УДК 517.97 DOI: 10.17587/it.25.259-270

Н. П. Деменков, канд. техн. наук, доц., dnp@bmstu.ru,
Е. А. Микрин, д-р техн. наук, проф., evgeny.mikrin@bmstu.ru,
И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф., intelsyst@mail.ru,
Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана

Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление

В части 1 рассмотрены начальные задачи (задачи Коши) для нечетких нелинейных дифференциальных уравнений типа Риккати, которые возникают при решении задач синтеза оптимальных линейных регуляторов методом динамического программирования, и для нечетких линейных дифференциальных уравнений, которые появляются при синтезе регуляторов по критерию обобщенной работы. Полагается, что первоначально решается четкая задача оптимизации управления, а далее, после получения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения, параметры этого уравнения заменяются нечеткими, и решается соответствующее нечеткое дифференциальное уравнение. В части 2 рассмотрены двухточечные краевые задачи, которые возникают при решении задач оптимального управления на основе принципа максимума и трансформируются в начальные задачи. Для всех случаев приведены примеры.

Ключевые слова: *нечеткие краевые задачи, синтез нечетких оптимальных регуляторов, нечеткие дифференциальные уравнения, функция принадлежностей, нечеткая начальная задача, принцип максимума, динамическое программирование, критерий обобщенной работы*

Введение

Разнообразные задачи естествознания и техники приводятся к задачам оптимизации интегральных критериев, которые решаются методами вариационного исчисления (например, это задачи о преломлении света, о геодезических линиях и т. д.) [1—3]. Некоторые положения вариационного исчисления, примененные к задачам синтеза оптимального управления, приводят к использованию динамического программирования, критерия обобщенной работы и принципа максимума [4—7]. Эти методы имеют свои преимущества и недостатки при решении практических задач.

В методе динамического программирования и в методе на основе критерия обобщенной работы минимизируются функционалы качества управления для объекта управления (ОУ), представляемого в виде начальной задачи (задачи Коши) для обыкновенного дифференциального уравнения [2]. Эти методы отличаются формой минимизируемого функционала, но в обоих случаях для нахождения оптимального управления необходимо решать уравнения в частных производных с краевыми условиями.

При использовании принципа максимума для нахождения оптимального управления необходимо решать двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую в некоторых важных случаях (например, при оптимизации линейных систем с квадратичным функционалом) можно преобразовать к задаче Коши [8].

Важной особенностью задач оптимального управления является неопределенность динамических параметров ОУ и соответствующих начальных условий. В традиционной математической постановке неопределенность обычно описывается стохастическими моделями. В этом случае появляются задачи оптимального управления стохастическими системами [9, 10]. В последнее время неопределенность обычно представляют в нечетких терминах или в сочетании нечеткости и стохастичности.

Нечеткость в задачах управления используется в двух направлениях. В первом нечеткость применяется для реализации нечетких логических систем управления и конструирования традиционных регуляторов с использованием нечетких алгоритмов [11]. Второе направление связано с представлением классических дисциплин в нечеткой интерпретации [12, 13]. Это приводит к появлению новых свойств при нечеткой реализации [14, 15]. При решении нечетких систем линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) появляются "сильные" и "слабые" решения [16, 17], у нечетких обыкновенных дифференциальных уравнений при определенных условиях имеет место не единственность решения [18, 19], для нечетких марковских случайных процессов, в частности для марковских цепей, возникают нечеткие состояния, что приводит к уменьшению размерности переходной матрицы [20, 21] и т. д.

В связи с этим важной проблемой является решение задачи оптимального управления в нечеткой трактовке, когда динамические параметры ОУ и краевые условия представляются нечеткими переменными. Весьма актуальной является задача определения типов нечетких оптимальных управлений с представлением их в сильной/слабой формах. Тип и форма управления дают новые качества нечеткого оптимального управления и определяют научную новизну предлагаемой ниже работы. В качестве методики синтеза оптимального управления, используемой в настоящей статье, реализуется прием, принятый в теории нечетких множеств, когда часть исходной задачи решается в четкой постановке, а другая ее часть — в нечеткой постановке. Объектами исследования здесь являются методы динамического программирования Р. Беллмана и обобщенной работы А. А. Красовского в задаче синтеза нечетких линейных регуляторов, представляемых в виде задачи Коши для нечетких нелинейных дифференциальных уравнений (нечеткая начальная задача). К этой же проблеме относится и задача нахождения нечеткого оптимального управления с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина, когда соответствующая двухточечная краевая задача может быть трансформируема к задаче Коши.

1. Базовые определения и обозначения

В статье приняты следующие обозначения: нечеткие переменные имеют нижний индекс "н", например, $x_{\text{н}}$ — нечеткая переменная (элемент); $y_{\text{н}}(\mathbf{x})$ — нечеткая функция многих переменных, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\text{T}}$, $y'_{\text{н}x_i}(\mathbf{x})$ — нечеткая производная по переменной x_i; $\dot{\mathbf{x}}_{\text{н}}(t)$ — нечеткая производная вектора $\mathbf{x}_{\text{н}}$ по времени.

Для более полного понимания методов решения нечетких оптимизационных задач приведены основные понятия теории нечетких множеств, которые используются в данной работе. К ним относятся: нечеткая треугольная переменная, нечеткая функция, нечеткий функционал, нечеткая производная, нечеткая начальная задача, типы нечетких решений.

Нечеткая треугольная переменная $x_{\text{н}}$ с функцией принадлежности $r(x)$ задается посредством трех чисел $a_1 < a_2 < a_3$, $a_i \in R$, $i = \overline{1,3}$. График $r(x)$ в плоскости (x, r) имеет форму треугольника с основанием (support) $\text{supp}x_{\text{н}} = [a_1, a_3]$ и высотой $\text{hgt}x_{\text{н}} = 1$, исходящей из точки с координатами $(x = a_2;\ r = 0)$ (рис. 1).

Для $x_{\text{н}}$ в этом случае приняты следующие обозначения:

$$x_{\text{н}} = (a_1|a_2|a_3) \Leftrightarrow (\underline{r}(x) = (x - a_1)(a_2 - a_1)^{-1};$$
$$\overline{r}(x) = (-x + a_3)(a_3 - a_2)^{-1}|r \in [0;\ 1]) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\underline{x}(r) = (a_2 - a_1)r + a_1;$$
$$\overline{x}(r) = (a_3 - a_2)r + a_3|r \in [0;\ 1]).$$

Рис. 1. Функции принадлежности нечетких треугольных переменных

Полагают, что если $a_1 \geqslant 0$, то $x_{\text{н}} \geqslant 0$; если $a_3 \leqslant 0$, то $x_{\text{н}} \leqslant 0$.

Нечеткая функция (*отображение*) четких переменных $y_{\text{н}}(x)$. Пусть E — множество всех нечетких переменных с заданной функцией принадлежности $r(x)$, $r \in [0;\ 1]$, $x \in R$. Тогда $y_{\text{н}}(x){:}R \to E$ определяет нечетко-значимую функцию. В параметрической форме имеет место представление

$$y_{\text{н}}(x) = y(x, r) =$$
$$= (\underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r)|r \in [0;\ 1]).$$

Арифметические операции $*(+, -, \times, :)$ трактуются как специальный тип четкого отображения f над нечеткими множествами $A_1, ..., A_n$ с многомерной функцией принадлежностей $r_A(x_1, ..., x_n)$, именуемый принципом расширения Заде:

$$f: A = A_1 * \ldots * A_n \xrightarrow{r_A(x_1,\, \ldots,\, x_n)} B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r_B(y) = f(r_A(x_1, \ldots, x_n)) =$$
$$= \sup_{y=f(\cdot)} r_A(x_1, \ldots, x_n) \sup_{y=f(\cdot)} \min(r_{A_1}(x_1), \ldots, r_{A_n}(x_n)).$$

В частности, для двух нечетких треугольных переменных $x_{н1}$, $x_{н2}$ имеем

$$x_н = x_{н1} * x_{н2} = (a_{11}|a_{12}|a_{13}) * (a_{21}|a_{22}|a_{23}) =$$
$$= (a_{11} * a_{21}|a_{12} * a_{22}|a_{13} * a_{23}),$$
$$x_н = x_{н1} * x_{н2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r_B(y) = \max_{x_н = x_{1н} * x_{2н}} \min(r_{A_1}(x_1), r_{A_2}(x_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r_B(y) = \begin{cases} \sum_i r_{A_1}(x_{1i})|r_B(y_i) = r_{A_1}(x_{1i}) * r_{A_2}(x_{2i}), \\ A_1, A_2 \text{ — дискретные}; \\ \int r_{A_1}(x_1)|r_B(y) = r_{A_1}(x_1) * r_{A_2}(x_2), \\ A_1, A_2 \text{ — непрерывные}, \end{cases}$$

где Σ, $\int$ — символы представления нечеткой переменной $r_B(y)$ в виде совокупности пар $\{r_{A_1}(x_1)|r_B(y)\}$.

Отношение порядка (операции сравнения $\geqslant$, $\leqslant$) в общем случае следует из следующего определения. Пусть имеем нечеткие переменные $x_{н1}$, $x_{н2}$. Тогда

$$x_{н1} \gtrless x_{н2},$$
$$\text{если } \int_0^1 r[\underline{x}_1(r) + \overline{x}_1(r)]dr \gtrless \int_0^1 r[\underline{x}_2(r) + \overline{x}_2(r)]dr,$$

где $\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)$ — элементы параметрического представления нечетких переменных $x_{нi}$, $i = 1, 2$.

Нечеткий функционал $J_н$ определяется как отображение множества нечетких функций $y_н$ в R. $J_н$: $y_н \to r \in [0; 1] \subset R$, т. е. нечеткой функции $y_н$ соответствует нечеткая треугольная переменная. Совокупность $\{y_н\}$, на которой определен нечеткий функционал $J_н$, составляет *нечеткую область определения*. Нечеткость $J_н$ обусловлена наличием нечетких параметров, которые характеризуют неточность в их задании.

Нечеткая числовая матрица $A_н = \{a_{нij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, с треугольными переменными — это прямоугольная (квадратная) таблица, содержащая нечеткие элементы в виде нечетких переменных с треугольными функциями принадлежностей $r(a_{ij}) = (a_{1ij}|a_{2ij}|a_{3ij})$, $r \in [0; 1] \subset R$. Элементы a_{1ij}, a_{2ij}, a_{3ij} определяют свойства симметричности и неотрицательности $A_н$, подобные свойствам традиционных (четких) матриц. Элемент матрицы $0_{-1}^{+1} = (-1\,|\,0\,|+1)$ обозначает нечеткий нуль, для которого $\int_{-1}^{1} r[\underline{x}(r) + \overline{x}(r)]dr = 0$. Поэтому все элементы матрицы нечетко неотрицательны, т. е. $a_{нij} \geqslant 0$, что означает неотрицательность нечеткой матрицы.

Банахово пространство нечетких переменных вводится в соответствии с подходом, принятым в функциональном анализе. Для этого в совокупности $\{x_{нi}\} = E$ задаются операции:

a) сложения $x_{нi}$ и $x_{нj}$ в виде

$$x_{нi} + x_{нj} = (\underline{x}_i(r) + \underline{x}_j(r), \overline{x}_i(r) + \overline{x}_j(r)|r \in [0; 1]);$$

b) умножения $x_н$ на скаляр $k \in R$ по правилу

$$kx_{нi} = \begin{cases} k\,\underline{x}_i(r), k\,\overline{x}_i(r)|r \in [0;1], k \geqslant 0; \\ k\,\overline{x}_i(r), k\,\underline{x}_i(r)|r \in [0;1], k < 0; \end{cases}$$

c) существования у $x_{нi}$ противоположного элемента $x_{нk}$ такого, что

$$x_{нi} + x_{нk} \equiv 0 \Leftrightarrow r_k(x) = r_i(-x).$$

Относительно операций сложения и умножения выполняются аксиомы: коммутативность и ассоциативность для операции сложения, дистрибутивность для операции умножения. Поэтому совокупность $\{x_н\}$ с операциями сложения и умножения, с существованием противоположного элемента образует векторное (линейное) пространство E.

В пространстве E определим метрику

$$S(x_{нi}, x_{нj}) =$$
$$= \sup_{r \in [0;\,1]} \{\max[|\underline{x}_i(r) - \overline{x}_j(r)|, |\overline{x}_i(r) - \underline{x}_j(r)|]\}$$

и норму

$$\|x_{нi} - x_{нj}\| = S(x_{нi}, x_{нj}).$$

Далее определяется нечеткая последовательность Коши

$$\{x_{нn}\}: S(x_{нn}, x_{нm}\}_{n,m\to\infty} \to 0$$
$$\text{и полнота } E: x_{нn\; n\to\infty} \to x_н,\ x_н \in E.$$

Это приводит к банахову пространству нечетких переменных (E, S).

Нечеткая производная функции по ее четкому аргументу согласно общему подходу находится путем определения для некоторой нечеткой функции, определенной ранее, операций:

вычитания или существования противоположного элемента, умножения на константу, предельного перехода относительно заданной метрики. В статье используются следующие типы нечетких производных: $y'^{S}_{\text{н}}(x)$ — Сейккалы (Seikkala — S) и $y'^{BF}_{\text{н}}(x)$ — Баклей-Фейринга (Buckley-Feuring — BF). Имеет место утверждение: если нечеткие производные существуют при $x = x_*$ и непрерывны в этой точке, то обе нечеткие производные при $x = x_*$ равны между собой [20].

Нечеткий интеграл. Пусть имеется нечеткое отображение $f_{\text{н}}:[a, b] \subset R \to E$, где E — нечеткое множество. Для каждого разбиения $P = \{t_0, ..., t_n\} \in [a, b]$ и $\forall \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, допускается $R_P = \sum_{i=1}^{n} f_{\text{н}}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, $\Delta = \max\{|t_i - t_{i-1}|, i = \overline{1, n}\}$, тогда определяется нечеткий интеграл для $f_{\text{н}}$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f_{\text{н}}(t)dt = \lim_{\Delta\to\infty} R_P,$$

где предел определяется в метрике S Хаусдорффа.

Если нечеткая функция $f_{\text{н}}(t) = f(t, r) = (\underline{f}(t, r), \overline{f}(t, r) | r \in [0; 1])$ непрерывна в метрике Хаусдорффа и существует предел $\lim_{\Delta\to\infty} R_P$, то

$$\underline{\int_a^b f(t, r)dt} = \int_a^b \underline{f}(t, r)dt; \overline{\int_a^b f(t, r)dt} = \int_a^b \overline{f}(t, r)dt;$$
$$r \in [0; 1],$$

где $\underline{\int_a^b f(t, r)dt}$ и $\overline{\int_a^b f(t, r)dt}$ — нижний и верхний нечеткие интегралы, а $\underline{f}(t, r)$ и $\overline{f}(t, r)$ — нижняя и верхняя подынтегральные нечеткие функции.

Нечеткая начальная задача (*задача Коши*) рассматривается в статье для нечетких производных $y'^{S}_{\text{н}}(x)$ и $y'^{BF}_{\text{н}}(x)$ [13, 24]. Пусть имеем нечеткую начальную задачу, описываемую нелинейным уравнением первого порядка

$$y'_{\text{н}}(x) = f(x, y_{\text{н}}(x), \mathbf{k}_{\text{н}}), y_{\text{н}}(0) = c_{\text{н}}, \qquad (1)$$

где $y'_{\text{н}}(x)$ — некоторая нечеткая производная из перечисленных ранее, константа $c_{\text{н}}$ и вектор параметров $\mathbf{k}_{\text{н}}$ являются неточно заданными, т. е. неопределенными. Представим эту неопределенность посредством нечетких треугольных переменных $c_{\text{н}} = (c_1|c_2|c_3)$, $k_{\text{н}i} = (k_{1i}|k_{2i}|k_{3i})$ или с использованием обратных отображений в параметрической форме $k_{\text{н}i} = (\underline{k}_i(r), \overline{k}_i(r)| r \in [0; 1])$, $c_{\text{н}} = (\underline{c}(r), \overline{c}(r)| r \in [0; 1])$. Необходимо получить решение (1) $y_{\text{н}} = \beta(x, \mathbf{k}_{\text{н}}, c_{\text{н}})$, которое для любого x является нечеткой переменной.

Соответствующая (1) четкая начальная задача имеет вид

$$y'(x) = f(x, y(x), \mathbf{k}), y(0) = c, \qquad (2)$$

где $c = \text{const}$, $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_n)$ — вектор четких параметров. Если для задачи (2) выполнены все условия существования и единственности, то $y = \alpha(x, \mathbf{k}, c)$ есть решение уравнения (2).

Типы нечетких решений определяются типом производной. В соответствии с работами [13, 24] для нечеткой начальной задачи (1) имеет место два типа решений: $y^{S}_{\text{н}}(x)$ — решение Seikkala (S) и $y^{BF}_{\text{н}}(x)$ — решение Buckley-Feuring (BF). Последнее существует при одновременном выполнении следующих условий:

$$f'_y > 0, \alpha'_c > 0, f'_{k_i}\alpha'_{k_i} > 0, i = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

где $f(\cdot)$ — правая часть, $\alpha(\cdot)$ — решение уравнения (2) соответственно; k_i — компоненты вектора $\mathbf{k}$.

Для уравнения (1) определяется существование BF-решения путем проверки условий (3), которые эквивалентны условиям одновременного возрастания (убывания) функций $f(\cdot)$ и $\alpha(\cdot)$ относительно параметров. Если условия (3) выполняются, то BF-решение существует и имеет вид

$$y^{BF}_{\text{н}}(x) = \left(\min_{r\in[0;1]} \alpha(x, \mathbf{k}_{\text{н}}(r), c_{\text{н}}(r)), \max_{r\in[0;1]} \alpha(x, \mathbf{k}_{\text{н}}(r), c_{\text{н}}(r))\right). \qquad (4)$$

Если хотя бы одно из условий (3) не выполняется, то BF-решение не существует и далее ищется S-решение $y^{S}_{\text{н}}(x)$.

Если четкое уравнение (2) имеет решение, то всегда существует решение $y^{S}_{\text{н}}(x)$, и оно находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \underline{y}'^{S}(x) = f(x, \underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r), \underline{k}), \underline{y}^{S}(0) = \underline{c}, \\ r \in [0; 1]; \\ \overline{y}'^{S}(x) = f(x, \underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r), \overline{k}), \overline{y}^{S}(0) = \overline{c}, \\ r \in [0;], \end{cases} \qquad (5)$$

а $y^{S}_{\text{н}}(x) = y(x, r) = (\underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r)| r \in [0; 1])$ — нечеткая функция, в параметрическом представлении имеющая нижнюю $\underline{y}(x, r)$ и верхнюю $\overline{y}(x, r)$ ветви.

Если же решения $y^{S}_{\text{н}}(x)$ не существует, то не существует и решения (1).

Между нечеткими решениями имеется следующая взаимосвязь [24]:

$$\left.\begin{array}{l}\exists S \Rightarrow \exists BF \\ \exists BF \not\Rightarrow \exists S\end{array}\right\} \Rightarrow \exists BF \not\Leftrightarrow \exists S,$$

т. е. если существует $y_{\text{н}}^{S}(x)$, то существует решение $y_{\text{н}}^{BF}(x) = y_{\text{н}}^{S}(x)$. Если хотя бы одно из условий (3) не выполняется, то $y_{\text{н}}^{BF}(x) \neq y_{\text{н}}^{S}(x)$ и $y_{\text{н}}^{BF}(x)$ не существует.

2. Постановка задачи

Требуется определить при использовании метода динамического программирования, критерия обобщенной работы и принципа максимума типы S или BF оптимальных управлений для динамической модели ОУ с нечеткими динамическими параметрами, нечеткими начальными условиями и заданным качеством управления в виде нечеткого функционала.

2.1. Применительно к синтезу нечеткого оптимального управления методом динамического программирования имеем:

нечеткую линейную динамическую модель ОУ с нечеткими начальными условиями

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{н}}(t) = A_{\text{н}}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}(t) + B_{\text{н}}(t)\mathbf{u}_{\text{н}}(t),\ \mathbf{x}_{\text{н}}(t_0) = \mathbf{x}_{\text{н}0}, \quad (6)$$

где $\mathbf{x}_{\text{н}} = (x_{\text{н}1}, ..., x_{\text{н}n})^{\text{т}} \in E^{n}$ — нечеткий вектор состояния; $\mathbf{u}_{\text{н}} = (u_{\text{н}1}, ..., u_{\text{н}m})^{\text{т}} \in E^{m}$ — нечеткий вектор управления; E^{n}, E^{m} — нечеткие множества размерности n и m соответственно, а нечеткая производная каждой компоненты вектора $\mathbf{x}_{\text{н}}$ понимается в смысле Сейккала, для которой индекс "S" опущен для упрощения записи,

и нечетким квадратичным функционалом с заданными моментами времени начала t_0 и окончания t_k процесса соответственно

$$J_{\text{н}} = 0,5\mathbf{x}_{\text{н}}^{\text{т}}(t_k)G_{\text{н}}\mathbf{x}_{\text{н}}(t_k) + + 0,5\int_{t_0}^{t_k}(\mathbf{x}_{\text{н}}^{\text{т}}(t)Q_{\text{н}}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}(t) + \mathbf{u}_{\text{н}}^{\text{т}}(t)R_{\text{н}}(t)\mathbf{u}_{\text{н}}(t))dt, \quad (7)$$

где $A_{\text{н}}(t)$, $B_{\text{н}}(t)$, $G_{\text{н}}$, $Q_{\text{н}}(t)$ и $R_{\text{н}}(t)$ — матрицы согласованных размеров с нечеткими элементами и треугольными функциями принадлежностей; симметрические матрицы $G_{\text{н}}$ и $Q_{\text{н}}(t)$ неотрицательно определены; симметрическая матрица $R_{\text{н}}(t)$ положительно определена; $\mathbf{x}_{\text{н}}(t_k)$ — нечеткий свободный правый конец задачи.

В условиях (6) необходимо найти нечеткое оптимальное управление $\mathbf{u}_{\text{н}}^{*}(t, \mathbf{x}_{\text{н}})$, которое минимизирует функционал (7). В четком (традиционном) случае (индекс "н" отсутствует) это управление принято называть управлением с полной обратной связью.

Здесь и далее полагается, что нечеткая задача (6), (7) реализуется по методике, когда первоначально решается задача четкой оптимизации, т. е. индекс "н" в соотношениях (6), (7) исключается, а далее, после получения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения, полагается, что параметры этого уравнения являются нечеткими, появляется индекс "н" и решается соответствующая нечеткая задача [25, 26].

2.2. Применительно к синтезу нечеткого оптимального управления по критерию обобщенной работы функционал задается в виде нечеткой обобщенной работы

$$J_{\text{н}} = 0,5\mathbf{x}_{\text{н}}^{\text{т}}(t_k)G_{\text{н}}\mathbf{x}_{\text{н}}(t_k) + 0,5\int_{t_0}^{t_k}(\mathbf{x}_{\text{н}}^{\text{т}}(t)Q_{\text{н}}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}(t) + + \mathbf{u}_{\text{н}}^{\text{т}}(t)R_{\text{н}}(t)\mathbf{u}_{\text{н}}(t) + \Psi_{\text{н}}(t, \mathbf{x}_{\text{н}}(t)))dt, \quad (8)$$

где $\Psi_{\text{н}}(t, \mathbf{x}_{\text{н}}(t))$ — нечеткая функция, доопределяющая функционал (8).

По аналогии с работами [27, 28] сформулированные выше проблемы можно называть задачами аналитического конструирования нечетких оптимальных регуляторов.

2.3. Применительно к синтезу нечеткого оптимального управления на основании принципа максимума задаются нечеткая линейная модель ОУ с нечеткими начальными условиями (6) и с нечетким квадратичным функционалом (7) с заданными моментами времени начала t_0 и окончания t_k процесса соответственно, но с нечетким правым концом:

$$\mathbf{x}_{\text{н}}(t_k) = \mathbf{x}_{\text{н}k}. \quad (9)$$

В этих условиях, используя принцип максимума, необходимо найти нечеткое оптимальное управление, минимизирующее функционал (7), путем преобразования соответствующей двухточечной краевой задачи в задачу Коши [8].

3. Методика решения нечетких оптимизационных задач

Для сформулированных выше нечетких оптимизационных задач по пп. 2.1—2.2 используется прием, принятый в теории решения нечеткой начальной задачи [13, 24, 29, 30].

Методика решения нечеткой оптимизационной задачи управления заключается в следующем.

1. Составляется четкая оптимизационная задача соответствующей нечеткой задачи оптимизации управления, и находится ее решение.

2. Для полученной при решении четкой оптимизационной задачи четкой начальной задачи выполняется процедура фаззификации посредством представления нечеткими треугольными переменными ее параметров и решения.

3. Проверяются условия, определяющие существование S- или BF-типов решений нечеткой начальной задачи. Типы нечетких решений определяются типом производной. Если условия выполняются, то BF-решение существует.

4. Если хотя бы одно из условий не выполняется, то BF-решение не существует, и ищется S-решение, которое существует всегда, если существует решение четкой начальной задачи.

5. Вычисляются типы S или BF оптимальных управлений исходной нечеткой оптимизационной задачи.

4. Метод нечеткого динамического программирования

В соответствии с предложенной методикой получим нечеткие решения задачи 2.1, которая является нечеткой задачей Больца. Для этого первоначально, исключив в соотношениях (6) и (7) нижний индекс "н", получим традиционные уравнения. Затем стандартным способом составляется для некоторой функции $W(t, \mathbf{x})$, имеющей непрерывные частные производные, уравнение Беллмана [4]:

$$-\frac{\partial W(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \\ = \min_{\mathbf{u}}\left\{0,5[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\mathbf{u}(t)] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial W(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}[A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)]\right\}. \tag{10}$$

Известно, что если функция $W(t, \mathbf{x})$ существует и удовлетворяет уравнению Беллмана с граничным условием

$$W(t_k, \mathbf{x}_k) = 0,5\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t_k)G\mathbf{x}(t_k), \tag{11}$$

а управление удовлетворяет условию

$$\mathbf{u}^*(t,x) = \\ = \arg\min_{\mathbf{u}}\left\{\left(\frac{\partial W(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}(A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)) + \right. \\ \left. + 0,5[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\mathbf{u}(t)]\right\},$$

то $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) = -R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)\mathbf{x}(t)$ является оптимальным управлением для четкого функционала, соответствующего (7).

Процесс минимизации приводит к начальной задаче для стандартного дифференциального уравнения Риккати в матричной форме:

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t) - \\ - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) + Q(t),\ P(t_k) = G, \tag{12}$$

которое после операции фаззификации, заключающейся в замене четких элементов матриц P, A, B, R и Q на нечеткие, имеет вид

$$-\dot{P}_{\text{н}} = P_{\text{н}}(t)A_{\text{н}}(t) + A_{\text{н}}^{\mathrm{T}}(t)P_{\text{н}}(t) - \\ - P_{\text{н}}(t)B_{\text{н}}(t)R_{\text{н}}^{-1}(t)B_{\text{н}}^{\mathrm{T}}(t)P_{\text{н}}(t) + Q_{\text{н}}(t), \\ P_{\text{н}}(t_k) = G_{\text{н}}, \tag{13}$$

а управление находится из выражения $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) = -R_{\text{н}}^{-1}(t)B_{\text{н}}^{\mathrm{T}}P_{\text{н}}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}(t)$.

В результате решения нечеткого уравнения Риккати (13) могут быть получены S- и BF-типы решений: $P_{\text{н}}^{S}(t)$ или $P_{\text{н}}^{BF}(t)$. Это приводит к соответствующим типам нечеткого оптимального управления $\mathbf{u}_{\text{н}}^{*S}(t)$ или $\mathbf{u}_{\text{н}}^{*BF}(t)$:

$$\mathbf{u}_{\text{н}}^{*S}(t) = -R_{\text{н}}^{-1}(t)B_{\text{н}}^{\mathrm{T}}(t)P_{\text{н}}^{S}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}(t); \\ \mathbf{u}_{\text{н}}^{*BF}(t) = -R_{\text{н}}^{-1}(t)B_{\text{н}}^{\mathrm{T}}(t)P_{\text{н}}^{BF}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}(t),$$

которые справедливы при любом начальном $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{\text{н}0}$.

Пример 1. Синтезировать нечеткий оптимальный регулятор для электродвигателя постоянного тока методом динамического программирования.

Математическая модель ОУ в виде электродвигателя постоянного тока без учета действия противоЭДС получается следующим образом. Нелинейная механическая характеристика $m = m(x)$ в координатах (m, x) аппроксимируется линейной зависимостью

$$m = ax + b,\ x > 0,$$

где m — момент на валу двигателя; x — угловая скорость вращения вала двигателя; a, b — параметры электродвигателя (рис. 2).

Обозначим $m_0 = k_0u_0$ — пусковой момент электродвигателя; u_0 — пусковое напряжение на обмотках электродвигателя (вход); k_0 — коэффициент пропорциональности; x_0 — угловая скорость холостого хода.

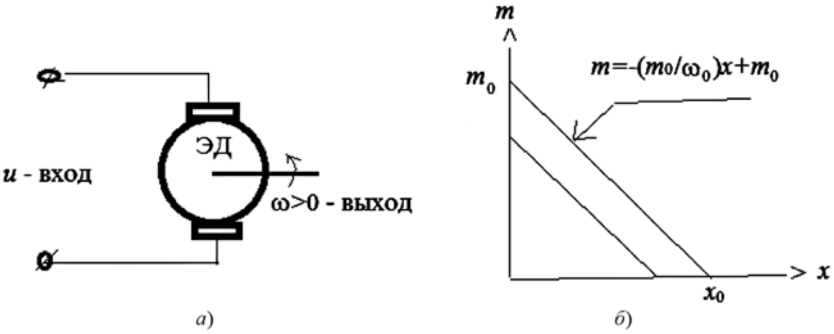

Рис. 2. Схема электродвигателя (*а*) и его механическая характеристика (*б*)

С учетом того, что угловое ускорение вала подчиняется уравнению

$$f\ddot{x} = m,$$

где f — момент инерции вала относительно его оси вращения, получим модель в виде

$$\dot{x} = m/f = m_0/f - m_0 x/(f x_0) = -ax + bu_0,$$

в котором параметры $a = m_0/(fx_0)$, $b = k_0/f$.

Управление скоростью вращения вала электродвигателя осуществляется путем варьирования величины u_0, поэтому после переобозначения $u_0 = u$, полагая, что параметры a, b являются нечеткими треугольными переменными $a_\text{н}$, $b_\text{н}$ и начальное условие также является нечетким $x(t_0) = x_{\text{н}0}$, получим нечеткую модель электродвигателя:

$$\dot{x}_\text{н} = -a_\text{н} x_\text{н} + b_\text{н} u_\text{н},\ x_\text{н}(t_0) = x_{\text{н}0}, \qquad (14)$$

где

$$a_\text{н} = (a_1|a_2|a_3),\ a_1 > 0,\ b_\text{н} = (b_1|b_2|b_3),\ b_1 > 0,$$
$$x_{\text{н}0} = (x_{01}|x_{02}|x_{03}),\ x_{01} > 0.$$

Нечеткость параметров электродвигателя обусловлена значительными колебаниями температуры в обмотках электропривода при его длительной непрерывной эксплуатации. Это приводит к значительным изменениям электромеханической постоянной времени электродвигателя и, значит, к изменениям параметров a и b. Одной из моделей варьирования этих параметров могут служить нечеткие треугольные переменные, что приводит к нечеткой модели (14).

Для упрощения дальнейших вычислений функционал (7) зададим в следующем виде:

$$J = 0{,}5 g_\text{н} x_\text{н}^2(1) + 0{,}5\int_0^1 u_\text{н}^2(t)dt. \qquad (15)$$

В условиях (14) необходимо найти нечеткое оптимальное управление $u_\text{н}^*(t)$, которое минимизирует функционал (15) и существует при любом начальном $x_\text{н}(t_0) = x_{\text{н}0}$.

Для этого первоначально находим традиционное решение задачи (14), (15). Решая уравнение Риккати:

$$\dot{P}(t) = -2aP(t) + b^2P^2(t),\ P(1) = g, \qquad (16)$$

являющееся частным случаем уравнения (12), получим

$$P(t) = \frac{2a}{b^2 - C_k \exp(2at)}, \qquad (17)$$

где $C_k = (b^2P(t_k) - 2a)\exp(-2at_k)/P(t_k)$ — постоянная интегрирования, определяемая при $t_k = 1$ из конечных условий.

При значениях $b = 1$, $a = 1/T$, где T — электромеханическая постоянная времени электродвигателя, уравнения (16) и (17) примут вид

$$\dot{P}(t) = \beta(t, P(t), T) = -2P(t)/T + P^2(t);$$
$$P(t) = \alpha(t, T, g) = \frac{2}{T - (T - 2/g)\exp(2(t-1)/T)},$$

так как $C_k = (1 - 2/Tg)\exp(-2/T)$.

Соответствующее (16) нечеткое уравнение Риккати:

$$\dot{P}_\text{н}(t) = -2a_\text{н} P_\text{н}(t) + b_\text{н}^2 P_\text{н}^2(t),\ P_\text{н}(1) = g_\text{н}, \qquad (18)$$

с параметрами $b_\text{н} = 1_\text{н}$, $a_\text{н} = 1/T_\text{н}$, где $T_\text{н}$ — нечеткая треугольная переменная для электромеханической постоянной времени электродвигателя; $1_\text{н}$ — нечеткая единица, определяющая нечеткий параметр с функцией принадлежностей синглтон (singleton).

Для определения типа решения нечеткой начальной задачи (18) необходимо определить знаки производных β'_P и α'_g. Вычисления дают:

$$\beta'_P = \frac{\partial\beta}{\partial P} = \frac{\partial(-2P(t)/T + P^2(t))}{\partial P} =$$
$$= \begin{cases} -2/T + 2P(t) > 0, \text{ где } P(t) > 1/T; \\ -2/T + 2P(t) \leqslant 0, \text{ где } P(t) \leqslant 1/T; \end{cases}$$

$$\alpha'_g = \frac{\partial\alpha}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g}\left[\frac{2}{T - (T - 2/g)\exp(2(t-1)/T)}\right] =$$
$$= \frac{-4\exp(2(t-1)/T)/g^2}{[T - (T - 2/g)\exp(2(t-1)/T)]^2} < 0.$$

Здесь $P(t)$ определена выше.

Возможны следующие два варианта существования нечетких решений для (18):

- *вариант 1*, когда $P(t) > 1/T$, тогда $\beta'_P > 0$, $\alpha'_g < 0$ и не существует BF-решение для (18), но существует его S-решение. Из уравнения (18) с нечеткими параметрами $a_н = 1/T_н$, $b_н = 1_н$ с функцией принадлежностей синглтон:

$$\dot{P}_н(t) = -2P_н(t)/T_н + P_н^2(t),\ P_н(1) = g_н$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{P}} \\ \dot{\overline{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\underline{T} & 0 \\ 0 & -2/\overline{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P} \\ \overline{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}^2 \\ \overline{P}^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$
$$\underline{P}(1) = \underline{g},\ \overline{P}(1) = \overline{g},$$

где $P_н(t) = (\underline{P}(r,t)|P(t)|\overline{P}(r,t))$, $g_н = (\underline{g}(r)|g|\overline{g}(r))$, $T_н = (\underline{T}(r,t)|T(t)|\overline{T}(r,t))$, $r \in [0;1]$ — нечеткие треугольные переменные, получим $\underline{P}(r,t)$, $\overline{P}(r,t)$ и, следовательно, S-решение:

$$P_н^S(t) = (\underline{P}(r,t), \overline{P}(r,t)|r \in [0;1]),$$

а нечеткое оптимальное управление S-типа будет равно

$$u_н^S(t,x) = -R_н^{-1}(t)B_н^т(t)P_н^S(t)x(t)|_{R_н=1_н, B_н=1_н} =$$
$$= (\underline{u}(r,t) = \min_{r\in[0;\,1]}[-P(r,t)x(t)], \overline{u}(r,t) =$$
$$= \max_{r\in[0;\,1]}[-P(r,t)x(t)]).$$

На рис. 3, *а* (см. вторую сторону обложки) показаны оптимальные траектории и управления для нечеткого регулятора S-типа.

Нечеткий функционал (15) в этом случае равен

$$J_н^S(\mathbf{x}, t_k) = (0,0326;\ 0,0543;\ 0,0719),$$

т. е. значения нечеткого критерия оптимальности лежат в пределах от 0,0326 до 0,0719, что практически совпадает с критерием оптимальности, равным 0,0486, вычисленным для аналогичного примера из работы [28];

- *вариант 2*, когда $P(t) \leqslant 1/T$, тогда $\beta'_P < 0$, $\alpha'_g < 0$, и существует BF-решение:

$$P_н^{BF}(t) = \left[\min_{r\in[0;\,1]} P(r,t), \max_{r\in[0;\,1]} P(r,t)\right]$$

и нечеткое оптимальное управление BF-типа будет равно

$$u_н^{BF}(t,x) = -R_н^{-1}(t)B_н^т(t)P_н^{BF}(t)x(t)|_{R_н=1_н, B_н=1_н} =$$
$$(\underline{u}(r,t) = \min_{r\in[0;1]}[-P(r,t)x(t)], \overline{u}(r,t) = \quad (20)$$
$$= \max_{r\in[0;1]}[-P(r,t)x(t)]).$$

На рис. 3, *б* (см. вторую сторону обложки) показаны оптимальные поверхности $\min_{r\in[0;1]} P(r,t)$ и $\max_{r\in[0;1]} P(r,t)$. Оптимальные траектории и управления для нечеткого регулятора BF-типа с большой точностью совпадают с аналогичными траекториями на рис. 3, *а*.

Нечеткий функционал (15) в этом случае:

$$J_н^{BF}(\mathbf{x}, t_k) = (0,0318;\ 0,0534;\ 0,0708).$$

Момент времени переключения $t_п$ вариантов нечетких решений находится из условия $P(t_п) = 1/T$, откуда после подстановки функции $P(t)$ из (17) и решения соответствующего уравнения относительно $t_п$ будем иметь:

$$t_п = 0,5T\ln|(2-b^2)/(b^2 - 2\exp(-2/T)/(TP(t_k))|,$$
$$P(t_k) \neq 0.$$

Таким образом, рассмотрена и решена задача синтеза нечеткого регулятора методом динамического программирования в виде BF- и S-типов.

5. Нечеткий метод обобщенной работы

При решении задачи синтеза нечеткого оптимального регулятора для классических форм задания функционалов появляется проблема практической реализации алгоритма оптимизации [7].

А. А. Красовским предложен подход к проблеме синтеза оптимальных регуляторов с использованием функционала обобщенной работы, который облегчает решение задачи.

В соответствии с критерием обобщенной работы четкий функционал, соответствующий нечеткому функционалу (8), задается в виде

$$J = 0,5\mathbf{x}^т(t_k)G\mathbf{x}(t_k) + 0,5\int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{x}^т(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \quad (21)$$
$$+ \mathbf{u}^т(t)R(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t, \mathbf{x}(t)))dt,$$

в котором функция $\Psi(t, \mathbf{x}(t))$ находится из соотношения

$$\Psi(t,\mathbf{x}(t)) = \left(\frac{\partial z(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\text{т}} B(t)R^{-1}(t)B^{\text{т}}(t)\frac{\partial z(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (22)$$

где $z(t, \mathbf{x})$ определяется из решения линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial z(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial z(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} A(t)\mathbf{x}(t) - 0,5\mathbf{x}^{\text{т}}(t)Q(t)\mathbf{x}(t) = 0, \quad (23)$$
$$z(t_k,\mathbf{x}) = -0,5\mathbf{x}^{\text{т}}G\mathbf{x}.$$

Оптимальное управление, найденное исходя из критерия обобщенной работы, имеет вид

$$\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}) = R^{-1}(t)B^{\text{т}}(t)\frac{\partial z(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (24)$$

Решение для уравнения (23) ищется методом разделения переменных в следующем виде:

$$z(t,\mathbf{x}) = 0,5\mathbf{x}^{\text{т}}K(t)\mathbf{x}, \quad (25)$$

где $K(t)$ — неизвестная симметричная матрица размером $n \times n$. Если $z(\mathbf{x}, t)$ подставить в (23) и использовать правило

$$\mathbf{x}^{\text{т}}A\mathbf{x} \equiv 0 \Leftrightarrow A + A^{\text{т}} = 0,$$

то получим уравнение для нахождения $K(t)$:

$$\dot{K}(t) = -A^{\text{т}}(t)K(t) - K(t)A(t) + Q(t) \quad \text{при } K(t_k) = -G. \quad (26)$$

Это уравнение, в отличие от уравнения Риккати, является линейным. С учетом соотношений (25), (26) получим из (24) оптимальный регулятор

$$u^*(t,\mathbf{x}) = R^{-1}(t)B^{\text{т}}(t)\frac{\partial z(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = R^{-1}(t)B^{\text{т}}(t)K(t)\mathbf{x}. \quad (27)$$

После операции фаззификации уравнений (26) и (27), заключающейся в замене четких элементов матриц K, A, B, R и Q на нечеткие, получим нечеткую начальную задачу для нахождения $K_{\text{н}}(t)$:

$$\dot{K}_{\text{н}}(t) = -A_{\text{н}}^{\text{т}}(t)K_{\text{н}}(t) - K_{\text{н}}(t)A_{\text{н}}(t) + Q_{\text{н}}(t) \quad \text{при } K_{\text{н}}(t_k) = -G_{\text{н}} \quad (28)$$

и уравнение для нахождения нечеткого оптимального управления

$$u_{\text{н}}^*(t,\mathbf{x}_{\text{н}}) = R_{\text{н}}^{-1}(t)B_{\text{н}}^{\text{т}}(t)K_{\text{н}}(t)\mathbf{x}_{\text{н}}. \quad (29)$$

В результате решения нечеткого линейного уравнения (28) могут быть получены S- и BF-типы решений: $K_{\text{н}}^{S}(t)$ или $K_{\text{н}}^{BF}(t)$, что приведет к соответствующим типам нечеткого оптимального управления $\mathbf{u}_{\text{н}}^{*S}(t,\mathbf{x}_{\text{н}})$ или $\mathbf{u}_{\text{н}}^{*BF}(t,\mathbf{x}_{\text{н}})$ в уравнении (29).

Пример 2. Необходимо синтезировать нечеткий оптимальный регулятор для электродвигателя постоянного тока по критерию обобщенной работы.

Объект управления описывается нечетким уравнением (14), а нечеткий критерий — выражением (15)

Доопределим функционал (15) нечеткой функцией $\Psi_{\text{н}}(t, x(t))$:

$$J_{\text{н}} = 0,5g_{\text{н}}x^2(1) + 0,5\int_0^1 [u_{\text{н}}^2(t) + \Psi_{\text{н}}(t,x(t))]dt. \quad (30)$$

Нечеткая оптимизационная задача (30) в соответствии с методикой ее решения по критерию обобщенной работы дает из (28) следующее уравнение:

$$\dot{K}_{\text{н}}(t) = 2a_{\text{н}}K_{\text{н}}(t) \quad \text{при } K_{\text{н}}(1) = C_{\text{н}} = -1_{\text{н}},\ C_{\text{н}} < 0. \quad (31)$$

Для нечеткой задачи Коши (31) имеем следующие показатели типов решений:

1. $\dot{K} = \alpha(K,a,t) = 2aK \Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial K} = 2a|_{a>0} > 0;$
$\frac{\partial\alpha}{\partial a} = 2K = 2C\mathbf{e}^{2at}|_{C<0} < 0;$

2. $K = \beta(K,C,t) = C\mathbf{e}^{2at} \Rightarrow \frac{\partial\beta}{\partial K} = \mathbf{e}^{2at} > 0;$
$\frac{\partial\beta}{\partial a} = 2tC\mathbf{e}^{2at}|_{C<0} < 0;$

3. $\frac{\partial\alpha}{\partial K}\frac{\partial\beta}{\partial a} < 0.$

Эти показатели указывают на то, что для уравнения (31) при $C<0$ не существует BF-решения, но существует S-решение. Для его нахождения положим:

$$a_{\text{н}} = (a_1|a_2|a_3) = (\underline{a}(r),\overline{a}(r))|r \in [0;1]),\ a_1 > 0,$$
$$C_{\text{н}} = (C_1|C_2|C_3) = (\underline{C}(r),\overline{C}(r))|r \in [0;1]),\ C_3 < 0.$$

Так как $a_{\text{н}} > 0$, $C_{\text{н}} < 0$, то согласно свойствам арифметических операций в банаховом пространстве над нечеткими переменными [31] для $K_{\text{н}}(t)$ имеем

$$K_{\text{н}}(t) = \begin{cases} (a\underline{K}(r,t), a\bar{K}(r,t)) | r \in [0;1], a \geqslant 0; \\ (a\bar{K}(r,t), a\underline{K}(r,t)) | r \in [0;1], a < 0. \end{cases}$$

Это означает, что S-решение находится из уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{K}_{\text{н}}^{S}(t) = a_{\text{н}} K_{\text{н}}^{S}(t),\ \dot{\underline{K}}(r,t) = \underline{a}(r)\underline{K}(r,t), \\ &\underline{K}(r,t_k) = \underline{C}(r); \\ &K_{\text{н}}^{S}(1) = C_{\text{н}} = -1_{\text{н}},\ \dot{\bar{K}}(r,t) = \bar{a}(r)\bar{K}(r,t), \\ &\bar{K}(r,t_k) = \bar{C}(r). \end{aligned} \qquad (32)$$

Нечеткая форма $z_{\text{н}}(\mathbf{x}_{\text{н}}, t)$ из выражения (25) соответственно равна

$$\begin{aligned} &z_{\text{н}}^{S}(t, x_{\text{н}}) = 0,5K_{\text{н}}^{S}(t)x_{\text{н}}^{2} = 0,5(\underline{K}(r,t), \\ &\bar{K}(r,t))x_{\text{н}}^{2} = 0,5(\underline{K}(r,t)\underline{x}^{2}(r), \bar{K}(r,t)\bar{x}^{2}(r) | r \in [0;1]), \end{aligned}$$

а нечеткое оптимальное управление из соотношения (29) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\text{н}}^{S}(t, x_{\text{н}}) &= R_{\text{н}}^{-1}(t)B_{\text{н}}^{\text{т}}(t)K_{\text{н}}^{S}(t)x_{\text{н}}(t)\,\big|_{\substack{R_{\text{н}}=1_{\text{н}} \\ B_{\text{н}}=b_{\text{н}}}} = \\ &= (\underline{b}(r), \bar{b}(r))(\underline{K}(r,t), \bar{K}(r,t))(\underline{x}(r), \bar{x}(r)) = \\ &= (\underline{b}(r)\underline{K}(r,t)\underline{x}(r), \bar{b}(r)\bar{x}(r)\bar{K}(r,t) | r \in [0;1]), \end{aligned}$$

где $\underline{K}(r, t)$ и $\bar{K}(r,t)$ определены из соотношений (32).

Оптимальные траектории и управления для нечеткого регулятора S-типа, синтезированного по критерию обобщенной работы, приведены на рис. 4 (см. вторую сторону обложки).

Нечеткий функционал (15) в этом случае:

$$J_{\text{н}}^{S}(\mathbf{x}, t_k) = (0,0304;\ 0,0481;\ 0,0651).$$

Таким образом, рассмотрена и решена задача синтеза нечеткого регулятора по методу обобщенной работы в виде S-типа.

Заключение

Рассмотрено решение задач оптимального управления в нечеткой постановке, когда появляются начальные задачи (задачи Коши) для нечетких дифференциальных уравнений.

Сформулированы три типа нечетких оптимизационных задач управления. Первая из них — это задача синтеза оптимального нечеткого регулятора с полной обратной связью. Во второй задаче в качестве критерия оптимальности используется нечеткий функционал обобщенной работы. Третья задача формулируется в виде нечеткой оптимизационной задачи на принцип максимума и с нечетким правым концом.

Для первой нечеткой оптимизационной задачи, решаемой методом динамического программирования, получены BF- и S-типы нечеткого оптимального управления. Рассмотрен пример оптимального управления электродвигателем постоянного тока с нечеткими динамическими параметрами и сформулированы условия существования BF- и S-типов управлений.

Для второй оптимизационной задачи решается нечеткое дифференциальное уравнение в частных производных, которое приводит к нечеткой задаче Коши для линейного дифференциального уравнения. На примере управления электродвигателем с нечеткими параметрами показано отсутствие BF-оптимального управления, однако получен оптимальный регулятор S-типа с полной обратной связью.

Список литературы

1. **Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н.** Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 487 с.

2. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 425 с.

3. **Цлаф Л. Я.** Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1969. 192 с.

4. **Сю Д., Мейер А.** Современная теория автоматического управления и ее применения. М.: Машиностроение, 1972. 544 с.

5. **Брайсон А., Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

6. **Иванов В. А., Медведев В. С.** Математические основы теории оптимального и логического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. 599 с.

7. **Справочник** по теории автоматического управления. Под ред. Красовского А. А. М.: Наука, 1987. 712 с.

8. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Физматлит, 1975. 576 с.

9. **Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.** Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Физматлит, 1978. 352 с.

10. **Флеминг У., Ришел Р.** Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.

11. **Методы** робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 743 с.

12. **Buckley J. J., Feuring T.** Introduction to fuzzy partial differential equations // Fuzzy sets and systems. 1999, no. 5, pp. 241—248.

13. **Buckley J. J., Feuring T.** Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. 2000. N. 11. P. 43—54.

14. **Latif Ahmad, Muhammad Farooq, Salem Abdullah.** Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace Transform // Open Access Library Journal Mathematics. 2014. ID on Arxiv:1403.0242.

15. **Venhata Ramu G., Padmanabhan K. and Ananti S**. Optimal control with fuzzy State Space Modeling using Riccati equation // International Journal of Information and Electronics Engineering. 2012. Vol. 2, N. 5. P. 800—805.

16. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems. 1988. N. 96. P. 201—209.

17. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Нечеткие сплайны // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия "Приборостроение". 2012. № 2(87). С. 48—59.

18. **Асмолова Ю. Е., Мочалов И. А.** Элементы нечеткого вариационного исчисления // Вестник Университета дружбы народов. Сер. Инженерные исследования. 2010. № 4. С. 37—44.

19. **Мочалов И. А., Хрисат М. С.** Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. 2014. № 2(210). С. 14—22.

20. **Мочалов И. А. и др.** Нечеткие вероятностно-статистические методы // Приложение к журналу "Информационные технологии". 2003. № 4. 48 с.

21. **Hamideh Masoumi, Behrouz Fathi Vajargah.** Study on behavior of fuzzy Marcov chains // Advances in computer science and its applications. 2012. Vol. 2, N. 2. P. 373—376.

22. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2016. № 1. С. 59—74.

23. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Нейросетевая оценка динамики системы автоматической оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 10. С. 659—663.

24. **Seikkala S.** On the fuzzy initial value problem // Fuzzy sets and systems. 1987. Vol. 24, N. 3. P. 319—330.

25. **Amir Sadeghi, Ahmad Izani Md. Ismail, Ali F.Jameel.** Solving systems of fuzzy differential equation // International Mathematical Forum. 2011. Vol. 6, N. 42. P. 2087—2100.

26. **Parandin N.** Numerical solution of fuzzy differential equations of 2^{nd}-order by Runge-Kutta method // Journal of mathematical extension. 2013. Vol. 7, N. 3. P. 47—62.

27. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.

28. **Пантелеев А. В., Бортаковский А. С.** Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003. 585 с.

29. **Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я.** Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 1 // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 3. С. 171—178.

30. **Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я.** Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 11 // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 4. С. 243—250.

31. **Saadi R., Vaezpour S. M.** Some results on fuzzy Banach spaces // Journal of applied mathematics and computing. 2005. Vol. 17, N. 1. P. 475—484.

N. P. Demenkov, Ph. D., Associate Professor, dnp@bmstu.ru,
E. A. Mikrin, D. Sc., Professor, evgeny.mikrin@bmstu.ru,
I. A. Mochalov, D. Sc., Professor, intelsyst@mail.ru,
Moscow, MSTU named after N. E. Bauman

Fuzzy Optimal Control of Linear Systems. Part 1. Positional Control

Single-point boundary tasks are considered in part 1 for the fuzzy nonlinear differential equations like Rikkati and for the fuzzy linear differential equations. The fuzzy nonlinear differential equations arise at the solution of problems of synthesis of optimal linear regulators by method of dynamic programming. The fuzzy linear differential equations appear at synthesis of regulators by criterion of the generalized work. Three types of fuzzy optimization control problems are formulated. The first of these is the problem of synthesizing an optimal fuzzy regulator with full feedback. In the second task, the fuzzy functional of the generalized work is used as the optimality criterion. The third problem is formulated as a fuzzy optimization problem on the maximum principle and with a fuzzy right end. For the first fuzzy optimization problem solved by the dynamic programming method, Buckley-Feuring and Seikkala types of fuzzy optimal control are obtained. An example of optimal control of a DC motor with fuzzy dynamic parameters is considered, and conditions for the existence of Buckley-Feuring and Seikkala types of controls are formulated. For the second optimization problem, a fuzzy partial differential equation is solved, which leads to a fuzzy Cauchy problem for a linear differential equation. By the example of motor control with fuzzy parameters, the absence of a Buckley-Feuring optimal control is shown, however, an optimal Seikkala type controller with full feedback is obtained.

Keywords: *Fuzzy boundary value problems, synthesis of fuzzy optimal controllers, fuzzy differential equations, membership function, fuzzy initial problem, fuzzy systems of linear algebraic equations, maximum principle, dynamic programming, criterion of generalized work*

DOI: 10.17587/it.25.259-270

References

1. **Van'ko V. I., Ermoshina O. V., Kuvyrkin G. N.** *Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* (Calculus of variations and optimal control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. He. Baumana, 2006, 487 p. (in Russian).

2. **Ehl'sgol'c L. Eh.** *Differencial'nye uravneniya i variacionnoe ischislenie* (Differential equations and calculus of variations), Moscow, Nauka, 1969, 425 p. (in Russian).

3. **Claf L. Ya.** *Variacionnoe ischislenie i integral'nye uravneniya* (Calculus of variations and integral equations), Moscow, Nauka, 1969, 192 p. (in Russian).

4. **Syu D., Mejer A.** *Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i ee primeneniya* (Modern theory of automatic control and its application), Moscow, Mashinostroenie, 1972, 544 p. (in Russian).

5. **Brajson A., Ho Yu-Shi.** *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* (Applied theory of optimal control), Moscow, Mir, 1972, 544p. (in Russian).

6. **Ivanov V. A., Medvedev V. S.** *Matematicheskie osnovy teorii optimal'nogo i logicheskogo upravleniya* (Mathematical foundations of the theory of optimal and logical control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Eh. Baumana, 2011, 599 p. (in Russian).

7. **Krasovskii A. A.** ed. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Handbook of automatic control theory), Moscow, Nauka, 1987, 712 p. (in Russian)

8. **Moiseev N. N.** *Ehlementy teorii optimal'nyh system* (Elements of the theory of optimal systems), Moscow, Fizmatlit, 1975, 576 p. (in Russian).

9. **Chernous'ko F. L., Kolmanovskij V. B.** *Optimal'noe upravlenie pri sluchajnyh vozmushcheniyah* (Optimal control for random disturbances), Moscow, Fizmatlit, 1978, 352 p. (in Russian).

10. **Fleming U., Rishel R.** *Optimal'noe upravlenie determinirovannymi i stohasticheskimi sistemami* (Optimal control of deterministic and stochastic systems), Moscow, Mir, 1978, 316 p. (in Russian).

11. **Pupkov K. A., Egupov N. D.** ed. *Metody robastnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya* (Robust, neuro-fuzzy and adaptive control methods). Moscow, Publishing house of MGTU after name N. Eh. Bauman, 2001, 743 p. (in Russian).

12. **Buckley J. J., Feuring T.** Introduction to fuzzy partial differential equations, *Fuzzy sets and systems*, 1999, no. 5, pp. 241—248.

13. **Buckley J. J., Feuring T.** Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, no. 11, pp. 43—54.

14. **Latif Ahmad, Muhammad Farooq, Salem Abdullah.** Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace Transform, *Open Access Library Journal Mathematics*, 2014, ID on Arxiv:1403.0242.

15. **Venhata Ramu G., Padmanabhan K., Ananti S.** Optimal control with fuzzy State Space Modeling using Riccati equation, *International Journal of Information and Electronics Engineering,* 2012, vol. 2, no. 5, pp. 800—805.

16. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 1988, no. 96, pp. 201—209.

17. **Demenkov N. P., Mochalov I. A.** *Nechetkie splajny* (Fuzzy Splines), *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.EH.Baumana. Seriya "Priborostroenie*", 2012, no. 2(87), pp. 48—59 (in Russian).

18. **Asmolova Yu. E., Mochalov I. A**. *Ehlementy nechetkogo variacionnogo ischisleniya* (Elements of fuzzy variational calculus), *Vestnik Universiteta Druzhby narodov, s. Inzhenernye issledovaniya*, 2010, no. 4, pp. 37—44 (in Russian).

19. **Mochalov I. A., Hrisat M. S.** *Ocenivanie parametrov modeli po nechetkim sluchajnym dannym* (Elements of fuzzy variational calculus*), Informacionnye Tekhnologii*, 2014, no. 2(210), pp. 14—22 (in Russian).

20. **Mochalov I. A.** et al. *Nechetkie veroyatnostno-statisticheskie metody* (Fuzzy probabilistic statistical methods), *Prilozhenie, Informacionnye Tekhnologii*, 2003, no. 4, 48 p. (in Russian).

21. **Hamideh Masoumi, Behrouz FathiVajargah.** Study on behavior of fuzzy Marcov chains*, Advances in computer science and its applications*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 373—376.

22. **Demenkov N. P., Mochalov I. A.** *Dinamika nechetkoj sistemy avtomaticheskoj optimizacii* (The dynamics of a fuzzy automatic optimization system), *Vestnik MGTU im. N. Eh. Baumana. Ser. "Priborostroenie",* 2016, no. 1, pp. 59—74 (in Russian).

23. **Demenkov N. P., Mochalov I. A**. *Nejrosetevaya ocenka dinamiki sistemy avtomaticheskoj optimizacii* (Neural network assessment of the automatic optimization system), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 10, pp. 659—663 (in Russian).

24. **Seikkala S.** On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, vol.24, no.3, pp.319-330.

25. **Amir Sadeghi, Ahmad Izani Md. Ismail and Ali F. Jameel.** Solving systems of fuzzy differential equation, *International Mathematical Forum*, 2011, no. 42, vol. 6, pp. 2087—2100.

26. **Parandin N.** Numerical solution of fuzzy differential equations of 2^{nd}-order by Runge-Kutta method, *Journal of Mathematical Extension*, 2013, vol. 7, no. 3, pp. 47—62.

27. **Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* (Mathematical theory of designing control systems), Moscow, Vysshaya shkola, 2003, 615 p. (in Russian).

28. **Panteleev A. V., Bortakovskij A. S.** *Teoriya upravleniya v primerah i zadachah* (Theory of control in examples and problems), Moscow, Vysshaya shkola, 2003, 585 p. (in Russian).

29. **Mochalov I. A., Hrisat M. S., Shihab Eddin M. Ya.** *Nechetkie differencial'nye uravneniya v zadachah upravleniya. Chast' 1* (Fuzzy differential equations in control problems. Part 1), *Informacionnye Tekhnologii*, 2015, no. 3, vol. 21, pp. 171—178 (in Russian).

30. **Mochalov I. A., Hrisat M. S., Shihab Eddin M. Ya.** *Nechetkie differencial'nye uravneniya v zadachah upravleniya. Chast' 11* (Fuzzy differential equations in control problems. Part 11), *Informacionnye Tekhnologii*, 2015, no. 4, vol. 21, pp. 243—250 (in Russian).

31. **Saadi R., Vaezpour S. M.** Some results on fuzzy Banach spaces, *Journal of applied mathematics and computing,* 2005, vol. 17, no. 1, pp. 475—484.