\rho = 0{,}1$; 0,5 и 0,9 при нормированном времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$ и коэффициенте вариации $c_\mu = 2$; 4; 8 для обычной системы $M/H_2/1$. Согласно равенству (18) при таких значениях коэффициента загрузки ρ и параметре сдвига $t_0 = 0{,}9$ коэффициент вариации c_λ примет значения $c_\lambda = 0{,}91$; 0,55; 0,19 соответственно. Согласно тому факту, что коэффициент вариации c_μ при таких входных данных уменьшается в $1 + t_0\mu_1\mu_2/[\mu_1(1 - q) + q\mu_2] = 1{,}9$ раза, для системы $M^-/H_2^-/1$ коэффициенты вариации будут равны $c_\mu = 1{,}05$; 2,11; 4,21. В правой колонке для сравнения приведены результаты для обычной системы $M/H_2/1$. Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания в системе с запаздыванием.

Таблица 2

Результаты экспериментов для СМО $M^-/H_2^-/1$ и $M/H_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания					
		Для системы $M^-/H_2^-/1$			Для системы $M/H_2/1$		
ρ	c_μ / c_λ	$c_\mu = 1{,}05$	$c_\mu = 2{,}11$	$c_\mu = 4{,}21$	$c_\mu = 2$	$c_\mu = 4$	$c_\mu = 8$
0,1	0,91 ($t_0 = 0{,}9$)	0,06	0,25	0,99	0,28	0,94	3,61
0,5	0,55 ($t_0 = 0{,}9$)	0,56	2,23	8,87	2,50	8,50	32,50
0,9	0,15 ($t_0 = 0{,}9$)	5,01	20,08	79,80	22,50	76,50	292,50

Заключение

Полученные результаты приводят к следующим выводам. Операция сдвига во времени в законах распределений уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы $H_2^-/M^-/1$ при параметре сдвига $t_0 = 0{,}9$ (северо-западная клетка табл. 1) коэффициент вариации времени обслуживания уменьшается с 1 для обычной системы до 0,1 для системы с запаздыванием, а время ожидания уменьшается с 0,19 до 0,001 единицы времени. Для системы $M^-/H_2^-/1$ коэффициент вариации времени обслуживания уменьшается с 8 для обычной системы до 4,21 для системы с запаздыванием, а время ожидания уменьшается с 292,5 до 79,8 единицы времени (табл. 2), т.е. почти в четыре раза.

Практическое применение полученных результатов при анализе современного телетрафика просматривается следующим образом: при коэффициентах вариации c, больших 1, закон распределения можно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка H_2 либо H_2^-. При этом необходимо учесть уникальное свойство гиперэкспоненциального распределения, состоящее в том, что оно может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами [7, 8]. С точки зрения теории вероятностей описание закона распределения на уровне трех моментов все же точнее, но в таком случае применение изложенных результатов потребует большего объема вычислений из-за необходимости решения систем трех уравнений с использованием известного метода моментов.

Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига t_0 для распределения времени между поступлениями требований и времени их обслуживания.

Список литературы

1. **Медоуз Д. Х.** Азбука системного мышления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 343 с.
2. **Novitzky S., Pender J., Rand J., R. H., Wesson E.** Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2019. Vol. 18, N. 1. P. 279—311. DOI: https://doi.org/10.1137/18M1170637.
3. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Блатов И. А.** Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51—59. DOI: 10.1134/S0005117915110041.
4. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
5. **Тарасов В. Н., Ахметшина Э. Г.** Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с запаздыванием // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. № 4. С. 702—713. DOI: 10.14498/vsgtu1607.
6. **Бочаров П. П., Печинкин А. В.** Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
7. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Липилина Л. В.** Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. Т.22, № 2. С. 121—126.
8. **Тарасов В. Н., Карташевский И. В.** Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3. С. 182—185.
9. **Алиев Т. И.** Основы моделирования дискретных систем. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
10. **Алиев Т. И.** Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2(84). С. 88—93.
11. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. N. 1. P. 125—147.
12. **Myskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. 1991. P. 683—688.
13. **Jennings O. B., Pender J.** Comparisons of ticket and standard queues. Queueing Systems. 2016. Vol. 84, N. 1. P. 145—202.
14. **Тарасов В. Н., Горелов Г. А., Ушаков Ю. А.** Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. № 2. С. 40—44.
15. **Legros B.** M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, N. 3. P. 269—301. DOI: https://doi.org/10.1007 /s11134-017-9557-7.
16. **Тарасов В. Н.** Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.

V. N. Tarasov, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru,
N. F. Bakhareva, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: nadin1956_04@inbox.ru,
E. G. Akhmetshina, Postgraduate,
Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation

Teletrafic Models Based on Dual Systems with Delay with Hyperexponential and Exponential Distributions

In queuing theory, the G/M/1 and M/G/1 systems are widely used, while for the first system there is still no final solution in the general case. Here G in the first system according to Kendall symbolism means an arbitrary law of the distribution of intervals between the requirements of the input flow, M is the exponential law of service time, and in the second system, it is exactly the opposite. The article considers the problem of determining the characteristics of queuing systems (QS) $H_2/M/1$ and $M/H_2/1$ with delay with hyperexponential (H_2) and exponential (M) distributions. This problem is solved using the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation. As input distributions for the systems under consideration, probabilistic mixtures of exponential distributions shifted to the right from the zero point and shifted exponential distributions are selected. For such distribution laws, the spectral decomposition method allows one to obtain a closed-form solution. It is shown that in such systems with delay, the average waiting time for requirements in the queue is shorter than in conventional systems. This is because the time shift operation reduces the coefficient of variation of the intervals between receipts and the service time, and as is known from the queuing theory, the average waiting time for requirements is associated with these coefficients of variation by a quadratic dependence. QS $H_2/M/1$ and $M/H_2/1$ with delay can very well be used as a mathematical model of modern teletraffic.

Keywords: *Delayed system, dual pair $H_2/M/1$ and $M/H_2/1$, Laplace transform, average waiting time in a queue, Lindley integral equation*

DOI: 10.17587/it.26.195-202

References

1. **Meadows D. Kh.** The ABC of systemic thinking, Moscow, BINOM. Laboratory of Knowledge, 2011, 343 p. (in Russian).
2. **Novitzky S., Pender J., Rand J. R. H., Wesson E.** Nonlinear Dynamics in Queuing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay**,** *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 279—311, doi: https://doi.org/10.1137/18M1170637.
3. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A.** Analysis and calculation of queuing systems with delay, *Automation and Telemechanics*, 2015, no. 11, pp. 51—59, doi: 10.1134 / S0005117915110041 (in Russian).
4. **Kleinrock L.** Theory of queuing, Moscow, Mechanical Engineering, 1979, 432 p. (in Russian).
5. **Tarasov V. N., Akhmetshina E. G.** The average waiting time in the queuing system H2 / H2 / 1 with delay, *Vestn. Itself. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. Science*, 2018, no. 4, pp. 702—713, doi: 10.14498 / vsgtu1607 (in Russian).
6. **Bocharov P. P., Pechinkin A. V.** Queuing theory, Moscow, Publishing House of RUDN, 1995, 529 p. (in Russian).
7. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Lipilina L. V.** The mathematical model of teletraffic based on the G/M/1 system and the results of computational experiments, *Informacionnye Technologii*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 121—126 (in Russian).
8. **Tarasov V. N., Kartashevsky I. V.** Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results, *Control Systems And Information Technology*, 2015, no. 3, pp. 182—185 (in Russian).
9. **Aliev T. I.** Fundamentals of modeling discrete systems, St. Petersburg, Publishing House of St. Petersburg State University ITMO, 2009, 363 p. (in Russian).
10. **Aliev T. I.** Approximation of probability distributions in queuing models, *Scientific and Technical Bulletin of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2013, no. 2 (84), pp. 88—93 (in Russian).
11. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, no. 1, pp. 125—147.
12. **Myskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals*, Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683—688.
13. **Jennings O. B., Pender J.** Comparisons of ticket and standard queues, *Queueing Systems,* 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145—202.
14. **Tarasov V. N., Gorelov G. A., Ushakov Yu. A.** Recovery of moment characteristics of the distribution of intervals between packets of incoming traffic, *Infocommunication Technologies*, 2014, no. 2, pp. 40—44 (in Russian).
15. **Legros B.** M / G / 1 queue with event-dependent arrival rates, *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269—301, doi: https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7.
16. **Tarasov V. N.** Probabilistic computer modeling of complex systems, Samara, SSC RAS, 2002, 194 p. (in Russian).

Специализированная выставка

Безопасность. IT-технологии. Коммуникации. Связь 2020

Даты проведения: 21.05.2020—23.05.2020 г.
Место проведения: Россия, Челябинск

Тематические направления выставки:

- IT-системы и оборудование
- IT-услуги, консалтинг, интернет-технологии
- Мобильная и спутниковая связь, IP-телефония
- Сети передачи данных мобильные сети
- Программное обеспечение
- Системы и технические средства видеонаблюдения
- Программы по обеспечению комплексной безопасности
- Методы, технологии и оборудование для обеспечения безопасности
- Системы защиты информации и управления данными
- Телекоммуникационные технологии безопасности

12-й Международный форум

IT-форум — Югра 2020

Даты проведения: 16.06.2020—17.06.2020 г.
Место проведения: Россия, Ханты-Мансийск

Тематика форума в области информационных технологий

- Электронные регионы, электронные муниципалитеты
- ИТ-парки; ИТ-бизнес-инкубаторы
- Информационно-коммуникационные технологии
- Электронный документооборот в органах государственной власти
- Информационных технологий для взаимодействия государства с бизнесом
- Использование инфокоммуникаций в социальной сфере
- Системы идентификации пользователя, системы защиты информации
- Телекоммуникации как средство человеческого общения
- Средства развлечения, использование инфокоммуникационных систем доступа
- Защита персональных данных