УДК 004.942+621.373.1 DOI: 10.17587/it.26.655-663

М. М. Гурарий, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., gourary@yandex.ru,
С. Г. Русаков, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, гл. науч. сотр. — советник научного руководителя, rusakov@ippm.ru,
Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, г. Зеленоград

Анализ установившихся колебаний в автогенераторе при многочастотном возбуждении[1]

Представлен анализ квазипериодических режимов произвольного автогенератора при многочастотном возбуждении. Определены три основных возможных режима. В режиме многочастотной синхронизации спектр генератора содержит те же фундаментальные частоты, что и спектр сигнала возбуждения. При недостаточной амплитуде возбуждения возникает режим биений, в спектре которого присутствуют гармоники некоторой дополнительной частоты, определяемой как внутренними свойствами самого генератора, так и амплитудой гармоник возбуждения. Внутренняя частота, как правило, становится дополнительной фундаментальной за исключением особых точек, в которых она становится рациональной комбинацией фундаментальных частот внешнего возбуждения. Численные примеры представлены анализом генератора при квазипериодическом двухчастотном возбуждении на основе фазовой макромодели. Рассмотрены основные проблемы нахождения стационарного решения фазового уравнения возбужденного генератора методом гармонического баланса.

Ключевые слова: *квазипериодические колебания, автогенератор, модель Адлера, фазовые макромодели, многочастотная синхронизация*

Введение

Моделирование явления синхронизации является основной проблемой при анализе систем слабо связанных автогенераторных схем [1, 2]. При этом особый интерес для исследований представляют условия синхронизации в автогенераторных ансамблях [3]. Однако поведение ансамбля генераторов не исчерпывается режимом полной синхронизации, поскольку в ансамбле могут существовать частично синхронизированные (кластерные) состояния [4], которые характеризуются квазипериодическими колебаниями.

Каждый генератор в ансамбле находится под воздействием других генераторов, поэтому его поведение определяется колебательными процессами в одиночном генераторе при квазипериодическом внешнем возбуждении. Поэтому задача анализа такой элементарной конфигурации может стать базовой для анализа более сложных систем взаимодействующих генераторов.

Публикации, непосредственно посвященные этой проблеме, ограничены частными случаями. Работы по квазипериодическому возбуждению лазеров [5] ориентированы на их специфику и не позволяют получить результаты для произвольного генератора. В работе [6] исследованы частотно-модулированные возбуждения одиночного колебательного нейрона, представленного пороговым устройством на основе генератора Ван-дер-Поля. Однако такой подход не позволяет анализировать произвольный генератор при стационарном квазипериодическом возбуждении. В некоторых работах рассматриваются автономные генераторы с многочастотными колебаниями при чисто периодическом возбуждении [7], но этот случай не относится к анализируемой проблеме.

Целью данной работы является анализ характера поведения произвольного периодического (одночастотного) генератора при многочастотном возбуждении. Обсуждается зависимость числа фундаментальных частот генератора от уровня возбуждения и дается определение трех квазипериодических режимов работы генератора. Обоснованность предложенной концепции подтверждается числен-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00733).

ными экспериментами с использованием фазовой макромодели.

Статьи организована следующим образом. В разделе 1 представлены основы теории квазипериодических колебаний. Раздел 2 описывает применение модели Адлера к анализу генератора при периодическом возбуждении. В разделе 3 представлены три основных режима поведения генератора при квазипериодическом многочастотном возбуждении. Некоторые аналитические выражения для случая двухчастотного возбуждения получены в разделе 4. Результаты численного моделирования, представленные в разделе 5, демонстрируют существование представленных режимов работы генератора при квазипериодическом возбуждении. Раздел 6 посвящен проблемам получения уравнений гармонического баланса для нахождения стационарных решений фазового уравнения.

1. Квазипериодические сигналы

Любое многочастотное колебание может быть определено через функцию тора $u(\tau_1, \tau_2,..., \tau_n)$, которая является 2π-периодической по каждой из переменных $\tau_1, \tau_2,..., \tau_n$ [8, 9]. Соответствующий сигнал выражается как $x(t) = u(\omega_1 t, \omega_2 t,..., \omega_n t)$, где ω_i — несоизмеримые значения фундаментальных частот. Фундаментальные частоты допускают неоднозначное определение: если любую ω_i заменить на

$$\omega_i' = \omega_i + k\omega_j \tag{1}$$

с любым целым числом k, то полученные значения также образуют набор фундаментальных частот, поскольку функция $u(\ldots, \tau_i' - m\tau_j, \ldots)$ 2π-периодична по τ_i' и также представляет функцию тора.

Частный случай квазипериодической функции представляет сумма синусоид. Другим примером является модулированное колебание с фундаментальными частотами $\omega_1 = \omega_{car}$ (несущая частота), $\omega_2 = \omega_{mod}$ (частота модуляции). Для амплитудной модуляции (АМ) с индексом модуляции m функция тора при синусоидальных сигналах имеет вид

$$u(\tau_{car}, \tau_{mod}) = A_{car}(1 + m\sin(\tau_{mod})\sin(\tau_{mod})). \tag{2}$$

Функцию тора можно разложить в ряд Фурье:

$$u(\tau) = U_0 + \sum_k U_k \cos\left(\langle \mathbf{k}\boldsymbol{\tau} \rangle + \phi_k\right). \tag{3}$$

Здесь мы используем векторную форму обозначений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_n)$, $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_n)$.

Из выражения (3) получаем многомерный ряд Фурье для $x(t)$ с вектором фундаментальных частот $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$

$$x(t) = u(\boldsymbol{\Omega}t) = U_0 + \sum_k U_k \cos\left(\langle \mathbf{k\Omega} \rangle t + \phi_k\right). \tag{4}$$

Постоянный член U_0 равен среднему значению $\bar{x}$ функции $x(t)$:

$$U_0 = \bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt. \tag{5}$$

Производная по времени от ряда (4) также является квазипериодической функцией:

$$\dot{x}(t) = -\sum_k \mathbf{k\Omega} U_k \sin\left(\langle \mathbf{k\Omega} \rangle t + \phi_k\right). \tag{6}$$

В отличие от производной (6) интеграл от выражения (4) дополнительно содержит линейную функцию с множителем $\bar{x}$, определенным в соотношении (5):

$$\int_0^t x(\vartheta)d\vartheta = \bar{x}t + \sum_k \frac{U_k}{\langle \mathbf{k\Omega} \rangle}\sin\left(\langle \mathbf{k\Omega} \rangle t + \phi_k\right). \tag{7}$$

Из выражения (7) следует, что $\tilde{x}(t) = \int_0^t x(\vartheta)d\vartheta - \bar{x}t$ также является квазипериодической функцией, имеющей то же число фундаментальных частот, что и $x(t)$.

Теперь рассмотрим фазово-модулированное колебание, определенное как $W(t) = F(\theta(t))$ с 2π-периодической функцией F и мгновенной фазой $\theta(t)$. Мгновенная частота колебаний — это производная по времени $\omega_{ins}(t) = d\theta(t)/dt$. Пусть $\omega_{ins}(t)$ представляет собой n-периодическую функцию со средним значением $\bar{\omega}_{ins}$ и вектором фундаментальных частот $\boldsymbol{\Omega}^{ins}$. Результат, полученный из (7) для функции вида $\tilde{x}(t)$, справедлив и для функция $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \bar{\omega}_{ins}t$, имеющей аналогичный вид. Эта функция поэтому также является n-периодической. При этом, если $\tilde{\theta}(t)$ определяется функцией тора $u_{ins}(\tau^{ins})$, то колебание

$$W(t) = F(\theta(t)) = F(\bar{\omega}_{ins}t + \tilde{\theta}(t)) \tag{8}$$

является $(n + 1)$-периодической функцией с вектором фундаментальных частот $(\bar{\omega}_{ins}, \boldsymbol{\Omega}^{ins})$ и функцией тора $U(\tau_{mean}, \tau^{ins}) = F(\tau_{mean} + u_{ins}(\tau^{ins}))$.

2. Уравнение Адлера

Хорошо известное уравнение Адлера [10] было предложено для получения условий захвата частоты и фазы LC-генератора с собственной частотой ω внешним синусоидальным сигналом с частотой $\omega_{ex} = \omega - \Delta\omega$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\omega - bA\sin\varphi, \tag{9}$$

где A — это амплитуда внешнего сигнала возбуждения; $b = \omega_{osc}/2QA_{osc}$ — чувствительность генератора к возбуждению; Q — добротность контура.

Поведение синхронизированного генератора соответствует решению (9) в виде постоянного фазового сдвига φ_0. Подставив $\varphi(t) = \varphi_0$ в выражение (9), получим алгебраическое уравнение относительно φ_0:

$$\Delta\omega = bA\sin\varphi_0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) существует в том случае, если выполняется условие синхронизации $\Delta\omega \leqslant bA$. Поэтому амплитуда синхронизации (A_{syn}) в точке захвата определяется как

$$A_{syn} = \Delta\omega/b. \tag{11}$$

Если амплитуда возбуждения меньше, чем A_{syn} (11), то в генераторе возникает двухчастотный режим биений с сигналом генератора вида

$$V(t) = A_{osc}\sin(\theta(t)) = A_{osc}\sin(\omega_{ex}t + \varphi(t)). \tag{12}$$

Здесь $\theta(t) = \omega_{ex}t + \varphi(t)$ — это полная фаза, а ее производная по времени — это мгновенная частота генератора:

$$\omega_{ins}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_{ex} + d\varphi/dt. \tag{13}$$

Из выражений (9), (13) получаем

$$\omega_{ins}(t) = \omega_{osc} - bA\sin\varphi. \tag{14}$$

Детальный анализ режима биений для генератора Адлера позволил получить в работе [11] сложное неявное выражение для фазы на основе решения (10).

Здесь мы выведем простую явную формулу для случая малой величины возбуждения $A \ll A_{syn}$ или $bA \ll 1$. В этом случае, отбросив член $bA\sin\varphi$ в выражении (9), получим приближенное уравнение $d\tilde{\varphi}/dt \approx \Delta\omega$ с решением $\tilde{\varphi}(t) \approx \Delta\omega t$. Подставив $\tilde{\varphi}(t)$ в уравнение (14), найдем отклонение $\Delta\omega_{ins} = \omega_{ins} - \omega_{osc}$ в виде

$$\Delta\omega_{ins} = -bA\sin(\Delta\omega t). \tag{15}$$

Таким образом, малое синусоидальное возбуждение приводит к синусоидальной форме мгновенной частоты. Частота синусоиды равна Δω, а ее амплитуда пропорциональна амплитуде возбуждения с коэффициентом, равным чувствительности генератора к возбуждению. Из уравнения (15) имеем $\overline{\Delta\omega_{ins}} = 0$, поэтому фундаментальными частотами колебания (12) являются ω_{ex} и Δω в силу (8).

На рис. 1 показаны результаты моделирования переходного процесса (9) с достаточным временем моделирования для достижения стационарного решения. Параметры модели: $b = 100$, $\omega = 100$ Гц, $\Delta\omega = 4.8$ Гц, $b = 100$, $\omega = 100$ Гц, $\Delta\omega = 4{,}8$ Гц. Из выражения (11) получаем, что $A_{syn} = 0{,}048$. Моделирование проводили для разных уровней возбуждения, определяемых относительным параметром $a = A/A_{syn}$.

Для малых значений возбуждения ($a = 0{,}1$; $0{,}3$) формы сигналов близки к асимптотическим выражениям (15). Графики мгновенных частот для $a = 0{,}7$; $0{,}9$; $0{,}99$ заметно отличаются от синусоид, и их периоды увеличиваются с ростом a.

Из периодичности мгновенной частоты (рис. 1) следует, что колебания (12) являются двухпериодическими из-за указанных выше свойств фазово-модулированного колебания (8).

Периоды T_{int} сигналов мгновенной частоты соответствуют внутренней частоте генератора, представленной в виде [11]

$$\omega_{int} = \omega_{ex} - \Delta\omega_{int}, \quad \Delta\omega_{int} = \Delta\omega\sqrt{1 - a^2},$$

а соответствующий период представляется в виде $T_{int} = 2\pi/\Delta\omega_{int}$.

Рис. 1. Сигналы мгновенного отклонения частоты для различных амплитуд возбуждений с относительными величинами *a*

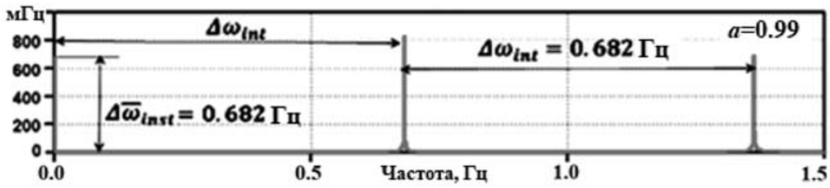


Рис. 2. Начальные три гармоники спектра сигнала для a = 0,99

Здесь мы используем $\Delta\omega_{int}$ в качестве фундаментальной частоты вместо ω_{int} в соответствии с выражением (1). Фаза $\varphi(t)$ в соотношениях (9), (13) увеличивается на 2π за период T_{int}. Из (9), (13) можно получить среднее отклонение частоты как $\overline{\Delta\omega_{ins}} = 2\pi / T_{int} = \Delta\omega_{int}$. Это равенство подтверждается спектром $\Delta\omega_{ins}$, полученным численно методом БПФ (рис. 2). Нулевая гармоника ($\overline{\Delta\omega_{ins}}$) равна частоте $\Delta\omega_{int}$.

3. Квазипериодические режимы в возбужденном автогенераторе

Указанные выше особенности поведения LC-генератора характерны для произвольной генераторной схемы при периодическом возбуждении (см., например, работу [12]) и могут быть описаны следующим образом.

В автономных генераторах частота определяется свойствами системы, и в системе существует неоднозначное периодическое решение с произвольной фазой. Если к генератору приложено достаточно большое периодическое возбуждение, то происходит синхронизация. Поведение генератора при синхронизации аналогично поведению системы с вынужденными колебаниями — частота совпадает с частотой возбуждения, а фиксированная фаза колебаний определяется амплитудой и формой сигнала возбуждения.

Если амплитуда возбуждения меньше уровня синхронизации, то в генераторе возникают квазипериодические колебания с двумя фундаментальными частотами. Одна из них всегда является частотой возбуждения ω_{ex}, а другая — это внутренняя частота генератора ω_{int}, зависящая как от значения возбуждения, так и от свойств генератора (рис. 3, *а*). При малом возбуждении внутренняя частота близка к собственной частоте генератора ω_{osc}. В точке бифуркации, равной амплитуде синхронизации, внутренняя частота становится равной частоте внешнего возбуждения, что приводит к одночастотным колебаниям режима синхронизации. Точки бифуркации для разных частот возбуждения образует границу области захвата (язык Арнольда, рис. 3, *б*).

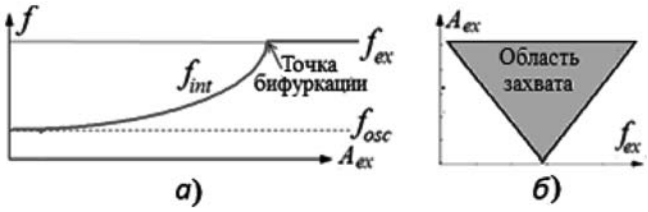


Рис. 3. Генератор с собственной частотой f_{osc} при частоте возбуждения f_{ex}:
а — зависимость фундаментальных частот генератора от амплитуды возбуждения A_{ex}; *б* — язык Арнольда для малых возбуждений

Следует отметить, что периодические колебания могут также существовать в некоторых особых точках при сигнале возбуждения ниже уровня синхронизации, если внутренняя частота в такой точке является рациональной дробью относительно частоты возбуждения $\omega_{int} = (p/q)\omega_{ex}$, где p, q — взаимно простые целые числа. В этом случае частоту возбуждения и внутреннюю частоту можно рассматривать как гармоники чисто периодического колебания с общей фундаментальной частотой

$$\omega_{com} = \omega_{ex}/q = \omega_{int}/p. \tag{16}$$

Мы считаем естественным предположить, что генератор при многочастотном квазипериодическом возбуждении ведет себя аналогично представленному выше периодически возбужденному генератору:

1. Если сигнал возбуждения содержит K фундаментальных частот, то в сигнале генератора имеется либо K, либо $K + 1$ фундаментальных частот.

2. В режиме биений колебания содержат $K + 1$ фундаментальных частот, из которых K совпадают с фундаментальными частотами возбуждения, а дополнительная внутренняя частота зависит от свойств генератора и амплитуды возбуждения. Фазы гармоник генератора содержат произвольный сдвиг фазы гармоники внутренней частоты.

3. K-периодические колебания всегда появляются при достаточно большой амплитуде возбуждения. Такое поведение генератора аналогично вынужденным K-периодическим колебаниям в неавтономной системе: фундаментальные частоты генератора и возбуждения совпадают, и фазы гармоник генератора однозначно определяются фазами гармоник возбуждения.

4. Режим генератора со спектром, однозначно зависящим от спектра квазипериодического возбуждения, можно рассматривать как режим

многочастотной синхронизации. Предложенное определение является естественным обобщением понятия синхронизации генератора, возбуждаемого периодическим сигналом на генератор при квазипериодическом возбуждении.

5. Вектор амплитуд гармоник возбуждения, при котором генератор переходит в синхронизированное состояние, представляет точку бифуркации. Множество точек бифуркации образует поверхность области синхронизации (захвата) генератора в пространстве амплитуд гармоник возбуждения.

6. *K*-периодические колебания могут возникать не только в режиме синхронизации, но и в некоторых особых точках режима биений. В этих точках внутренняя частота принимает значение рациональной комбинации фундаментальных частот возбуждения. Колебания в особых точках содержат произвольную фазу, определяемую начальным значением уравнений генератора.

Далее мы рассмотрим некоторые аналитические и численные примеры, чтобы продемонстрировать состоятельность предлагаемой концепции.

4. Асимптотические выражения для двухчастотного возбуждения

Для анализа генератора при многочастотном возбуждении можно применить сглаженную фазовую макромодель для произвольного генератора [13]. Макромодель описывает поведение генератора при возбуждении, определяемом гармониками с медленно меняющимися амплитудами и фазами. Для слабо нелинейного синусоидального генератора при синусоидальном возбуждении макромодель совпадает с моделью Адлера (9). Для входной синусоиды с частотой ω_{ex} и медленно меняющимися амплитудой $A(t)$ и фазой $\psi(t)$ уравнение сводится к обобщению (9) в виде обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\omega - bA(t)\sin(\psi(t) + \varphi). \qquad (17)$$

Здесь мы рассмотрим генератор при двухпериодическом возбуждении сигналом АМ (2), для которого решение (17) не может быть получено в аналитическом виде. Поэтому применим асимптотические подходы, основанные на соотношении для узкополосного модулированного сигнала $\omega_{mod} \ll \omega_{car}$, что дает возможность применить многоскоростные методы [14].

При малой амплитуде возбуждения можно использовать формулу (15) к каждой гармонике возбуждения, что позволяет записать аналогичное выражение для случая изменяющейся во времени амплитуды: $\Delta\omega_{inst} = -bA(t)\sin\Delta\omega t$. Это выражение можно записать в несколько иной форме, обозначив $\Delta\tilde{\omega}_{inst}(t, A_0)$ — сигнал мгновенной частоты, полученный из периодического решения (9) и применения (13) для возбуждения с амплитудой A_0. Тогда с учетом (15) легко получить

$$\Delta\omega_{inst} = \Delta\tilde{\omega}_{inst}(A(t)/A_0, A_0). \qquad (18)$$

Выражение (18) справедливо для любого малого A_0, но чтобы обеспечить лучшую точность, следует взять A_0, которое наилучшим образом аппроксимирует модулированное возмущение. В наших экспериментах значение A_0 брали равным амплитуде несущей частоты. Результаты расчетов (19), (20) объединены на двух графиках на рис. 4, *а* (см. четвертую сторону обложки). Глубина АМ-возбуждения $m = 0{,}5$. Графики $\Delta\omega_{inst}$ для $a = 0{,}3$ показаны в верхнем ряду, а для $a = 0{,}8$ — в нижнем. На каждом из графиков даны две кривые: красная — полученная решением (17), и синяя — полученная аппроксимацией (18). При $a = 0{,}3$ обе кривые практически совпадают, а при $a = 0{,}8$ формы кривых существенно различаются, но их амплитуды имеют близкие значения.

Другой вариант получения асимптотического решения (17) был рассмотрен для большой амплитуды возбуждения: $A(t) \gg A_{syn}$ для всех t. В этом случае можно рассматривать поведение генератора как медленно меняющийся режим синхронизации и заменять фиксированное значение фазы захвата φ_0 в (10) медленной функцией $\psi(t)$:

$$\Delta\omega = bA(t)\sin\psi(t). \qquad (19)$$

Продифференцировав (19) по времени, найдем

$$b\frac{dA}{dt}\sin\psi(t) + bA(t)\cos\psi(t)\frac{d\psi}{dt} = 0. \qquad (20)$$

Отсюда получим отклонение мгновенной частоты $\Delta\omega_{inst} = d\psi/dt + \Delta\omega$::

$$\Delta\omega_{inst} - \Delta\omega = \\ = -\frac{\Delta\omega \cdot dA/dt}{A(t)\sqrt{b^2A(t)^2 - \Delta\omega^2}} \approx -\frac{\Delta\omega \cdot dA/dt}{bA(t)^2}. \qquad (21)$$

Для синусоидального АМ-сигнала $A(t)$ (2) найдем из (21)

$$\Delta\omega_{inst} - \Delta\omega = -\frac{\Delta\omega\cos\omega_{mod}t}{bA\left(1 + m\sin\omega_{mod}t\right)}. \qquad (22)$$

Обратная пропорциональность величины $\Delta\omega_{inst} - \Delta\omega$ амплитуде несущей A подтверждается результатами моделирования (рис. 4, *б*, см. четвертую сторону обложки).

5. Численные эксперименты по определению точек бифуркации и сингулярных точек

Приведенные выше асимптотические выражения были получены на основе использования медленного характера модуляции для случаев, когда сигнал возбуждения либо всегда ниже (см. (19)), либо всегда выше (см. (22)) уровня синхронизации. Такой подход в принципе не может применяться для получения решения в тех случаях, когда сигнал модуляции в некоторые моменты времени пересекает уровень синхронизации. Когда возбуждение достаточно близко к уровню синхронизации, частота возникающих биений намного меньше частоты модуляции (см., например, рис. 1, график для $a = 0{,}99$). В таком случае модуляция не может рассматриваться как медленный сигнал, и поэтому нельзя применять многоскоростные методы для получения выражений в аналитической форме. Для проведения анализа поведения генератора в этих условиях требуются численные эксперименты.

Для анализа наличия точек бифуркации при переходе генератора в режим синхронизации выбирались те же параметры модели, которые приведены перед рис. 1: $b = 100$, $\omega = 100$ Гц. Использовались следующие параметры АМ-возбуждения: отклонение несущей частоты $\Delta\omega = 4{,}8$ Гц, частота модуляции $\omega_{mod} = 0{,}5$ Гц, индекс модуляции $m = 0{,}5$.

Результаты моделирования для относительных амплитуд несущей частоты возбуждения — $a = 0{,}5$; $0{,}6$; $0{,}7$; $0{,}8$ показаны на рис. 5, *а* (см. четвертую сторону обложки). Из кривых во временной области мгновенного отклонения частоты (левые графики) затруднительно определить число фундаментальных частот, поэтому оценивали также спектры сигналов (правые графики) с помощью БПФ.

На графиках видно, что в спектрах для $a = 0{,}7...0{,}8$ гармоники распределены равномерно с шагом, равным частоте модуляции (0,5 Гц). Таким образом, эти спектры представляют собой чисто периодические колебания мгновенной частоты. Нерегулярное распределение гармоник при $a = 0{,}5...\ 0{,}6$, свидетельствует о квазипериодичности мгновенной частоты, т. е. о режиме биений. Таким образом, можно сделать вывод, что точка бифуркации между областями и биений синхронизации находится в интервале $a = [0{,}6,\ 0{,}7]$.

Более точная оценка точки бифуркации на рис. 5, *б* (см. четвертую сторону обложки) определяет узкий интервал вокруг точки [0,6666; 0,6667]. Спектр для $a = 0{,}6667$ содержит только гармоники, кратные частоте модуляции (0,5 Гц), а для $a < 0{,}6667$ имеются дополнительные гармоники, полученные в результате смешения частоты модуляции с внутренней частотой генератора.

Для тестирования существования сингулярных точек в пространстве параметров возбуждения была взята следующая модель: $b = 100$, $\omega = 100$ Гц, $\Delta\omega = 1{,}5$ Гц, частота модуляции $\omega_{mod} = 1$ Гц, относительная амплитуда несущей $a = 0{,}5$. Индекс модуляции m был использован в качестве управляющего параметра. С помощью экспериментов, аналогичных приведенным на рис. 6 (см. четвертую сторону обложки), рис. 7, рис. 8 (см. четвертую сторону обложки), значение точки бифуркации было определено

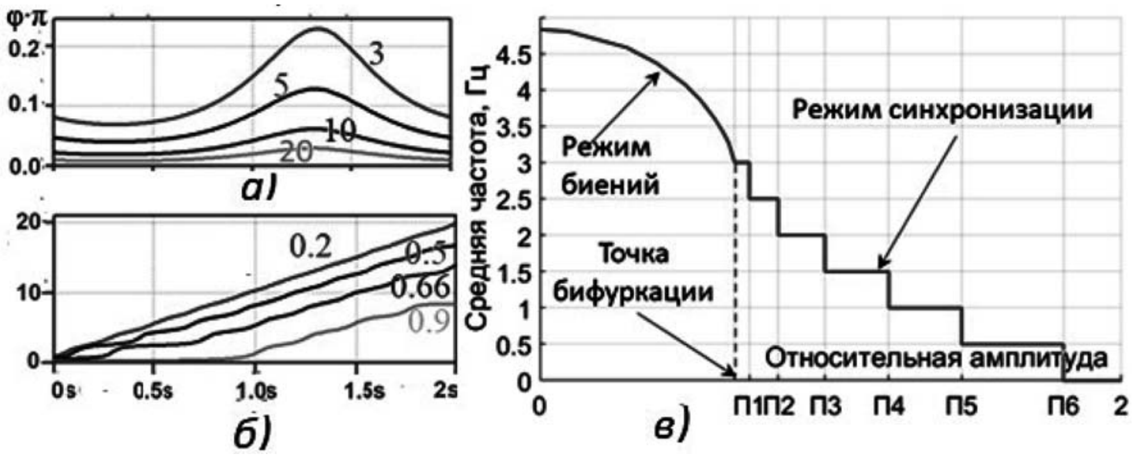


Рис. 7. Временные графики отклонения фазы:
а — для больших амплитуд; *б* — для малых амплитуд; *в* — зависимость средней частоты от амплитуды

как $m \in [0{,}66, 0{,}67]$. Существование сингулярной точки подтверждается экспериментальными результатами на рис. 6, *а* (верхние графики для $m = 0{,}3675$ и нижние графики для синхронизированного генератора при $m = 0{,}67$), представленными кривыми мгновенного отклонения частоты как во временной (левые графики), так и в частотной областях (правые участки). Сравнение периодических спектров для точки $m = 0{,}3675$ и для режима синхронизации при $m = 0{,}67$ показывает соотношение 4:1 между частотами. Таким образом, найдена сингулярная точка $m = 0{,}3675$, соответствующая рациональной дроби $p/q = 1/4$ (см. (16)) с фундаментальной частотой $\omega_{com} = \omega_{mod}/4 = 0{,}25$ Гц.

Следующий эксперимент демонстрирует (рис. 6, *б,* см. четвертую сторону обложки) изолированный характер сингулярной точки (средние графики на рис. 6, *б*), которой соответствуют во временной области периодические колебания с постоянной амплитудой, а в частотной области — единственная гармоника в узкой полосе вблизи 1 Гц.

Очень небольшие отклонения ($\Delta m = \pm 0{,}0075$) от особой точки приводят к модуляции временного сигнала (левые графики на рис. 6, *б*) и появлению дополнительной гармоники внутренней частоты вблизи гармоники модуляции 1 Гц (правые графики).

6. Применение метода гармонического баланса для нахождения квазипериодического решения фазового уравнения

В представленных выше численных экспериментах гармоники квазипериодического решения фазового уравнения (17) определялись путем моделирования переходного процесса на длительном интервале и последующего применения БПФ. Но такой способ часто не обеспечивает требуемую точность расчетов, а для больших ансамблей, кроме того, требует существенных вычислительных затрат. Поэтому мы рассмотрим возможность прямого получения спектра решения методом гармонического баланса (ГБ) [14].

Метод ГБ используется для решения ОДУ с внешним возбуждением $v(t)$

$$\frac{dx}{dt} = g(x, v) \tag{23}$$

для определения стационарного квазипериодического решения в виде усеченного до $N + 1$ гармоники ряда Фурье (4). После подстановки (17) в уравнение (23) и приравнивания к нулю соответствующих гармоник невязки формируется система алгебраических уравнений порядка $N + 1$ относительно гармоник (U_0, U_k, ϕ_k, $k = 1, ..., N$). Для решения системы используется какой-либо из вариантов метода Ньютона. Уравнения ГБ для свободных колебаний автогенератора включают его собственную частоту как дополнительную переменную и условие фиксации фазы как дополнительное уравнение [15].

Особенностью фазового уравнения (17) по сравнению со стандартным ОДУ (23) является то, что правая часть (17) содержит 2π-периодическую функцию $\sin(\psi(t) + \varphi)$. Другая особенность состоит в том, что решение (17) может не представляться рядом (4), а содержать линейный член подобно интегралу (7). Так как решение (17) — это фаза генератора $\varphi(t)$, то коэффициент при линейном члене — это отклонение его средней частоты $\overline{\Delta\omega}$, поэтому можно записать

$$\varphi(t) = \overline{\Delta\omega} \cdot t + \overline{\varphi}(t). \tag{24}$$

Здесь $\overline{\varphi}(t)$ — квазипериодическая функция, а $\overline{\Delta\omega}$ может быть определено нулевой гармоникой в спектре мгновенной частоты (см. рис. 2). Такой способ был использован в экспериментах по моделированию (17) с теми же параметрами, что и в примере на рис. 5 (см. четвертую сторону обложки), и с различными значениями относительной амплитуды возбуждения *а*. Примеры временных графиков отклонения фазы проведены на рис. 7, *а*, *б*, на которых видно, что при больших значениях *а*, соответствующих кривым на рис. 4, *б* (см. четвертую сторону обложки), величина $\overline{\Delta\omega}$ нулевая, и фаза является чисто периодической функцией без линейного члена (рис. 7, *а*), а при малых амплитудах явно видно присутствие линейного члена (рис. 7, *б*).

Подробно зависимость $\overline{\Delta\omega}$ от амплитуды представлена кривой на рис. 7, *в*. До точки бифуркации ($a < 0{,}67$) это гладкая непрерывная кривая, представляющая внутреннюю фундаментальную частоту в области биений: $\overline{\Delta\omega} = \omega_{int}$. После подстановки выражения (24) в (17) можно получить ОДУ относительно квазипериодической функции $\overline{\varphi}(t)$. Для этого ОДУ аналогично уравнениям ГБ для автогенератора [15] можно сформировать систему уравнений, включающую дополнительную неизвестную ω_{int}.

В области синхронизации кривая на рис. 7, *в* является кусочно-постоянной с точками переключения П1(0,71), П2(0,82), П3(0,98), П4(1,19), П5(1,45), П6(1,9). Разрывный характер этой зависимости объясняется на рис. 8 (см. четвертую сторону обложки), где показаны кривые мгновенной частоты (на одном периоде) вблизи (слева и справа) от точек П1, ..., П6. Видны качественные изменения в точке — после каждого переключения одна из полуволн исчезает. Значение скачка в каждой точке равно в данном случае частоте модуляции $\omega_{mod} = 0{,}5$ Гц, поэтому в (24) линейный член $\overline{\Delta\omega} = k(a)$ — целое число, зависящее от амплитуды возбуждения.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что разработка метода определения целочисленного значения k является необходимым условием для получения алгоритма решения фазового уравнения методом ГБ.

Заключение

Три стационарных режима могут существовать при многочастотном возбуждении автогенератора. Режим многочастотной синхронизации характеризуется совпадением фундаментальных частот генератора с фундаментальными частотами возбуждения при достаточно большой амплитуде возбуждения. Многочастотный режим биений находится вне области синхронизации, и его спектр помимо фундаментальных частот возбуждения содержит дополнительную внутреннюю фундаментальную частоту. Режим особых точек в некоторых изолированных точках вне области синхронизации характеризуется равенством числа фундаментальных частот генератора и числа фундаментальных частот возбуждения.

Проведенные численные эксперименты подтвердили появление точек бифуркации при переходе генератора в режим синхронизации. Существование особых точек вне области синхронизации и их изолированный характер также были продемонстрированы экспериментально.

Рассмотрены проблемы применения метода ГБ для фазового уравнения генератора, связанные с наличием в решении линейного члена. Представлено преобразование для формирования уравнений ГБ в стандартном виде. Указаны трудности применения метода ГБ в режиме многочастотной синхронизации.

Список литературы

1. **Maffezzoni P., Bahr B., Zhang Z., Daniel L.** Reducing Phase Noi in Multi-Phase Oscillators // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2016. Vol. 63, N. 3. P. 379—388. DOI: 10.1109/TCSI.2016.2525078.

2. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M.** Macromodeling approaches for simulation of coupled oscillator networks // In Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies. MWENT 2018 — Proceedings 1. P. 1—4. DOI: 10.1109/MWENT.2018.8337277.

3. **Ashwin P., Coombes S., Nicks R.** Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience // J. Math. Neuroscience. 2016. Vol. 6, N. 2 DOI: 10.1186/s13408-015-0033-6.

4. **Kumar P., Verma D., Parmananda P.** Partially synchronized states in an ensemble of chemo-mechanical oscillators // Physics Letters A. 2017. Vol. 381, N. 29. P. 2337—2343. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.05.032.

5. **Malinowski M. et al.** Towards On-Chip Self-Referenced Frequency-Comb Sources Based on Semiconductor Mode-Locked Lasers // Micromachines. 2019. Vol. 10, N. 6. P. 391. DOI: 10.3390/mi10060391.

6. **Peleshchak R., Lytvyn V., Bihun O., Peleshchak I.** Structural Transformations of Incoming Signal by a Single Nonlinear Oscillatory Neuron or by an Artificial Nonlinear Neural Network // International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA). 2019. Vol. 11, N.8. P. 1—10. DOI: 10.5815/ijisa.2019.08.01.

7. **Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Tyuryukina L. V.** Synchronization of quasi-periodic oscillations in coupled phase oscillators // Tech. Phys. Lett. 2010. Vol. 36, N.5. P. 478—481. DOI: 10.1134/S1063785010050263.

8. **Самойленко А. М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. Ивариантные торы. М.: Наука, 1987. 301 с.

9. **Schilder F., Vogt W., Schreiber S., Osinga H. M.** Fourier methods for quasi-periodic oscillations // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2006. 67(5). P. 629—67. DOI: 10.1002/nme.163.

10. **Adler N. R.** A study of locking phenomena in oscillators // Proceedings of the IEEE. 1973. Vol. 61, N. 10. P. 1380—1385. DOI: 10.1109/PROC.1973.9292.

11. **Razavi B.** A study of injection locking and pulling in oscillators // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 2004. Vol. 39, N. 9. P. 1415—1424. DOI: 10.1109/JSSC.2004.831608.

12. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M.** Injection Locking/Pulling Analysis of Oscillators Under Fractional Excitation Frequency // 20th European Conf. on Circuit Theory and Design ECCTD 2011. Linkoping, Sweden. P. 545—548. DOI: 10.1109/ECCTD.2011.6043404.

13. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J.** Smoothed form of nonlinear phase macromodel for oscillators // 2008 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design, San Jose, CA. P. 807—814. DOI: 10.1109/ICCAD.2008.4681669.

14. **Desroches M., Guckenheimer J., Krauskopf B., Kuehn C., Christian O.** Mixed-Mode Oscillations with Multiple Time Scales // SIAM Review. 2012. Vol. 54, N. 2. P. 211—288. DOI: 10.1137/100791233.

15. **Kundert K. S., White J., Sangiovanni-Vincentelli A.** Steady-State Methods for Simulating Analog and Microwave Circuits. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990. 247 p.

16. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J.** A robust and efficient oscillator analysis technique using harmonic balance // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000. Vol. 181(4). P. 451—466. DOI: 10.1016/S0045-7825(99)00184-X.

M. M. Gourary, Senior Researcher Associate, e-mail: gourary@ippm.ru,
S. G. Rusakov, D. Sc., Professor, Senior Researcher, Acad. RAS,
Institute for Design Problems in Microelectronics RAS, Zelenograd, Russian Federation

Analysis of Steady-State Oscillations in an Autonomous Oscillator under Multi-Frequency Excitation

The analysis of the behavior of an oscillator under multi-frequency excitation is considered in the paper. The investigation is based on the phase macromodel. The paper shows that three steady-state modes can exist in oscillator under multi-frequency excitation. The synchronized (locked) mode can be defined as the coincidence of the oscillator fundamentals with the excitation fundamentals in the region of sufficiently large excitation magnitude. The unsynchronized (unlocked) mode exists outside the synchronized region and its spectrum contains additional intrinsic fundamental besides the excitation ones. Singular points mode in some isolated points outside the synchronized region is characterized by the equality of the number of the oscillator fundamentals with the number of the excitation fundamentals. Performed numerical experiments confirmed the appearance of bifurcation points while transition of oscillator into the synchronization mode. The existence of singular points outside the synchronization region and their isolated character was also experimentally demonstrated. The problems of finding a steady-state solution of the phase equation of an excited oscillator by the Harmonic Balance (HB) method are considered. It is shown that main difficulties are connected with the presence of linear term in the steady-state solution. A transformation is proposed to provide the formation of HB equations for the phase micromodel in a standard form. Additional difficulties of HB simulations of synchronized oscillator phase equations are discussed.

Keywords: *Adler model, multi-frequency synchronization, phase macromodels, quasiperiodic oscillations, oscillator*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-07-00733

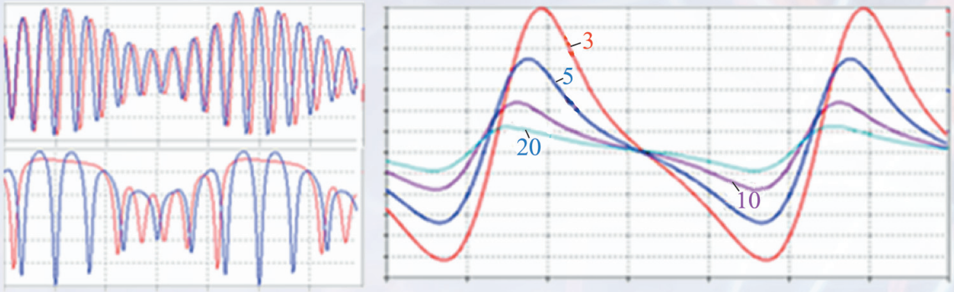
DOI: 10.17587/it.26.655-663

References

1. **Maffezzoni P., Bahr B., Zhang Z., Daniel L.** Reducing Phase Noi in Multi-Phase Oscillators, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2016, vol. 63, no. 3, pp. 379—388, DOI: 10.1109/TCSI.2016.2525078.
2. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M.** Macromodeling approaches for simulation of coupled oscillator networks, *in Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies. MWENT 2018 — Proceedings* 1, pp. 1—4, DOI: 10.1109/MWENT.2018.8337277.
3. **Ashwin P., Coombes S., Nicks R.** Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience, *J. Math. Neuroscience*, 2016, vol. 6, no. 2, DOI: 10.1186/s13408-015-0033-6.
4. **Kumar P., Verma D., Parmananda P.** Partially synchronized states in an ensemble of chemo-mechanical oscillators, *Physics Letters A.*, 2017, vol. 381, no. 29, pp. 2337—2343, DOI: 10.1016/j.physleta.2017.05.032.
5. **Malinowski M., et al.** Towards On-Chip Self-Referenced Frequency-Comb Sources Based on Semiconductor Mode-Locked Lasers, *Micromachines,* 2019, vol. 10, no. 6, pp. 391, DOI: 10.3390/mi10060391.
6. **Peleshchak R., Lytvyn V., Bihun O., Peleshchak I.** Structural Transformations of Incoming Signal by a Single Nonlinear Oscillatory Neuron or by an Artificial Nonlinear Neural Network, *International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA),* 2019, vol. 11, no. 8, pp. 1-10, DOI: 10.5815/ijisa.2019.08.01.
7. **Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Tyuryukina L. V.** Synchronization of quasi-periodic oscillations in coupled phase oscillators, *Tech. Phys. Lett.*, 2010, vol. 36, no. 5, pp. 478—481, DOI: 10.1134/S1063785010050263.
8. **Samoilenko A. M.** Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations, Kluwer, Dordrecht, 1991.
9. **Schilder F., Vogt W., Schreiber S., Osinga H. M.** Fourier methods for quasi-periodic oscillations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, vol. 67, no. 5, pp. 629—67, DOI: 10.1002/nme.163.
10. **Adler N. R.** A study of locking phenomena in oscillators, *Proceedings of the IEEE*, 1973, vol. 61, no. 10, pp. 1380—1385, DOI: 10.1109/PROC.1973.9292.
11. **Razavi B.** A study of injection locking and pulling in oscillators, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2004, vol. 39, no. 9, pp. 1415—1424, DOI: 10.1109/JSSC.2004.831608.
12. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M.** Injection Locking/Pulling Analysis of Oscillators Under Fractional Excitation Frequency, *20th European Conf. on Circuit Theory and Design ECCTD 2011,* Linkoping, Sweden, pp. 545—548, DOI: 10.1109/ECCTD.2011.6043404.
13. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J.** Smoothed form of nonlinear phase macromodel for oscillators, *2008 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*, San Jose, CA, pp. 807—814, DOI: 10.1109/ICCAD.2008.4681669.
14. **Desroches M., Guckenheimer J., Krauskopf B., Kuehn C., Christian O.** Mixed-Mode Oscillations with Multiple Time Scales, *SIAM Review*, 2012, vol. 54, no. 2, pp. 211—288, DOI: 10.1137/100791233.
15. **Kundert K. S., White J., Sangiovanni-Vincentelli A.** Steady-State Methods for Simulating Analog and Microwave Circuits, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1990, 247 p.
16. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J.** A robust and efficient oscillator analysis technique using harmonic balance, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol. 181(4), pp. 451—466, DOI: 10.1016/S0045-7825(99)00184-X.

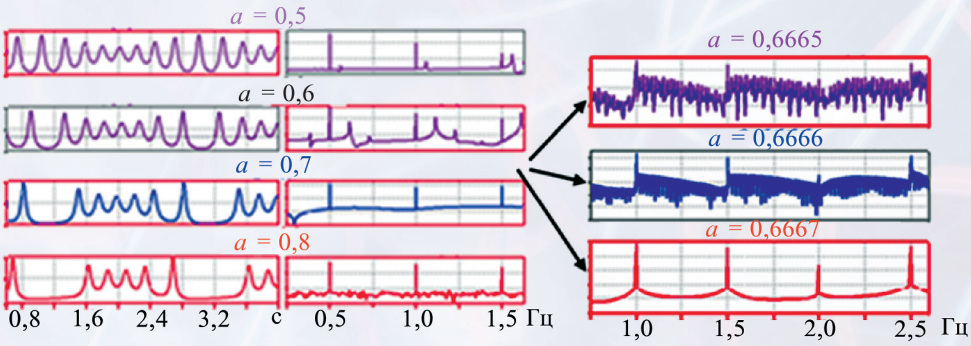
Рисунки к статье М. М. Гурария, С. Г. Русакова

«АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ ПРИ МНОГОЧАСТОТНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ»



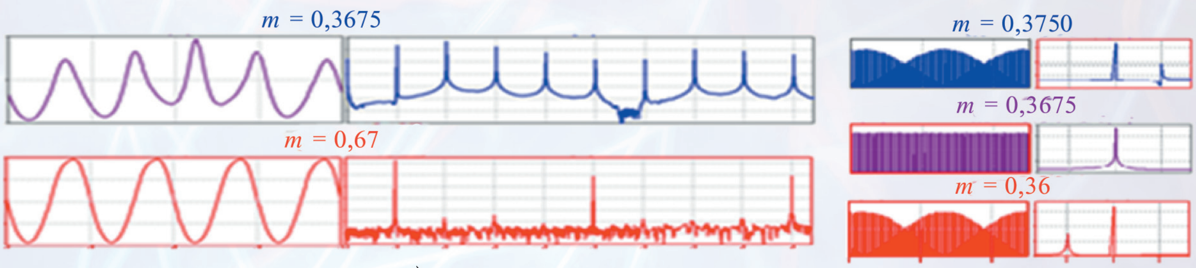
а) *б)*

Рис. 4. Моделирование при АМ-возбуждении:
а – верхний график a = 0,3, нижний – a = 0,8; *б* – большие амплитуды a = 3; 5; 10; 20



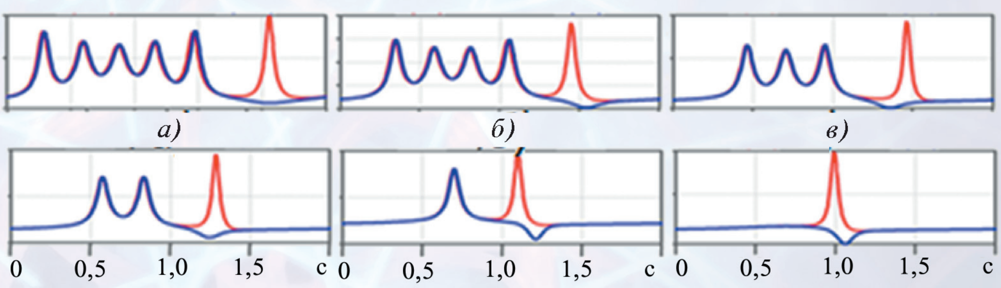
а) *б)*

Рис. 5. Графики мгновенной частоты при АМ-возбуждении:
а – временные кривые (слева) и спектры (справа) для амплитуд a = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8;
б – спектры для амплитуд a = 0,6665; 0,6666; 0,6667



а) *б)*

Рис. 6. Временные графики (слева) и спектры (справа) отклонения мгновенной частоты:
а – для сингулярной точки (m = 0,3675) и для синхронизированного генератора (m = 0,67);
б – для сингулярной точки (средние) и для малых отклонений от нее (Δm = ± 0,0075, верхние и нижние графики)



г) *д)* *е)*

Рис. 8. Формы кривых мгновенной частоты слева (красная кривая) и справа (синяя кривая) от точек переключения:
а – П1; *б* – П2; *в* – П3; *г* – П4; *д* – П5; *е* – П6

ISSN 1684-6400. Информационные технологии. 2020. Том 26. № 11. 609–664. Индекс: 72656 (Объединенный каталог «Пресса России»)