

Ю. А. Зак, д-р техн. наук, e-mail: yuriy_zack@hotmail.ru,
Аахен, Германия

Алгоритмы оперативного перераспределения ресурсов в системах сетевого планирования и управления выполнением проектов

Рассматриваются различные стратегии и алгоритмы эффективного распределения ограниченных объемов ресурсов в процессе выполнения заданий проекта, последовательность выполнения которых задана сетевым графиком. На различных этапах разработки определены наиболее важные комплексы работ, требующие увеличения объемов направляемых ресурсов в целях сокращения времени их выполнения. Предложенные в работе методы позволяют сократить время критического пути завершения выполнения как отдельных заданий, так и всего комплекса работ проекта. Предложенные алгоритмы иллюстрируются числовыми примерами.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, алгоритм распределения ресурсов

Введение

Системы СРМ (метод критического пути) и PERT (Program Evaluation and Review Technique — метод оценки и обзора программ) базируются на идее сетевого планирования [1, 8–11], предназначены для оптимизации длительности выполнения сложных проектов за счет эффективных логико-управленческих решений по перераспределению ресурсов для выполнения наиболее важных в данный момент времени заданий, позволяющих, тем самым, управлять временем, необходимым для выполнения заданий.

Представим систему PERT в виде сетевого графика, т. е. графа, вершины которого отображают задания или работы, входящие в состав проекта, а дуги — взаимосвязи этих заданий, т. е. последовательности и очередности их выполнения. Такое представление дает возможность анализа времени, которое требуется для выполнения каждого отдельного задания, расчета минимально возможного и допустимого наиболее позднего времени его начала и завершения, определения минимального необходимого времени завершения проекта, а также перераспределения ресурсов в любой момент времени на выполнение различных заданий для эффективного управления всеми этими показателями.

Разработанные в США в конце 50-х годов методики сетевого планирования позволяют решать определенный круг задач, основными среди которых являются [1–3, 8–11]:

- разработка расписания выполнения всех работ проекта, как с учетом, так и без учета ограниченности ресурсов;

- определение критического пути и резервов времени выполнения работ проекта;
- определение потребности проекта в необходимых ресурсах (финансировании, материалах и оборудовании, составе исполнителей и т. п.);
- анализ возможных рисков и планирование расписания выполнения работ с учетом возможных отклонений от планируемых сроков выполнения отдельных заданий;
- анализ отклонений хода выполнения работ от запланированного и прогнозирование изменений основных параметров проекта.

Если вершины графа определяют задания, входящие в состав проекта, а дуги — их взаимосвязи и последовательности их выполнения, то начало проекта — это вершина без входящих, а окончание — вершина без исходящих дуг. Начало и конец реализации проекта представлены множеством путей, длины которых различаются. Наибольшая длина пути определяет фактическую длительность выполнения всего проекта и называется критическим путем. Критический путь определяет все задания проекта, которые должны быть закончены точно в установленный срок. Знание критических путей в любой точке проекта — необходимое условие успешного выполнения проекта, а также средство выделения приоритетов заданиям, которые требуют особого внимания и определяют в данный момент сроки выполнения проекта. Многие задания, не лежащие на критическом пути, имеют некоторый резерв для начала и завершения времени их выполнения. Резерв времени — это время, на которое можно увеличить продолжитель-

ность (или начало выполнения) данного задания, не изменяя при этом продолжительность критического пути. Если задание находится на критическом пути, то его резерв времени равен нулю.

В большинстве публикаций по анализу методом PERT времени выполнения сложных проектов времена выполнения отдельных заданий рассматривались как установленные экспертами детерминированные величины. Планируемая продолжительность выполнения заданий определялась как некоторое действительное число, вычисляемое по одной из формул:

$$t_i = \frac{1}{5}(3h_i^1 + 2h_i^2), \quad t_i = \frac{1}{6}(h_i^1 + 4\bar{h}_i + h_i^2),$$

где \bar{h}_i — наиболее вероятная оценка, а h_i^1, h_i^2 — соответственно нижняя (оптимистическая) оценка, определяющая время выполнения этого задания в идеальных условиях, и верхняя (пессимистическая) оценка, определяющая максимальную продолжительность с учетом всех возможных срывов.

Анализ сетевых графиков и всех возможных рисков срыва плановых сроков завершения проекта методами fuzzy-арифметики в условиях, когда времена выполнения заданий представлены нечеткими множествами треугольного и трапециевидного вида, рассматривался в работах автора [4—6]. Методам эффективного распределения ресурсов в процессе выполнения работ, обеспечивающих сокращение длины критического пути и времени выполнения проекта, не уделялось значительного внимания в литературе. Автору известна только одна теоретическая публикация, связанная с решением этой проблемы в непрерывном времени методом принципа максимума с ограничением на фазовые координаты [7], которая, к сожалению, получила ограниченное практическое приложение. В данной статье предлагается практическое приближенное решение задачи распределения ограниченных ресурсов в процессе выполнения проекта в целях обеспечения выполнения всех заданий и завершения выполнения проекта в наиболее короткие сроки.

Рассматриваются также стохастические постановки задач по оценке времени выполнения работ, в которых математическое ожидание и дисперсия продолжительности работ рассчитывались по формулам (см., например, [1, 3, 8, 10, 11]):

$$M[t_i] = \frac{1}{5}(3h_i^1 + 2h_i^2), \quad D[t_i] = \left[\frac{h_i^2 - h_i^1}{5} \right]^2.$$

1. Постановка и метод решения задачи

Обозначим:

$\tilde{U} = \{(i, j) \mid i \in \tilde{I}, j \in \tilde{I}, i \neq j\}$ — множество дуг сетевого графика;

$\tilde{A}(i) = \{j \in \tilde{I} \mid (j, i) \in \tilde{U}\}$ (перед "i") — подмножество вершин, являющихся началом дуг, концом которых является вершина i ;

$\tilde{B}(i) = \{j \in \tilde{I} \mid (j, i) \in \tilde{U}\}$ (после "i") — подмножество вершин, являющихся концом дуг, направленных из вершины i .

В условиях, когда в системах СРМ и PERT в управлении разработками использовались числовые детерминированные значения основных показателей, любое i -е задание (задача, событие, вершина графа), $i \in \tilde{I}$, где $\tilde{I} = \{i, j = 1, \dots, n\}$, входящее в состав проекта, характеризуется следующими временными параметрами:

t_i — время, необходимое для выполнения i -го задания;

g_i^1 — наиболее раннее время начала выполнения i -го задания;

g_i^2 — допустимый наиболее поздний срок начала выполнения i -го задания;

w_i^1, w_i^2 — соответственно наиболее раннее и допустимое наиболее позднее время завершения выполнения i -го задания;

r_i — резерв времени завершения выполнения i -го задания;

$\theta(\tau)$ — текущее время выполнения проекта;

D_n — длина критического пути, т. е. продолжительность времени выполнения проекта на начальном этапе решения задачи.

Каждое i -е задание не может быть выполнено до тех пор, пока не завершится выполнение всех заданий, стоящих непосредственно перед ним, т. е. заданий $j \in \tilde{A}(i)$. Следовательно,

$$g_i^1 = \max_{j \in \tilde{A}(i)} (g_j^1 + t_j), \quad w_i^1 = g_i^1 + t_i, \quad i \in \tilde{I}. \quad (1)$$

Расчет значений g_i^1 и w_i^1 ведется от начала сетевого графика к концу. Для введенной для удобства расчетов фиктивной вершины графа $i = 0$, определяющей начало проекта, значение $t_0 = 0$.

Время допустимого наиболее позднего времени начала g_i^2 и завершения выполнения i -го задания w_i^2 (не увеличивая при этом критический путь выполнения проекта) ведется от конечной вершины сетевого графика к началу и рассчитывается по формулам

$$w_i^2 = \max_{j \in \tilde{B}(i)} w_j^2, \quad g_i^2 = w_i^2 - t_i, \quad i \in \tilde{I}. \quad (2)$$

Длина критического пути определяется значением $D_n = w_n^1 = w_n^2$, т. е. временем завершения

выполнения задания, соответствующего последней вершине графа, для которой $\bar{B}(n) = \emptyset$. Возникшие при этом резервы времени выполнения отдельных заданий определяются по формулам

$$r_i = g_i^2 - g_i^1 \text{ или } r_i = w_i^2 - w_i^1, \quad i \in \tilde{I}.$$

В ряде случаев могут быть определены не времена выполнения, а только необходимые объемы работ, связанные с выполнением отдельных заданий, которые обозначим S_i , $i \in \tilde{I} = \{1, 2, \dots, n\}$. Скорость v_i и, следовательно, время выполнения i -го задания t_i зависит от объемов ресурсов различного вида q_i^p , $p = 1, 2, \dots, P$, $i = 1, 2, \dots, n$, выделенных на выполнение данного задания, т. е. $v_i = \varphi_i(q_i^1, \dots, q_i^p, \dots, q_i^P)$, $t_i = \frac{S_i}{v_i}$. Отметим, что на различных этапах выполнения задания вид функции $v_i = \varphi_i(q_i^1, \dots, q_i^p, \dots, q_i^P)$ может быть различным и зависит от стадии выполнения этого задания. В качестве примера приведем несколько видов этих функций:

$$\begin{aligned} v_i^1 &= \sum_{p=1}^P \beta_i^p q_i^p, \quad v_i^2 = \min_{1 \leq p \leq P} \lambda_i^p q_i^p, \\ v_i^3 &= \min \left[\sum_{p \in P_1} \lambda_i^p q_i^p; \sum_{p \in P_2} \rho_i^p q_i^p \right], \\ v_i^4 &= \psi_i \left(\min_{1 \leq p \leq P} \lambda_i^p q_i^p \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь β_i^p , λ_i^p , ρ_i^p — весовые коэффициенты, $\psi_i(\cdot)$ — некоторый вид нелинейной зависимости.

В каждый момент времени выполнения проекта τ система принятия решений располагает ограниченным объемом ресурсов каждого вида $\bar{Q}(\tau) = \{Q^1(\tau), \dots, Q^p(\tau), \dots, Q^P(\tau)\}$, которые могут быть распределены для выполнения различного вида заданий таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} Q^p(\tau) &\leq \sum_{i \in \tilde{H}(\tau)} q_i^p(\tau), \\ p &= 1, 2, \dots, P, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Алгоритмы эффективного перераспределения ресурсов

Очень важно определить время выполнения проекта, наиболее целесообразное для перераспределения ограниченных ресурсов. Обозначим $\tilde{K}(\tau)$ — подмножество доступных для

выполнения заданий в момент времени τ , т. е. подмножество вершин графа, не имеющих входящих дуг: $\tilde{K}(\tau) = \{i(\tau) \in \tilde{I} \mid \tilde{A}[i(\tau)] = \emptyset\}$. Ясно, что в момент времени τ ресурсы целесообразно направлять только на выполнение заданий подмножества $\tilde{K}(\tau)$. Здесь $\tilde{A}[i(\tau)]$ — подмножество оставшихся невыполненных заданий непосредственно предшествующих заданию i в момент времени τ .

Сетевой график выполнения всех заданий проекта представим в виде, когда как в начале, так и на любом этапе выполнения алгоритма решения задачи каждой вершине графа поставлено в соответствие не время, а необходимый объем ресурсов для выполнения каждого задания в момент времени τ , который равен $S_j(\tau)$, $i \in \tilde{I}$, $\tau = 1, 2, \dots, T$. Критический путь из любой вершины графа $j \in \{\tilde{I}/n\}$, рассчитанный в момент времени τ , подмножество вершин которого обозначим $L_n(j, \tau)$ и длина которого равна $D_n(j, \tau)$ (здесь $D_n(\tau) = \max_{i \in \tilde{A}(j)} D_n(i, \tau)$), определяет необходимый суммарный объем работ, необходимый в данный момент времени τ для завершения выполнения всех заданий проекта на пути из вершины j в конечную вершину n .

Рассмотрим различные стратегии распределения ресурсов в момент времени τ .

Стратегия 1. Все объемы различного вида ресурсов $Q^p(\tau)$ направляются на выполнение только одного задания $\bar{i}(\tau) \in \tilde{K}(\tau)$, определяющего начальную вершину критического пути ($D_n(\tau)$), рассчитанного в момент времени τ . Пусть оставшийся объем работ, необходимый для завершения выполнения этого задания, равен $S_{\bar{i}}(\tau)$. Вычислим время, необходимое для выполнения этого задания:

$$\begin{aligned} v_{\bar{i}}(\tau) &= \frac{S_{\bar{i}}(\tau)}{\psi_{\bar{i}}(\tau) \{Q^1(\tau), \dots, Q^p(\tau), \dots, Q^P(\tau)\}}; \\ t_{\bar{i}}(\tau) &= \frac{S_{\bar{i}}(\tau)}{v_{\bar{i}}(\tau)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полагаем $\theta(\tau) = \tau := \tau + t_{\bar{i}}(\tau)$.

Стратегия 2. Определим подмножество вершин графа $\tilde{K}(\tau)$, а также длины всех критических путей выполнения проекта $D_n(j, \tau)$, $j \in \tilde{K}(\tau)$, началом которых является каждая из вершин этого подмножества $\tilde{K}(\tau)$. Обозначим объемы работ, необходимые для завершения выполнения этих заданий, $S_j(\tau)$, а число вершин подмножества $\tilde{K}(\tau)$ — $m(\tau)$. Распределение ресурсов в момент времени τ осуществим в соответствии со следующим алгоритмом:

$$\frac{q_1^p(\tau)}{D_n(1, \tau)} = \dots = \frac{q_j^p(\tau)}{D_n(j, \tau)} = \dots = \frac{q_{m(\tau)}^p(\tau)}{D_n(m(\tau), \tau)}; \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{m(\tau)} q_j^p(\tau) = Q^p(\tau), \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Рассчитываем времена выполнения каждого из заданий $j \in \tilde{K}(\tau)$ по формулам, аналогичным (5):

$$t_j(\tau) = \frac{S_j(\tau)}{v_j(\tau)}, \quad j = 1, 2, \dots, m(\tau), \quad (7)$$

а также самое раннее время выполнения какого-либо задания из этого подмножества

$$\lambda(\tau) = \min \left(\frac{S_1(\tau)}{v_1(\tau)}, \frac{S_2(\tau)}{v_2(\tau)}, \dots, \frac{S_j(\tau)}{v_j(\tau)}, \dots, \frac{S_{m(\tau)}(\tau)}{v_{m(\tau)}(\tau)} \right). \quad (8)$$

Полагаем $\theta(\tau) = \tau := \tau + \lambda(\tau)$.

Стратегия 3. Эта стратегия предусматривает распределение ресурсов на выполнение заданий подмножества $j \in \tilde{K}(\tau)$ в соответствии с алгоритмом решения задачи:

$$\frac{q_1^p(\tau)}{t_1(\tau)} = \dots = \frac{q_j^p(\tau)}{t_j(\tau)} = \dots = \frac{q_{m(\tau)}^p(\tau)}{t_{m(\tau)}(\tau)},$$

$$\sum_{j=1}^{m(\tau)} q_j^p(\tau) = Q^p(\tau), \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Отметим, что при распределении неделимых ресурсов (например, персональных ресурсов) решение описанных выше задач выполняется в целых числах.

Время $\theta(\tau)$ определяется аналогично правилу стратегии 2 по формуле (8).

Стратегия 4. Перераспределение ресурсов выполняем в дискретные моменты времени $\tau = 1, 2, \dots, T$, используя при этом стратегии 1 или 2, либо на каждом шаге или через несколько шагов меняя стратегию.

Алгоритм эффективного распределения ресурсов

Вводим фиктивную вершину сетевого графика $i = 0$. Обозначим $\tilde{I}^1(\tau)$ и $\tilde{I}^2(\tau)$ соответственно подмножество выполненных и подлежащих выполнению в момент времени τ заданий: $\tilde{I}^1(\tau) \cup \tilde{I}^2(\tau) = \tilde{I}$; $\tilde{I}^1(\tau) \cap \tilde{I}^2(\tau) = \emptyset$. В начале процесса положим $\tau = \theta(\tau) = 0$, а также $\tilde{I}^1(\tau) = \emptyset$, $\tilde{I}^2(\tau) = \tilde{I}$. Алгоритм предусматривает выполнение следующих шагов.

Шаг 1. Определяем подмножество вершин графа, не имеющих входящих дуг, — $\tilde{K}(\tau)$.

Определяем и рассчитываем по формулам (1), (2) критические пути с началом в каждой из вершин $j \in \tilde{K}(\tau)$ в конечную вершину графа n , для которой $\bar{B}(n) = \emptyset$. Длины этих путей соответственно равны $D_j(\tau)$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. В момент времени $\tau = \theta(\tau)$, выбирая одну из описанных выше стратегий 1–4, распределяем все объемы имеющихся в распоряжении в данный момент ресурсов $Q^p(\tau)$, $p = 1, \dots, P$, на выполнение заданий подмножества $j \in \tilde{K}(\tau)$. В соответствии с выражениями или алгоритмами (3), (4), (5) определяем по формулам (5) скорости выполнения каждого из этих заданий $t_j(\tau)$, $j \in \tilde{K}(\tau)$. Рассчитываем наиболее раннее время выполнения одного или нескольких из этого подмножества заданий по формуле (8), которое обозначим $\tau_1 = \bar{\theta}(\tau)$. Обозначим подмножество таких заданий $l \in \tilde{K}_1(\tau)$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Пересчитываем необходимые объемы работ для выполнения заданий подмножества $\tilde{K}_2(\tau) \subset \{\tilde{K}(\tau) / \tilde{K}_1(\tau)\}$ по формулам

$$S_j(\tau_1) = S_j(\tau) - v_j(\tau)t_j(\tau), \quad j \in \tilde{K}_2(\tau).$$

Определяем $\theta(\tau_1) = \theta(\tau) + \tau_1$. Полагаем $\tilde{I}^1(\tau_1) = \tilde{I}^1(\tau) \cup \tilde{K}_1(\tau)$, $\tilde{I}^2(\tau_1) = \{\tilde{I}^2(\tau) / \tilde{K}_1(\tau)\}$. Если $\tilde{I}^1(\tau_1) = \tilde{I}$ и $\tilde{I}^2(\tau_1) = \emptyset$, то алгоритм завершает свою работу, и время выполнения проекта равно $\theta(\tau_1)$. В противном случае, положив $\tau = \theta(\tau) := \theta(\tau_1)$, переходим к выполнению шага 1.

Иллюстративный пример

Граф, отражающий последовательность выполнения заданий, представлен на рис. 1.

Необходимые объемы работ, связанные с выполнением каждого из заданий, сведены в табл. 1.

В системе используется только один вид ресурсов. В каждый момент времени τ объем ресурсов, необходимых для выполнения подмножества

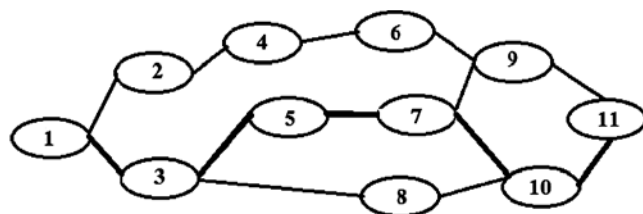


Рис. 1. Граф последовательности выполнения заданий

Исходные данные иллюстративного примера

Номера заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объемы работ	25	30	15	18	12	28	14	8	30	16	20

Таблица 2

Процесс решения задачи

Номера заданий	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объемы работ $T_1 = \theta(\tau_1) = 2,5$	30	15	18	12	28	14	8	30	16	20
Объемы работ $T_2 = \theta(\tau_3) = 6,25$	7,25	—	18	12	28	14	8	30	16	20
Объемы работ $T_3 = \theta(\tau_2) = 7,7$	—	—	18	7,65	28	14	5,1	30	16	20
Объемы работ $T_4 = \theta(\tau_5) = \theta(\tau_8) = 10,25$	—	—	2,55	—	28	14	—	30	16	20
Объемы работ $T_5 = \theta(\tau_4) = 10,675$	—	—	—	—	28	12,3	—	30	16	20
Объемы работ $T_6 = \theta(\tau_7) = 13,75$	—	—	—	—	9,55	—	—	30	16	20
Объемы работ $T_7 = \theta(\tau_6) = 15,35$	—	—	—	—	—	—	—	30	9,6	20
Объемы работ $T_8 = \theta(\tau_{10}) = 17,75$	—	—	—	—	—	—	—	15,6	—	20

жества заданий, равен $Q(\tau) = 10$. Так как речь идет о распределении только персональных ресурсов, объем выделяемых ресурсов на выполнение отдельных заданий может рассматриваться лишь в целых числах. Время выполнения объемов работ в зависимости от выделенных ресурсов определяется линейной зависимостью $S_i(\tau) = v_i(\tau)t_i(\tau)$, где $v_i(\tau) = 1$, и для всех заданий одинаково. Перераспределение ресурсов осуществляется только после завершения выполнения какого-либо задания. Если в некоторый момент времени τ для выполнения i -го задания, оставшийся невыполненным объем которого равен $S_i(\tau)$, выделен объем ресурсов, равный $q_i(\tau)$, то время выполнения этого объема работ равно $t_i = \frac{S_i(\tau)}{q_i(\tau)}$.

Шаг 1. Выделяем все ресурсы на выполнение первого задания. Время выполнения этого задания равно $t_1 = \frac{25}{10} = 2,5$. Текущее время выполнения проекта равно $T_1 = \theta(\tau_1) = \tau_1 = 2,5$.

Шаг 2. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, а. Объемы работ выполнения оставшегося подмножества заданий приведены в первой строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 2,5) = \{2,3\}$, а критические пути из этих вершин графа представлены соответственно подмножествами вершин $L_2(\tau = 2,5) = \{2,4,6,9,11\}$, длина которого равна $D_2(\tau = 2,5) = 126$, и $L_3(\tau = 2,5) = \{3,5,7,9,11\}$, длина которого равна $D_3(\tau = 2,5) = 91$. Распре-

деление ресурсов на выполнение заданий $\tilde{K}(\tau = 2,5)$ осуществляем в соответствии с соотношением $\frac{91}{126} = \frac{x}{10-x}$. Следовательно, $q_2(\tau = 2,5) = 6$, $q_3(\tau = 2,5) = 4$. Время выполнения третьего задания равно $t_3(\tau = 2,5) = \frac{15}{4} = 3,75$. Текущее время выполнения проекта

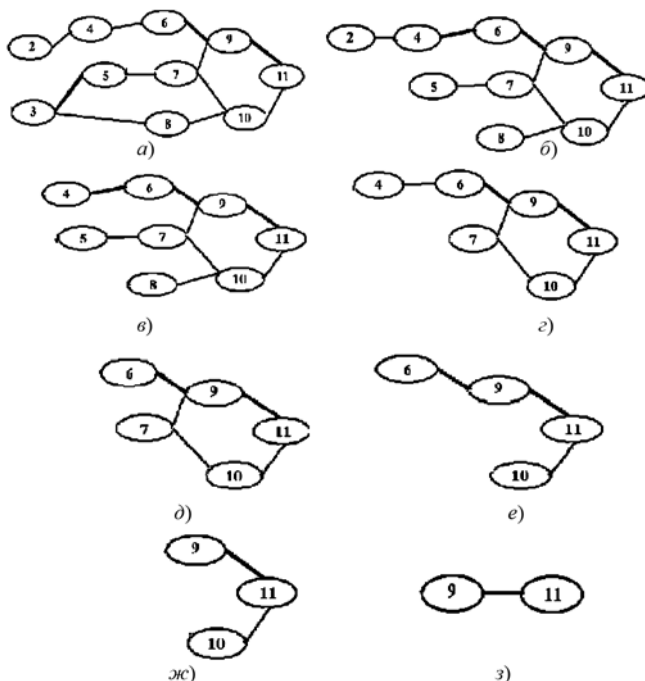


Рис. 2. Граф последовательности выполнения заданий на различных этапах

равно $T_2 = \theta(\tau_3) = 2,5 + 3,75 = 6,25$. Оставшийся объем невыполненного второго задания равен $S_2(\tau = 6,25) = 30 - 6 \cdot 3,75 = 7,25$.

Шаг 3. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, б. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены во второй строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 5) = \{2,5,8\}$, а критические пути из этих вершин графа включают, соответственно, вершины графа $L_2(\tau = 6,25) = \{2,4,6,9,11\}$, длина которого равна $D_2(\tau = 6,25) = 103,25$, графа $L_5(\tau = 5) = \{5,7,9,11\}$, длина которого равна $D_5(\tau = 6,25) = 76$; графа $L_8(\tau = 5) = \{8,10,11\}$, длина которого равна $D_8(\tau = 6,25) = 44$. Распределение ресурсов на выполнение подмножества заданий $\tilde{K}(\tau = 6,25)$ осуществляем следующим образом: $q_3(\tau = 6,25) = 5$, $q_5(\tau = 6,25) = 3$, $q_8(\tau = 6,25) = 2$. Время выполнения второго задания равно $t_2(\tau = 6,25) = \frac{7,25}{5} = 1,45$, $T_3 = \theta(\tau_2) = 6,25 + 1,45 = 7,7$, $S_5(\tau = 7,7) = 12 - 3 \cdot 1,45 = 7,65$, $S_8(\tau = 7,7) = 8 - 2 \cdot 1,45 = 5,1$.

Шаг 4. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, в. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены в третьей строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 7,7) = \{4,5,8\}$, а критические пути из этих вершин графа представлены подмножествами $L_4(\tau = 7,7) = \{4,6,9,11\}$, длина которого равна $D_4(\tau = 7,7) = 96$; $L_5(\tau = 7,7) = \{5,7,9,11\}$, длина которого равна $D_5(\tau = 7,7) = 71,65$; $L_8(\tau = 7,7) = \{8,10,11\}$, длина которого равна $D_8(\tau = 7,7) = 41,6$. Распределение ресурсов на выполнение подмножества заданий $\tilde{K}(\tau = 7,7)$ осуществляем следующим образом: $q_4(\tau = 7,7) = 5$, $q_5(\tau = 7,7) = 3$, $q_8(\tau = 7,7) = 2$. Время выполнения пятого задания равно $t_5(\tau = 7,7) = \frac{7,65}{3} = 2,55$, $T_4 = \theta(\tau_5) = 7,7 + 2,55 = 10,25$, $S_4(\tau = 10,25) = 18 - 5 \cdot 2,55 = 5,25$, $S_8(\tau = 10,25) = 5,1 - 2 \cdot 2,55 = 0$. Следовательно, $\theta(\tau_8) = 10,25$.

Шаг 5. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, г. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены в четвертой строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 10,25) = \{4,7\}$, а критические пути из этих вершин графа представлены подмножествами $L_4(\tau = 10,25) = \{4,6,9,11\}$, длина которого равна $D_4(\tau = 10,25) = 80,55$, и $L_7(\tau = 10,25) = \{7,9,11\}$, длина которого равна $D_7(\tau = 10,25) = 64$.

Распределение ресурсов — $q_4(\tau = 10,25) = 6$, $q_7(\tau = 10,25) = 4$. Время выполнения четвертого задания равно $t_4(\tau = 10,25) = \frac{2,55}{6} = 0,425$, $T_5 = \theta(\tau_4) = 10,25 + 0,425 = 10,675$; $S_7(\tau = 10,25) = 14 - 4 \cdot 0,425 = 12,3$.

Шаг 6. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, д. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены в пятой строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 10,675) = \{6,7\}$, а критические пути из этих вершин графа представлены подмножествами $L_6(\tau = 10,675) = \{6,9,11\}$, длина которого равна $D_6(\tau = 10,675) = 78$, и $L_7(\tau = 10,675) = \{7,9,11\}$, длина которого равна $D_7(\tau = 10,675) = 62,3$.

Распределение ресурсов — $q_6(\tau = 10,675) = 6$, $q_7(\tau = 10,675) = 4$. Время выполнения седьмого задания равно $t_7(\tau = 10,675) = \frac{12,3}{4} = 3,075$, $T_6 = \theta(\tau_7) = 10,675 + 3,075 = 13,75$; $S_6(\tau = 10,675) = 28 - 6 \cdot 3,075 = 9,55$.

Шаг 7. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, е. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены в шестой строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 13,75) = \{6,10\}$, а критические пути из этих вершин графа представлены подмножествами $L_6(\tau = 13,75) = \{6,9,11\}$, длина которого равна $D_6(\tau = 13,75) = 69,55$, и $L_{10}(\tau = 13,75) = \{10,11\}$, длина которого равна $D_{10}(\tau = 13,75) = 36$.

Распределение ресурсов — $q_6(\tau = 13,75) = 6$, $q_{10}(\tau = 13,75) = 4$. Время выполнения шестого задания равно $t_6(\tau = 13,75) = \frac{9,55}{6} = 1,6$, $T_7 = \theta(\tau_6) = 13,75 + 1,6 = 15,35$; $S_{10}(\tau = 13,75) = 16 - 4 \cdot 1,6 = 9,6$.

Шаг 8. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, ж. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены в шестой строке табл. 2, $\tilde{K}(\tau = 15,35) = \{9,10\}$, а критические пути из этих вершин графа представлены подмножествами $L_9(\tau = 15,35) = \{9,11\}$, длина которого равна $D_9(\tau = 15,35) = 50$, и $L_{10}(\tau = 15,35) = \{10,11\}$, длина которого равна $D_{10}(\tau = 15,35) = 29,6$.

Распределение ресурсов — $q_9(\tau = 15,35) = 6$, $q_{10}(\tau = 15,35) = 4$. Время выполнения десятого задания равно $t_{10}(\tau = 15,35) = \frac{9,6}{4} = 2,4$, $T_7 = \theta(\tau_{10}) = 15,35 + 2,4 = 17,75$; $S_9(\tau = 15,35) = 30 - 6 \cdot 2,4 = 15,6$.

Таблица 3

Процесс решения задачи

№ шага r	Значения основных параметров в процессе решения					
	Критический путь \bar{L}_r	Длина \bar{L}_r	$j_r \in \{\bar{K}_r\}$	$S(j_r)$	$t(j_r)$	T_r
1	{1, 2, 4, 6, 9, 11}	141	1	25	2,5	2,5
2	{2, 4, 6, 9, 11}	126	2	30	3,0	5,5
3	{3, 5, 6, 9, 11}	105	3	15	1,5	7,0
4	{4, 6, 9, 11}	96	4	18	1,8	8,8
5	{6, 9, 11}	78	6	28	2,8	11,6
6	{5, 7, 9, 11}	76	5	12	1,2	12,8
7	{7, 9, 11}	64	7	14	1,4	14,2
8	{9, 11}	50	9	30	3,0	17,2
9	{8, 10, 11}	44	8	8	0,8	18
10	{10, 11}	36	10	16	1,6	19,6
11	{11}	20	11	20	2,0	21,6

Шаг 9. Граф выполнения заданий на этом этапе выполнения проекта представлен на рис. 2, з. Оставшиеся объемы работ выполнения заданий приведены в шестой строке табл. 2, $\bar{K}(\tau = 17,75) = \{9\}$, а критический путь — $L_9(\tau = 17,75) = \{9,11\}$, длина которого равна $D_9(\tau = 17,75) = 36,6$. В дальнейшем все ресурсы будут направлены на выполнение задания 9, а после его завершения — на выполнение задания 11.

Распределение ресурсов — $q_9(\tau = 17,75) = 10$, $t_9(\tau = 17,75) = \frac{15,6}{10} = 1,56$, $T_8 = \theta(\tau_9) = 17,75 + 1,56 = 19,31$, $q_{11}(\tau = 19,31) = 10$, $t_{11}(\tau = 19,31) = \frac{20}{10} = 2$, $T_9 = \theta(\tau_{11}) = 19,31 + 2 = 20,31$. Следовательно, время завершения выполнения проекта равно 20,31.

В табл. 3 приведен процесс решения задачи алгоритмом, когда весь объем ресурсов в каждый момент времени τ направляется только на выполнение задания, стоящего первым в критическом пути выполнения проекта, и перераспределение ресурсов осуществляется после выполнения этого задания. Время выполнения проекта в этом случае $T_r = 21,6 > 20,31$, т. е. несколько больше полученного описанным выше алгоритмом.

Апробация предложенных методов

Предложенные методы были апробированы при разработке программной системы имитационного моделирования работы предприятий производства электронной аппаратуры. Программная система предусматривала создание следующих подсистем, каждая из которых состояла из множества программных модулей и

разработка которых могла вестись в ряде случаев независимо друг от друга:

- подсистема реализации алгоритмов расчетов динамики и основных параметров производственного процесса;
- банки данных структуры и основных параметров моделируемых производств, а также хранения результатов выполненных вычислений;
- графический интерфейс ввода данных, выбора структурных единиц моделируемых производств, варьирования параметров управляющих воздействий и алгоритмов принятия решений в различных ситуациях;
- графический интерфейс формирования требований выбора объемов и представления формы вывода результатов выполненных расчетов;
- создание различных форм представления входной и выходной информации в удобном для пользователя графическом, табличном виде или в форме анимации;
- создание интерфейса системной увязки программных модулей и подсистем;
- разработка тестов и тестирование программных модулей, подсистем и всего программного комплекса.

Разработка велась группой программистов и системных аналитиков, включающей на различных этапах выполнения проекта 5...7 человек.

Использование первого алгоритма распределения ресурсов, приведенного в иллюстративном примере, позволило сократить планируемые сроки выполнения проекта и завершить разработку проекта в установленные заказчиком сроки.

Заключение

В условиях, когда заданы объемы работ, необходимые для выполнения каждого из заданий проекта, последовательность выполнения которых задана сетевым графиком, а также функциональные зависимости скорости выполнения этих заданий от объемов выделенных ресурсов, эффективное распределение ограниченных ресурсов в течение всего времени выполнения проекта позволяет существенно сократить сроки выполнения как отдельных заданий, так и всего комплекса работ проекта.

Определены наиболее важные комплексы работ, требующие увеличения объемов направляемых ресурсов в целях сокращения времени их выполнения, необходимые моменты времени внесения корректировок в процесс разработки, а также различные стратегии распределения

ограниченных ресурсов и алгоритмы управления процессом выполнения проекта. Предложенные в работе методы, направленные на сокращение времени критического пути выполнения проекта, иллюстрируются числовым примером.

На основе предлагаемых подходов распределения ресурсов для различного вида конкретных функций зависимости скорости выполнения заданий от объемов выделенных ресурсов (которые существенно различаются для реализации проектов в области строительно-монтажных работ, проектирования сооружений, разработки программных комплексов, организации перевозок, сервисного обслуживания и т. п.) могут быть разработаны конкретные алгоритмы и программные комплексы управления проектами различного назначения, которые должны позволить сократить сроки и требуемые объемы ресурсов при выполнении проектов.

Список литературы

1. Матюшок В. М., Бурчакова М. А., Лазанюк И. В., Матюшок С. В., Смержевский И. А., Сорокин Л. В., Якубова Т. Н. Управление проектами. М.: РУДН, 2010. 553 с.
2. Наумов А. А., Баженов Р. И. О проблемах классических показателей эффективности инвестиционных проектов // Современные научные исследования и инновации. 2014. № 11-2 (43). С. 181—187.
3. Олейникова С. А. Модификация метода PERT решения задач сетевого планирования и управления // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 4 (34). С. 42—45.
4. Зак Ю. А. Принятие эффективных решений в экономике и менеджменте в условиях наличия нечисловой информации и размытых данных. М.: Экономика, 2018, 245 с.
5. Зак Ю. А. Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных. М.: URSS, 2013. 352 с.
6. Зак Ю. А. Определение экономических параметров выполнения проектов в условиях нечетких данных // Научное обозрение: экономика и управление. 2012. № 4. С. 138—146.
7. Беликов С. А., Зак Ю. А. Некоторые задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов при выполнении сетевого графика взаимосвязанных работ // Кибернетика. 1985. № 2. С. 59—67.
8. Hajdu M., Bokor O. The Effects of Different Activity Distributions on Project Duration in PERT Networks // Procedia — Social and Behavioral Sciences. 2014. N. 119. С. 766—775.
9. Baker Sunny G., Michael Campbell, Kim Baker. The Complete Idiot's Guide to Project Management. Alpha Books, 2003.
10. Kerzner H. Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling. John Wiley & Sons, 2003.
11. Punmia B. C., Khandelwal K. Project Planning and Control P. E. R. T. and C. P. M.: For Degree Classes. Laxmi Publications, 2006.

Yu. A. Zack, D. Sc., Aachen, Germany, e-mail: yuriy_zack@hotmail.com

Algorithms for the Operational Redistribution of Resources in Network Planning and Project Management Systems

Various strategies and algorithms for the effective allocation of limited volumes of resources in the process of fulfilling project tasks, the sequence of which is set by the network, are considered. At various stages of development, the most important work packages have been identified that require an increase in the volumes of resources allocated with the aim of reducing their execution time. The methods proposed in the work allow to reduce the time of the critical path to complete the implementation of both individual tasks and the whole complex of project activities. The proposed algorithms are illustrated by numerical examples.

Keywords: network, critical path, resource allocation algorithm

DOI:10.17587/it.25.467-474

References

1. Matyushok V. M., Burchakova M. A., Lasanyuk I. V., Matyushok S. V., Smarghevsky I. A., Sorokin L. V., Yakubova T. N. Project Management, Moscow, RUDN, 2010, 553 p. (in Russian).
2. Naumov A. A., Baghenov R. I. On the problems of classical indicators of the effectiveness of investment projects, *Sovremennije nauchnije issledovaniya i innovazii*, 2014, no. 11-2 (43), pp. 181—187 (in Russian).
3. Olejnikova S. A. Modification of the PERT method for solving problems of network planning and control, *Sistemi upravleniya i informazionnija tehnologii*, 2008, no. 4 (34), pp. 42—45 (in Russian).
4. Zack Yu. A. Making effective decisions in economics and management in the presence of non-numeric information and vague data, Moscow, *Ekonomika*, 2018, 245 p. (in Russian).
5. Zack Yu. A. Decision Making under Blurred and Fuzzy Data, Moscow, UR SS, 2013, 352 p. (in Russian).
6. Zack Yu. A. Determination of the economic parameters of the implementation of projects in terms of fuzzy data, *Nauchnoje obosrenije: Ekonomika i Upravlenije*, 2012, no. 4, pp. 138—146 (in Russian).
7. Belikov S. A., Zack Yu. A. Some problems of optimal distribution of limited resources when performing the network graph of interrelated works, *Kibernetika*, 1985, no. 2, pp. 59—67 (in Russian).
8. Hajdu M., Bokor O. The Effects of Different Activity Distributions on Project Duration in PERT Networks, *Procedia — Social and Behavioral Sciences*, 2014, no. 119, pp. 766—775.
9. Baker Sunny G., Michael Campbell, Kim Baker. The Complete Idiot's Guide to Project Management, Alpha Books, 2003.
10. Kerzner H. Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling, John Wiley & Sons, 2003.
11. Punmia B. C., Khandelwal K. Project Planning and Control P. E. R. T. and C. P. M.: For Degree Classes, Laxmi Publications, 2006.