

**В. Н. Тарасов**, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: veniamin\_tarasov@mail.ru,

**Н. Ф. Бахарева**, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: nadin1956\_04@inbox.ru,

**Када Отхмане**, аспирант,

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

## Математическая модель телетрафика на основе системы $HE_2/M/1$

Статья посвящена исследованию системы массового обслуживания (СМО)  $HE_2/M/1$  типа  $G/M/1$  с гиперэрланговским входным распределением второго порядка и экспоненциальным законом времени обслуживания в целях получения решения для среднего времени ожидания требований в очереди в случае стационарного режима. Для этого использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов. Оказывается, что гиперэрланговский закон распределения  $HE_2$ , как и гиперэкспоненциальный  $H_2$ , являющийся трехпараметрическим, может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами. Эту характерную особенность гиперэрланговского закона распределения необходимо использовать в теории массового обслуживания. Выбор такого закона распределения вероятностей обусловлен тем, что он является наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку его коэффициент вариации  $c_\tau \geq 1/\sqrt{2}$  и охватывает более широкий диапазон, чем гиперэкспоненциальное распределение, для которого  $c_\tau \geq 1$ . Определение главной характеристики СМО — среднего времени ожидания — является актуальной задачей в теории телетрафика при анализе трафика, чувствительного к задержкам. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для СМО  $HE_2/M/1$  позволяет получить решение в замкнутой форме.

**Ключевые слова:** гиперэрланговский закон распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа

### Введение

Настоящая статья посвящена анализу систем массового обслуживания (СМО)  $HE_2/M/1$  типа  $G/M/1$  с произвольными законами распределений входного потока требований в систему, для которых в общем случае не может быть найдено решение для главной характеристики — среднего времени ожидания требований в очереди. Поэтому системы типа  $G/M/1$  могут быть исследованы только при конкретных законах распределений входного потока [2–5].

В теории телетрафика по среднему времени ожидания, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО.

В исследовании систем  $G/G/1$  и  $G/M/1$  важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. Обозначим

- $W(y)$  — функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди,
- $C(u) = P(\tilde{u} < u)$  — ФРВ случайной величины  $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$ , где, в свою очередь,  $\tilde{x}$  — случайное время обслуживания требования,  $\tilde{t}$  — случайная величина — интервал времени между поступлениями требований.

Тогда одна из форм интегрального уравнения Линдли [2–5] имеет вид

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u)dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

В научной литературе нет данных по рассматриваемой системе, и, видимо, это связано с достаточной сложностью гиперэрланговского закона распределения. К тому же гиперэрланговский закон распределения порядка  $R$  является наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку его коэффициент вариации  $c_\tau > 0$  [10, 11].

### Постановка задачи

Ставится задача определения среднего времени ожидания в системе  $HE_2/M/1$  на основе классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) для данной системы в замкнутой форме.

**Решение задачи.** Для системы  $HE_2/M/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 te^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 te^{-2\lambda_2 t}; \quad (1)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (2)$$

Использование классического метода спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в работах [1, 6, 7], позволит определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания.

Согласно методу спектрального разложения нам для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо найти следующее спектральное разложение:  $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  — некоторые рациональные функции от  $s$ , а  $A^*(s)$ ,  $B^*(s)$  — преобразования Лапласа функций плотности (1) и (2) соответственно.

Преобразования Лапласа функций (1) и (2) имеют следующий вид:

$$A^*(s) = p \left( \frac{2\lambda_1}{s + 2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{s + 2\lambda_2} \right)^2;$$

$$B^*(s) = \frac{\mu}{s + \mu}.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE<sub>2</sub>/M/1  $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right) - 1.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представим в виде

$$\begin{aligned} & \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{p(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1^2\lambda_2s + 4\lambda_1^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} + \\ & + \frac{(1-p)(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1\lambda_2^2s + 4\lambda_2^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} = \\ & = \frac{a_0 - a_1s + a_2s^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}, \end{aligned}$$

где промежуточные параметры, введенные для сокращения записи, равны  $a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2$ ,  $a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]$ ,  $a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2]$ .

Продолжая разложение, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \\ & = \frac{\mu(a_0 - a_1s + a_2s^2) - (2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{-s(s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)} = \\ & = \frac{-s(s + s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)}. \end{aligned}$$

Окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE<sub>2</sub>/M/1 имеет следующий вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)}. \quad (3)$$

Многочлен четвертой степени в числителе разложения

$$s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0 \quad (4)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1\mu + 16\lambda_1\lambda_2[\lambda_1\lambda_2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)], \\ c_1 &= 4\mu(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) - 16\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) - a_2\mu, \\ c_2 &= 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_1\lambda_2 - 4\mu(\lambda_1 + \lambda_2), \\ c_3 &= \mu - 4(\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

имеет один действительный отрицательный корень и три положительных корня (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью). Исследование знака младшего коэффициента  $c_0$  показывает, что  $c_0 < 0$  всегда в случае стабильной системы, когда  $0 < \rho < 1$ . Это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

Согласно методу спектрального разложения функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям [1]:

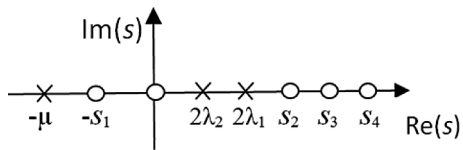
- 1) для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- 2) для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где  $D$  — некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty. \quad (5)$$

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (6)$$

Теперь с учетом условий (5) и (6) строим рациональные функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  для рассматриваемого случая:



Нули и полюсы функции  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы HE<sub>2</sub>/M/1

- $\psi_+(s) = s(s + s_1)/(\mu + s)$ , так как нули многочлена (4)  $s = 0, s = -s_1$  и полюс  $s = -\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ ;

- $\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2}{(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$ , так как ее нули и полюсы лежат в области  $\text{Re}(s) < D$ , определенной условием (5). Выполнение условий (5) и (6) спектрального разложения для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  также подтверждается рисунком.

При построении этих функций удобнее нули и полюса отношения  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  отметить на комплексной  $s$ -плоскости для исключения ошибок построения функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ . На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули — кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)}{(s + \mu)} = \frac{s_1}{\mu},$$

где  $s_1$  — абсолютное значение отрицательного корня  $-s_1$ . Постоянная  $K$  определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застанет ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания построим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1(s + \mu)}{s\mu(s + s_1)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания  $W^*(s) = s\Phi_+(s)$  будет равно

$$W^*(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}. \quad (7)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции (7)  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ :

$$\bar{W} = -\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{-\mu s_1^2 + \mu^2 s_1}{\mu^2 s_1^2} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно среднее время ожидания для системы HE<sub>2</sub>/M/1 составляет

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu. \quad (8)$$

Из выражения (7) также можно определить дисперсию времени ожидания. Вторая производная от преобразования (7) в точке  $s = 0$  дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от среднего значения [8], тем самым получим возможность его определения через дисперсию. Это является важным результатом для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Для практического применения выражения (8) необходимо определить числовые характеристики распределения (1) HE<sub>2</sub>. Для распределения (2) эти характеристики известны из курса теории вероятностей. Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (1):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}; \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2} \left[ \frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right]. \quad (10)$$

### Аппроксимация закона распределения HE<sub>2</sub> с использованием двух первых моментов

Рассматривая равенства (9) и (10) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (1)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Система двух уравнений (9), (10) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации

$$c_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} \quad (11)$$

как связующее условие между (9) и (10). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (9) положим

$$\lambda_1 = 2p/\bar{\tau}_\lambda, \lambda_2 = 2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda \quad (12)$$

и потребуем выполнения условия (11). Подставив выражения (9), (10) и частное решение (12) в (11) и решив полученное уравнение четвертой степени  $p(1-p)[8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3] = 0$  относительно параметра  $p$ , выберем одно нужное значение с учетом условия  $0 < p < 1$ :

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2) - 3}{8(1+c_\lambda^2)}}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации интервалов входного потока  $c_\lambda \geq 1/\sqrt{2}$ . Подставив значение параметра  $p$  из (13) в соотношение (12), определим значения параметров распределения (1)  $\lambda_1, \lambda_2$ . Таким образом, получено частное решение недоопределенной системы уравнений (9) и (10) методом подбора.

### Аппроксимация закона распределения HE<sub>2</sub> с использованием трех первых моментов

Учитывая тот факт, что распределение HE<sub>2</sub> является трехпараметрическим, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов. Для этого запишем выражения для начального момента 3-го порядка, полученное через преобразование Лапласа  $A^*(s)$ :

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{3p}{\lambda_1^3} + \frac{3(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (14)$$

Присоединив уравнение (14) к уравнениям моментов (9), (10) и решив систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными при заданных значениях начальных моментов до третьего порядка включительно, в пакете MathCAD находим все три параметра  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Как показано в работе [1] на примере гиперэкспоненциальных входных распределений, аппроксимация с использованием двух первых моментов в отличие от трех моментов может занижать среднее время ожидания до 10 % в зависимости от значений загрузки и третьего момента.

Такой же подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением применен в работах автора [1, 6, 7]. Таким образом, гиперэрланговский закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от  $1/\sqrt{2}$  до  $\infty$ , что шире, чем у гиперэкспоненциального распределения  $(1, \infty)$ .

Величины  $\overline{\tau_\lambda}, \overline{\tau_\mu}, c_\lambda, c_\mu$  будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы HE<sub>2</sub>/M/1. Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (1) из выражений (13), (12) и к нахождению нужного корня многочлена (4), а затем к использованию расчетного выражения (8).

### Результаты экспериментов

В таблице приведены данные расчетов в пакете MathCAD для системы HE<sub>2</sub>/M/1 для слу-

Результаты экспериментов для СМО HE<sub>2</sub>/M/1 в сравнении с H<sub>2</sub>/M/1

Входные параметры		Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	для системы HE <sub>2</sub> /M/1	для системы H <sub>2</sub> /M/1
0,1	0,71	0,03	—
	2	0,08	0,19
	4	0,10	0,23
	8	0,11	0,25
0,5	0,71	0,62	—
	2	2,00	2,16
	4	4,62	4,83
	8	10,15	10,40
0,9	0,71	6,61	—
	2	22,59	22,41
	4	77,28	75,79
	8	295,96	289,13

чаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ . Для сравнения в правой колонке приведены данные для системы H<sub>2</sub>/M/1, для которой  $c_\lambda \geq 1$  [1].

Значения среднего времени ожидания в системах HE<sub>2</sub>/M/1 и H<sub>2</sub>/M/1 достаточно близки при средней и высокой нагрузках систем, хотя начальные моменты распределений (начиная со второго) HE<sub>2</sub> и H<sub>2</sub> разнятся. Заметим, что система H<sub>2</sub>/M/1 справедлива только при  $c_\lambda \geq 1$  и  $c_\mu = 1$ , потому в таблице для  $c_\lambda < 1$  стоят прочерки. Коэффициент загрузки  $\rho$  определяется отношением средних интервалов обслуживания и поступления требований  $\rho = \overline{\tau_\mu}/\overline{\tau_\lambda}$ . Расчеты, приведенные в таблице, выполнены для нормированного времени обслуживания  $\overline{\tau_\mu} = 1$ . Полученные расчетные данные хорошо согласуются с результатами работы [12].

### Заключение

В работе получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы HE<sub>2</sub>/M/1, с помощью которого выведено расчетное выражение для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Результаты расчетов сравниваются с результатами аналогичной системы H<sub>2</sub>/M/1 с гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка для входного потока.

Полученное расчетное выражение для среднего времени ожидания расширяет и дополняет известные формулы теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем типа G/M/1 и G/G/1 с произволь-

ными законами распределений входного потока и времени обслуживания. При этом диапазон изменения параметров у системы  $HE_2/M/1$  шире, чем у системы  $H_2/M/1$ .

Полученный результат с успехом может быть применен в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [6, 7].

#### Список литературы

1. **Тарасов В. Н.** Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16–26.
2. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
3. **Brannstrom N.** A Queueing Theory analysis of wireless radio systems — Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. 79 p.

4. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. N. 1. P. 125–147.
5. **Бочаров П. П., Печинкин А. В.** Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
6. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Горелов Г. А., Малыхов С. В.** Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // Информационные технологии. 2014. № 9. С. 54–59.
7. **Тарасов В. Н.** Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания  $H_2/M/1$  // Инфокоммуникационные технологии. 2014. № 3. С. 36–41.
8. **URL:** <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
9. **Myskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. 1991. P. 683–688.
10. **Алиев Т. И.** Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
11. **Алиев Т. И.** Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93.
12. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф.** Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. № 7. С. 2–8.

**V. N. Tarasov**, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: [veniamin\\_tarasov@mal.ru](mailto:veniamin_tarasov@mal.ru),  
**N. F. Bakhareva**, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: [nadin1956\\_04@inbox.ru](mailto:nadin1956_04@inbox.ru),

**Kada Othmane**, Postgraduate,

Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation

## The Mathematical Model of Teletraffik Based on the $HE_2/M/1$ System

*The article is devoted to the study of the  $HE_2/M/1$  queuing system type  $G/M/1$  with a second-order hypererlangian input distribution and an exponential service time law with the aim of obtaining a solution for the average waiting time in queue in the case of a stationary mode. For this, the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation is used. For practical application of the obtained results, the method of moments is used. It turns out that the hypererlangian distribution law  $HE_2$ , like hyperexponential  $H_2$ , which is three-parameter, can be determined by both the first two moments and the first three moments. This characteristic feature of the hypererlangian distribution law must be used in the theory of mass service. The choice of such a law of probability distribution is due to the fact that it is the most common distribution of non-negative continuous random variables, since its coefficient of variation  $c_v > 1/\sqrt{2}$  covers a wider range than the hyperexponential distribution for which  $c_v \geq 1$ . Determination of the main characteristic of  $QS$  — the average waiting time is an important task in the theory of teletraffik when analyzing traffic sensitive to delays. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the  $QS HE_2/M/1$  allows one to obtain a solution in closed form.*

**Keywords:** Hypererlangian distribution law, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform

DOI: 10.17587/it.25.205-210

#### References

1. **Tarasov V. N.** *Issledovanie sistem massovogo obsluzhivaniya s gipereksponencial'nymi vhodnymi raspredeleniyami* [Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions], *Problemy Peredachi Informacii*, 2016, no. 1, pp. 16–26 (in Russian).
2. **Kleinrock L.** *Teoriya massovogo obsluzhivaniya*, Moscow, Mashinostroenie, 1979, 432 p. (in Russian).
3. **Brannstrom N.** *A Queueing Theory analysis of wireless radio systems — Applied to HS-DSCH*, Lulea university of technology, 2004, 79 p.

4. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods, *Operation Research*, 1982, no. 1, pp. 125–147.
5. **Bocharov P. P., Pechinkin A. V.** *Teoriya massovogo obsluzhivaniya*, Moscow, Publishing house of RUDN, 1995, 529 p. (in Russian).
6. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Gorelov G. A., Malahov S. V.** *Analiz vkhodyashchego trafika na urovne trekh momentov raspredelenij vremennykh intervalov* [Analyzing the Incoming Traffic at the Three Moments Distribution of Time Intervals], *Informacionnye Tekhnologii*, 2014, no. 9, pp. 54–59 (in Russian).

7. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A. *Matematicheskaya model trafika s tyazhelohlostnym raspredeleniem na osnove sistemy massovogo obsluzhivaniya  $H_2/M/1$*  [Mathematical model of traffic with heavy-tailed distribution based on the queuing system  $H_2/M/1$ ], *Informacionnyye Tekhnologii*, 2014, no. 3 pp. 36–41 (in Russian).

8. Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (accessed: 26.02.2016).

9. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals, *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.

10. Aliev T. I. *Osnovy modelirovaniya diskretnykh sistem* (Fundamentals of discrete systems modeling), SPb., Publishing house of SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (in Russian).

11. Aliev T. I. *Approximatsiya veroyatnostnykh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya* [Approximation of probability distributions in queuing models], *Nauchno-Tekhnicheskij Vestnik Informacionnykh Tekhnologij, Mekhaniki i Optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93 (in Russian).

12. Tarasov V. N., Bahareva N. F. *Obobshchennaya dvumernaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1* [A generalized two-dimensional diffusion queuing model of the GI/G/1 type], *Telekommunikacii*, 2009, no. 7, pp. 2–8 (in Russian).

УДК 004:656.131

DOI: 10.17587/it.25.210-215

Г. Д. Антониади, аспирант, [george@antoniadi.com](mailto:george@antoniadi.com), В. О. Архипов, аспирант, [arvlol@yandex.ru](mailto:arvlol@yandex.ru),  
А. А. Цуприков, доцент, [tsouprikov@mail.ru](mailto:tsouprikov@mail.ru),

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
"Кубанский государственный технологический университет"

## Математическая модель задержки автотранспорта на регулируемом перекрестке

*Проведен сравнительный анализ моделей задержки Бэкманна и Вебстера, выявлены их недостатки для регулирования сигналов светофора. Рассмотрена новая модель задержки автотранспорта на регулируемом перекрестке, проанализирован физический смысл составляющих модели, определена значимость (вес, количественный вклад) параметров в значение задержки транспорта при запрещающем сигнале светофора с образованием очереди.*

**Ключевые слова:** модель задержки проезда, светофор, интенсивность проезда, очередь, перекресток, значимость параметров

### Введение

Для описания задержки автотранспорта перед перекрестком при светофорном регулировании движения разработано множество математических моделей, которые можно разделить на две группы:

- "точные" модели, описывающие текущую ситуацию на дороге в данный момент времени (модели М. Дж. Бэкманна, Дж. Н. Дарроча, В. Р. МакНейла и др.);
- "приближенные" модели, описывающие стационарные условия движения с аппроксимацией к реальной ситуации на дороге (модели А. Дж. Миллера, Дж. Ф. Ньюелла и др.).

Представляет интерес проведение сравнительного анализа основных моделей задержки транспорта, проверка их достоверности в реальных дорожных условиях проезда перекрестка и определение количественных значений факторов, влияющих на задержку.

### Постановка задачи

Основной задачей исследования является анализ, рассмотрение составных частей и элементов базовых моделей задержки М. Дж. Бэкманна и Ф. В. Вебстера, проверка их достоверности, разработка новой модели времени задержки автотранспорта на регулируемом перекрестке, ее сравнительный анализ с базовыми моделями, а также определение значимости (вклада) каждого параметра в значение задержки.

### Методы решения задачи исследования

Анализ основных моделей выполнен на основе вычисления с их помощью транспортных условий реального перекрестка в течение цикла работы светофора, достоверность проверялась по теории размерности. Количественный вклад параметров модели в значение задержки определен методом относительных погрешностей.