УДК 517.97 DOI: 10.17587/it.25.323-330

Н. П. Деменков, канд. техн. наук, доц., e-mail: dnp@bmstu.ru,
Е. А. Микрин, д-р техн. наук, проф., e-mail: evgeny.mikrin@bmstu.ru,
И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф., e-mail: intelsyst@mail.ru,
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 2. Программное управление*

Рассмотрена задача синтеза оптимального управления на основе принципа максимума, при решении которой двухточечная краевая задача трансформируется в задачу Коши для нечетких нелинейных дифференциальных уравнений типа Риккати. Приведен пример.

Ключевые слова: *нечеткие краевые задачи, синтез нечетких оптимальных регуляторов, нечеткие дифференциальные уравнения, функция принадлежности, нечеткая начальная задача, принцип максимума, динамическое программирование, критерий обобщенной работы*

Введение

При использовании принципа максимума для решения задачи оптимального управления необходимо решать двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является более сложной, чем исходная. Однако в некоторых важных случаях, например, при оптимизации линейных систем с квадратичным функционалом, двухточечная задача может быть преобразована к задаче Коши.

Насущной проблемой является решение задачи оптимального управления в нечеткой трактовке, когда динамические параметры объекта управления (ОУ) и краевые условия представляются нечеткими переменными. Весьма актуальной является задача определения типов оптимальных управлений с представлением их в сильной/слабой формах. Тип и форма управления дают новые качества нечеткого оптимального управления и определяют научную новизну предлагаемой работы. Объектом исследования здесь является задача нахождения нечеткого оптимального управления с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина, когда соответствующая двухточечная краевая задача трансформируется к начальной.

1. Постановка задачи

Применительно к синтезу нечеткого оптимального управления на основании принципа максимума, как и в уравнениях (6), (7) [1], задаются нечеткая линейная модель объекта управления с нечеткими начальными условиями

$$\dot{x}_{\text{н}}(t) = A_{\text{н}}(t)x_{\text{н}}(t) + B_{\text{н}}(t)u_{\text{н}}(t),\ x_{\text{н}}(t_0) = x_{\text{н}0} \quad (1)$$

и нечетким квадратичным функционалом

$$J_{\text{н}} = 0,5 = x_{\text{н}}^{\text{т}}(t_k)G_{\text{н}}x_{\text{н}}(t_k) + \\ + 0,5\int_{t_0}^{t_k}(x_{\text{н}}^{\text{т}}Q_{\text{н}}(t)x_{\text{н}} + u_{\text{н}}^{\text{т}}R_{\text{н}}(t)u_{\text{н}})dt, \quad (2)$$

где $x_{\text{н}} = (x_{\text{н}1}, ..., x_{\text{н}n})^{\text{т}} \in E^n$ — нечеткий вектор состояния; $u_{\text{н}} = (u_{\text{н}1}, ..., u_{\text{н}m})^{\text{т}} \in E^m$ — нечеткий вектор управления; $A_{\text{н}}(t)$, $B_{\text{н}}(t)$ $G_{\text{н}}$, $Q_{\text{н}}(t)$ и $R_{\text{н}}(t)$ — матрицы согласованных размеров с нечеткими элементами и треугольными функциями принадлежностей, симметрические матрицы $G_{\text{н}}$ и $Q_{\text{н}}(t)$ неотрицательно определены, симметрическая матрица $R_{\text{н}}(t)$ положительно определена; $x_{\text{н}}(t_k)$ — нечеткий свободный пра-

*Часть 1 опубликована в журнале "Информационные технологии", 2019, т. 25, № 5, с.259—270.

вый конец траектории, с заданными моментами времени t_0 и t_k начала и окончания процесса соответственно.

В этих условиях необходимо найти нечеткое оптимальное управление $u_н(t)$ с использованием принципа максимума, определить известные типы S (Seikkala) или BF (Buckley — Feuring) [1] оптимальных управлений для динамической модели ОУ с нечеткими динамическими параметрами, нечеткими начальными условиями и заданным качеством управления в виде нечеткого функционала.

2. Методы решения нечетких оптимизационных задач на основе принципа максимума

При решении нечеткой задачи оптимизации на основе принципа максимума появляется необходимость решения двухточечной краевой задачи для нечеткого дифференциального уравнения. По аналогии с традиционным подходом используем прием переноса граничных условий в одну точку [2]. Это позволяет трансформировать исходную задачу к нечеткой начальной задаче. При существовании ее решения существует и решение краевой задачи.

В соответствии с общим принципом решения нечетких дифференциальных уравнений, изложенным в [1], первоначально решается традиционная задача с переносом граничных условий, а затем после фазификации параметров задачи решается соответствующая нечеткая задача.

Для решения четкой задачи в соответствии с принципом максимума составляется функция Гамильтона

$$H = (Ax, p) + (Bu, p) - (x, Qx) - (u, Ru), \quad (3)$$

где $p(t)$ — вектор вспомогательных (сопряженных) переменных.

Оптимальное управление находится из условия максимума по u функции Гамильтона. Для этого решается каноническая система дифференциальных уравнений

$$\dot{p}(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = -A^{\mathrm{T}} p + (Q + Q^{\mathrm{T}})x; \quad (4)$$

$$H'_u = \frac{\partial H}{\partial u} = B^{\mathrm{T}} p - (R + R^{\mathrm{T}})u = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) для случая отсутствия ограничений на управление имеем

$$u(t) = (R + R^{\mathrm{T}})^{-1} B^{\mathrm{T}} p(t). \quad (6)$$

Подставив выражение (6) в четкое уравнение, соответствующее нечеткому (1), получим

$$\dot{x} = Ax + B(R + R^{\mathrm{T}})^{-1} B^{\mathrm{T}} p; \quad (7)$$

$$\dot{p} = (Q + Q^{\mathrm{T}})x - A^{\mathrm{T}} p. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) вместе с граничными условиями $x(t_0) = x_0$, $p(t_k) = p_k$ представляют собой однородную двухточечную краевую задачу для линейной системы дифференциальных уравнений порядка $2n$:

$$\dot{F} = EF, \quad (9)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} A & B(R + R^{\mathrm{T}})^{-1} B^{\mathrm{T}} \\ (Q + Q)^{\mathrm{T}} & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$x(t_0) = x_0, \, p(t_k) = p_k.$$

Однородная краевая задача (9) имеет тривиальное решение $F(t) = 0$, однако часто представляет интерес решение $F(t) \neq 0$. В этом случае в дифференциальное уравнение или краевые условия вводят параметр μ, изменяя который можно получить решение $F(\mu, t) \not\equiv 0$.

Для нахождения нетривиального решения обычно используют следующие методы [2—7]:

i_1) подстановки в краевые условия произвольных постоянных, входящих в формулу общего решения уравнения, и их нахождения. Однако в этом случае решение краевой задачи может не существовать или иметь бесконечно много решений;

i_2) сведения краевой задачи к начальной путем переноса граничных условий слева направо;

i_3) преобразования краевой задачи к начальной за счет введения параметризации;

i_4) построения функции Грина краевой задачи;

i_5) нахождение собственных значений в задаче Штурма — Лиувиля краевой задачи.

2.1. Алгоритм переноса краевых условий. Трансформируем полученную двухточечную задачу (9) в начальную по методу i_2, т. е. путем переноса граничных условий [2].

Пусть для уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

необходимо перенести линейное краевое условие α_0 при $t = t_0$

$$\alpha_0 = (l_0, x_0) = \sum_{j=1}^{n} l_{0j} x_j(t_0) \quad (10)$$

на правый конец $t = t_k$.

Согласно работе [2] для того, чтобы перенести α в любую точку $t = t_k$, необходимо решить задачу Коши для сопряженной системы

$$\dot{l} = -A^{\mathrm{T}}(t)l, \quad l(t_0) = l_0 \tag{11}$$

относительно вектора l и далее скалярную задачу Коши

$$\dot{\alpha} = (l, B(t)u), \, \alpha_0 = (l_0, x_0) \tag{12}$$

относительно α.

После интегрирования уравнения (12) получим

$$\alpha(t_k) = (l, x)_{t=t_k} = (l, x)_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_k} (l, B(t)u)dt. \tag{13}$$

В результате формируется линейное краевое условие на правом конце для любого $t = t_k$: $\alpha(t_k) = (l, x)_{t=t_k}$.

При компьютерной реализации алгоритма переноса граничных условий обычно возникает проблема неустойчивости решения сопряженной системы (11), связанная с наличием в некоторых случаях быстрорастущих решений. Эта проблема решается по методу А. А. Абрамова путем решения начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений [3, 7].

В случае необходимости перенесения s условий при $t = 0$ для двухточечной краевой задачи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \, x_j(t_0) = \alpha_{0j}, \, j = \overline{1, s},$$
$$x_j(t_k) = \beta_{kj}, \, j = \overline{s+1, n},$$

на правый конец траектории при $t = t_k$, решение состоит из следующих шагов.

1. Формируется начальная задача по нахождению векторов сопряженных переменных $\overline{l}^{\,j}$

$$\dot{l}^j = -A^{\mathrm{T}}(t)l^j, \quad l^j(0) = (1, \ldots, 1, \ldots)^{\mathrm{T}}, \, j = \overline{1, s}. \tag{14}$$

2. Задается начальная задача по определению вектора $\alpha(t_k)$

$$\dot{\alpha}_j = (l^j, B(t)u), \quad \alpha_j(0) = \alpha_{j0}, \, j = \overline{1, s}. \tag{15}$$

3. Решается система алгебраических уравнений

$$\alpha_j(t_k) = (x, l^j)_{t=t_k} = \\ = \sum_{i=1}^{s} x_i(t_k) l_i^j(t_k) + \sum_{i=s+1}^{n} \beta_{ki} l_i^j(t_k), \, j = \overline{1, s} \tag{16}$$

относительно $x_j(t_k)$.

Таким образом, для уравнения (9) будем иметь задачу Коши:

$$\dot{F} = EF, \, F_j(t_k) = (l^j(t_k), x(t_k)), \, j = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где n — число переносимых начальных условий в конечный момент времени $t = t_k$.

Таким же образом может быть решена аналогично и задача переноса однородных краевых условий, которые появляются, если в уравнении (9) система координат переносится в точку $t = t_0$.

Пример 1. Имеем двухточечную краевую задачу

$$\dot{x} = Ax + Bu, \, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \, u = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$x_1(4) = 9{,}5, \quad x_2(1) = 1.$$

Необходимо перенести условия из точки $x_2(1)$ в точку $x_2(4)$. Полагаем, что граничные условия $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$связаны между собой линейной комбинацией

$$l_1(t_0)x_1(t_0) + l_2(t_0)x_2(t_0) = \alpha_0,$$

где l_1, l_2, α подлежат определению из следующих уравнений:

$$\dot{l} = -A^{\mathrm{T}}l, \quad l_1(1) = 0, \, l_2(1) = 1,$$
$$\dot{\alpha} = (l, Bu), \, \alpha_0(1) = 1.$$

Решаем первое уравнение традиционным методом [8]. Из характеристического уравнения имеем

$$\left| -A^{\mathrm{T}} - \lambda I \right| = 0 \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \\ = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.$$

Корни кратные, поэтому общее решение для каждой компоненты имеет вид

$$l_1(t) = (a_{11} + a_{12}t)\mathbf{e}^{\lambda_1 t} = a_{11} + a_{12}t,$$
$$l_2(t) = (a_{21} + a_{22}t)\mathbf{e}^{\lambda_2 t} = a_{21} + a_{22}t.$$

Находим соотношение между a_{ij}. Для этого $l_1(t)$ и $l_2(t)$, найденные ранее, подставляем в уравнение $\dot{l} = -A^{\mathrm{T}}l$, из которого следует

$$\dot{l}_1 = -l_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(a_{11} + a_{12}t) = \\ = -(a_{21} + a_{22}t) \Rightarrow a_{12} = -a_{21} - a_{22}t,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$a_{12} = -a_{21},\ a_{22} = 0.$$

В результате имеем:

$$l_1(t) = a_{11} + a_{12}t,$$
$$l_2(t) = a_{21} + a_{22}t = -a_{12}.$$

Учитывая значения $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, получаем общее решение

$$l_1(t) = 1 - t,\ l_2(t) = 1.$$

Находим α из скалярного уравнения

$$\dot{\alpha} = (l, Bu), \alpha_0(1) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\alpha} = l_1u_1 + l_2u_2 = l_1t + l_2 \cdot 0 = (1-t)t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha(4) = -12,5.$$

Таким образом, для любого момента времени имеем

$$l_1(t)x_1(t) + l_2(t)x_2(t) = \alpha(t).$$

Для конечного момента времени $t_k = 4$

$$\alpha_k = -12,5 = l_1(t_k)x_1(t_k) + l_2(t_k)x_2(t_k) =$$
$$= -3 \cdot 9,5 + 1 \cdot x_2(4) \Rightarrow x_2(4) = 16.$$

Итак, исходная двухточечная краевая задача

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases},\ x_1(4) = 9,5,\ x_2(1) = 1$$

трансформировалась в традиционную начальную задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases},\ x_1(4) = 9,5,\ x_2(4) = 16.$$

2.2. Алгоритм решения нечеткой краевой задачи. Переход к нечеткой краевой задаче выполняется путем фазификации элементов (параметров) матрицы E для классической задачи (17) и применения к ней принципа расширения при получении ее S решения [9]. Для этого определяются элементы s_{ij} матрицы S по элементам матрицы E в (17) следующим образом:

$$\begin{cases} s_{ij} = s_{i+4n,j+4n} = e_{ij},\ e_{ij} \geqslant 0; \\ s_{ij+4n} = s_{i+4n} = -e_{ij},\ e_{ij} < 0; \\ 0 \text{ для остальных.} \end{cases} \quad (18)$$

Это преобразование приводит к системе порядка $4n$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{F}} \\ \dot{\overline{F}} \end{bmatrix} = S_{(4n\times 4n)} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \overline{F} \end{bmatrix}_{(4n\times 1)}, \quad (19)$$

с нечеткими граничными условиями $x_{\text{н}} = (x_{\text{н}0}\ x_{\text{н}k})^{\text{т}}_{(1\times 4n)}$.

Нечеткое решение $F_{\text{н}}(t) = (\underline{F}(r,t),\ \overline{F}(r,t)|\ r \in [0;1]$ находится из полученной классической системы (17) традиционным способом с использованием переходной матрицы $\Phi(t, \tau)$

$$F_{\text{н}}(r,t) = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \overline{F} \end{bmatrix}_{(4n\times 1)} = \Phi(t,\tau)_{(4n\times 4n)} \begin{bmatrix} \underline{x}_0(r) \\ \underline{x}_k(r) \\ \overline{x}_0(r) \\ \overline{x}_k(r) \end{bmatrix}_{(4n\times 1)}. \quad (20)$$

Матрица перехода $\Phi(t, \tau)$ обычно находится путем вычисления фундаментальной матрицы $\varphi(t)$, которая связана с $\Phi(t, \tau)$ матричным соотношением

$$\Phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau). \quad (21)$$

Возможны и другие способы определения $\Phi(t, \tau)$, например, путем разложения Сильвестра, применения теоремы Кели — Гамильтона, представления матричной экспоненты в виде степенного ряда и другими способами [10].

При вычислении $\Phi(t, \tau)$ на основе использования фундаментальной матрицы $\varphi(t)$ находятся корни характеристического уравнения

$$|S - \omega I| = 0, \quad (22)$$

где I — единичная матрица. В зависимости от типа корней характеристического уравнения — действительные и различные, действительные кратные, комплексные — записывается общее решение для каждой компоненты вектора $F_{\text{н}}(t)$ с точностью до различных между собой произвольных постоянных.

В итоге находится фундаментальная матрица $\varphi(t)$, обратная ей $\varphi^{-1}(\tau)$, переходная матрица $\Phi(t,\tau)$ по соотношению (21) и далее определяется решение (17).

Пример 1 (продолжение). Пусть для двухточечной краевой задачи с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ x_{1\text{н}}(4) = 9,5_{\text{н}}, x_{2\text{н}}(4) = 16_{\text{н}}$$

имеем нечеткие начальные условия. Требуется найти решение нечеткой начальной задачи и определить его свойства.

Матрица S, формируемая по соотношениям (18), имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение (22):

$$\Delta = |S - \omega I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Разложение по первому столбцу дает соотношение $\Delta = \omega^4 = 0$, откуда корни характеристического уравнения $\omega_i = 0$, $i = 1,...,4$, действительные и кратные.

Общее решение для каждой компоненты с учетом кратности и $\omega_i = 0$ имеет вид

$$\underline{x}_1(t) = \sum_{i=1}^{4} C_i t^{i-1},\ \underline{x}_2(t) = \sum_{i=1}^{4} B_i t^{i-1},$$
$$\overline{x}_1(t) = \sum_{i=1}^{4} D_i t^{i-1},\ \overline{x}_2(t) = \sum_{i=1}^{4} E_i t^{i-1}.$$

Для нахождения C_i, B_i, D_i и E_i, $i = 1,...,4$, компоненты $\underline{x}_1(t)$, $\underline{x}_2(t)$, $\overline{x}_1(t)$ и $\overline{x}_2(t)$ подставим в исходное уравнение (19):

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \\ \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix}$$

и приравняем коэффициенты при подобных членах. В результате получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} C_2 = B_1; \\ 2C_3 = B_2; \\ 3C_4 = B_3; \\ B_4 = 0; \end{cases} \begin{cases} B_2 = 0; \\ B_3 = 0; \\ B_4 = 0; \end{cases} \begin{cases} D_2 = E_1; \\ 2D_3 = E_2; \\ 3D_4 = E_3; \\ E_4 = 0; \end{cases} \begin{cases} E_2 = 0; \\ E_3 = 0; \\ E_4 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух систем имеем C_1, $C_2 = B_2$, а из двух последних соответственно E_1, $E_2 = D_2$. После переобозначений получим общее решение в виде

$$\underline{x}_1(t) = A_1 t + A_2,\ \underline{x}_2(t) = A_1,$$
$$\overline{x}_1(t) = A_3 t + A_4,\ \overline{x}_2(t) = A_3.$$

Константы A_i, $i = 1,...,4$, находятся из нечетких начальных условий

$$x_{1\text{н}}(4) = 9{,}5_\text{н} = (\underline{9{,}5}(r), \overline{9{,}5}(r) \mid r \in [0; 1]);$$
$$x_{2\text{н}}(4) = 16_\text{н} = (\underline{16}(r), \overline{16}(r) \mid r \in [0; 1]),$$

что приводит к линейной системе алгебраических уравнений относительно A_i, $i = 1, ..., 4$:

$$S_1 A = Y, \tag{23}$$

где

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4)^\text{т},$$
$$Y = (\underline{9{,}5}(r), \underline{16}(r), \overline{9{,}5}(r), \overline{16}(r))^\text{т},$$
$$S_1 = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix},$$

где $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

В соответствии с базовыми определениями теории нечетких систем линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ), приведенными в Приложении, имеем

$$|B - C| = -1 \neq 0,\ |B + C| = -1.$$

Поэтому $|S_1| \neq 0$, и решение алгебраического уравнения (23) существует и единственно [11]. Обратная матрица S_1^{-1} равна

$$S_1^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 & E_1 \\ E_1 & D_1 \end{bmatrix},$$

где

$$D_1 = 0{,}5[(B + C)^{-1} + (B - C)^{-1}] =$$
$$= 0{,}5 \cdot 2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix};$$
$$E_1 = 0{,}5[(B + C)^{-1} - (B - C)^{-1}] = 0.$$

Следовательно, решение уравнения (20) имеет вид

$$A = S^{-1} Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{9{,}5}(r) \\ \underline{16}(r) \\ \overline{9{,}5}(r) \\ \overline{16}(r) \end{bmatrix},$$

откуда имеем

$$A_1(r)=\underline{16}(r);\ A_2(r)=\underline{9{,}5}(r)-4\cdot\underline{16}(r);$$
$$A_3(r)=\overline{16}(r);\ A_4(r)=\overline{9{,}5}(r)-4\cdot\overline{16}(r).$$

В результате получим нечеткое решение начальной задачи:

$$\begin{aligned}x_{1\text{н}}(t)&=(\underline{x}_1(r,t),\overline{x}_1(r,t)\mid r\in[0;1])=\\&=(\underline{x}_1(r,t)=A_1(r)t+A_2(r),\overline{x}_1(r,t)=\\&=A_3(r)t+A_4(r)|r\in[0;1])=\\&=(\underline{x}_1(r,t)=\underline{16}(r)t+\underline{9{,}5}(r)-4\cdot\underline{16}(r),\overline{x}_1(r,t)=\\&=\overline{16}(r)t+\overline{9{,}5}(r)-4\cdot\overline{16}(r)|r\in[0;1]);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{2\text{н}}(t)&=(\underline{x}_2(r,t),\overline{x}_2(r,t)|r\in[0;1])=\\&=(\underline{x}_2(r,t)=A_1(r),\overline{x}_2(r,t)=A_3(r)|r\in[0;1])=\\&=(\underline{16}(r),\overline{16}(r)|r\in[0;1]).\end{aligned}$$

Исследуем тип (сильное/слабое) полученного решения. Для этого задаем начальные условия в виде нечетких треугольных чисел:

$$9{,}5_{\text{н}}=(9{,}5-\alpha_1|9{,}5|9{,}5+\alpha_1),$$
$$16_{\text{н}}=(16-\alpha_2|16|16+\alpha_2),\ \alpha_1>0,\ \alpha_2>0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\underline{x}_1(0,t)=\underline{16}t+\underline{9{,}5}-4\cdot\underline{16},\ \overline{x}_1(0,t)=\\&=\overline{16}t+\overline{9{,}5}-4\cdot\overline{16}\Rightarrow x_1(0,t)=(16-\alpha_2)t+\\&+(9{,}5-\alpha_1)-4(16-\alpha_2),\overline{x}_1(0,t)=\\&=(16+\alpha_2)t+(9{,}5+\alpha_1)-4(16+\alpha_2).\end{aligned}$$

Для того, чтобы при любых моментах времени t $x_{1\text{н}}(t)$ было сильным числом, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\overline{x}_1(\cdot)>\underline{x}_1(\cdot)\Leftrightarrow\beta\alpha_2+\alpha_1>0,\ \beta=t-4.$$

Поэтому при $t<4$, когда $\beta<0$, а $\alpha_2>2\alpha_1\beta^{-1}$, $x_{1\text{н}}(t)$ будет сильным числом, а при $t>4$, когда $\beta>0$, получим $\alpha_2<2\alpha_1\beta^{-1}$. Это означает, что $x_{1\text{н}}(t)$ после соответствующей замены является слабым числом.

Аналогичные исследования были проведены и для координаты $x_{2\text{н}}(t)$.

Таким образом, в результате фазификации задачи (17) и использования принципа расширения в соответствии с работой [9] получили решение нечеткой задачи (17).

Заключение

Сформулирована нечеткая оптимизационная задача при использовании принципа максимума. Полученная при ее решении двухточечная краевая задача для нечеткого дифференциального уравнения решена путем трансформации ее к соответствующей начальной задаче в векторной форме и получении для нее решения S типа. На примере системы второго порядка с нечеткими начальными условиями показано, что при определенных условиях существуют сильные/слабые решения для решений S типа.

Как показали проведенные в части 1 и части 2 исследования, использование теории нечетких множеств при решении прикладных задач теории оптимального управления позволяет более полно учитывать различные возмущения и создавать более адекватные модели и алгоритмы по сравнению с традиционным подходом.

Список литературы

1. **Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.** Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление // Информационные технологии. 2019. Т. 25, № 5. С. 259—270.

2. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 576 с.

3. **Деменков Н. П.** Вычислительные аспекты решения задач оптимального управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. 171 с.

4. **Филиппов А. Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973. 128 с.

5. **Агафонова С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В.** Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 347 с.

6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

7. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, № 3. С. 542—545.

8. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

9. **Amir Sadeghi, Ahmad Izani Md. Ismail, Ali F. Jameel.** Solving systems of fuzzy differential equation // International Mathematical Forum. 2011. Vol. 6, N. 42. P. 2087—2100.

10. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического управления. М.: Наука, 1975. 768 с.

11. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems. 1998. N. 96. P. 201—209.

12. **Мочалов И. А., Хрисат М. С.** Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. 2014. № 2(210). С. 14—22.

13. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Принято следующее определение нечетких систем линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) [11, 12]: это линейное уравнение относительно вектора X:

$$AX = Y_{н},$$

где $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1,...,n$, — матрица с элементами из четких чисел, т.е. функция принадлежности $r_{ij}(a)$ элементов a_{ij} одиночного (singleton) типа:

$$r_{ij}(a) = \mathrm{singl}(a - a_{ij}) = \begin{cases} 1, \; a = a_{ij}; \\ 0, \; a \neq a_{ij}; \end{cases}$$

$Y_{н} = (y_{1н}, ..., y_{nн})$ — вектор, имеющий нечеткие компоненты с заданными функциями принадлежностей $r_k(y)$, $k = 1,...,n$.

Алгоритм решения НСЛАУ следующий. По заданной НСЛАУ

$$A_{(n\times n)}X_{(n\times 1)} = Y_{н(n\times 1)}$$

с заданной матрицей A составляется расширенная система

$$S_{(2n\times 2n)}X_{(2n\times 1)} = Y_{н(2n\times 1)}$$

с блочной матрицей

$$S_{(2n\times 2n)} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}_{(2n\times 2n)},$$

$$X = (\underline{X} \vdots - \overline{X})^{т}, Y = (\underline{Y} \vdots - \overline{Y})^{т}.$$

Матрицы B и C находятся по матрице A: матрица B состоит из положительных элементов матрицы A, а отрицательные элементы матрицы A заменяются соответственно нулями. Матрица C состоит из модулей отрицательных элементов матрицы A, а положительные элементы матрицы A заменяются соответственно нулями. Следовательно,

$$A = B - C \Rightarrow C = B - A.$$

При решении расширенной системы возникают следующие проблемы:

1. При каких условиях определитель $|S| \neq 0$?
2. Могут ли компоненты вектора X иметь функцию принадлежности в уровневой форме в виде треугольника, т. е. отличаться от нечеткого числа? Если такая ситуация возможна, то что тогда необходимо понимать под решением расширенной системы?

Ответ на вопрос по п. 1 дается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1 (приводим без доказательства). $|S| \neq 0 \Leftrightarrow |B - C| \neq 0$, $|B + C\| \neq 0$.

Проблема: если S не вырождена ($|S| \neq 0$), то как вычислить S^{-1}?

Теорема 2 (приводим без доказательства). Если S^{-1} существует, то она должна иметь такую же структуру, что и S:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}.$$

Теорема 3 (приводим без доказательства). В условиях теоремы 2 имеем:

$$D = 0{,}5[(B + C)^{-1} + (B - C)^{-1}];$$
$$E = 0{,}5[(B + C)^{-1} - (B - C)^{-1}].$$

Таким образом, если S не вырождена ($(B + C)$, $(B - C)$ не вырождены), то X — единственный вектор и он равен

$$X = S^{-1}Y_{н}.$$

Однако X может быть неподходящим нечетким вектором в том смысле, что функции принадлежностей треугольного типа некоторых компонент вектора X могут иметь в основании треугольника углы больше 90°, т. е. не являются нечеткими числами. Например, пусть для фиксированного i получено:

$$x_i = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)) \mid r \in [0;\, 1],$$

которое не является нечетким числом. Тогда выполняется замена $x_i \to u_i$,

$$u_i = \{\underline{u}_i(r) = \min(\underline{x}_i, \overline{x}_i, \underline{x}_i(r = 1))\},$$
$$\overline{u}_i(r) = \max(\underline{x}_i, \overline{x}_i, \underline{x}_i(r = 1)) \mid r \in [0;\, 1].$$

После такой замены $X \to U$.

Решение U называют "слабым" (weak) нечетким решением НСЛАУ.

Если же все компоненты вектора X являются нечеткими числами, т. е. углы при основании треугольной функции принадлежностей меньше 90°, тогда найденный вектор X называют "сильным" (strong) нечетким решением НСЛАУ.

Теорема 4 (приводим без доказательства). Для того, чтобы решение НСЛАУ

$$X = S^{-1}Y_{\text{н}}$$

имело "сильное" нечеткое решение, необходимо и достаточно, чтобы элементы $(S^{-1})_{ij} > 0$ для всех i, j.

Имеет место следующий факт. Матрица A НСЛАУ не вырождена, т. е. $|A| \neq 0$, однако матрица S расширенной НСЛАУ может быть вырождена, т. е. $|S| = 0$, и тогда расширенная НСЛАУ не имеет единственного решения. В этом случае НСЛАУ решается в соответствии с общей теорией решения систем по методу Гаусса [13] путем приведения S к ступенчатому виду.

Поэтому возможны следующие варианты решения НСЛАУ.

Вариант 1. НСЛАУ при $|A|\neq 0$, $|S| = 0$ не имеет нечеткого решения.

Вариант 2. НСЛАУ при $|A|\neq 0$, $|S| = 0$ имеет бесконечное множество решений, из которых логично выделить "сильное" или "слабое" решения. Применительно к этому варианту будем иметь следующие типы нечетких решений:

— S решение: "сильное" (s) $x_{s\text{н}}^{S}$ или "слабое" (w) $x_{w\text{н}}^{S}$ соответственно;

— BF решение: "сильное" $x_{s\text{н}}^{BF}$ или "слабое" $x_{w\text{н}}^{BF}$ соответственно.

N. P. Demenkov, Ph. D., Associate Professor, dnp@bmstu.ru,
E. A. Mikrin, D. Sc., Professor, evgeny.mikrin@bmstu.ru,
I. A. Mochalov, D. Sc., Professor, intelsyst@mail.ru,
MSTU named after N. E. Bauman

Fuzzy Optimal Control of Linear Systems. Part 2. Program Control

When using the maximum principle to find the optimal control, it is necessary to solve a two-point boundary value problem for a system of ordinary differential equations, which is more complex than the initial one. However, in some important cases, for example, when optimizing linear systems with a quadratic functional, the two-point problem can be transformed to the Cauchy problem. Initially, the traditional problem is solved with the transfer of boundary conditions, and then after phasing of the parameters of the problem, the corresponding fuzzy problem is solve. When transferring conditions for a two-point boundary value problem from the left on the right end of the trajectory, the solution consists of the following steps. An initial task is formed on finding vectors of conjugate variables. An initial problem is defined for determining a transferable vector. A system of algebraic equations is solved for the state vector components missing at the right end. The transition to a fuzzy boundary-value problem is performed by fuzzing the elements (parameters) of the matrix for the classical problem and applying the expansion principle to it when its Seikkala and/or Buckley-Feuring solution is obtained using the transition matrix. The example is given.

Keywords: *Fuzzy boundary value problems, the optimal synthesis of fuzzy controllers, fuzzy differential equations, membership functions, fuzzy initial problem, maximum principle, dynamic programming, the criterion of the generalized work*

DOI: 10.17587/it.25.323-330

Referenses

1. **Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. A.** *Informatsionnye Tekhnologii*, 2019, vol. 25, no. 5, pp. 259—270 (in Russian).
2. **Moiseev N. N.** Elements of the theory of optimal systems, Moscow, Nauka, 1975, 576 p. (In Russian).
3. **Demenkov N. P.** Computational aspects of solving optimal control problems, Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Eh. Baumana, 2007, 171 p. (in Russian).
4. **Filippov A. F.** Collection of problems for differential equations, Moscow, Nauka, 1973, 128 p. (in Russian).
5. **Agafonova S. A., German A. D., Muratova T. V.** Differential equations, Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Eh. Baumana, 2006, 347 p. (in Russian).
6. **Kamke E. H.** Handbook of ordinary differential equations, Moscow, Nauka, 1971, 576 p. (in Russian).
7. **Abramov A. A.** *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 1961, vol. 1, no. 3, pp. 542—545 (in Russian).
8. **Gantmaher F. R.** Matrix Theory, Moscow, Nauka, 1967, 576 p. (in Russian).
9. **Amir Sadeghi, Ahmad Izani Md. Ismail, Ali F. Jameel.** *International Mathematical Forum*, 2011, vol. 6, no. 42, pp. 2087—2100.
10. **Besekerskij V. A., Popov E. P.** Theory of automatic control systems, Moscow, Nauka, 1975, 768 p. (in Russian).
11. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy sets and systems, 1998, no. 96, pp. 201—209.
12. **Mochalov I. A., Hrisat M. S.** Estimating model parameters from fuzzy random data, *Informacionnye Tekhnologii*, 2014, no. 2(210), pp. 14—22 (in Russian).
13. **Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** Mathematical theory of designing control systems, Moscow, Vysshaya shkola, 2003, 615 p. (in Russian).