

**В. Н. Тарасов**, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: veniamin\_tarasov@mail.ru,

**Н. Ф. Бахарева**, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: nadin1956\_04@inbox.ru,

**Када Отхмане**, аспирант,

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

## Моделирование телетрафика на основе системы $HE_2/H_2/1$

*Статья посвящена исследованию системы массового обслуживания (СМО)  $HE_2/H_2/1$  типа  $G/G/1$  с гиперэрланговским входным распределением второго порядка и гиперэкспоненциальным законом времени обслуживания в целях получения решения для среднего времени ожидания требований в очереди в случае стационарного режима. Для этого использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов. Оказывается, что гиперэрланговский закон распределения  $HE_2$ , как и гиперэкспоненциальный  $H_2$ , являющийся трехпараметрическим, может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами. Выбор таких законов распределения вероятностей обусловлен тем, что они являются наиболее общими распределениями неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку коэффициент вариации для распределения  $HE_2$   $c_v \geq 1/\sqrt{2}$  и охватывает более широкий диапазон, чем у гиперэкспоненциального распределения, для которого  $c_v \geq 1$ . Определение главной характеристики СМО типа  $G/G/1$  — среднего времени ожидания — является актуальной задачей в связи с тем, что для такой СМО не существует решения в общем случае. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для СМО  $HE_2/H_2/1$  позволяет получить решение в замкнутой форме.*

**Ключевые слова:** гиперэрланговский и гиперэкспоненциальный законы распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа

### Введение

Настоящая статья посвящена анализу систем массового обслуживания (СМО)  $HE_2/H_2/1$  типа  $G/G/1$  с произвольными законами распределений входного потока требований и времени обслуживания, для которых в общем случае не может быть найдено решение для главной характеристики — среднего времени ожидания требований в очереди. Поэтому системы типа  $G/G/1$  могут быть исследованы только при конкретных законах распределений входного потока [1–4].

Как известно, например, из работы [1], для системы  $G/G/1$  среднее время ожидания определяется выражением

$$\bar{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1 - \rho)^2 / \lambda^2}{2(1 - \rho) / \lambda} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — коэффициент загрузки системы ( $0 < \rho = \lambda / \mu < 1$ );  $\lambda$  — интенсивность входного потока;  $\mu$  — интенсивность обслуживания;  $D_\lambda$ ,  $D_\mu$  — соответственно дисперсии интервалов поступления и времени обслуживания;  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}^2$  — соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя. Так как выражение (1) связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслужива-

ния квадратичной зависимостью, роль последних для среднего времени ожидания значительна. Второе слагаемое в правой части (1) остается неизвестным, и вполне вероятно, что оно может зависеть от моментов интервалов поступления и времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО  $G/G/1$  необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка.

В теории телетрафика по среднему времени ожидания, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО.

В исследовании систем  $G/G/1$  важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. Обозначив:

$W(y)$  — функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди;

$C(u) = P(\tilde{u} < u)$  — ФРВ случайной величины  $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$ , где, в свою очередь,  $\tilde{x}$  — случайное время обслуживания требования,  $\tilde{t}$  — случайная величина — интервал времени между поступлениями требований, приведем одну из форм интегрального уравнения Линдли [1–4]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u)dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

В научной литературе нет данных по рассматриваемой системе, и, видимо, это связано с достаточной сложностью гиперэрланговского закона распределения. Выбор законов распределений  $HE_2$  и  $H_2$  можно обосновать несколькими причинами. Во-первых, они являются наиболее общими распределениями неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку для  $HE_R$  коэффициент вариации  $c_\tau > 0$  [5, 6], в частности для  $HE_2$   $c_\tau \geq 1/\sqrt{2}$ . Как известно из работы [1], для гиперэкспоненциального закона распределения  $H_2$  коэффициент вариации  $c_\tau \geq 1$ . Таким образом, оба рассматриваемых закона  $HE_2$  и  $H_2$  имеют широкий диапазон изменения коэффициентов вариаций. Кроме того, законы распределений  $HE_2$  и  $H_2$ , начиная со значения коэффициента вариации, равного 4, имеют так называемый тяжелый хвост [5, 6] и, следовательно, в теории телетрафика могут быть использованы для описания трафика с "тяжелым" контентом: мультимедиа и др. И наконец, их отличительная особенность заключается в том, что они однозначно могут быть определены с использованием как двух первых моментов, так и трех моментов.

### Постановка задачи

Ставится задача определения среднего времени ожидания в системе  $HE_2/H_2/1$  на основе классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) для данной системы в замкнутой форме и, тем самым, дополнения известной формулы (1).

### Решение задачи

Для системы  $HE_2/H_2/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}; \quad (2)$$

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (3)$$

Использование классического метода спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в работах [7–9], позволит определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания.

Согласно методу спектрального разложения нам для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо найти следующее спектральное разложение:  $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  — некоторые рациональные функции от  $s$ , а  $A^*(s)$ ,  $B^*(s)$  — преобразования Лапласа функций плотности (2) и (3) соответственно.

Преобразования Лапласа функций (2) и (3) имеют следующий вид:

$$A^*(s) = p \left( \frac{2\lambda_1}{s + 2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{s + 2\lambda_2} \right)^2;$$

$$B^*(s) = q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2}.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $HE_2/H_2/1$   $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] \times \left[ q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \right] - 1.$$

Выражение, стоящее в первых квадратных скобках, представим в виде

$$\begin{aligned} & \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{p(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1^2\lambda_2s + 4\lambda_1^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} + \\ & + \frac{(1-p)(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1\lambda_2^2s + 4\lambda_2^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} = \\ & = \frac{a_0 - a_1s + a_2s^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}, \end{aligned}$$

где промежуточные параметры, введенные для сокращения записи, равны  $a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2$ ,  $a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]$ ,  $a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2]$ .

Аналогично представим второй сомножитель:

$$\begin{aligned} & \left[ q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \right] = \\ & = \frac{\mu_1\mu_2 + [q\mu_1 + (1-q)\mu_2]s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{b_0 + b_1s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}, \end{aligned}$$

где  $b_0 = \mu_1\mu_2$ ,  $b_1 = q\mu_1 + (1-q)\mu_2$ .

Продолжая разложение, получим:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1s + a_2s^2)(b_0 + b_1s) -}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2 \times} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{\times (\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} =$$

$$= \frac{-s(s^5 - c_4s^4 - c_3s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} =$$

$$= \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

Многочлен в числителе в правой части такого разложения, как правило, всегда имеет один нуль  $s = 0$  [1]. В данном случае свободный член разложения также равен 0:  $a_0b_0 - 16\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1\mu_2 \equiv 0$ .

Окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $HE_2/H_2/1$  имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}. \quad (4)$$

Выпишем многочлен пятой степени в числителе разложения

$$s^5 - c_4s^4 - c_3s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0. \quad (5)$$

Исследование полученного многочлена и нахождение его корней является важной частью метода спектрального разложения решения ИУЛ для любых систем. В нашем случае коэффициенты многочлена (5) имеют следующий вид:

$$c_0 = a_0b_1 - a_1b_0 - a_0(\mu_1 + \mu_2) + 16\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2);$$

$$c_1 = -a_1b_1 + a_2b_0 - a_0 + 16\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - 4\mu_1\mu_2[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2\lambda_1\lambda_2];$$

$$c_2 = a_2b_1 + 4(\lambda_1 + \lambda_2)(4\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) - 4[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2\lambda_1\lambda_2](\mu_1 + \mu_2);$$

$$c_3 = 4(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 16\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2;$$

$$c_4 = 4(\lambda_1 + \lambda_2) - \mu_1 - \mu_2.$$

Эти коэффициенты получены с помощью символьных операций пакета MathCAD, так как изначально в числителе спектрального разложения имеем 42 слагаемых.

Многочлен (5) имеет два действительных отрицательных корня и три положительных корня (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью). Исследование знака младшего коэффициента  $c_0$

показывает, что  $c_0 > 0$  всегда в случае стабильной системы, когда  $0 < \rho < 1$ . С учетом знака минус, стоящего перед  $c_0$  в многочлене (5), это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

Согласно методу спектрального разложения функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям [1]:

- 1) для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- 2) для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где  $D$  — некоторая положительная константа,

определяемая из условия:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty$ .

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (7)$$

Теперь с учетом условий (6) и (7) строим рациональные функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  для рассматриваемого случая:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)},$$

так как нули многочлена (5):  $s = 0$ ,  $s = -s_1$ ,  $s = -s_2$  и полюсы  $s = -\mu_1$ ,  $s = -\mu_2$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ ;

$$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}{(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)},$$

так как ее нули и полюсы лежат в области  $\text{Re}(s) < D$ , определенной условием (6). Выполнение условий (6) и (7) спектрального разложения для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  также подтверждается рис. 1.

При построении этих функций удобнее нули и полюсы отношения  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  отметить на комплексной  $s$ -плоскости для исключения ошибок построения функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ .

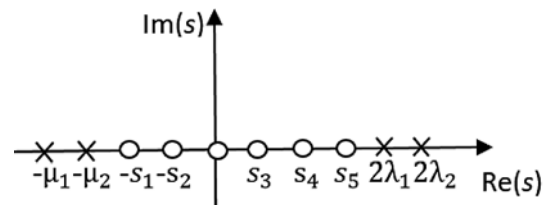


Рис. 1. Нули и полюсы функции  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы  $HE_2/H_2/1$

На рис. 1 полюсы отмечены крестиками, а нули — кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \frac{s_1 s_2}{\mu_1 \mu_2},$$

где  $s_1, s_2$  — абсолютные значения отрицательных корней  $-s_1, -s_2$ . Постоянная  $K$  определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застанет ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания построим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\Psi_+(s)} = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{s \mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания  $W^*(s) = s\Phi_+(s)$  будет равно

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (8)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции (8)  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ :

$$\bar{W} = - \left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно среднее время ожидания для системы  $HE_2/H_2/1$  составляет

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (9)$$

Из выражения (8) также можно определить дисперсию времени ожидания. Вторая производная от преобразования (8) в точке  $s = 0$  дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от среднего значения [10], тем самым получим возможность его определения через дисперсию. Это является важным результатом для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Для практического применения выражения (9) необходимо определить числовые характеристики распределений (2)  $HE_2$  и (3)  $H_2$ . Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и за-

пишем начальные моменты до второго порядка для распределения (2):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}; \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2} \left[ \frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right]. \quad (11)$$

### Аппроксимация законов распределений $HE_2$ и $H_2$ с использованием двух первых моментов

Рассматривая равенства (10) и (11) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (2)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Система двух уравнений (10), (11) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации

$$c_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} \quad (12)$$

как связующее условие между (10) и (11). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (10) положим

$$\lambda_1 = 2p/\bar{\tau}_\lambda; \quad \lambda_2 = 2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda \quad (13)$$

и потребуем выполнения условия (12). Подставим выражения (10), (11) и частное решение (13) в выражение (12) и получим уравнение четвертой степени  $p(1-p)[8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3] = 0$  относительно параметра  $p$ . С учетом условия  $0 < p < 1$  имеем квадратное уравнение  $8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3 = 0$ . Решив его, получим

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2) - 3}{8(1+c_\lambda^2)}} \quad (14)$$

и можем выбрать для однозначности, например, наибольшее значение  $p$ .

Отсюда следует, что коэффициент вариации интервалов входного потока  $c_\lambda \geq 1/\sqrt{2}$ . Подставив значение параметра  $p$  из (14) в соотношение (13), определим значения параметров распределения (2)  $\lambda_1, \lambda_2$ . Таким образом, получено частное решение недоопределенной системы уравнений (10) и (11) методом подбора.

Аналогично поступим с распределением (3). В этом случае два первых начальных момента будут равны

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2}; \quad \bar{\tau}_\mu^2 = \frac{2q}{\mu_1^2} + \frac{2(1-q)}{\mu_2^2}.$$

Рассуждая аналогично, положив

$$\mu_1 = 2q/\bar{\tau}_\mu; \mu_2 = 2(1-q)/\bar{\tau}_\mu, \quad (15)$$

для параметра  $q$  получим выражение [7]

$$q = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{c_\mu^2 - 1}{c_\mu^2 + 1}} \right). \quad (16)$$

Подставив значение параметра  $q$  из выражения (16) в соотношение (15), определим значения параметров распределения (3)  $\mu_1, \mu_2$ .

### Аппроксимация законов распределений HE<sub>2</sub> и H<sub>2</sub> с использованием трех первых моментов

Учитывая тот факт, что распределения HE<sub>2</sub> и H<sub>2</sub> являются трехпараметрическими, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов. Для этого запишем выражения для начального момента 3-го порядка, полученное через преобразование Лапласа  $A^*(s)$ :

$$\bar{\tau}_\lambda^3 = \frac{3p}{\lambda_1^3} + \frac{3(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (17)$$

Присоединив уравнение (17) к уравнениям моментов (10), (11) и решив систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными при заданных значениях начальных моментов до третьего порядка включительно, в пакете MathCAD находим все три параметра  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Аналогично, присоединив уравнение для третьего начального момента распределения (3)

$$\bar{\tau}_\mu^3 = \frac{6q}{\mu_1^3} + \frac{6(1-q)}{\mu_2^3}$$

к двум предыдущим уравнениям для первых двух начальных моментов и решив систему трех уравнений в пакете MathCAD, находим все три параметра  $\mu_1, \mu_2, q$ .

Такой подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением H<sub>2</sub> применен в работах автора [7–9], кроме того, в работе [8] подробно на графике продемонстрирована разница между аппроксимацией на уровне двух первых моментов и на уровне трех первых моментов для распределения H<sub>2</sub>. Как показано в работе [7] на примере гиперэкспоненциальных входных распределений, аппроксимация с использованием двух первых моментов в отличие от трех моментов может занижать среднее время ожидания до 10 % в зависимости от значений загрузки и 3-го момента.

Необходимым и достаточным условием существования решения для этой системы трех

нелинейных уравнений (следовательно, для аппроксимации распределения H<sub>2</sub> на уровне трех первых моментов) будет выполнение неравенства [11]

$$\bar{\tau}_\lambda^3 \bar{\tau}_\lambda \geq 1,5 \bar{\tau}_\lambda^2. \quad (18)$$

Теперь сравним начальные моменты для распределений HE<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>. Выражения для начальных моментов первого порядка у них совпадают, моментов второго порядка для распределения HE<sub>2</sub> меньше в 4/3 раза, а моментов третьего порядка меньше в 2 раза. С учетом этого факта можно получить условие, аналогичное (18) для аппроксимации распределения HE<sub>2</sub> на уровне трех первых моментов:

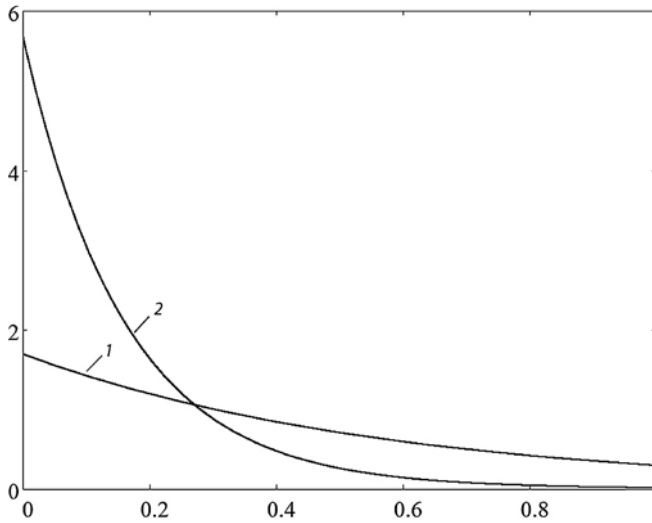
$$\bar{\tau}_\lambda^3 \bar{\tau}_\lambda \geq \bar{\tau}_\lambda^2. \quad (19)$$

Таким образом, гиперэрланговский закон распределения второго порядка, так же как и гиперэкспоненциальный, может однозначно определяться полностью как двумя первыми моментами, так и тремя моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от  $1/\sqrt{2}$  до  $\infty$ , что шире, чем у гиперэкспоненциального распределения (1,  $\infty$ ).

Рассмотрим пример аппроксимации входного потока гиперэкспоненциальным распределением (аналогичным будет и вариант с гиперэрланговским законом распределения). Пусть средний интервал между поступлениями  $\bar{\tau}_\lambda = 10/9$  (единиц времени), а коэффициент вариации случайной величины — интервала времени между поступлениями —  $c_\lambda = 4$ . Тогда второй начальный момент  $\bar{\tau}_\lambda^2 = 17 \cdot (10/9)^2$ . Аппроксимация с использованием двух первых моментов дает:  $p \approx 0,9697, \lambda_1 \approx 1,7454, \lambda_2 \approx 0,0546$ .

Для аппроксимации с использованием трех первых моментов введем в качестве третьего момента коэффициент асимметрии  $A_{S\lambda}$  и для определенности положим  $A_{S\lambda} = 7$ . Тогда необходимое и достаточное условие аппроксимации (18) будет выполнено. Как известно, для пуассоновского потока параметры  $c_\lambda = 1$  и  $A_{S\lambda} = 2$ . Тогда третий начальный момент будет равен  $\bar{\tau}_\lambda^3 = 497 \cdot (10/9)^3$  и решение системы трех уравнений метода моментов даст  $p \approx 0,9111, \lambda_1 \approx 6,2291, \lambda_2 \approx 0,0922$ . Графики функции плотности H<sub>2</sub> с полученными параметрами приведены на рис. 2.

Величины  $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$  будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы HE<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>/1. Тогда алгоритм расчета сведется:



**Рис. 2. Графики функции плотности  $H_2$ :**  
 1 — аппроксимация закона распределения  $H_2$  на уровне двух моментов; 2 — на уровне трех моментов

- к последовательному определению параметров распределений (2)  $\lambda_1, \lambda_2, p$  и (3)  $\mu_1, \mu_2, q$  через значения входных параметров  $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ ;
- к нахождению нужных корней многочлена (5)  $-s_1, -s_2$ , а затем к использованию расчетного выражения (8).

### Результаты экспериментов

В таблице приведены данные расчетов в пакете MathCAD для системы  $HE_2/H_2/1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ . Для сравнения в правой колонке

**Результаты экспериментов для СМО  $HE_2/H_2/1$  в сравнении с  $H_2/H_2/1$**

Входные параметры		Среднее время ожидания	
$\rho$	$(c_\lambda, c_\mu)$	для системы $HE_2/H_2/1$	для системы $H_2/H_2/1$
0,1	(0,71;1)	0,030	—
	(2,2)	0,335	0,445
	(4,4)	1,666	1,779
	(8,8)	7,10	7,112
0,5	(0,71;1)	0,620	—
	(2,2)	3,974	4,044
	(4,4)	16,392	16,129
	(8,8)	65,967	64,178
0,9	(0,71;1)	6,607	—
	(2,2)	36,271	36,20
	(4,4)	145,465	144,833
	(8,8)	580,822	577,861

приведены данные для системы  $H_2/H_2/1$ , для которой  $c_\lambda, c_\mu \geq 1$  [7]. Коэффициент загрузки  $\rho$  в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов обслуживания и поступления требований  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты, приведенные в таблице, выполнены для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ . Заметим, что система  $H_2/H_2/1$  применима только при  $c_\lambda \geq 1$  и  $c_\mu \geq 1$ , поэтому в таблице для случая  $c_\lambda < 1$  стоят прочерки.

Значения среднего времени ожидания в системах  $HE_2/H_2/1$  и  $H_2/H_2/1$  достаточно близки при средней и высокой нагрузках систем, хотя начальные моменты распределений (начиная со второго)  $HE_2$  и  $H_2$  разнятся. Полученные расчетные данные хорошо согласуются с результатами работы [12] в той области параметров, при которых определена система  $HE_2/H_2/1$ .

### Заключение

В работе получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы  $HE_2/H_2/1$ , с помощью которого выведено расчетное выражение для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Результаты расчетов сравниваются с результатами аналогичной системы  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка для входного потока и времени обслуживания.

Полученное расчетное выражение для среднего времени ожидания расширяет и дополняет известную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем типа  $G/G/1$  с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания. При этом диапазон изменения параметров у системы  $HE_2/H_2/1$  шире, чем у системы  $H_2/H_2/1$ .

Полученный результат с успехом может быть применен в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух или трех первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [7].

Заметим, что реальные системы передачи данных имеют ограниченную емкость буфера, поэтому полученные результаты по СМО с бесконечной очередью могут служить лишь первым приближением телетрафика.

## Список литературы

1. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. **Brannstrom N.** A Queueing Theory analysis of wireless radio systems — Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. 79 p.
3. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // *Operation Research*. 1982. N. 1. P. 125—147.
4. **Бочаров П. П., Печинкин А. В.** Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
5. **Алиев Т. И.** Основы моделирования дискретных систем. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
6. **Алиев Т. И.** Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2(84). С. 88—93.
7. **Тарасов В. Н.** Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распре-

делениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16—26.

8. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Липилина Л. В.** Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. № 2. С. 121—126.

9. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Горелов Г. А.** Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания  $H_2/M/1$  // Информационные технологии. 2014. № 3. С. 36—41.

10. **URL:** [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).

11. **Myaskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*. Elsevier Science Publishers, 1991. P. 683—688.

12. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф.** Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. № 7. С. 2—8.

**V. N. Tarasov**, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: [veniamin\\_tarasov@mail.ru](mailto:veniamin_tarasov@mail.ru),

**N. F. Bakhareva**, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: [nadin1956\\_04@inbox.ru](mailto:nadin1956_04@inbox.ru),

**Kada Othmane**, Postgraduate,

Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation

## The Mathematical Model of Teletraffic Based on the $HE_2/H_2/1$ System

*The article is devoted to the study of the G/G/1 type  $HE_2/H_2/1$  queueing system with a second-order hypererlangian input distribution and a hyperexponential service time law with the aim of obtaining a solution for the average waiting time in queue in the case of stationary mode. For this, the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation is used. For practical application of the obtained results, the method of moments is used. It turns out that the hypererlangian distribution law  $HE_2$ , like the hyperexponential  $H_2$ , which is three-parameter, can be determined by both the first two moments and the first three moments. The choice of such probability distribution laws is due to the fact that they are the most common distributions of non-negative continuous random variables, since the coefficient of variation for the  $HE_2$   $c_v \geq 1/\sqrt{2}$  distribution covers a wider range than the hyperexponential distribution for which  $c_v \geq 1$ . Determination of the principal characteristic of QS G/G/1 — of the average waiting time in queue an important task due to the fact that for such a QS there is no solution in the general case. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the QS  $HE_2/H_2/1$  allows one to obtain a solution in closed form.*

**Keywords:** Hypererlangian and hyperexponential distribution laws, Lindley integral equation, method of spectral decomposition, Laplace transform

DOI: 10.17587/it.25.531-537

### References

1. **Kleinrock L.** Teoriya massovogo obsluzhivaniya, Moscow, Mashinostroenie, 1979, 432 p. (in Russian).
2. **Brannstrom N.** A Queueing Theory analysis of wireless radio systems — Applied to HS-DSCH, Lulea university of technology, 2004, 79 p.
3. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods, *Operation Research*, 1982, no. 1, pp. 125—147.
4. **Bocharov P. P., Pechinkin A. V.** Teoriya massovogo obsluzhivaniya, Moscow, Publishing house of RUDN, 1995, 529 p. (in Russian).
5. **Aliiev T. I.** *Osnovy modelirovaniya diskretnykh system* (Fundamentals of discrete systems modeling), SPb, Publishing house of SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (in Russian).
6. **Aliiev T. I.** Approximation of probability distributions in queueing models, *Nauchno-Tekhnicheskij Vestnik Informacionnykh Tekhnologij, Mekhaniki i Optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88—93 (in Russian).

7. **Tarasov V. N.** Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions, *Problemy Peredachi Informacii*, 2016, no. 1, pp. 16—26 (in Russian).

8. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Lipilina L. V.** Mathematical Model of Teletraffic on the Based G/M/1 System and Results of Computational Experiment, *Informacionnye Tekhnologii*. 2016, no. 2, pp. 121—126 (in Russian).

9. **Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A.** Mathematical model of traffic with heavy-tailed distribution based on the queueing system  $H_2/M/1$ , *Infokommunikacionnye Tekhnologii*, 2014, no. 3, pp. 36—41 (in Russian).

10. **Available** at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (date of access: 26.02.2016).

11. **Myaskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals, *Tel-etraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683—688.

12. **Tarasov V. N., Bahareva N. F.** A generalized two-dimensional diffusion queueing model of the GI/G/1 type, *Telekommunikacii*, 2009, no. 7, pp. 2—8 (in Russian).