

**Н. Н. Нагорнов**, аспирант, e-mail: sparta1392@mail.ru,  
**П. А. Ляхов**, канд. физ.-мат. наук, доц., e-mail: ljahov@mail.ru,  
**Н. И. Червяков**, д-р техн. наук, проф., e-mail: k-fmf-primath@stavsou.ru,  
Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь

## **Исследование шума квантования фильтров дискретного вейвлет-преобразования для обработки трехмерных изображений в медицине**

*Решена задача анализа влияния шума квантования коэффициентов фильтров дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) на результат обработки трехмерных медицинских изображений. Предложен метод квантования коэффициентов. Разработан метод расчета погрешности ДВП-изображений. ДВП выполняется с использованием чисел в формате с фиксированной точкой.*

**Ключевые слова:** шум квантования, вейвлет-преобразование, обработка трехмерных медицинских изображений

### **Введение**

В настоящее время в медицине активно используется визуализация двумерных и трехмерных данных, получаемых с помощью множества различных методов, в частности, магнитно-резонансных [1–3], рентгенологических [4, 5], радионуклидных [5], оптических [4, 6] и ультразвуковых [1, 7]. Необходимость очистки от шума двумерных и трехмерных медицинских изображений является постоянной проблемой в современных системах визуализации [1, 4, 5, 7]. С развитием цифровых устройств и технологий сканирования медицинские системы визуализации дают возможность получения все более точных изображений с улучшенным качеством, с использованием более высоких пространственных разрешений и битовой глубины. Такие улучшения увеличивают объем информации, которая должна обрабатываться, передаваться и храниться. Это особенно актуально при использовании технологий трехмерного сканирования [3]. Например, четыре набора медицинских изображений позитронно-эмиссионной томографии одного пациента могут потребовать более 4 Гб дискового пространства для хранения [8]. Результаты оптической когерентной томографии могут занимать более 40 Гб памяти [6]. С учетом нынешнего уровня развития технологий хранения данных, при котором емкость жестких дисков составляет в среднем 1...2 Тб, сжатие трехмерных изображений также является актуальной проблемой в современных системах визуализации.

Для решения задач очистки от шума и сжатия двумерных и трехмерных медицинских

изображений на практике используются различные преобразования, наиболее распространенными из которых являются дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [2, 3, 6, 8] и дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) [1, 3, 4, 6–8]. В то время как ДПФ выделяет только частотную информацию, ДВП позволяет получить частотно-временную информацию о сигнале, которая содержит его локальные и частотные особенности. ДВП двумерных и трехмерных изображений осуществляется путем свертки с парой вейвлет-фильтров — низкочастотного и высокочастотного, выделяющих основную и детальную информацию соответственно. Путем манипуляций над детальной информацией осуществляются очистка от шума и сжатие в современных алгоритмах SPIHT [9], EZW [10] и др. Операция свертки имеет высокую вычислительную сложность. Одним из путей улучшения ее характеристик является аппаратная реализация на современных микроэлектронных устройствах (FPGA, ASIC и др.) [11–13], работающих с числами в формате с фиксированной точкой. При преобразовании коэффициентов вейвлет-фильтров в этот формат возникает шум квантования, из-за которого свертка выполняется с погрешностью. Возникает вопрос о точности представления коэффициентов вейвлет-фильтров в памяти устройства, эффективной с точки зрения затрачиваемых ресурсов и в то же время необходимой для достижения требуемого качества обработки изображений. В изученных материалах по аппаратной реализации ДВП медицинских изображений на FPGA и ASIC [13–22] отсутствуют упоминания о вы-

бранных разрядностях коэффициентов вейвлет-фильтров. В работе [23] авторы квантуют коэффициенты 16 битами, однако отсутствует какое-либо обоснование сделанного выбора. В работе [24] решена задача анализа шума квантования, возникающего в результате округления коэффициентов вейвлет-фильтров, при обработке обычных двумерных 8-битных полутоновых и 24-битных полноцветных изображений.

Целью данной работы является выявление зависимости качества ДВП трехмерных медицинских изображений различной глубины цвета от шума, возникающего при квантовании коэффициентов вейвлет-фильтров с компактным носителем. Особое внимание уделено определению минимальной разрядности коэффициентов, при которой этот шум не оказывает существенного влияния на результат обработки изображений либо не влияет на него вовсе, в терминах пикового отношения сигнала к шуму (*PSNR*) [25].

### ДВП трехмерных изображений

ДВП — преобразование сигнала, представляющее собой свертку входных данных с набором дискретных вейвлет-фильтров, переводящим их из временного представления в частотно-временное. Будем считать, что вейвлет-фильтры  $F$  состоят из коэффициентов  $f_{F,i}$ , где  $i = 0, \dots, k-1$ , — номер коэффициента, а  $k$  — число коэффициентов. Коэффициенты низкочастотных и высокочастотных вейвлет-фильтров анализа ( $LD, HD$ ) и синтеза ( $LR, HR$ ) связаны соотношениями [11]

$$f_{HD,i} = (-1)^{i+1} f_{LD,k-1-i}, \quad (1)$$

$$f_{LR,i} = f_{LD,k-1-i}, \quad f_{HR,i} = (-1)^i f_{LD,i}.$$

Далее рассматриваются только вейвлеты с компактным носителем [26], наиболее распространенными из которых являются: вейвлеты Добеши  $dbk/2$ , где  $db1$  — вейвлет Хаара; симлеты  $symk/2$  и койфлеты  $coif k/6$ .

Представим трехмерное цифровое изображение  $I$  из  $X$  строк,  $Y$  столбцов и  $Z$  кадров как функцию  $I(x, y, z)$ , где  $0 \leq x \leq X-1$ ,  $0 \leq y \leq Y-1$  и  $0 \leq z \leq Z-1$  — пространственные координаты  $I$ . Значения вокселей (аналогов двумерных пикселей для трехмерного пространства) представляются в виде  $I(x, y, z)$  для полутоновых изображений и  $I(x, y, z, c)$  для полноцветных, где  $c$  — номер цвета (например, для изображений в формате RGB  $c = 1, 2, 3$  — красный, зеленый и синий соответственно).

Свертка вейвлет-фильтра  $F$  с трехмерным изображением выполняется по формулам

$$I'(x, y, z) = \sum_{i=0}^{k-1} I(x+i, y, z) f_{F,k-1-i};$$

$$I''(x, y, z) = \sum_{i=0}^{k-1} I(x, y+i, z) f_{F,k-1-i};$$

$$I'''(x, y, z) = \sum_{i=0}^{k-1} I(x, y, z+i) f_{F,k-1-i},$$

где  $I', I''$  и  $I'''$  — результаты свертки по строкам, столбцам и кадрам соответственно. ДВП трехмерного изображения осуществляется путем последовательной свертки с вейвлет-фильтрами согласно схеме, представленной на рис. 1, и включает перечисленные ниже этапы.

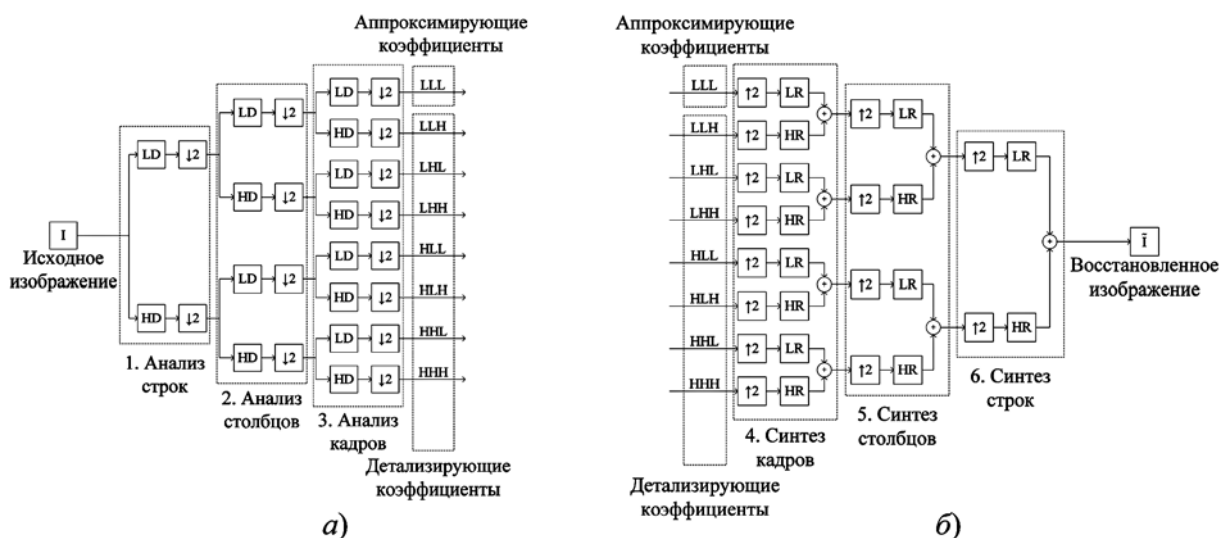


Рис. 1. Схема ДВП трехмерного изображения:

а — анализ; б — синтез

1. Анализ строк проводится путем разложения изображения  $I$  по строкам низкочастотным  $LD$  и высокочастотным  $HD$  вейвлет-фильтрами и понижающей в два раза дискретизации, обозначаемой символом  $\downarrow 2$ .

2. Анализ столбцов выполняется путем разложения коэффициентов, полученных на 1 этапе, по столбцам аналогично анализу строк.

3. Анализ кадров проводится путем разложения коэффициентов, полученных на втором этапе, по кадрам аналогично анализу строк.

В результате анализа происходит разложение исходного трехмерного изображения  $I$  на восемь наборов коэффициентов  $LLL$ ,  $LLH$ ,  $LHL$ ,  $LHH$ ,  $HLL$ ,  $HLH$ ,  $HHL$ ,  $HHH$ , которые можно разделить на две группы: аппроксимирующие ( $LLL$ ), которые соответствуют низкочастотной части сигнала и содержат основную информацию об изображении; детализирующие ( $LLH$ ,  $LHL$ ,  $LHH$ ,  $HLL$ ,  $HLH$ ,  $HHL$ ,  $HHH$ ), которые соответствуют высокочастотной части сигнала и содержат детальную информацию об изображении. Посредством манипуляций над коэффициентами разложения изображения осуществляются очистка от шума и сжатие.

4. Синтез кадров выполняется путем повышения в два раза дискретизации, обозначаемой символом  $\uparrow 2$ , коэффициентов разложения изображения по кадрам, восстановления низкочастотным  $LR$  и высокочастотным  $HR$  вейвлет-фильтрами и суммирования соответствующих результатов.

5. Синтез столбцов проводится путем восстановления коэффициентов, полученных на четвертом этапе, по столбцам аналогично синтезу кадров.

6. Синтез строк выполняется путем восстановления коэффициентов, полученных на пятом этапе, по строкам аналогично синтезу кадров.

В результате синтеза восьми наборов коэффициентов  $LLL$ ,  $LLH$ ,  $LHL$ ,  $LHH$ ,  $HLL$ ,  $HLH$ ,  $HHL$ ,  $HHH$  происходит восстановление изображения  $\tilde{I}$ . Теоретически исходное изображение должно быть полностью восстановлено, так как схема на рис. 1 обладает свойством точного восстановления сигнала [27]. Однако на практике из-за шума квантования, обусловленного цифровым форматом представления данных, в процессе ДВП появляется погрешность, искажающая как наборы коэффициентов  $LLL$ ,  $LLH$ ,  $LHL$ ,  $LHH$ ,  $HLL$ ,  $HLH$ ,  $HHL$ ,  $HHH$ , так и восстановленное изображение  $\tilde{I}$ . В зависимости от значения данной погрешности результат обработки изображений может иметь качество, неприемлемое для выполнения поставленной задачи.

Возникает вопрос о минимальной разрядности представления коэффициентов  $f_{F,i}$  вейвлет-фильтров  $F$ , эффективного с точки зрения аппаратной реализации на современных устройствах и необходимого для достижения обработанным изображением высокого качества. На современных устройствах скорость выполнения операций с числами в формате с фиксированной точкой существенно выше, чем в формате с плавающей точкой, что может быть использовано при разработке устройств обработки трехмерных изображений. Поэтому мы предлагаем квантовать коэффициенты вейвлет-фильтров следующим образом: умножать на  $2^n$  и округлять к большему:

$$f_{F,i}^* = \left\lceil 2^n f_{F,i} \right\rceil. \quad (2)$$

Разрядность  $r$  представления квантованных коэффициентов  $f_{F,i}^*$  в этом случае может быть вычислена по формуле  $r = n + 1$ . Значения вокселей обработанного трехмерного изображения  $I^*$ , полученного в результате ДВП, преобразуются делением на  $2^{6n}$  (по  $2^n$  за каждую свертку с вейвлет-фильтрами) и округлением к меньшему:

$$\tilde{I} = \left\lfloor 2^{-6n} I^* \right\rfloor. \quad (3)$$

Операции округления к большему и к меньшему выполняются путем отбрасывания дробной части числа с добавлением единицы в случае округления к большему. При округлении в разные стороны погрешности этих округлений будут иметь разные знаки и частично компенсировать друг друга. Применение операций округления именно в таком порядке требует меньших ресурсов при аппаратной реализации, чем операции округления к ближайшему целому. Это объясняется тем, что коэффициенты вейвлет-фильтров известны априори и их квантование с округлением вверх может быть выполнено предварительно. Таким образом, в аппаратной части коэффициенты  $f_{F,i}^*$  будут использоваться в виде констант. Выполнение свертки осуществляется с использованием арифметико-логических устройств, и округление ее результатов вниз осуществляется простым отбрасыванием дробной части и не требует дополнительных аппаратных и временных затрат.

В качестве критерия оценки качества обработки изображений используется числовая характеристика  $PSNR$ , или пиковое отноше-

ние сигнал-шум между двумя изображениями (оригиналом  $I$  и полученным изображением  $\tilde{I}$ ), вычисляемая следующим образом [28]:

$$PSNR = 10\lg(M^2/MSE),$$

где  $M$  — максимальное значение яркости вокселей изображений;  $MSE$  — среднеквадратическое отклонение значений яркости, определяемое для полутоновых ( $MSE_{grayscale}$ ) [29] и полноцветных ( $MSE_{color}$ ) [30] трехмерных изображений по формулам

$$MSE_{grayscale} = \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{z=0}^{Z-1} (I(x, y, z) - \tilde{I}(x, y, z))^2 / (XYZ),$$

$$MSE_{color} = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{z=0}^{Z-1} (I(x, y, z, c) - \tilde{I}(x, y, z, c))^2 / (XYZ).$$

Характеристика  $PSNR$  имеет логарифмическую природу и измеряется в децибелах (дБ). Чем лучше качество обработки изображения, тем больше значение  $PSNR$ . Для одинаковых (тождественно равных) изображений  $PSNR = \infty$ . Качество обработки изображения считается высоким, если  $PSNR \geq 40$  дБ, так как значение 40 дБ описывает разницу между двумя изображениями, практически незаметную для человека [25]. В следующем разделе показано, как разрядность коэффициентов вейвлет-фильтров влияет на качество обработки трехмерных медицинских изображений.

### Теоретический анализ максимальной погрешности ДВП трехмерных медицинских изображений

Погрешность при ДВП изображений возникает в результате преобразования коэффициентов фильтров ДВП (шум квантования) по формуле (2). Затем она возрастает при свертках, повышающих дискретизациях и сложениях результатов свертки. Округление после масштабирования значений вокселей восстановленного изображения также оказывает влияние. Отметим следующие важные факты:

1. Согласно формуле (1) рассматриваемые анализирующие и синтезирующие вейвлет-фильтры состоят из одинаковых коэффициентов, следовательно, и максимальные абсолютные погрешности вычислений также будут равны. По этой причине в рамках проводимых

расчетов вейвлет-фильтры подразделяются только на низкочастотные  $L$  и высокочастотные  $H$ .

2. Суммы коэффициентов низкочастотных  $L$  и высокочастотных  $H$  вейвлет-фильтров равны

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_{L,i} = \sqrt{2} \text{ и } \sum_{i=0}^{k-1} f_{H,i} = 0 \text{ соответственно [11].}$$

3. Абсолютная погрешность ДВП изображения максимальна, когда максимальны все значения яркости вокселей изображения, так как в этом случае максимальна погрешность свертки изображения с низкочастотным фильтром, многократно превосходящая погрешность свертки изображения с высокочастотным фильтром в силу предыдущего факта.

Введем обозначения.

$E_{j,F}$  — предельная абсолютная погрешность (ПАП) вычисления значения коэффициента изображения на  $j$ -м этапе, возникшая в результате свертки с последовательностью вейвлет-фильтров  $F$ ;

$S_F$  — точное значение суммы коэффициентов вейвлет-фильтра  $F$ ;

$T_{j,F}$  — точное значение вычислений на  $j$ -м этапе, после свертки с последовательностью вейвлет-фильтров  $F$ .

В результате каждой повышающей дискретизации  $\uparrow 2$  погрешности  $a$  для всех наборов коэффициентов  $LLL, LLH, LHL, LHH, HLL, HLH, HHL, HHH$  разделяются на две группы. В ходе восстановления изображения повышающая дискретизация применяется трижды. В результате мы получаем восемь групп погрешностей  $a_\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Таким образом, к введенным обозначениям необходимо добавить дополнительный индекс  $\varepsilon$ , обозначающий вычисления по пространственным характеристикам коэффициентов. Далее представлен метод проведения расчетов для оценки максимальной погрешности вычислений ДВП трехмерных изображений:

#### Этап 1. Квантование коэффициентов вейвлет-фильтров:

$$S_L = \sum_{i=1}^k 2^n f_{L,i} = 2^n \sum_{i=1}^k f_{L,i} = 2^n \sqrt{2} = 2^{n+\frac{1}{2}};$$

$$S_H = \sum_{i=1}^k 2^n f_{H,i} = 2^n \sum_{i=1}^k f_{H,i} = 2^n \cdot 0 = 0;$$

$$S_{L,1} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} 2^n f_{L,2(i-1)}; \quad S_{L,2} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} 2^n f_{L,2i-1};$$

$$S_{H,1} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} 2^n f_{H,2(i-1)}; \quad S_{H,2} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} 2^n f_{H,2i-1};$$

$$\begin{aligned}
E_{1,L} &= \sum_{i=1}^k \left( \left[ 2^n f_{L,i} \right] - 2^n f_{L,i} \right); \\
E_{1,H} &= \sum_{i=1}^k \left( \left[ 2^n f_{H,i} \right] - 2^n f_{H,i} \right); \\
E_{1,L,1} &= \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \left( \left[ 2^n f_{L,2(i-1)} \right] - 2^n f_{L,2(i-1)} \right); \\
E_{1,L,2} &= \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \left( \left[ 2^n f_{L,2i-1} \right] - 2^n f_{L,2i-1} \right); \\
E_{1,H,1} &= \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \left( \left[ 2^n f_{H,2(i-1)} \right] - 2^n f_{H,2(i-1)} \right); \\
E_{1,H,2} &= \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \left( \left[ 2^n f_{H,2i-1} \right] - 2^n f_{H,2i-1} \right).
\end{aligned}$$

**Этап 2. Разложение по строкам:**

$$T_{2,L} = S_L M; \quad E_{2,L} = E_{1,L} M; \quad E_{2,H} = E_{1,H} M.$$

Все  $T_j, F_j$  представляющие собой результат свертки с фильтром  $H$ , равны нулю, так как  $T_j, F_j$  одинаковы для всех вокселей и  $\sum_{i=0}^{k-1} f_{H,i} = 0$  [11].

**Этап 3. Разложение по столбцам:**

$$\begin{aligned}
T_{3,LL} &= T_{2,L} S_L; \\
E_{3,LL} &= (T_{2,L} + E_{2,L})(S_L + E_{1,L}) - T_{3,LL}; \\
E_{3,LH} &= (T_{2,L} + E_{2,L}) E_{1,H}; \\
E_{3,HL} &= E_{2,H} (S_L + E_{1,L}); \quad E_{3,HH} = E_{2,H} E_{1,H}.
\end{aligned}$$

**Этап 4. Разложение по кадрам:**

$$\begin{aligned}
T_{4,LLL} &= T_{3,LL} S_L; \\
E_{4,LLL} &= (T_{3,LL} + E_{3,LL})(S_L + E_{1,L}) - T_{4,LLL}; \\
E_{4,LLH} &= (T_{3,LL} + E_{3,LL}) E_{1,H}; \\
E_{4,LHL} &= E_{3,LH} (S_L + E_{1,L}); \\
E_{4,LHH} &= E_{3,LH} E_{1,H}; \\
E_{4,HLL} &= E_{3,HL} (S_L + E_{1,L}); \quad E_{4,HLLH} = E_{3,HL} E_{1,H}; \\
E_{4,HHL} &= E_{3,HH} (S_L + E_{1,L}); \quad E_{4,HHLH} = E_{3,HH} E_{1,H}.
\end{aligned}$$

**Этап 5. Восстановление по кадрам ( $\varepsilon = 1, 2$ ):**

$$\begin{aligned}
T_{5,LLLL,\varepsilon} &= T_{4,LLL} S_{L,\varepsilon}; \\
E_{5,LLLL,\varepsilon} &= (T_{4,LLL} + E_{4,LLL})(S_{L,\varepsilon} + E_{1,L,\varepsilon}) - T_{5,LLLL,\varepsilon}; \\
E_{5,LLHH,\varepsilon} &= E_{4,LLH} (S_{H,\varepsilon} + E_{1,H,\varepsilon}); \\
E_{5,LHLL,\varepsilon} &= E_{4,LHL} (S_{L,\varepsilon} + E_{1,L,\varepsilon});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{5,LHHH,\varepsilon} &= E_{4,LHH} (S_{H,\varepsilon} + E_{1,H,\varepsilon}); \\
E_{5,HLLL,\varepsilon} &= E_{4,HLL} (S_{L,\varepsilon} + E_{1,L,\varepsilon}); \\
E_{5,HLHH,\varepsilon} &= E_{4,HLH} (S_{H,\varepsilon} + E_{1,H,\varepsilon}); \\
E_{5,HHLL,\varepsilon} &= E_{4,HHL} (S_{L,\varepsilon} + E_{1,L,\varepsilon}); \\
E_{5,HHHH,\varepsilon} &= E_{4,HHH} (S_{H,\varepsilon} + E_{1,H,\varepsilon}).
\end{aligned}$$

**Этап 6. Суммирование по кадрам ( $\varepsilon = 1, 2$ ):**

$$\begin{aligned}
E_{6,LL,\varepsilon} &= E_{5,LLLL,\varepsilon} + E_{5,LLHH,\varepsilon}; \\
E_{6,LH,\varepsilon} &= E_{5,LHLL,\varepsilon} + E_{5,LHHH,\varepsilon}; \\
E_{6,HL,\varepsilon} &= E_{5,HLLL,\varepsilon} + E_{5,HLHH,\varepsilon}; \\
E_{6,HH,\varepsilon} &= E_{5,HHLL,\varepsilon} + E_{5,HHHH,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

**Этап 7. Восстановление по столбцам:**

$$\begin{aligned}
T_{7,LL,1} &= T_{5,LLLL,1} S_{L,1}, \quad T_{7,LL,2} = T_{5,LLLL,2} S_{L,1}; \\
T_{7,LL,3} &= T_{5,LLLL,1} S_{L,2}, \quad T_{7,LL,4} = T_{5,LLLL,2} S_{L,2}; \\
E_{7,LL,1} &= (T_{5,LLLL,1} + E_{6,LL,1})(S_{L,1} + E_{1,L,1}) - T_{7,LL,1}; \\
E_{7,LL,2} &= (T_{5,LLLL,2} + E_{6,LL,2})(S_{L,1} + E_{1,L,1}) - T_{7,LL,2}; \\
E_{7,LL,3} &= (T_{5,LLLL,1} + E_{6,LL,1})(S_{L,2} + E_{1,L,2}) - T_{7,LL,3}; \\
E_{7,LL,4} &= (T_{5,LLLL,2} + E_{6,LL,2})(S_{L,2} + E_{1,L,2}) - T_{7,LL,4}; \\
E_{7,LH,1} &= E_{6,LH,1} (S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
E_{7,LH,2} &= E_{6,LH,2} (S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
E_{7,LH,3} &= E_{6,LH,1} (S_{H,2} + E_{1,H,2}); \\
E_{7,LH,4} &= E_{6,LH,2} (S_{H,2} + E_{1,H,2}); \\
E_{7,HL,1} &= E_{6,HL,1} (S_{L,1} + E_{1,L,1}); \\
E_{7,HL,2} &= E_{6,HL,2} (S_{L,1} + E_{1,L,1}); \\
E_{7,HL,3} &= E_{6,HL,1} (S_{L,2} + E_{1,L,2}); \\
E_{7,HL,4} &= E_{6,HL,2} (S_{L,2} + E_{1,L,2}); \\
E_{7,HH,1} &= E_{6,HH,1} (S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
E_{7,HH,2} &= E_{6,HH,2} (S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
E_{7,HH,3} &= E_{6,HH,1} (S_{H,2} + E_{1,H,2}); \\
E_{7,HH,4} &= E_{6,HH,2} (S_{H,2} + E_{1,H,2}).
\end{aligned}$$

**Этап 8. Суммирование по столбцам ( $\varepsilon = 1, 2, 3, 4$ ):**

$$\begin{aligned}
E_{8,L,\varepsilon} &= E_{7,LL,\varepsilon} + E_{7,LH,\varepsilon}; \\
E_{8,H,\varepsilon} &= E_{7,HL,\varepsilon} + E_{7,HH,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

**Этап 9. Восстановление по строкам:**

$$\begin{aligned}
 T_{9,1} &= T_{7,LL,1}S_{L,1}; & T_{9,2} &= T_{7,LL,2}S_{L,1}; \\
 T_{9,3} &= T_{7,LL,3}S_{L,1}; & T_{9,4} &= T_{7,LL,4}S_{L,1}; \\
 T_{9,5} &= T_{7,LL,1}S_{L,2}; & T_{9,6} &= T_{7,LL,2}S_{L,2}; \\
 T_{9,7} &= T_{7,LL,3}S_{L,2}; & T_{9,8} &= T_{7,LL,4}S_{L,2}; \\
 E_{9,L,1} &= (T_{7,LL,1} + E_{8,L,1})(S_{L,1} + E_{1,L,1}) - T_{9,1}; \\
 E_{9,L,2} &= (T_{7,LL,2} + E_{8,L,2})(S_{L,1} + E_{1,L,1}) - T_{9,2}; \\
 E_{9,L,3} &= (T_{7,LL,3} + E_{8,L,3})(S_{L,1} + E_{1,L,1}) - T_{9,3}; \\
 E_{9,L,4} &= (T_{7,LL,4} + E_{8,L,4})(S_{L,1} + E_{1,L,1}) - T_{9,4}; \\
 E_{9,L,5} &= (T_{7,LL,1} + E_{8,L,1})(S_{L,2} + E_{1,L,2}) - T_{9,5}; \\
 E_{9,L,6} &= (T_{7,LL,2} + E_{8,L,2})(S_{L,2} + E_{1,L,2}) - T_{9,6}; \\
 E_{9,L,7} &= (T_{7,LL,3} + E_{8,L,3})(S_{L,2} + E_{1,L,2}) - T_{9,7}; \\
 E_{9,L,8} &= (T_{7,LL,4} + E_{8,L,4})(S_{L,2} + E_{1,L,2}) - T_{9,8}; \\
 E_{9,H,1} &= E_{8,H,1}(S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
 E_{9,H,2} &= E_{8,H,2}(S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
 E_{9,H,3} &= E_{8,H,3}(S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
 E_{9,H,4} &= E_{8,H,4}(S_{H,1} + E_{1,H,1}); \\
 E_{9,H,5} &= E_{8,H,1}(S_{H,2} + E_{1,H,2}); \\
 E_{9,H,6} &= E_{8,H,2}(S_{H,2} + E_{1,H,2}); \\
 E_{9,H,7} &= E_{8,H,3}(S_{H,2} + E_{1,H,2}); \\
 E_{9,H,8} &= E_{8,H,4}(S_{H,2} + E_{1,H,2}).
 \end{aligned}$$

**Этап 10. Суммирование по строкам**  
( $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ):

$$E_{10,l} = E_{9,L,l} + E_{9,H,l}$$

**Этап 11. Преобразование значений вокселей**  
**восстановленного изображения**  
( $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ):

$$E_{11,\varepsilon} = \lfloor 2^{-6n} E_{10,\varepsilon} \rfloor.$$

Полученные значения  $E_{11,\varepsilon}$  ( $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ) представляют собой результирующую погрешность метода и позволяют вычислить характеристику оценки качества обработки изображения

$$PSNR = 10 \lg \left( 8M^2 / \sum_{\varepsilon=1}^8 E_{11,\varepsilon}^2 \right), \quad (4)$$

где  $MSE_{grayscale} = MSE_{color} = 1/8 \sum_{\varepsilon=1}^8 E_{11,\varepsilon}^2$ .

Формула (4) позволяет определить минимальное качество трехмерного изображения, полученного в результате ДВП, в зависимости от максимального значения яркости  $M$  и выбранной разрядности  $r = n + 1$  коэффициентов  $f_{F,i}$  вейвлет-фильтров  $F$ .

В табл. 1—3 представлены минимальные значения разрядностей  $r$ , при которых, согласно формуле (4) результат ДВП изображений с 8-, 12- и 16-битными цветовыми каналами достигает высокого ( $PSNR \geq 40$  дБ) и максимального качества ( $PSNR = \infty$ ) при обработке вейвлетами Добеши  $db\ k/2$ , симлетами  $sym\ k/2$  и койфлетами  $coif\ k/6$  с числом коэффициентов  $k$ .

На основе данных из табл. 1—3 мы можем сделать следующие выводы.

1. Минимальную разрядность  $r$  коэффициентов вейвлет-фильтров с компактным носителем, при которой результат ДВП трехмерного изображения гарантированно не содержит видимых искажений ( $PSNR \geq 40$ ), можно определить по формуле

$$r = 11 + \lfloor \sqrt{k/2 - 1} \rfloor, \quad (5)$$

где  $k$  — число коэффициентов вейвлет-фильтров.

2. Минимальную разрядность  $r$  коэффициентов вейвлет-фильтров с компактным носителем, при которой результат ДВП трехмерного изображения гарантированно не содержит

Таблица 1

Минимальные значения  $r$ , при которых результат ДВП изображения вейвлетами Добеши достигнет определенного качества

Канал, бит	PSNR, дБ	db1	db2	db3	db4	db5	db6	db7	db8	db9	db10
8	40	11	11	12	12	12	13	13	13	13	14
	$\infty$	13	13	14	14	14	15	15	15	15	15
12	40	11	11	12	12	12	13	13	13	13	14
	$\infty$	16	17	17	18	19	19	19	19	19	20
16	40	11	11	12	12	13	13	13	13	13	14
	$\infty$	20	21	22	22	23	22	23	23	23	24

Минимальные значения  $r$ , при которых результат ДВП изображения симлетами достигнет определенного качества

Минимальные значения  $r$ , при которых результат ДВП изображения койфлетами достигнет определенного качества

Канал, бит	PSNR, дБ	sym1	sym2	sym3	sym4	sym5	sym6	sym8	sym10
8	40	11	11	12	12	12	13	13	13
	$\infty$	13	13	14	14	15	15	15	15
12	40	11	11	12	12	13	13	13	14
	$\infty$	16	17	17	18	19	19	19	19
16	40	11	11	12	12	13	13	13	14
	$\infty$	20	21	22	22	23	23	23	24

Канал, бит	PSNR, дБ	coif1	coif2	coif3	coif4	coif5
8	40	12	13	13	14	14
	$\infty$	14	15	15	16	16
12	40	12	13	13	14	14
	$\infty$	18	19	19	20	20
16	40	12	13	13	14	14
	$\infty$	22	22	23	24	24

искажений ( $PSNR = \infty$ ), можно определить по формуле

$$r = 5 + \log_2(M + 1) + \lfloor \sqrt{k/2 - 1} \rfloor, \quad (6)$$

где  $M$  — максимальное значение яркости вокселей изображения.

Формулы (5) и (6) применимы как для полутоновых, так и для полноцветных изображений. В следующем разделе продемонстрировано их использование на примере ДВП трехмерных медицинских изображений.

### Моделирование ДВП трехмерных медицинских изображений

Моделирование проведено в программной среде MATLAB версии R2018a для двух трехмерных томографических полутоновых изображений: "wmri" (рис. 2, а, см. четвертую сторону обложки) — 8-битное изображение размера  $128 \times 128 \times 27$ ; "Trufi\_COR" (рис. 3, а) — 12-битное изображение размера  $320 \times 320 \times 30$ . ДВП изображений осуществлено следующим образом: с помощью команды "wfilters" получены коэффициенты  $f_{F, i}$  фильтров  $db\ k/2$ ,  $sym\ k/2$  и  $coif\ k/6$ ; далее они квантованы и преобразованы в формат с фиксированной точкой умножением на  $2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, 20$ ) и округлением к большему по формуле (2); с помощью команды "dwt3" осуществлено ДВП изображений; результаты об-

работки  $I^*$  преобразованы делением на  $2^{6n}$  и округлением к меньшему по формуле (3).

Примеры обработки изображений "wmri" и "Trufi\_COR" вейвлетом  $db8$  представлены на рис. 2 (см. четвертую сторону обложки) и рис. 3 соответственно. Из рисунков видно, что при увеличении разрядности  $r$  качество обработ-

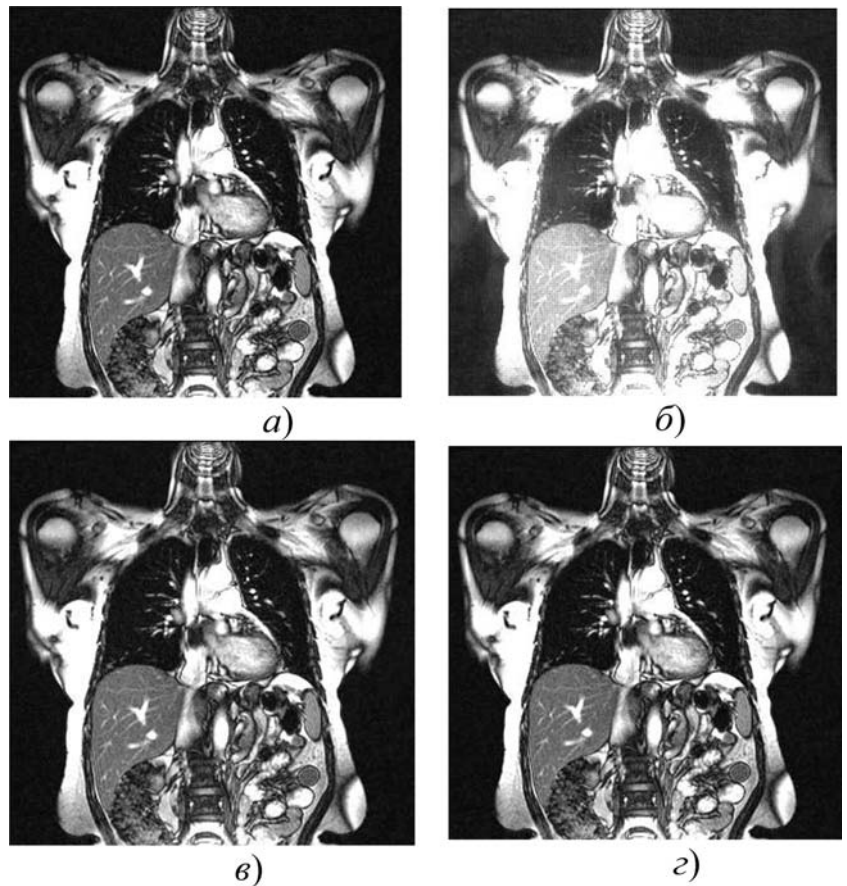


Рис. 3. Пример ДВП 12-битного изображения "Trufi\_COR" (15-й кадр) вейвлетом  $db8$ :

а) исходное изображение; обработанное изображение: б)  $r = 7$ ;  $PSNR = 30,27$  дБ; в)  $r = 9$ ;  $PSNR = 46,08$  дБ; г)  $r = 17$ ;  $PSNR = \infty$

ки постепенно улучшается: на рис. 2, б и 3, б видны искажения; на рис. 2, в и 3, в восстановленные изображения неотличимы на глаз от исходных изображений; на рис. 3, г и 4, г восстановленные изображения тождественно равны соответствующим исходным. Результаты моделирования имеют более высокое качество по сравнению с результатами теоретического анализа.

В табл. 4—6 представлены выборочные теоретические данные из табл. 1—3, дополненные

**Минимальные значения  $r$ , при которых результат ДВП изображения койфлетами достигает определенного качества**

Канал, бит	$PSNR$ , дБ	Результаты	$coif1$	$coif2$	$coif3$	$coif4$	$coif5$
8	40	Теоретические	12	13	13	14	14
		Практические	10	12	12	12	12
		Разница	2	1	1	2	2
	$\infty$	Теоретические	14	15	15	16	16
		Практические	14	15	15	16	16
		Разница	0	0	0	0	0
12	40	Теоретические	12	13	13	14	14
		Практические	7	9	9	10	10
		Разница	5	4	4	4	4
	$\infty$	Теоретические	18	19	19	20	20
		Практические	17	17	18	18	18
		Разница	1	2	1	2	2

Таблицы 4

**Минимальные значения  $r$ , при которых результат ДВП изображения вейвлетами Добеши достигает определенного качества**

Канал, бит	$PSNR$ , дБ	Результаты	$db2$	$db4$	$db6$	$db8$	$db10$
8	40	Теоретические	11	12	13	13	14
		Практические	10	11	11	12	12
		Разница	1	1	2	1	2
	$\infty$	Теоретические	13	14	15	15	15
		Практические	13	14	15	15	15
		Разница	0	0	0	0	0
12	40	Теоретические	11	12	13	13	14
		Практические	7	8	9	9	9
		Разница	4	4	4	4	5
	$\infty$	Теоретические	17	18	19	19	20
		Практические	16	17	17	17	18
		Разница	1	1	2	2	2

Таблица 5

**Минимальные значения  $r$ , при которых результат ДВП изображения симлетами достигает определенного качества**

Канал, бит	$PSNR$ , дБ	Результаты	$sym2$	$sym4$	$sym6$	$sym8$	$sym10$
8	40	Теоретические	11	12	13	13	13
		Практические	10	11	11	12	12
		Разница	1	1	2	1	1
	$\infty$	Теоретические	13	14	15	15	15
		Практические	13	14	15	15	15
		Разница	0	0	0	0	0
12	40	Теоретические	11	12	13	13	14
		Практические	7	8	8	9	9
		Разница	4	4	5	4	5
	$\infty$	Теоретические	17	18	19	19	19
		Практические	16	16	17	18	18
		Разница	1	2	2	1	1

практическими результатами моделирования ДВП и разницей между ними.

На основе сделанных расчетов и моделирования, результаты которых представлены в табл. 4—6, мы можем сделать следующие выводы.

1. Все теоретические значения  $PSNR$ , полученные в предыдущем разделе, не превосходят соответствующие значения, полученные в результате моделирования, что подтверждает верность теоретического анализа. Таким образом, формулы (5) и (6) могут быть использованы для определения минимальной разрядности  $r$  коэффициентов вейвлет-фильтров с компактным носителем, при которой результат ДВП трехмерного медицинского изображения имеет высокое ( $PSNR \geq 40$  дБ) или максимальное ( $PSNR = \infty$ ) качество соответственно.

2. Для достижения высокого качества ДВП трехмерного медицинского 8-битного изображения на практике потребовалось на 1...2 бита меньше, чем того требуют результаты, полученные теоретически, так как в теоретическом анализе предсказан худший случай.

3. Для достижения высокого и максимального качества ДВП трехмерного медицинского 12-битного изображения на практике потребовалось на 4...5 битов меньше и на 1...2 бита меньше соответственно, чем того требуют результаты теоретического анализа. Наличие данной разницы объясняется тем, что в трехмерных медицинских 12-битных изображениях отношение среднего значения яркости вокселей к максимальному  $M$  в среднем непре-



небрежимо меньше, чем у 8-битных изображений, в результате чего мы получаем более высокие значения *PSNR*.

4. Качество ДВП трехмерных медицинских изображений в большей степени зависит от их цветовой глубины, от требуемого качества обработки, от числа коэффициентов фильтров выбираемого вейвлета и в меньшей степени от вида вейвлета.

### Заключение

В статье решена задача анализа влияния шума квантования коэффициентов фильтров дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) на результат обработки трехмерных медицинских изображений. Предложен метод квантования коэффициентов вейвлет-фильтров, позволяющий минимизировать ресурсы при аппаратной реализации путем упрощения выполнения операций округления. Разработан метод, позволяющий рассчитать максимальную погрешность вычислений, которая может возникнуть в результате ДВП трехмерного полутонового или полноцветного изображения с различной глубиной цвета. Выведена формула (4), позволяющая определить минимальное качество ДВП трехмерных изображений в зависимости от используемого вейвлета, разрядности коэффициентов и цветовой глубины. Доказано, что формулы (5) и (6) позволяют определить минимальную разрядность коэффициентов вейвлет-фильтров с компактным носителем, при которой результат ДВП трехмерных изображений достигает высокого ( $PSNR \geq 40$  дБ) и максимального ( $PSNR = \infty$ ) качества в зависимости от используемого вейвлета соответственно. Моделирование ДВП трехмерных томографических изображений показало, что по сравнению с теоретическими результатами можно достичь сокращения разрядности коэффициентов, сохраняя при этом требуемое качество обработки. В предложенном методе реализации ДВП все данные представлены в формате с фиксированной точкой и упрощено выполнение операций округления.

Полученные результаты открывают возможность для эффективной аппаратной реализации ДВП на современных устройствах (FPGA, ASIC и др.) для очистки от шума и сжатия трехмерных медицинских изображений.

*Авторы выражают свою признательность Ставропольскому краевому клиническому консультативно-диагностическому центру за пре-*

*доставление томографических изображений. Работа выполнена при финансовой поддержке: базовой части государственного задания № 2.6035.2017/БЧ; РФФИ, проекты № 18-07-00109 А, № 19-07-00130 А и № 18-37-20059 мол-а-вед; совета по грантам Президента Российской Федерации, проект СП-2245.2018.5.*

### Список литературы

1. Barnhill E., Hollis L., Sack I., Braun J., Hoskins P. R., Pankaj P., Brown C., Van der Beek E. J. R., Roberts N. Nonlinear multiscale regularisation in MR elastography: Towards fine feature mapping // *Medical Image Analysis*. 2017. Vol. 35. P. 133–145.
2. Manjón J. V., Coupé P., Buades A. MRI noise estimation and denoising using non-local PCA // *Medical Image Analysis*. 2017. Vol. 22, N. 1. P. 35–47.
3. Lucas L. F. R., Rodrigues N. M. M., Cruz L. A. S., Van der Faria S. M. M. Lossless Compression of Medical Images Using 3D Predictors // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2017. Vol. 36, N. 11. P. 2250–2260.
4. Schirmacher F., Köhler T., Endres J., Lindnerberger T., Husvogt L., Fujimoto J. G., Hornegger J., Dörfler A., Hoelter P., Maier A. K. Temporal and volumetric denoising via quantile sparse image prior // *Medical Image Analysis*. 2018. Vol. 48. P. 131–146.
5. Xu Z., Gao M., Papadakis G. Z., Luna B., Jain S., Mollura D. J., Bagci U. Joint solution for PET image segmentation, denoising, and partial volume correction // *Medical Image Analysis*. 2018. Vol. 46. P. 229–243.
6. Fang L., Li S., Kang X., Izatt J. A., Farsiu S. 3-D Adaptive Sparsity Based Image Compression With Applications to Optical Coherence Tomography // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2015. Vol. 34, N. 6. P. 1306–1320.
7. Wu, H., Huynh T. T., Souvenir R. Echocardiogram enhancement using supervised manifold denoising // *Medical Image Analysis*. 2015. Vol. 35. P. 172–180.
8. Parikh S. S., Ruiz D., Kalva H., Fernández-Escribano G., Adzic V. High Bit-Depth Medical Image Compression with HEVC // *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*. 2017. Vol. 22, N. 2. P. 552–560.
9. Song X., Huang O., Chang S., He J., Wang H. Three-dimensional separate descendant-based SPIHT algorithm for fast compression of high-resolution medical image sequences // *IET Image Processing*. 2017. Vol. 11, N. 1. P. 80–87.
10. Naveen C., Gupta T. V. S., Satpute V. R., Gandhi A. S. A simple and efficient approach for medical image security using chaos on EZW // *Eighth International Conference on Advances in Pattern Recognition (ICAPR)*. 2015. P. 1–6.
11. Bailey D. G. Design for Embedded Image Processing on FPGAs. Singapore: John Wiley & Sons, IEEE Press, 2011. 496 p.
12. Meyer-Baese U. Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays, fourth ed. Tallahassee: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. 949 p.
13. Madanayake A., Cintra R. J., Dimitrov V., Bayer F. M., Wahid K. A., Kulasekera S., Edirisuriya A., Potluri U. S., Madishetty S. K., Rajapaksha N. Low-Power VLSI Architectures for DCT/DWT: Precision vs Approximation for HD Video, Biomedical, and Smart Antenna Applications // *IEEE Circuits and Systems Magazine*. 2015. Vol. 15, N. 1. P. 1–6.
14. Jiang R. M., Crookes D. FPGA Implementation of 3D Discrete Wavelet Transform for Real-Time Medical Imaging //

18th European Conference on Circuit Theory and Design. 2007. P. 519–522.

15. **Arafa A. A., Saleh H. I., Ashour M., Salem A.** FFT- and DWT-Based FPGA Realization of Pulse Shape Discrimination in PET system // 4th International Conference on Design & Technology of Integrated Systems in Nanoscale Era. 2009. P. 299–302.

16. **Li N.-q., Nie Y.-j., Zhu W.** The Application of FPGA-based Discrete Wavelet Transform System in EEG Analysis // Second International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application. 2012. P. 1306–1309.

17. **Ahmad A., Ja'afar N. H., Amira A.** FPGA-based Implementation of 3-D Daubechies for Medical Image Compression // IEEE-EMBS Conference on Biomedical Engineering and Sciences. 2012. P. 683–688.

18. **Ja'afar N. H., Ahmad A., Amira A.** Distributed Arithmetic Architecture of Discrete Wavelet Transform (DWT) with Hybrid Method // IEEE 20th International Conference on Electronics, Circuits, and Systems (ICECS). 2013. P. 501–507.

19. **Mimouni E. H. E., Karim M.** An FPGA-Based Implementation of a Pre-Processing Stage for ECG Signal Analysis Using DWT // Second World Conference on Complex Systems (WCCS). 2014. P. 649–654.

20. **Vijendra V., Kulkarni M.** ECG signal Filtering using DWT haar wavelets Coefficient techniques // International Conference on Emerging Trends in Engineering, Technology and Science (ICETETS). 2016. P. 1–6.

21. **Elsayed M., Badawy A., Mahmuddin M., Elfouly T., Mohamed A., Abualsaud K.** FPGA Implementation of DWT EEG

Data Compression for Wireless Body Sensor Networks // IEEE Conference on Wireless Sensors (ICWiSE). 2016. P. 21–25.

22. **Sharmila A., Geethanjali P.** DWT Based Detection of Epileptic Seizure from EEG Signals Using Naive Bayes and k-NN Classifiers // IEEE Access. 2016. Vol. 4. P. 7716–7727.

23. **Larrotta D. M. B., Enciso D. M. M., Barrera A. E. G.** Compression of biomedical signals on FPGA by DWT and run-length // IEEE ANDESCON. 2010. P. 1–5.

24. **Chervyakov N. N., Lyakhov P. A., Kaplun D. I., Butusov D. N., Nagornov N. N.** Analysis of the Quantization Noise in Discrete Wavelet Transform Filters for Image Processing // Electronics. Vol. 7, N. 8. P. 135.

25. **Lalithakumari S., Pandian R., Rani J., Vinothkumar D., Sneha A., Amalarani V., Bestley J.** Selection of optimum compression algorithms based on the characterization on feasibility for medical image // Biomedical Research. 2017. Vol. 28, N. 13. P. 5633–5637.

26. **Daubechies, I.** Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 380 p.

27. **Vaidyanathan P. P.** Multirate Systems and Filter Banks. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993. 925 p.

28. **Rao K. R., Yip P. C.** The Transform and Data Compression Handbook // Boca Raton: CRC Press, 2001. 399 p.

29. **Ravichandran D., Ahamad M. G., Dhivakar A.** Performance Analysis of Three-Dimensional Medical Image Compression Based on Discrete Wavelet Transform // 22nd International Conference on Virtual System & Multimedia (VSMM). 2016. P. 1–8.

30. **Basso A., Cavagnino D., Pomponui V., Vernone A.** Blind watermarking of color images using Karhunen–Love transform keying // The Computer Journal. 2011. Vol. 54, N. 7. P. 1076–1090.

**N. N. Nagornov**, PhD student, North-Caucasus Federal University, e-mail: sparta1392@mail.ru,  
**P. A. Lyakhov**, Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Assistant Professor, e-mail: ljahov@mail.ru,  
**N. I. Chervyakov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Mathematical Modeling, e-mail: k-fmf-primath@stavsuv.ru

## The Noise Research in Discrete Wavelet Transform Filters for 3D Images Processing in Medicine

*Many different methods are used to denoise and compress various medical images in practice. Discrete wavelet transform (DWT) underlies many of them. The quantization noise of DWT filters coefficients for 3D medical image processing analyzed in this paper. We proposed a new method for coefficients quantizing using rounding up and rounding down operations which reduce the error and require less resources for software and hardware implementation. The method for estimating maximum error of 3D images DWT with various bits per color (BPC) was developed. We defined the dependence of the minimum peak signal-to-noise ratio (PSNR) of grayscale and color images transform result on wavelet used, the effective bit-width of filters coefficients and BPC is. Approximate formulas for determining the minimum bit-width that provide a high ( $PSNR \geq 40$  dB) and maximum ( $PSNR = \infty$  dB) quality of 3D medical image processing using DWT filter bank was derived. Software simulation of 3D tomographic 8-bit and 12-bit grayscale images transform confirmed obtained theoretical results. Concluded that the quality of images DWT primarily depends on their BPC, on the required processing quality, on the number of wavelet filters coefficients and to a lesser extent on the type of wavelet. We only used fixed-point numbers in the proposed method for 3D medical imaging making possible its efficient software and hardware implementation on modern devices such as field-programmable gate arrays and application-specific integrated circuits.*

**Keywords:** quantization noise, wavelet transform, medical imaging

DOI: 10.17587/it.25.415-425

## References

1. Barnhill E., Hollis L., Sack I., Braun J., Hoskins P. R., Pankaj P., Brown C, Van der Beek E.J.R., Roberts N. Nonlinear multiscale regularisation in MR elastography: Towards fine feature mapping, *Medical Image Analysis*, 2017, vol. 35, pp. 133–145.
2. Manjon J. V., Coupe P., Buades A. MRI noise estimation and denoising using non-local PCA, *Medical Image Analysis*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 35–47.
3. Lucas L. F. R., Rodrigues N. M. M., Cruz L. A. S., Van der Faria S. M. M. Lossless Compression of Medical Images Using 3D Predictors, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2017, vol. 36, no. 11, pp. 2250–2260.
4. Schirmacher F., Kohler T., Endres J., Lindenberger T., Husvogt L., Fujimoto J.G., Hornegger J., Dorfler A., Hoelter P., Maier A.K. Temporal and volumetric denoising via quantile sparse image prior, *Medical Image Analysis*, vol. 48, pp. 131–146.
5. Xu Z., Gao M., Papadakis G. Z., Luna B., Jain S., Mollura D. J., Bagci U. Joint solution for PET image segmentation, denoising, and partial volume correction, *Medical Image Analysis*, 2018, vol. 46, pp. 229–243.
6. Fang L., Li S., Kang X., Izatt J.A., Farsiu S. 3-D Adaptive Sparsity Based Image Compression With Applications to Optical Coherence Tomography, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2015, vol. 34, no. 6, pp. 1306–1320.
7. Wu H., Huynh T. T., Souvenir R. Echocardiogram enhancement using supervised manifold denoising, *Medical Image Analysis*, 2015, vol. 35, pp. 172–180.
8. Parikh S. S., Ruiz D., Kalva H., Fernandez-Escribano G., Adzic V. High Bit-Depth Medical Image Compression with HEVC, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 552–560.
9. Song X., Huang O., Chang S., He J., Wang H. Three-dimensional separate descendant-based SPIHT algorithm for fast compression of high-resolution medical image sequences, *IET Image Processing*, 2017, vol. 11, no. 1, pp. 80–87.
10. Naveen C, Gupta T. V. S., Satpute V. R., Gandhi A. S. A simple and efficient approach for medical image security using chaos on EZW, *Eighth International Conference on Advances in Pattern Recognition (ICAPR)*, 2015, pp. 1–6.
11. Bailey D. G. *Design for Embedded Image Processing on FPGAs*, Singapore, John Wiley & Sons, IEEE Press, 2011, 496 p.
12. Meyer-Baese U. *Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays*, fourth ed., Tallahassee, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014, 949 p.
13. Madanayake A., Cintra R. J., Dimitrov V., Bayer F. M., Wahid K. A., Kulasekera S., Edirisuriya A., Potluri U. S., Madishetty S. K., Rajapaksha N. Low-Power VLSI Architectures for DCT/DWT: Precision vs Approximation for HD Video, *Biomedical, and Smart Antenna Applications*, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 1–6.
14. Jiang R. M., Crookes D. FPGA Implementation of 3D Discrete Wavelet Transform for Real-Time Medical Imaging, *18th European Conference on Circuit Theory and Design*, 2007, pp. 519–522.
15. Arafa A. A., Saleh H.I., Ashour M., Salem A. FFT- and DWT-Based FPGA Realization of Pulse Shape Discrimination in PET system, *4th International Conference on Design & Technology of Integrated Systems in Nanoscale Era*, 2009, pp. 299–302.
16. Li N.-q., Nie Y.-j., Zhu W. The Application of FPGA-based Discrete Wavelet Transform System in EEG Analysis, *Second International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application*, 2012, pp. 1306–1309.
17. Ahmad A., Ja'afar N.H., Amira A. FPGA-based Implementation of 3-D Daubechies for Medical Image Compression, *IEEE-EMBS Conference on Biomedical Engineering and Sciences*, 2012, pp. 683–688.
18. Ja'afar N. H., Ahmad A., Amira A. Distributed Arithmetic Architecture of Discrete Wavelet Transform (DWT) with Hybrid Method, *IEEE 20th International Conference on Electronics, Circuits, and Systems (ICECS)*, 2013, pp. 501–507.
19. Mimouni E. H. E., Karim M. An FPGA-Based Implementation of a Pre-Processing Stage for ECG Signal Analysis Using DWT, *Second World Conference on Complex Systems (WCCS)*, 2014, pp. 649–654.
20. Vijendra V., Kulkarni M. ECG signal Filtering using DWT haar wavelets Coefficient techniques, *International Conference on Emerging Trends in Engineering, Technology and Science (ICE-TETS)*, 2016, pp. 1–6.
21. Elsayed M., Badawy A., Mahmuddin M., Elfouly T., Mohamed A., Abualsaud K. FPGA Implementation of DWT EEG Data Compression for Wireless Body Sensor Networks, *IEEE Conference on Wireless Sensors (ICWiSE)*, 2016, pp. 21–25.
22. Sharmila A., Geethanjali P. DWT Based Detection of Epileptic Seizure from EEG Signals Using Naive Bayes and k-NN Classifiers, *IEEE Access*, 2016, vol. 4, pp. 7716–7727.
23. Larrotta D. M. B., Enciso D. M. M., Barrera A. E. G. Compression of biomedical signals on FPGA by DWT and run-length, *IEEE ANDESCON*, 2010, pp. 1–5.
24. Chervyakov N. N., Lyakhov P. A., Kaplun D. I., Butusov D. N., Nagornov N. N. Analysis of the Quantization Noise in Discrete Wavelet Transform Filters for Image Processing, *Electronics*, vol. 7 (8), 135 p.
25. Lalithakumari S., Pandian R., Rani J., Vinothkumar D., Sneha A., Amalarani V., Bestley J. Selection of optimum compression algorithms based on the characterization on feasibility for medical image, *Biomedical Research*, 2017, vol. 28 (13), pp. 5633–5637.
26. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*, Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, 380 p.
27. Vaidyanathan P. P. *Multirate Systems and Filter Banks*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993, 925 p.
28. Rao K. R., Yip P. C. *The Transform and Data Compression Handbook*, Boca Raton, CRC Press, 2001, 399 p.
29. Ravichandran D., Ahamad M.G., Dhivakar A. Performance Analysis of Three-Dimensional Medical Image Compression Based on Discrete Wavelet Transform, *22nd International Conference on Virtual System & Multimedia (VSMM)*, 2016, pp. 1–8.
30. Basso A., Cavagnino D., Pomponui V., Vernone A. Blind watermarking of color images using Karhunen-Loeve transform keying, *The Computer Journal*, 2011, vol. 54, no. 7, pp. 1076–1090.