

А. Ф. Валеева, д-р техн. наук, проф., aida\_val2004@mail.ru,  
И. А. Янтурин, магистрант, yanturin.ilmir@gmail.com,  
Р. С. Валеев, канд. техн. наук, доц., ruslan\_valeev@inbox.ru,

Уфимский государственный авиационный технический университет

## Об одной задаче доставки груза различным клиентам с возможностью дозагрузки

Рассматривается задача маршрутизации для доставки груза различным клиентам с учетом возможности дозагрузки недостающего заказа в соответствующих пунктах (*Modified Vehicle Routing Problem with Satellite Facilities, MVRPSF*). Представлена математическая модель задачи *MVRPSF*, включающая такие ограничения, как грузоподъемность транспортных средств (ТС), наличие депо и пунктов дозагрузки, отдельную доставку. Для ее решения разработан эволюционный алгоритм, позволяющий получать рациональные маршруты доставки груза различным клиентам с предварительным размещением заказов в ТС.

**Ключевые слова:** маршрутизация, размещение грузов в автомобильные транспортные средства, пункты дозагрузки, эволюционный алгоритм

### Введение

При принятии логистических решений в целях удовлетворения требований клиентов по доставке груза (заказов) главными являются задачи операционного планирования [1], таких как: прогнозирование объемов спроса; управление запасами; управление поставками и закупками; транспортировка, включающая выбор типа транспортных средств (ТС), определение их маршрутов и плана загрузки; организация погрузочно-разгрузочных работ; складирование. В данной статье основное внимание уделяется задачам маршрутизации с возможностью дозагрузки недостающих заказов в специализированных пунктах дозагрузки и их размещения в автомобильных ТС одинаковой грузоподъемности. Данные задачи представляются актуальными, поскольку транспортно-логистические услуги составляют 86 % от всего объема рынка российской логистики [2], а по данным 2018 г. доля автомобильных перевозок в России составляет 40,6 % [3].

Задачи маршрутизации ТС (*Vehicle Routing Problem, VRP*) и задачи размещения грузов внутри ТС (*Three-Dimensional Bin Packing Problem, 3DBPP*), как известно, являются NP-трудными задачами комбинаторной оптимизации, и для их решения разрабатываются эвристические методы. Как отмечено в работе [3], применение современного логистического инструментария позволит снизить общие экономические издержки в среднем на 15...35 %, а транспортных расходы — примерно на 25 %.

Для поиска оптимальных маршрутов по классификации, предложенной в работе [4] Р. Toth и D. Vigo, известны следующие задачи маршрутизации ТС: с ограничением на грузоподъемность (*Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP*), когда каждое ТС имеет ограниченную грузоподъемность; с временными окнами (*Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW*), когда у каждого клиента есть так называемое "временное окно", в которое он должен быть обслужен; с множеством депо (*Multiple Depot Vehicle Routing Problem, MDVRP*), если используются несколько депо для обслуживания клиентов; с отдельной доставкой (*Split Delivery Vehicle Routing Problem, SDVRP*), когда каждый клиент может быть обслужен одновременно несколькими ТС; с заданным периодом планирования в размере нескольких дней (временной горизонт), если клиенты посещаются с разной частотой, заданной для каждого клиента (*Periodic Vehicle Routing Problem, PVRP*); с немедленным возвратом товаров (*Vehicle Routing Problem with Pick-up and Delivery, VRPPD*), когда клиенты могут возвращать некоторые товары в депо; с возвратом товаров (*Vehicle Routing Problem with Backhauls, VRPB*), если клиенты могут возвращать некоторые товары в депо, но только после того, как весь товар будет доставлен клиентам; с возможностью дозагрузки (*Vehicle Routing Problem with Satellite Facilities, VRPSF*), когда ТС могут дополнительно загрузиться на маршруте в промежуточных пунктах-складах; со случайными данными (*Stochastic Vehicle Routing Problem, SVRP*), когда некоторые ком-

поненты задачи (число и спрос клиентов, расстояния между городами и клиентами) могут иметь случайное поведение.

В статье рассматривается задача маршрутизации *MVRPSF*, являющаяся модификацией известной задачи *VRPSF* [5], возникшая в компании, занимающейся организацией освещения в различных регионах России. Одной из подзадач являлась доставка соответствующего оборудования (шкафов *АСКУЭ* (*АСКУЭ* — автоматизированная система коммерческого учета энергоресурсов (рис. 1)) арендуемыми автомобильными ТС одинаковой грузоподъемности, находящимися в депо. При этом имеются пункты дозагрузки, в которых ТС могут пополнять недостающий запас груза последующим клиентам, не возвращаясь в депо. Известны спрос на оборудование, время обслуживания клиентов (населенные пункты), максимально разрешенное время маршрута, стоимость пройденной единицы времени ТС (включены стоимости аренды ТС и бензина), стоимость прохождения ТС по платным дорогам, дорожные ограничения. Груз (оборудование) доставляется клиентам в контейнерах параллелепipedной формы, предварительно размещенных на поддонах. Требуется найти маршрут доставки оборудования с минимальными общими затратами при выполнении следующих ограничений:

- каждый маршрут начинается и заканчивается в депо;
- масса груза, загружаемого в ТС, не должна превышать грузоподъемности ТС (*CVRP*);
- каждый клиент может быть обслужен более чем одним ТС (запрос на поставку гру-

за клиенту может быть разделен между несколькими ТС — используется отдельная доставка, *SDVRP*);

- перед отправкой к различным клиентам груз размещается в ТС (решается задача *3DBPP*);
- ТС могут выполнить дозагрузку на маршруте, без возврата в депо с помощью дополнительных пунктов дозагрузки.

### 1. Математическая модель задачи доставки груза различным клиентам с возможностью дозагрузки (*MVRPSF*) и задачи его размещения внутри ТС (*3DBPP*)

В основу модели задачи доставки груза различным клиентам с возможностью дозагрузки (*MVRPSF*) с учетом ряда ограничений легли модели следующих задач: задача маршрутизации ТС с ограничением на грузоподъемность (*CVRP*), задача маршрутизации ТС с отдельной доставкой (*SDVRP*), задача маршрутизации ТС с возможностью дозагрузки (*VRPSF*) [5], причем обозначения, введенные в перечисленных задачах, сохраняются. На рис. 2, а, б (см. вторую сторону обложки) приведена иллюстрация доставки груза клиентам с отдельной доставкой и без, причем груз, предназначенный различным клиентам, окрашен в разные цвета.

#### Математическая модель задачи *MVRPSF*

Дано:  $G = (V, E)$  — взвешенный граф с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$  (под ребром понимаются участки автомобильных дорог);  $V$  — множество вершин, которое делится на два подмножества  $I$  и  $F$ ;  $I$  — множество клиентов;  $I_0 = I \cup \{0\}$ , где вершина 0 — это депо;  $i, j$  — номера клиентов;  $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$ ;  $F$  — множество пунктов дозагрузки;  $\alpha$  — индекс для пунктов дозагрузки или депо,  $\alpha \in F = \{1, \dots, s\} \cup \{0\}$ ;  $F_\mu$  — множество вершин, соответствующее потенциальным посещениям пунктов дозагрузки;  $F_0$  — депо, используемое в качестве пункта для дозагрузки;  $n_\alpha$  — число дополнительных пунктов для дозагрузки;  $\bar{n} = n + \sum_{\alpha=0}^s n_\alpha$  — число пунктов в сети;  $d_{ij}$  — расстояние между пунктами  $i$  и  $j$ , где пунктами могут быть клиенты,

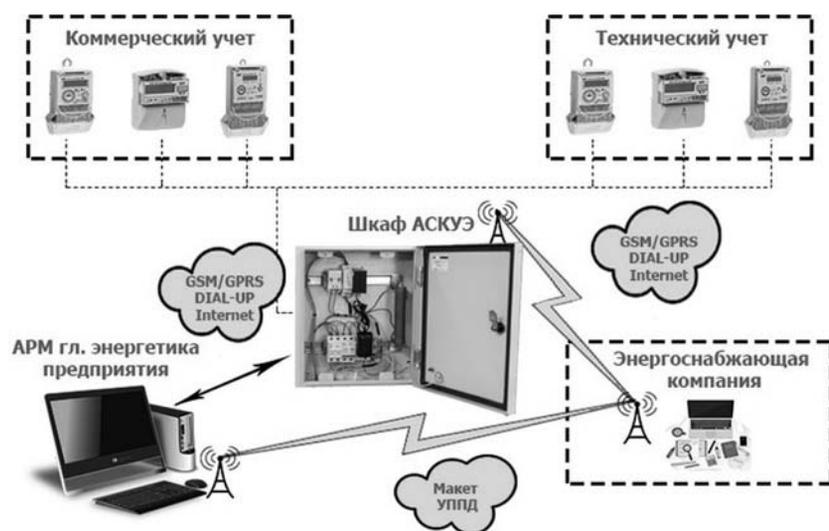


Рис. 1. Структурная схема АСКУЭ

депо или дозагрузочные пункты;  $\tau_{ij}$  — время в пути между пунктами  $i$  и  $j$ ;  $m$  — число используемых ТС;  $Q_v$  — грузоподъемность ТС  $v$ ;  $\bar{Q}_v$  — максимальное количество разрешенного в ТС  $v$  остатка груза до его пополнения,  $\bar{Q}_v < Q_v$ ;  $\text{cost}_{rent}$  — стоимость аренды ТС в единицу времени;  $\text{cost}_{petrol}$  — затраты на бензин ТС;  $\text{cost}_{road_{ij}}$  — стоимость прохождения по платным дорогам между клиентами  $i, j$ ;  $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$ ;  $T_v$  — максимально разрешенное время маршрута для ТС  $v$ ;  $q_i$  — спрос клиента  $i$ ;  $p_{iv}$  — время обслуживания клиента  $i$  ТС  $v$ , время загрузки в дозагрузочных пунктах, либо в депо;

**Переменные:**  $x_{ij}^v$  — переменная логического типа, принимающая значение 1, если ТС  $v$  перемещается из депо в направлении от клиента  $i$  к клиенту  $j$ , и 0 — в противном случае;  $t_j^v$  — время начала обслуживания клиента  $j$ ;  $y_{jv}$  — загрузка остатка груза (оборудования) непосредственно перед посещением клиента  $j$ ;  $\bar{y}_{iv}$  — количество груза, доставляемого клиенту  $i$  ТС  $v$ .

Требуется минимизировать общие транспортные расходы:

$$\sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{\bar{n}} \sum_{v=1}^m (\text{cost}_{rent} + \text{cost}_{petrol} + \text{cost}_{road_{ij}}) d_{ij} x_{ij}^v \rightarrow \min \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

- пройденный маршрут включает каждую вершину не менее одного раза (*SDVRP*):

$$\sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{\bar{n}} \sum_{v=1}^m x_{ij}^v \geq 1, i = 1, \dots, n; \quad (2)$$

- каждый дозагрузочный пункт имеет максимум одного приемника (клиента, к которому ТС  $v$  едет после дозагрузки):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij}^v \leq 1, i \in F_0 \cup \dots \cup F_s, v = 1, \dots, m; \quad (3)$$

- число посещений клиентов равно числу выездов от них:

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{\bar{n}} x_{ji}^v - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{\bar{n}} x_{ij}^v = 0, j = 0, \dots, \bar{n}, v = 1, \dots, m; \quad (4)$$

- количество груза  $y_{jv}$  в ТС  $v$  перед посещением клиента  $j$ :

$$\begin{aligned} y_{jv} &\leq \bar{y}_{iv} x_{ij}^v + \bar{Q}_{iv} (1 - x_{ij}^v), i \neq j; \\ i &\in I \cup F_0 \cup \dots \cup F_s; \\ j &\in I_0 \cup F_0 \cup \dots \cup F_s; v = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (5)$$

- количество груза в ТС  $v$ , если  $j$  — клиент:

$$\hat{y}_{jv} \leq y_{jv} \leq Q_v, j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, m; \quad (6)$$

- количество груза в ТС  $v$ , если  $j$  — дозагрузочный пункт:

$$0 \leq y_{jv} \leq \bar{Q}_v, i \in F_0 \cup \dots \cup F_s; v = 1, \dots, m; \quad (7)$$

- клиент  $i$  может быть обслужен ТС  $v$  в том случае, если ТС  $v$  проходит через  $i$  (*CVRP*):

$$\bar{y}_{iv} \leq q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^v \leq 1, i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, m; \quad (8)$$

- спрос всех клиентов в грузе должен быть удовлетворен (*CVRP*):

$$\sum_{v=1}^m \bar{y}_{iv} = q_i, i = 1, \dots, n; \quad (9)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\}; i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n; v = 1, \dots, m;$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y}_{iv} &= \begin{cases} y_{iv} - \hat{y}_{iv}, & \text{если } i \in I; \\ Q_v, & \text{если } i \in F_0 \cup \dots \cup F_s; v = 1, \dots, m; \end{cases} \\ \bar{Q}_{iv} &= \begin{cases} Q_v - \hat{y}_{iv}, & \text{если } i \in I; \\ Q_v, & \text{если } i \in F_0 \cup \dots \cup F_s; v = 1, \dots, m. \end{cases} \end{aligned}$$

Перед доставкой груза клиентам он размещается в кузове автомобильного ТС (решается задача упаковки *3DBPP*), загрузка проводится от задней части ТС (от дверей) последовательно в порядке обхождения клиентов по правилу "*LIFO (Last-In First-Out)*" с учетом центра тяжести.

### Математическая модель задачи *3DBPP*

Дано:

$W$  — ширина кузова ТС;  $L$  — длина кузова ТС;  $H$  — высота кузова ТС;  $pod = (x_{pod}, y_{pod}, z_{pod})$  — координаты переднего левого нижнего угла поддона;

$(l_{pod}, w_{pod}, h_{pod}, q_{pod}, h_{pod \max})$  — размеры поддона, где  $l_{pod}$  — длина;  $w_{pod}$  — ширина;  $h_{pod}$  — высота;  $q_{pod}$  — грузоподъемность;  $h_{pod \max}$  — максимально разрешенная высота поддона;  $(x_{pod_{jl}}, y_{pod_{jl}}, z_{pod_{jl}})$  — координаты  $l$ -й вершины  $j$ -го поддона,  $j = 1, \dots, kolpod$ , где  $kolpod$  — число поддонов;  $N$  — число заданных контейнеров с грузом для различных клиентов;  $w = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_N)$  — вектор ширин контейнеров;  $l = (l_1, \dots, l_i, \dots, l_N)$  — вектор длин контейнеров;  $h = (h_1, \dots, h_i, \dots, h_N)$  — вектор высот контейнеров;  $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$  — вектор масс контейнеров, где  $m_i$  — масса  $i$ -го контейнера,  $C = (cg_1, cg_2, \dots, cg_N)$  — вектор центров тяжести

контейнеров, где  $cg_i = (x_{ц.т.}, y_{ц.т.}, z_{ц.т.})$  — вектор координат центра тяжести  $i$ -го контейнера по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Вводится система координат  $XYZ$ , где  $(0,0,0)$  — начало координат, совпадающее с передней левой нижней вершиной груза (параллелепипеда),  $(x_i, y_i, z_i)$  — координаты  $i$ -го груза. Решение задачи представляется в виде:  $\langle X, Y, Z, CG \rangle$ ,  $X, Y, Z, CG \in Z^+$ , где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_N)$ ,  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_N)$  — векторы координат переднего левого нижнего угла размещенных грузов;  $CG = (X_{ц.т.}, Y_{ц.т.}, Z_{ц.т.})$  — координаты расположения центра тяжести загруженного кузова ТС допустимой области  $G$ , т. е. в цилиндре,  $R$  — радиус основания цилиндра,  $h_1, h_2$  — границы значения допустимой высоты цилиндра:

$$G = (x - L/2)^2 + (y - W/2)^2 = R^2;$$

$$h_1 \leq z \leq h_2;$$

$$X_{ц.т.} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i m_i)}{\sum_{i=1}^N m_i};$$

$$Y_{ц.т.} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i m_i)}{\sum_{i=1}^N m_i};$$

$$Z_{ц.т.} = \frac{\sum_{i=1}^N (z_i m_i)}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты центра тяжести  $i$ -го груза,  $m_i$  — масса  $i$ -го груза.

Требуется минимизировать число ТС с размещенными в них грузами:

$$NN \rightarrow \min_P,$$

где  $P$  — множество различных размещений грузов, при заданных ограничениях:

- предметы не выходят за грани поддона:

$$(x_i \geq 0) \wedge (y_i \geq 0) \wedge (z_i \geq 0) \wedge (l_{pod} > (x_i + l_i)) \wedge (w_{pod} > (y_i + w_i)) \wedge (h_{pod} > (z_i + h_i)); \quad (10)$$

- стороны предметов параллельны граням поддона:

$$((x_{jl} = x_j) \vee (x_{jl} = (x_j + l_{pod}))) \wedge ((y_{jl} = y_j) \vee (y_{jl} = (y_j + w_{pod}))) \wedge ((z_{jl} = z_j) \vee (z_{jl} = (z_j + h_{pod}))); \quad (11)$$

- стороны поддонов параллельны граням кузова ТС:

$$((x_{pod_{jl}} = x_{pod_j}) \vee (x_{pod_{jl}} = (x_{pod_j} + l_{pod_j}))) \wedge ((y_{pod_{jl}} = y_{pod_j}) \vee (y_{pod_{jl}} = (y_{pod_j} + w_{pod_j}))) \wedge ((z_{pod_{jl}} = z_{pod_j}) \vee (z_{pod_{jl}} = (z_{pod_j} + h_{pod_j}))); \quad (12)$$

- поддоны, принадлежащие одному ТС, не перекрывают друг с другом:

$$(x_{pod_i} \geq (x_{pod_j} + l_{pod_j})) \vee (x_{pod_j} \geq (x_{pod_i} + l_{pod_i})) \vee (y_{pod_i} \geq (y_{pod_j} + w_{pod_j})) \vee (y_{pod_j} \geq (y_{pod_i} + w_{pod_i})) \vee (z_{pod_i} \geq (z_{pod_j} + h_{pod_j})) \vee (z_{pod_j} \geq (z_{pod_i} + h_{pod_i})); \quad (13)$$

- поддоны не выходят за грани кузова:

$$(x_{pod_i} \geq 0) \wedge (y_{pod_i} \geq 0) \wedge (z_{pod_i} \geq 0) \wedge (L \geq (x_{pod_i} + l_{pod_i})) \wedge (W \geq (y_{pod_i} + w_{pod_i})) \wedge (H \geq (z_{pod_i} + h_{pod_i})); \quad (14)$$

- максимальная высота  $H_{max}$  размещенных на поддон предметов не превышает максимально разрешенной высоты поддона:

$$H_{max} \leq h_{pod_{max}}; \quad (15)$$

- стороны предметов (грузов) параллельны граням кузова ТС:

$$((x_{jl} = x_j) \vee (x_{jl} = x_j + l_j)) \wedge ((y_{jl} = y_j) \vee (y_{jl} = y_j + w_j)) \wedge ((z_{jl} = z_j) \vee (z_{jl} = z_j + h_j)),$$

где  $(x_{jl}, y_{jl}, z_{jl})$  — координаты  $l$ -й вершины  $j$ -го груза для  $j = 1, \dots, N$ ;

- предметы не перекрывают друг друга:

$$(x_i \geq (x_j + l_j)) \vee (x_j \geq (x_i + l_i)) \vee (y_i \geq (y_j + w_j)) \vee (y_j \geq (y_i + w_i)) \vee (z_i \geq (z_j + h_j)) \vee (z_j \geq (z_i + h_i)), \quad \text{для } i \neq j, i, j = 1, \dots, N; \quad (16)$$

- предметы не выходят за грани кузова ТС:

$$(x_i \geq 0) \wedge (y_i \geq 0) \wedge (z_i \geq 0) \wedge (L \geq (x_i + l_i)) \wedge (W \geq (y_i + w_i)) \wedge (H \geq (z_i + h_i)); \quad (17)$$

- масса размещенных предметов на поддоне не превышает грузоподъемности поддона:

$$\sum_{i=1}^N m_i \leq q_{pod}; \quad (18)$$

- отклонение центра тяжести упакованного ТС от центра (точки пересечения диагоналей) должно быть минимальным:

$$d = \sqrt{(X_{ц.т.} - L/2)^2 + (Y_{ц.т.} - W/2)^2 + (Z_{ц.т.} - H/2)^2} \rightarrow \min; \quad (19)$$

- координаты центра тяжести загруженного кузова ТС расположены в допустимой области  $G$ , т. е. в цилиндре:

$$\begin{aligned} (x - X_{ц.т})^2 + (y - Y_{ц.т})^2 &\leq R^2; \\ h_1 &\leq Z_{ц.т} \leq h_2. \end{aligned} \quad (20)$$

## 2. Эволюционный алгоритм для решения задач *MVRPSF* и *3DBPP*

Для решения рассматриваемой задачи разработан алгоритм *VRPSF-3D* на базе эволюционного алгоритма  $(\mu + \lambda)$ -*EA* (*Evolutionary Algorithm, EA*) [6, 7]. В отличие от генетических алгоритмов, в алгоритме  $(\mu + \lambda)$ -*EA* применяется только оператор мутации (случайным образом выбираются два клиента и меняются местами в маршруте), при этом параметр  $\lambda$  — это число потомков (новых маршрутов), а параметр  $\mu$  — число родителей (сгенерированных маршрутов), при этом детерминировано выбираются лучшие по целевой функции потомки ( $0 < \lambda < \mu$ ). На рис. 3 приведен алгоритм *VRPSF-3D* для решения задачи *MVRPSF*.

## 3. Численный эксперимент для оценки эффективности алгоритма *VRPSF-3D*

Численные эксперименты проводили на вычислительной машине Intel Core i5 с частотой 2,6 GHz и оперативной памятью 4 Гб на платформе 64-разрядной операционной системы Windows 8,1. Для решения задачи *MVRPSF* были реализованы два эволюционных алгоритма  $(1 + 1)$ -*EA* и  $(1 + 2)$ -*EA* и сгенерированы тестовые наборы (расстояния между клиентами, между клиентами и пунктами дозагрузки), значения спроса соответственно для 25 и 45 клиентов, пункты дозагрузки варьировались от 1 до 5. В тестовом наборе данных  $CnSn_\alpha Dq$  обозначение  $Cn$  — это число клиентов ( $n = 25; 45$ );  $Sn_\alpha$  — число пунктов дозагрузки ( $n_\alpha = 0, \dots, 5$ );  $Dq$  — число прогонов ( $q = 7$ ); 400I и 500I — число итераций (400 и 500) алгоритмов. Каждый тестовый набор прогонялся семь раз. В табл. 1 приведено сравнение средних стоимостей маршрутов для 25 клиентов и пяти дозагрузочных пунктов, на рис. 4, а, б (см. вторую сторону обложки) приведены диаграммы для результатов табл. 1 и среднего времени работы алгоритмов  $(1 + 1)$ -*EA* и  $(1 + 2)$ -*EA*.

В табл. 2 приведено сравнение средних стоимостей маршрутов для 45 клиентов и пяти дозагрузочных пунктов, на рис. 5, а, б (см. вторую сторону обложки) приведены диаграммы

**Алгоритм *VRPSF-3D***

*Шаг 0.* Инициализация переменных

*Шаг 1.* Загрузка груза в ТС  $v$  (решается *3DBPP* (10)-(20), [8])

*Шаг 2.* Цикл по числу итераций

Если маршрута нет, то генерировать  $\lambda$  маршрутов  $x_{total}^i$

иначе

Цикл по  $\lambda$

$x_{ij}^i = \text{мутация}(x_{total}^i)$

Конец цикла по  $\lambda$

Конец\_если\_маршрута\_нет

Цикл по числу маршрутов

$K = Q_v$  (решается *3DBPP*)

Цикл по числу клиентов  $n$

Пока спрос  $i$ -го клиента  $q_i$  не будет удовлетворен, выполнить:

Если в ТС  $v$  все грузы  $i$ -го клиента размещены, (т.е. спрос  $q_i \leq K$ ), то  $K = K - q_i$ ; спрос  $i$ -го клиента удовлетворен

иначе

Если  $q_i > Q_v$  и если доля оставшегося груза в ТС  $K/Q_v \cdot 100\% \geq Q_{reserve}$ , то

$q_i = q_i - K$

Поиск ближайшего пункта дозагрузки  $s$  от  $i$ -го клиента

иначе

Поиск наименьшего расстояния от  $i$ -го клиента до пункта дозагрузки  $s$  и от пункта дозагрузки  $s$  до  $i+1$ -го клиента

Конец\_Если

Если найденный пункт дозагрузки  $s$  депо и если есть неиспользованные ТС, то новое ТС включается в маршрут

Добавление найденного пункта дозагрузки  $s$  в маршрут

$K = Q_v$  (решается *3DBPP*)

Конец\_если\_  $q_i \leq K$

Конец\_цикла\_пока

Конец\_цикла\_по\_числу\_клиентов

Конец\_цикла\_по\_числу\_маршрутов

Если выполняются ограничения (2)-(9), то сравнение стоимости нового и текущего маршрутов и выбор наилучшего маршрута, иначе маршрут не существует

Конец\_цикла\_по\_итерациям

Вывод маршрута  $x_{total}^i$

Рис. 3. Алгоритм *VRPSF-3D* для решения задачи *MVRPSF*

Таблица 1  
Сравнение средних стоимостей маршрутов для 25 клиентов

Набор данных	Алгоритм			
	(1 + 1)- EA(400I)	(1 + 1)- EA(500I)	(1 + 2)- EA(400I)	(1 + 2)- EA(500I)
C25S5	379511,688	373939,880	365331,214	366879,060
C25S4	377455,978	377646,850	366516,772	365728,245
C25S3	389652,783	389228,222	373778,422	375115,648
C25S2	417374,221	410995,140	400887,474	398608,087
C25S1	436645,971	434722,761	425910,131	420026,363
C25S0	472241,377	468573,985	455591,205	456230,756

Таблица 2

Сравнение средних стоимостей маршрутов для 45 клиентов

Набор данных	Алгоритм			
	(1 + 1)-EA(400I)	(1 + 1)-EA(500I)	(1 + 2)-EA(400I)	(1 + 2)-EA(500I)
C45S5	691982,023	692911,677	675945,203	679537,390
C45S4	716029,800	714792,839	703425,290	699705,519
C45S3	724870,755	716403,365	707629,317	704713,844
C45S2	733388,352	728944,069	715523,360	710660,777
C45S1	811113,063	800260,047	789023,352	788447,802
C45S0	836895,690	832073,433	826121,102	822050,662

для результатов табл. 2 и среднего времени работы алгоритмов (1 + 1)-EA и (1 + 2)-EA.

Как показали численные эксперименты, лучший результат показал алгоритм (1 + 2)-EA, меньше вычислительного времени затрачивает алгоритм (1 + 1)-EA, при этом на стоимость маршрута оказывает влияние число пунктов дозагрузки: она меньше при их числе, равном пяти (в данном эксперименте).

Рассмотрим пример поиска маршрута для доставки оборудования в различные города Башкирии на реальных данных предприятия. Депо расположено в Уфе, клиенты находятся в шести городах: в Октябрьском (спрос  $q_1 = 15$  на шкафы АСКУЭ), Стерлитамаке (спрос  $q_2 = 25$ ), Ишимбае (спрос  $q_3 = 9$ ), Кумертау (спрос  $q_4 = 8$ ), Агидели (спрос  $q_5 = 6$ ), Учалах (спрос  $q_6 = 10$ ). Пункт дозагрузки в Салавате. Грузоподъемность ТС — 20 шкафов. Стоимость часа аренды ТС — 1000 руб. Расход ТС на 100 км равен 15 л (стоимость 1 л топлива равна

41,64 руб.), средняя скорость ТС — 90 км/ч. Алгоритмом (1 + 1)-EA найден маршрут Уфа — Стерлитамак — Салават — Стерлитамак — Ишимбай — Салават — Кумертау — Агидель — Нефтекамск — Октябрьский — Уфа — Учалы — Уфа, длина маршрута составила 1985 км, затраты (топливо и аренда ТС) равны 49 054 руб. (рис. 6). Алгоритмом (1 + 2)-EA получен маршрут Уфа — Стерлитамак — Салават — Стерлитамак — Ишимбай — Салават — Кумертау — Учалы — Уфа — Октябрьский — Нефтекамск — Агидель — Уфа, длина маршрута — 1791 км, затраты составили (на топливо и аренду ТС) 45 687 руб (рис. 7).

Стоимость маршрута состояла из стоимостей аренды ТС ( $cost_{rent}$ ) и стоимости бензина ТС ( $cost_{petrol}$ ), каждая из которых вычислялась соответственно по следующим формулам:

$$cost_{rent} = \left( \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sum_{v=1}^m p_{iv} + \frac{\left( \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{\bar{n}} \sum_{v=1}^m d_{ij}^v x_{ij}^v \right)}{\text{средняя\_скорость\_ТС\_v}} \right) \times \text{стоимость\_аренды\_ТС\_за\_ед.\_времени};$$

$$cost_{petrol} = \frac{\left( \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{\bar{n}} \sum_{v=1}^m d_{ij}^v x_{ij}^v \right)}{100 \cdot \text{расход\_топлива\_на\_100 км}} \times \text{стоимость\_одного\_литра\_топлива},$$

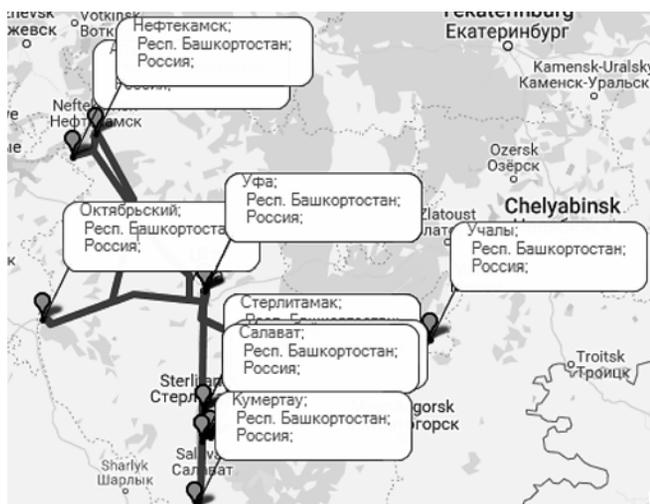


Рис. 6. Маршрут Уфа — Стерлитамак — Салават — Стерлитамак — Ишимбай — Салават — Кумертау — Агидель — Нефтекамск — Октябрьский — Уфа — Учалы — Уфа (алгоритм (1 + 1)-EA)



Рис. 7. Маршрут Уфа — Стерлитамак — Салават — Стерлитамак — Ишимбай — Салават — Кумертау — Учалы — Уфа — Октябрьский — Нефтекамск — Агидель — Уфа (алгоритм (1 + 2)-EA)

при этом средняя скорость ТС  $v$  равнялась 80 км/ч; расход топлива на 100 км — 15 л; стоимость одного литра топлива составила 45 руб., стоимость аренды ТС в ед. времени — 1000 руб.

### Заключение

В статье были рассмотрены задачи операционного планирования, а именно: задача маршрутизации для доставки груза различным клиентам с учетом возможности дозагрузки и задача размещения его в ТС перед отправкой клиентам. Для задачи маршрутизации с возможностью дозагрузки предложена модификация известной математической модели, учитывающая при необходимости отдельную доставку груза (в том случае, когда груз клиента превышал грузоподъемность ТС).

Для перечисленных задач разработаны эволюционные алгоритмы  $(1 + 1)$ -EA и  $(1 + 2)$ -EA, учитывающие возможность дозагрузки и отдельную доставку груза, а также программное обеспечение, которое было апробировано на предприятии для доставки специального оборудования в различные города Башкирии. Поскольку рассматриваемая задача является новой, не существует как набора тестовых данных, так и результатов других методов решения для проведения сравнительного анализа. В связи

с этим было сгенерировано 30 тестовых наборов данных. Был проведен численный эксперимент (в статье приведены лишь частичные результаты эксперимента), который показал, что решения, полученные с помощью эволюционного алгоритма  $(1 + 2)$ -EA, имеют лучшие значения целевой функции, чем решения, полученные с помощью  $(1 + 1)$ -EA, но алгоритм  $(1 + 1)$ -EA работает быстрее примерно в 3 раза.

### Список литературы

1. Langevin A., Riopel D. Logistics Systems: Design and Optimization. New York: Springer, 2005. 388 p.
2. Транспортная стратегия Российской Федерации на период до 2030 г. URL: [http://www.mintrans.ru/documents/detail.php?ELEMENT\\_ID](http://www.mintrans.ru/documents/detail.php?ELEMENT_ID).
3. Моргунов В. И., Джабраилов А. Э. Маркетинг. Логистика. Транспортно-складские логистические комплексы. М.: Издательско-торговая корп. "Дашков и К", 2010. 388 с.
4. Toth P., Vigo D. The Vehicle Routing Problem. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. P. 386.
5. Bard J. F., Huang L., Dror M., Jaillet P. A branch and cut algorithm for the VRP with satellite facilities // IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers). 1998. Vol. 30, N. 9. P. 821–834.
6. Rechenberg I. Evolutionsstrategie: Optimierung Technischer Systeme nach Prinzipien der Biologischen. Stuttgart: Fromman-Holzbook Verlag, 1973. 170 p.
7. Борисовский П. А., Еремеев А. В. О сравнении некоторых эволюционных алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 3–9.
8. Юсупова Н. И., Валеев Р. С. Рациональное размещение грузов в контейнеры с учетом их физических характеристик с помощью роботизированного комплекса // Информационные технологии. 2011. № 5. С. 30–36.

A. F. Valeeva, D.Sc. Professor, [aida\\_val2004@mail.ru](mailto:aida_val2004@mail.ru), I. A. Yanturin, Master student, [yanturin.ilmir@gmail.com](mailto:yanturin.ilmir@gmail.com), R. S. Valeev, PhD., Associate Professor, [ruslan\\_valeev@inbox.ru](mailto:ruslan_valeev@inbox.ru), Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450008, Russian Federation

## About One Problem of the Goods Delivery to Various Customers with Possibility of Additional Loading

*The routing problem of the goods delivery for various customers accounting a possibility of additional loading for a missing order in correspondent points is considered in the paper (Modified Vehicle Routing Problem with Satellite Facilities, MVRPSF). The mathematical model of the MVRPSF problem is presented, it includes such restrictions as the carrying capacity of transport vehicles (TV), the presence of depots and additional loading points, the separate delivery. The evolutionary algorithm that provides obtaining the rational routes of the goods delivery to various customers with preliminary disposition of orders in a transport vehicle is developed.*

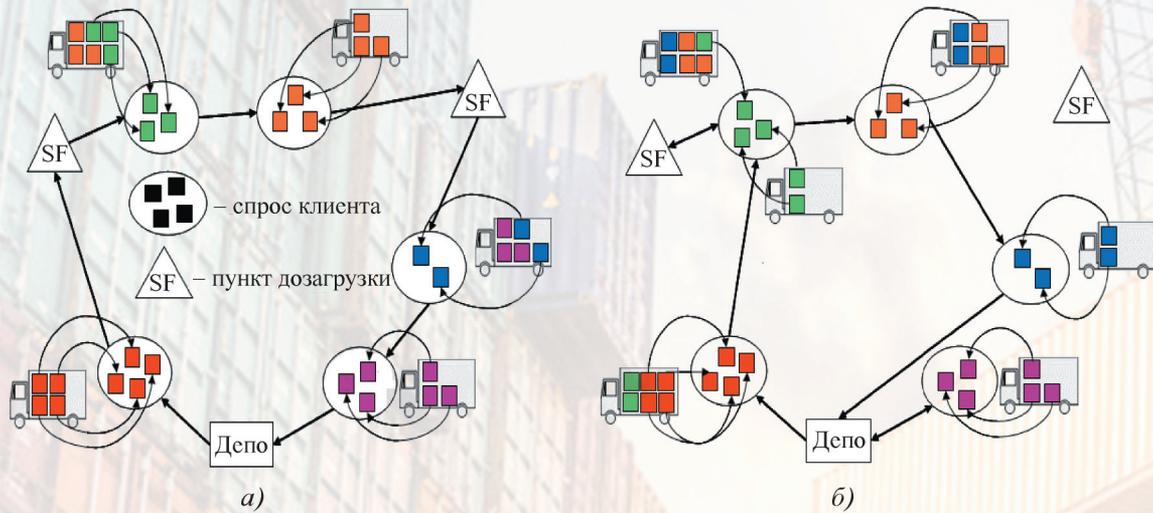
**Keywords:** routing; goods disposition in car transportation vehicles; additional loading points; evolutionary algorithms

DOI: 10.17587/it.26.9-15

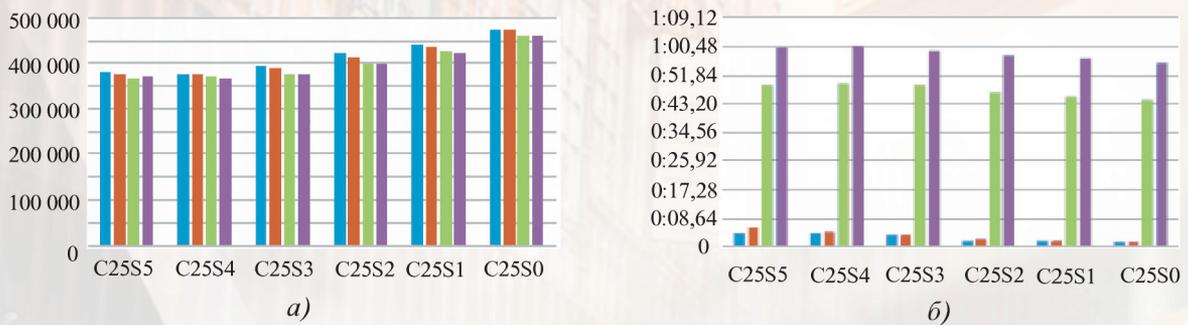
### References

1. Langevin A., Riopel D. Logistics Systems: Design and Optimization, New York, Springer, 2005, 388 p.
2. Transport strategy of the Russian Federation for the period until 2030, available at: [http://www.mintrans.ru/documents/detail.php?ELEMENT\\_ID](http://www.mintrans.ru/documents/detail.php?ELEMENT_ID) (in Russian).
3. Morgunov V. I., Dzhabraiлов A. E. Marketing. Logistics. Transport and warehouse logistics complexes, Moscow, Publishing and Trading Corp. "Dashkov and K", 2010, 388 p. (in Russian).
4. Toth P., Vigo D. The Vehicle Routing Problem. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, 386 p.
5. Bard J. F., Huang L., Dror M., Jaillet P. A branch and cut algorithm for the VRP with satellite facilities, *IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)*, 1998, vol. 30, no. 9, pp. 821–834.
6. Rechenberg I. Evolutionsstrategie: Optimierung Technischer Systeme nach Prinzipien der Biologischen, Stuttgart, Fromman-Holzbook Verlag, 1973, 170 p.
7. Borisovsky P. A., Eremeev A. V. O sravnenii nekotorykh evolucionnih algoritmov, *Avtomatica i Telemekhanika*, 2004, no. 2, pp. 3–9 (in Russian).
8. Yusupova N. I., Valeev R. S. *Informacionnie Tehnologii*, 2011, no. 5, pp. 30–36 (in Russian).

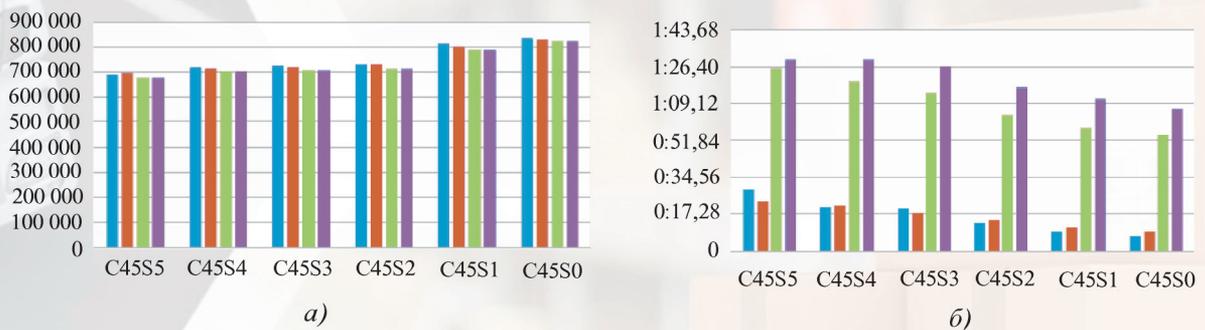
Рисунки к статье А. Ф. Валеевой, И. А. Янтурина, Р. С. Валеева  
**«ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДОСТАВКИ ГРУЗА РАЗЛИЧНЫМ КЛИЕНТАМ  
 С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ДОЗАГРУЗКИ»**



**Рис. 2. Иллюстрация доставки груза клиентам с раздельной доставкой и без нее:**  
 а – маршрут доставки груза без раздельной доставки; б – маршрут доставки груза с раздельной доставкой

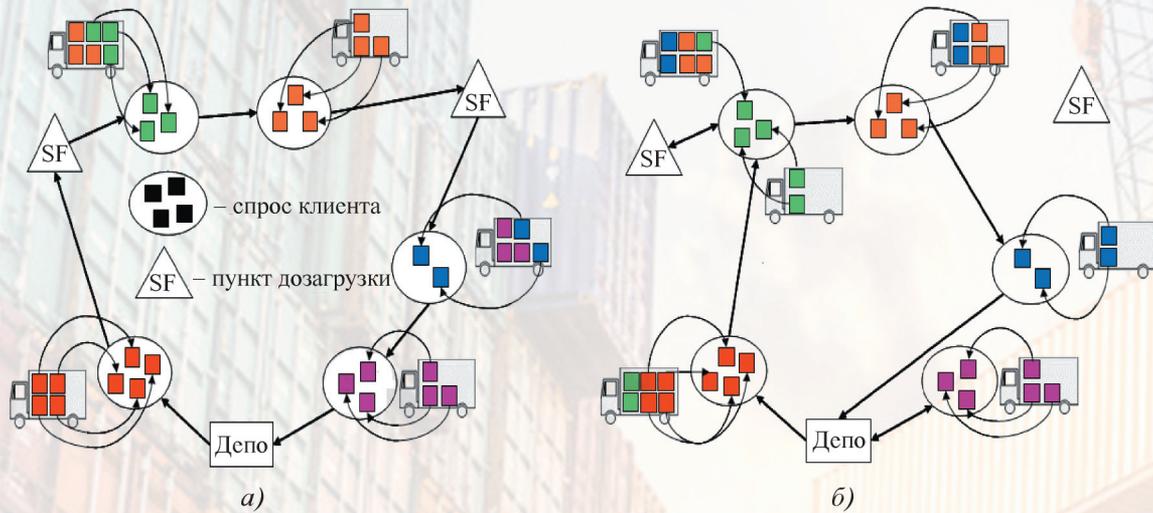


**Рис. 4. Сравнение средних стоимостей маршрутов (а) и среднего времени работы алгоритмов (б) для 25 клиентов:** ■ – (1+1)-EA(400I); ■ – (1+1)-EA(500I); ■ – (1+2)-EA(400I); ■ – (1+2)-EA(500I)

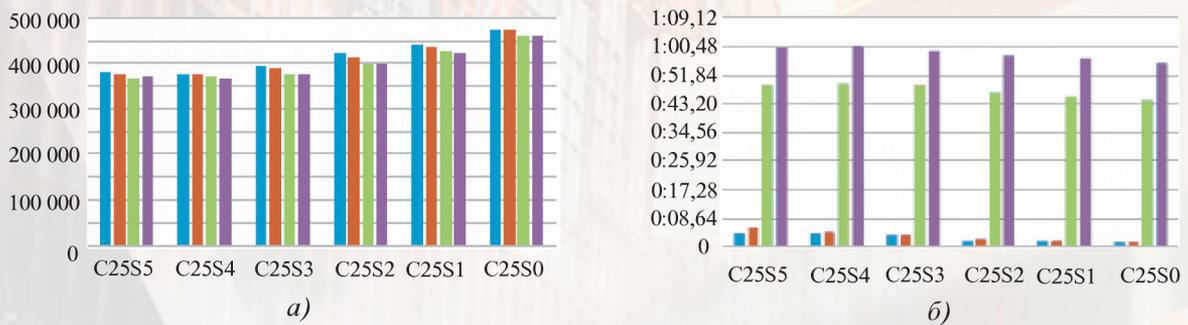


**Рис. 5. Сравнение средних стоимостей маршрутов (а) и среднего времени работы алгоритмов (б) для 45 клиентов:** ■ – (1+1)-EA(400I); ■ – (1+1)-EA(500I); ■ – (1+2)-EA(400I); ■ – (1+2)-EA(500I)

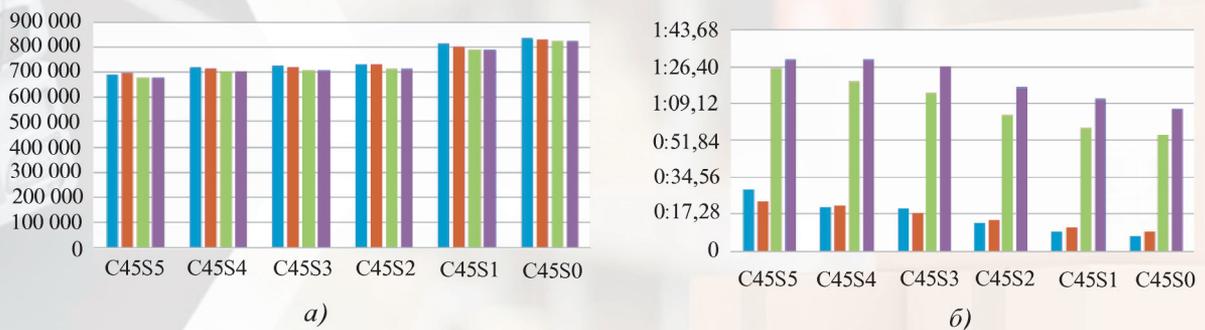
Рисунки к статье А. Ф. Валеевой, И. А. Янтурина, Р. С. Валеева  
**«ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДОСТАВКИ ГРУЗА РАЗЛИЧНЫМ КЛИЕНТАМ  
 С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ДОЗАГРУЗКИ»**



**Рис. 2. Иллюстрация доставки груза клиентам с раздельной доставкой и без нее:**  
 а – маршрут доставки груза без раздельной доставки; б – маршрут доставки груза с раздельной доставкой



**Рис. 4. Сравнение средних стоимостей маршрутов (а) и среднего времени работы алгоритмов (б) для 25 клиентов:** ■ – (1+1)-EA(400I); ■ – (1+1)-EA(500I); ■ – (1+2)-EA(400I); ■ – (1+2)-EA(500I)



**Рис. 5. Сравнение средних стоимостей маршрутов (а) и среднего времени работы алгоритмов (б) для 45 клиентов:** ■ – (1+1)-EA(400I); ■ – (1+1)-EA(500I); ■ – (1+2)-EA(400I); ■ – (1+2)-EA(500I)