

7. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A. *Matematicheskaya model trafika s tyazhelohlostnym raspredeleniem na osnove sistemy massovogo obsluzhivaniya $H_2/M/1$* [Mathematical model of traffic with heavy-tailed distribution based on the queuing system $H_2/M/1$], *Informacionnyye Tekhnologii*, 2014, no. 3 pp. 36–41 (in Russian).

8. Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (accessed: 26.02.2016).

9. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals, *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.

10. Aliev T. I. *Osnovy modelirovaniya diskretnykh system* (Fundamentals of discrete systems modeling), SPb., Publishing house of SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (in Russian).

11. Aliev T. I. *Approksimatsiya veroyatnostnykh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya* [Approximation of probability distributions in queuing models], *Nauchno-Tekhnicheskij Vestnik Informacionnykh Tekhnologij, Mekhaniki i Optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93 (in Russian).

12. Tarasov V. N., Bahareva N. F. *Obobshchennaya dvumernaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1* [A generalized two-dimensional diffusion queuing model of the GI/G/1 type], *Telekommunikacii*, 2009, no. 7, pp. 2–8 (in Russian).

УДК 004:656.131

DOI: 10.17587/it.25.210-215

Г. Д. Антониади, аспирант, george@antoniadi.com, В. О. Архипов, аспирант, arvlol@yandex.ru,
А. А. Цуприков, доцент, tsouprikov@mail.ru,

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Кубанский государственный технологический университет"

Математическая модель задержки автотранспорта на регулируемом перекрестке

Проведен сравнительный анализ моделей задержки Бэкманна и Вебстера, выявлены их недостатки для регулирования сигналов светофора. Рассмотрена новая модель задержки автотранспорта на регулируемом перекрестке, проанализирован физический смысл составляющих модели, определена значимость (вес, количественный вклад) параметров в значение задержки транспорта при запрещающем сигнале светофора с образованием очереди.

Ключевые слова: модель задержки проезда, светофор, интенсивность проезда, очередь, перекресток, значимость параметров

Введение

Для описания задержки автотранспорта перед перекрестком при светофорном регулировании движения разработано множество математических моделей, которые можно разделить на две группы:

- "точные" модели, описывающие текущую ситуацию на дороге в данный момент времени (модели М. Дж. Бэкманна, Дж. Н. Дарроча, В. Р. МакНейла и др.);
- "приближенные" модели, описывающие стационарные условия движения с аппроксимацией к реальной ситуации на дороге (модели А. Дж. Миллера, Дж. Ф. Ньюелла и др.).

Представляет интерес проведение сравнительного анализа основных моделей задержки транспорта, проверка их достоверности в реальных дорожных условиях проезда перекрестка и определение количественных значений факторов, влияющих на задержку.

Постановка задачи

Основной задачей исследования является анализ, рассмотрение составных частей и элементов базовых моделей задержки М. Дж. Бэкманна и Ф. В. Вебстера, проверка их достоверности, разработка новой модели времени задержки автотранспорта на регулируемом перекрестке, ее сравнительный анализ с базовыми моделями, а также определение значимости (вклада) каждого параметра в значение задержки.

Методы решения задачи исследования

Анализ основных моделей выполнен на основе вычисления с их помощью транспортных условий реального перекрестка в течение цикла работы светофора, достоверность проверялась по теории размерности. Количественный вклад параметров модели в значение задержки определен методом относительных погрешностей.

Прикладная интерпретация и иллюстрация результатов исследования

Впервые "точная" модель оценки задержки транспортных средств (ТС) при жестком светофорном регулировании была разработана М. Дж. Бэкманном [1]. В ней принят биномиальный характер прибытия ТС к перекрестку (автомобили прибывают к перекрестку с одинаковой вероятностью) и детерминированный характер регулирования сигналов светофора:

$$d = \frac{c-g}{c(1-q/s)} \left[\frac{q_0}{q} + \frac{c-g+1}{2} \right], \quad (1)$$

где d — средняя задержка одного ТС за цикл, с; c — длина цикла регулирования, с; g — эффективная длительность зеленого сигнала, с; q — интенсивность прибытия ТС, число автомобилей/с (далее — авт/с); s — интенсивность разъезда из очереди, число автомобилей/с; q_0 — остаточная очередь, число автомобилей (далее — авт.).

Модель отвечает теории размерности, так как левая и правая части функции (1) имеют одинаковые единицы измерения — [секунда]. Это означает, что физические процессы, описываемые моделью, достоверны.

Результаты моделирования для реальных условий при $c = 120$ с, $g = 0...120$ с, $q = 2$ авт/с, $s = 3$ авт/с, $q_0 = 1...11$ авт. выявили следующие недостатки модели:

1. Для работы модели интенсивность разъезда s всегда должна быть больше интенсивности прибытия q , иначе задержка d становится отрицательной. На практике число прибывающих автомобилей может быть больше разъезжающих во время зеленого сигнала.

2. Для модели не существенны интенсивности прибытия ТС к перекрестку и их разъезда, количественные значения q и s не влияют на d , они могут быть большими (например, 200 и 300) или маленькими (например, 2 и 3) — задержка d почти не меняется, главное — их отношение должно быть меньше 1.

3. Очередь q_0 очень слабо влияет на задержку, например, изменение q_0 с 10 до 10 000 машин, т. е. в 1000 раз, или на 100 000 %, приводит к изменению d с 367,46 с до 358,59 с, т. е. на 9 с, или на 0,025 = 2,5 %.

Наиболее широко распространенная "приближенная" модель задержки автотранспорта перед перекрестком Ф. В. Вебстера [2] основана на сочетании теоретического анализа и численного моделирования:

$$d = \frac{c(1-g/c)^2}{2[1-(g/c)x]} + \frac{x^2}{2q(1-x)} - 0,65 \left(\frac{c}{q^2} \right)^{1/3} x^{2+5\left(\frac{g}{c}\right)}, \quad (2)$$

где x — степень насыщения движения (уровень загрузки подхода), авт.

Модель (2) содержит три составляющих. Первая определяет задержку при условии стационарности прибытия транспортного потока, вторая — так называемая "случайная задержка" — представляет случайную составляющую процесса. Она предполагает пуассоновский процесс прибытия ТС и постоянную интенсивность их разъезда, соответствующую пропускной способности перекрестка. Третья составляющая корректирует время задержки и составляет около 2 % от суммы первых двух, поэтому ее можно принять за коэффициент, равный 2.

Модель в целом отвечает теории размерности, поскольку только корректирующая часть функции (2), которой можно пренебречь, имеет размерность [авт^{4/3}].

Моделирование при реальных параметрах работы перекрестка: $c = 120$ с, $g = 0...120$ с, $q = 3$ авт/с, $x = 0,1...0,999$ авт. выявило следующие недостатки модели:

1. Вторая и третья составляющие модели Вебстера практически не влияют на длительность задержки автотранспорта перед перекрестком, их доля составляет около 1...1,7 % от первой составляющей.

2. Варьирование q и x в широких пределах практически не изменяет значение d .

Общим недостатком как для точных, так и для приближенных моделей, в том числе рассмотренных здесь, является тот факт, что они не учитывают значимость очереди ТС для задержки как основного параметра регулирования — он либо отсутствует в модели, либо оказывает второстепенное влияние на управление светофором. Между тем очередь, которая накапливается перед перекрестком, является основной причиной необходимости управления светофором.

Для разработки новой модели задержки и ее применения в системе управления рассмотрим общие правила регулирования работы перекрестка.

Задержка ТС прямо пропорциональна интенсивности прибытия машин к светофору и обратно пропорциональна интенсивности их разъезда при зеленом сигнале.

Длительность разрешающего сигнала светофора должна определяться двумя правилами.

1. Если интенсивность прибытия ТС меньше или равна пропускной способности перекрестка, то время разрешающего сигнала также должно соответствовать интенсивности прибытия и поддерживаться до конца разъезда очереди. При этом пропускная способность должна соответствовать интенсивности разъезда очереди, что регулируется допустимой скоростью проезда через перекресток.

Согласно работе [3] пропускная способность отдельного перекрестка равна

$$P = Q \frac{V}{D} \rho \text{ [авт/ч]},$$

где V — разрешенная скорость движения на перекрестке, км/ч; D — соответствующий этой скорости интервал между машинами, м; Q — отношение времени разрешенного движения в рассматриваемом направлении к полному периоду работы перекрестка; ρ — число полос движения в одном направлении, шт.

Там же указано, что "при обычном ускорении при трогании с места автомобилей $a = 1,8 \text{ м/с}^2$ для пересечения улицы шириной 40 м необходимо 6,65 с, что дает на границе улицы скорость $V = 1,8 \cdot 6,65 = 12 \text{ м/с} = 43 \text{ км/ч}$ — скорость, совершенно недопустимая на перекрестке по соображениям безопасности пешеходов. Поэтому режим пересечения перекрестков должен быть установлен на скорости порядка 10 км/ч, что соответствует пересечению улицы машиной за 14 с.

Типовыми значениями Q для перекрестка двух улиц являются [3]:

- при однополосном движении — 0,40;
- при двухполосном движении — 0,38;
- при трехполосном движении — 0,37.

На практике при отсутствии на перекрестке препятствий в виде объезда, сужений или сворачивающей машины водитель набирает скорость и проходит дистанцию до конца пересечения и следует далее по маршруту в обычном режиме, т. е. стремится быстро набрать разрешенную скорость 60 км/ч, не заботясь о пешеходах, поскольку для них в это время действует запрещенный сигнал.

Поэтому средняя скорость проезда перекрестка зависит только от длины перекрестка и составляет 25...40 км/ч.

Тогда интенсивность разъезда очереди s (пропускная способность перекрестка P), рассчитанная по формуле (3) для $Q = 0,40$, $D = 2$ и $\rho = 2$:

- при $V = 10 \text{ км/ч}$ составит $s = 1,11 \text{ авт/с}$;
- при $V = 30 \text{ км/ч}$ составит $s = 3,33 \text{ авт/с}$;
- при $V = 60 \text{ км/ч}$ составит $s = 6,67 \text{ авт/с}$.

2. Если интенсивность прибытия превышает пропускные возможности дороги, то нужно переходить на жесткий режим переключения сигналов, т. е. включать сигналы на время, пропорциональное числу полос движения на пересекающихся направлениях, поскольку от полосности дороги зависит число автомобилей на ней. Если на некоторых из полос прибытие еще не достигло предела пропускания (например, полоса с поворотом направо), то время зеленого сигнала (зеленая стрелка вправо) регулируется (уменьшается) только на направлении этих полос (полосы), а на других полосах, где предел превышен, используется жесткий режим.

Очередь возникает, когда пропускная способность перекрестка становится меньше интенсивности прибытия транспорта.

Предлагаемая модель задержки ТС основана на физическом смысле процессов при проезде перекрестка, отвечает теории размерности и имеет вид

$$d = \frac{(c - g) q q_0}{g s^2}. \quad (3)$$

Если рассматривать работу перекрестка в течение 1 с, то интенсивность (число автомобилей в секунду) будет соответствовать просто числу машин, например, q машин для прибывающих и s — для отъезжающих.

Тогда составляющая числителя $(c - g)q$ — это время красного сигнала светофора, за которое к перекрестку прибывает q автомобилей с интенсивностью q , т. е. время задержки d прямо пропорционально времени запрещающего сигнала и интенсивности прибытия ТС.

Выражение sg в знаменателе отражает разъезд s автомобилей с интенсивностью s за время зеленого сигнала g , т. е. задержка d обратно пропорционально интенсивности убытия транспорта и времени разрешающего сигнала.

Кроме того, время задержки напрямую зависит от длины очереди q_0 , поэтому дробь q_0/s отражает число машин в очереди, приведенное к интенсивности разъезда s .

Расчеты задержек ТС по моделям (1)—(3) для одинаковых условий проезда перекрестка при цикле $c = 120$ с реальными значениями s , q и q_0 приведены в табл. 1 (для модели Бэкманна значения s и q приняты равными 3 и 2 соответственно).

Из табл. 1 следует, что задержка ТС имеет степенной характер, причем задержка резко возрастает, когда интенсивность прибытия превышает пропускную способность перекрестка.

Время задержки

d , с	d , с Вебстер	d , с Бэкманн	c , с	g , с	s , авт/с	q , авт/с	q_0 , авт	x , авт
0,00	0,01	0,01	120	120	2	3	1	0,1
0,17	0,74	2,10	120	108	2	3	2	0,2
0,56	3,18	7,80	120	96	2	3	3	0,3
1,29	7,53	17,10	120	84	2	3	4	0,4
2,50	13,75	30,00	120	72	2	3	5	0,5
4,50	21,42	46,50	120	60	2	3	6	0,6
7,88	29,90	66,60	120	48	2	3	7	0,7
14,00	38,51	90,30	120	36	2	3	8	0,8
27,00	47,06	117,60	120	24	2	3	9	0,9
67,50	68,77	148,50	120	12	2	3	10	0,99
189,75	91,47	183,00	120	5	2	3	11	0,995

На рис. 1 приведены графики задержки ТС для моделей (3), Вебстера и Бэкманна, построенные согласно данным табл. 1. Кривые показывают, что все они носят степенной характер, но с разными углами наклона, при этом сложно отдать предпочтение какой-либо модели, так как кривые построены только для заданных в табл. 1, т. е. фиксированных значений s , q , q_0 и x , а на практике подъезд, разъезд ТС, очередь и загрузка подхода (плотность автомобилей на полосе) могут варьироваться, при наличии очереди интенсивность разъезда может быть больше интенсивности подъезда (что для модели Бэкманна не приемлемо) и т. п.

Тем не менее для модели (3) характерно значительное увеличение времени задержки при достижении интенсивностью прибытия ТС уровня пропускной способности перекрестка. Это больше соответствует реальным условиям

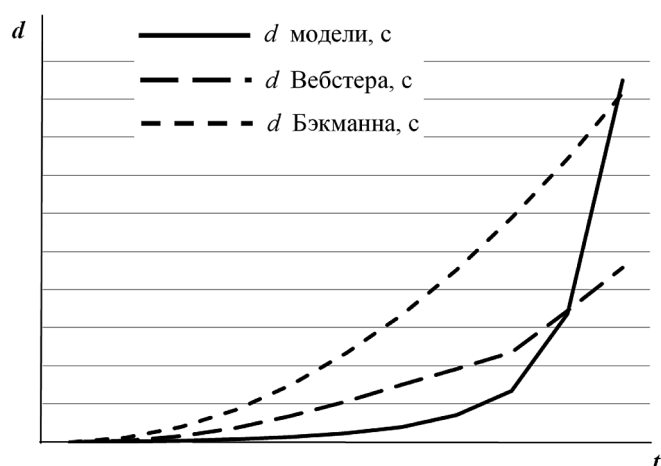


Рис. 1. Зависимость времени задержки ТС от параметров модели

на дороге — интенсивность разъезда уменьшается и образуется очередь ТС.

Для моделей (3) характерно резкое увеличение времени задержки при достижении очередью критического значения — когда интенсивность прибытия становится больше пропускной способности перекрестка, в модели Ф. В. Вебстера эта закономерность выражена гораздо слабее.

Для более полного определения степени влияния аргументов функции $d = f(c, g, q, q_0)$ на ее значение проведем анализ чувствительности функции (3) к изменению аргументов — параметров c , g , q , q_0 .

В работе [4] разработан метод определения количественного вклада (значимости, ценности, веса) каждого параметра дифференцируемой функции $u = f(x, y, z, \dots)$ в значение функции u .

Метод основан на связи относительных погрешностей функции δu и ее параметров δx , δy , δz , ..., которая имеет вид:

$$\delta u = \frac{1}{u} \left(x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \delta x + y \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \delta y + z \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \delta z + \dots \right)$$

или

$$\delta u = K_x \delta x + K_y \delta y + K_z \delta z + \dots, \quad (4)$$

где $K_x = \frac{x}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|$; $K_y = \frac{y}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$; $K_z = \frac{z}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$; ... — ко-

эффициенты влияния (значимости) соответствующих аргументов x , y , z , ... на функцию u .

При задании всем аргументам x , y , z , ... одинаковой единичной погрешности ($\delta_i = 1\%$) можно определить, на сколько процентов изменится величина δu при однопроцентном изменении каждого параметра.

Таблица 2

Вклад аргументов s , g , q и q_0 в значение функции d

t, c	$s, \%$	$c, \%$	$g, \%$	$q, \%$	$q_0, \%$
1	0,37	49,59	49,36	0,41	0,26
12	3,98	44,82	42,33	4,48	4,39
24	7,20	40,53	36,02	8,11	8,14
36	9,88	37,06	30,88	11,12	11,06
48	12,12	34,09	26,52	13,64	13,64
60	14,04	31,58	22,81	15,79	15,79
72	15,69	29,41	19,61	17,65	17,65
84	17,13	27,52	16,82	19,27	19,27
96	18,39	25,86	14,37	20,69	20,69
108	19,51	24,39	12,20	21,95	21,95
120	20,11	23,61	11,04	22,62	22,62
Среднее	12,58	33,50	25,63	14,16	14,13

После определения частных производных функции d по параметрам s , g , q и q_0 вычисляются коэффициенты значимости K_i по каждому параметру в различные моменты времени сигнала светофора и процентный вклад каждого параметра в значение задержки d .

Результаты расчетов слагаемых $K_i \delta_i$ уравнения чувствительности (4) для каждого параметра приведены в табл. 2. Из нее следует, что по вкладу в значение задержки d параметры расположились в следующем порядке:

- время цикла s — 33,5 %;
- длительность разрешающего сигнала светофора g — 25,63 %;
- интенсивность прибытия q — 14,16 %;
- очередь q_0 — 14,13 %;
- интенсивность разъезда s — 12,58 %.

Полученные значения соответствуют реальной логике работы перекрестка. Время цикла

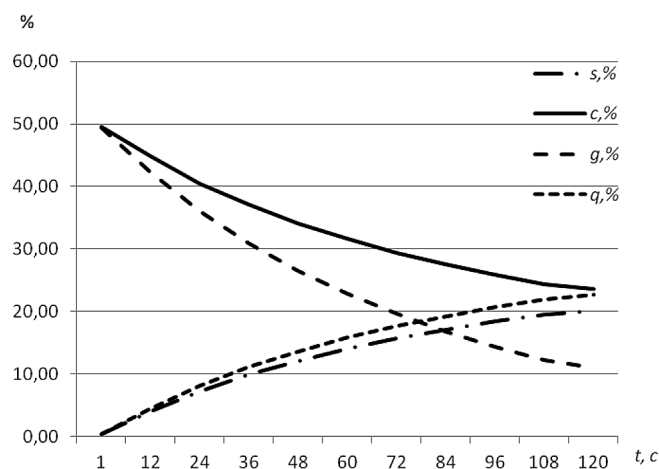


Рис. 2. Значимость параметров модели для задержки ТС

является эквивалентом длительности запрещающего сигнала светофора $r = c - g$, поэтому его влияние на задержку ТС — самое значительное. Длительность зеленого сигнала задает разъезд ТС, поэтому его вклад в задержку также существенен. Это же относится и к другим параметрам. Следует отметить, что значимости параметров имеют один порядок — от 12 до 26, т. е. в принципе являются равнозначными для времени задержки ТС на перекрестке.

По данным табл. 2 построены графики вклада каждого параметра в задержку (рис. 2), который показывает, что с течением времени значимости сигналов светофора уменьшаются, а значимости параметров передвижения (очередь и интенсивности прибытия/убытия) увеличиваются (кривые для интенсивности q и очереди q_0 практически совпадают, поэтому на рис. 2 представлены одной линией q).

Заключение

Проведенное исследование выявило следующие моменты:

1. Недостатком модели Бэкманна является тот факт, что интенсивность разъезда автомобилей должна быть больше интенсивности их прибытия к стоп-линии, что на практике не всегда выполняется.

2. Для моделей Бэкманна и Вебстера количественные значения интенсивностей подъезда, разъезда и очереди (плотности) ТС почти не влияют на задержку d .

3. Вторая и третья составляющие модели Вебстера практически не влияют на длительность задержки автотранспорта перед перекрестком, их доля составляет около 1...1,7 % от первой составляющей.

4. Все модели соответствуют теории размерности, т. е. достоверно с физической точки зрения описывают процессы на перекрестке.

5. Предложена новая модель задержки, для которой наиболее значимым параметром функции задержки является время цикла (длительность запрещающего сигнала светофора), его вклад в задержку составляет 33,5 %, на втором месте идет длительность зеленого сигнала — 25,63 %, далее идут интенсивность прибытия и очередь — 14,16 % и 14,13 %, а также интенсивность разъезда — 12,58 %.

6. Для модели (3) и модели Вебстера характерно значительное увеличение функции задержки при достижении интенсивностью прибытия ТС уровня пропускной способности перекрестка.

7. В течение цикла регулирования влияние на задержку длительности сигналов светофора уменьшается, а влияние очереди и интенсивностей прибытия/разъезда автомобилей увеличивается.

8. Новая модель и изменение ее параметров в ходе цикла работы светофора соответствуют реальным состояниям дорожного движения с большей аппроксимацией, чем базовые модели задержки.

Список литературы

1. Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B. Studies in the Economics of Transportation. Yale University Press, 1956.
2. Webster F. V. Traffic Signal Settings. Road Research Laboratory Technical Paper No. 39, HMSO. London, 1958.
3. Пропускная способность перекрестка. URL: <http://waksman.ru/Russian/Vehi/shel/39.htm> (дата обращения: 2013-04-17).
4. Цуприков А. А. Чувствительность показателей механического бурения к изменению параметров управления // Сборник материалов НТВ СПбГПУ. 2009. № 3 (80). С. 4–7 (in Russian).

G. D. Antoniadis, Graduate Student, george@antoniadis.com,

V. O. Arkhipov, Graduate Student, arvlol@yandex.ru,

A. A. Tsouprikov, Ph. D., Associate Professor, tsouprikov@mail.ru,

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Kuban State Technological University"

Mathematical Model of Transport Delay at the Crossroads

Comparative analysis of delay models Beckmann and Webster, the calculated values of the transport delay for the real traffic conditions at different durations of traffic signals, the intensities of arrival and travel of cars, size of a queue before the stop line, their shortcomings are revealed to control the traffic signals. It is found that for the Beckmann model, the intensity of the separation should be greater than the intensity of the arrival, and the quantitative values of the arrival/departure intensities and the size of the queue slightly affect the delay time.

The basic rules for choosing the duration of the resolving signal of the traffic light depending on the intensity of the transport arrival are considered: if it is less than or equal to the capacity of the intersection, the time of the green signal should correspond to the intensity of arrival and be maintained until the end of the queue, if it exceeds, the traffic light switches the signals in "hard mode" — for a time proportional to the number of bands on the intersecting directions.

A new model of vehicle delay at a controlled intersection is considered, the physical meaning of the model components is analyzed, the significance (weight, quantitative contribution) of the parameters to the value of transport delay at the prohibiting signal of a traffic light with the formation of a queue is determined. The most significant parameter of the function of the delay is the cycle time (the duration of a forbidding signal of a traffic light) with the contribution to the delay of 33.5 %, followed by the duration of green signal of 25.63 %, the intensity of arrival and the queue — 14,16 % and 14,13 %, the intensity of the separation of 12.58 %. The model takes into account the achievement of approaching transport limit — the capacity of the intersection. The verification of the considered models for compliance with the theory of dimension is carried out.

Keywords: model of travel delays, traffic light, intensity of travel, turn intersection, the significance of the parameters

DOI: 10.17587/it.25.210-215

References

1. Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B. Studies in the Economics of Transportation, Yale University Press, 1956.
2. Webster F. V. Traffic Signal Settings. Road Research Laboratory Technical Paper No. 39, HMSO, London, 1958.

3. *Propusknaya sposobnost' perekryostka* (The capacity of the intersection), available at: <http://waksman.ru/Russian/Vehi/shel/39.htm> (date of access: 2013-04-17).

4. Tsouprikov A. A. *Chuvstvitel'nost' pokazatelej mekhanicheskogo bureniya k izmeneniyu parametrov upravleniya* (The sensitivity of the mechanical drilling to the change of control parameters), *Collection of materials of NTV SPbSTU*, 2009, no. 3 (80), pp. 4–7 (in Russian).