УДК 681.5.09 DOI: 10.17587/it.25.195-204

В. И. Левин, д-р техн. наук, проф., e-mail: vilevin@mail.ru,
Пензенский государственный технологический университет

Непрерывная логика и анализ надежности сложных систем. Математический аппарат

Обсуждается разработка автоматно-логической модели надежности сложных технических систем и соответствующих логических методов оценки надежности таких систем, которые в отличие от известных используют не традиционные вероятностные показатели надежности, а детерминированные логические показатели. Предложено использовать в качестве исходных данных наблюдаемые моменты последовательных отказов и восстановлений элементов технической системы, а в качестве характеристик надежности самой системы — моменты последовательных отказов и восстановлений системы. В этом случае задача оценки надежности системы сводится к построению ее математической модели в виде автоматных логических функций, выражающих моменты ее последовательных отказов и восстановлений через аналогичные моменты всех ее элементов. Данная статья представляет собой первую часть работы, в которой детально разрабатывается автоматно-логическая модель, предназначенная для вычисления логической функции надежности сложных технических систем. Новизна работы заключается в построении адекватной логической модели надежности сложной системы, позволяющей свести оценку надежности сложной технической системы к вычислению ее логических функций надежности. В процессе вычислений впервые используется математический аппарат логических определителей, что и позволяет решить проблему сложности. В статье детально разработаны логическая модель надежности и методы ее исследования, позволяющие вводить новые показатели надежности сложных технических систем, не требующие для своей оценки использования вероятностных методов и исходных статистических данных об отказах элементов. На основе разработанной логической модели надежности и методах ее исследования решена задача построения автоматной модели надежности систем, которая позволит вести практические расчеты сложных технических систем методами теории динамических автоматов с помощью аппарата логических определителей.

Ключевые слова: *сложная система, переключательный процесс, надежностный процесс, динамический автомат, двоичный оператор, структура оператора, логическая теория надежности*

Введение

Имеется огромное число публикаций по классической вероятностной теории надежности [1—4] и значительно меньше — по постклассической, детерминистской теории надежности. Начало последней было положено работами автора [5—7], в которых была открыта возможность моделирования надежностных процессов автоматно-логическими методами. Затем последовали различные реализации этой возможности.

В работах [8, 9] были предложены автоматно-логические модели и методы анализа надежности технических систем, основанные на математическом аппарате двузначной (булевой) и бесконечнозначной (непрерывной) логики (НЛ). Было показано, что предложенные модели и методы позволяют анализировать надежность в принципе любых систем в аналитической форме, что имеет большое теоретическое и практическое значение. Затем эти модели и методы были усовершенствованы в работах [10, 11]. Но попытки непосредственного применения предложенного подхода к сложным системам, у которых логические схемы-модели сложны, а их входные процессы имеют большое число последовательных изменений сигнала (что является следствием многоразового восстановления блоков системы), наталкиваются на очень большие трудности. Эти трудности обусловлены необозримостью получаемых аналитических выражений и большой сложностью их вычисления. В связи с этим в настоящей работе предложен другой подход к анализу надежности сложных систем, основанный на математическом аппарате логических определителей (ЛО), вводимых как числовые характеристики некоторых квазиматриц, вычисляемые по соответствующим формулам алгебры НЛ [12, 13]. В целом квазиматрицы и ЛО в рассматриваемой нами области играют ту же роль параметров укрупненного (блочного) описания изучаемых, существенно нелинейных систем, что и обычные матрицы и определители в области линейных систем, т. е. способствуют лучшей обозримости и вычислимости различных характеристик изучаемых технических систем. В нашем случае это характеристики надежности.

Настоящая работа содержит математический аппарат логических определителей и другие математические заготовки, необходимые для исследования надежности сложных систем (типовые модели, методы и т. д.). Этот материал частично публиковался ранее [12, 13]. Для настоящей статьи его изложение усовершенствовано. В отдельной статье будет подробно изложена собственно методика исследования надежности сложных систем с помощью указанной математики. Работа в целом может рассматриваться как минимонография по логической теории надежности сложных систем, подробно описывающая нетрадиционный подход к изучению надежности таких систем.

Предлагаемый в работе подход нацелен на исследование надежности сложных систем и не имеет аналогов как в классической литературе по надежности, так и в современной литературе [1—4, 14—24].

1. Порядковая логика и логические определители

1. Рассмотрим множество $X = \{x_1, ..., x_n\}$ из n элементов x_i, $x_i \in [A, B]$, и расположим элементы в порядке неубывания:

$$x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant ... \leqslant x^{(n)},\ x^{(r)} \in X. \qquad (1.1)$$

Введем над множеством X операцию выделения произвольного порядкового элемента $x^{(r)}$ этого множества (*r-операцию*):

$$y \equiv f^{(r)}\ (x_1, ..., x_n) = x^{(r)},\ r = 1, ..., n. \qquad (1.2)$$

Здесь r называется *рангом* операции. Легко видеть, что r-операция обобщает операции конъюнкции $\wedge$ = min и дизъюнкции $\vee$ = max непрерывной логики (НЛ), переходя в них соответственно при $r = 1$ и $r = n$. Результатом r-операции над элементами множества является один из элементов этого же множества. Назовем произвольную функцию, аргументы которой $x_1, ..., x_n$ взяты из множества X и которая представляется в виде суперпозиции r-операций над X с различными значениями ранга r, *функцией порядковой логики*. Простейший пример такой функции — сама r-функция (1.2). Более сложный пример — функция $y = f^{(2)}[f^{(2)}(x_1, x_2, x_3), f^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)]$. Любая функция порядковой логики $y = f(x_1, ..., x_n)$ на любом наборе аргументов $(x_1, ..., x_n)$ принимает значение одного из аргументов. Это связано с тем, что r-операции, суперпозицией которых является выражение y, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операциях.

Задать функцию порядковой логики $y = f(x_1, ..., x_n)$ можно, перечислив все $n!$ вариантов упорядочения аргументов $x_1, ..., x_n$ и указав для каждого варианта аргумент x_i, значение которого принимает функция. Такое задание функции порядковой логики есть частный случай первичного задания любой функции непрерывной логики. Поэтому от такого первичного задания функции порядковой логики можно перейти к ее аналитическому представлению с помощью суперпозиции операций НЛ — конъюнкции и дизъюнкции (отрицание здесь не участвует, так как r-операция всегда имеет своим результатом значение одной из переменных, но не ее отрицания). Методика перехода та же, что и для функций НЛ.

Пример 1. Функция порядковой логики $y = f^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$ — медиана — задана таблицей. Требуется найти ее представление с помощью НЛ.

Задание функции-медианы $y = f^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$	x_2	$x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_1$	x_3
$x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$	x_3	$x_3 \leqslant x_1 \leqslant x_2$	x_1
$x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_3$	x_1	$x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1$	x_2

Согласно таблице искомую функцию можно представить так:

$$y = \begin{cases} x_1 \text{ при } x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_3 \text{ или } x_3 \leqslant x_1 \leqslant x_2; \\ x_2 \text{ при } x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \text{ или } x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1; \\ x_3 \text{ при } x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2 \text{ или } x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_1. \end{cases}$$

Объединим с помощью конъюнкции НЛ первую строку при втором условии со второй строкой при втором условии, первую строку при первом условии с третьей строкой при втором условии и вторую строку при первом условии с третьей строкой при первом условии:

$$y=\begin{cases} x_1x_2 \text{ при } x_1x_2 \geqslant x_3 \\ (\text{т. е. при } x_1x_2 \geqslant x_1x_3,\, x_2x_3); \\ x_1x_3 \text{ при } x_1x_3 \geqslant x_2 \\ (\text{т. е. при } x_1x_3 \geqslant x_1x_2,\, x_2x_3); \\ x_2x_3 \text{ при } x_2x_3 \geqslant x_1 \\ (\text{т. е. при } x_2x_3 \geqslant x_1x_2,\, x_1x_3). \end{cases}$$

Объединяя теперь три строки в одну с помощью операции дизъюнкции НЛ, получаем искомое представление: $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

Из сказанного следует, что функции порядковой логики — отдельный класс функций НЛ. Поэтому выражения функций порядковой логики можно подвергать эквивалентным преобразованиям (в целях их упрощения) с помощью законов НЛ. Однако некоторые законы присущи лишь порядковой логике:

- *тавтология*

$$f^{(r)}(x, ..., x) = x; \qquad (1.3)$$

- *переместительный*

$$f^{(r)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(r)}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \qquad (1.4)$$

(здесь $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — любая перестановка аргументов $x_1, ..., x_n$);

- *распределительный*

$$\begin{gathered} f^{(r)}[\varphi^{(q_1)}(x_1, \ldots, x_n), \varphi^{(q_2)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi^{(q_p)}(x_1, \ldots, x_n)] = \varphi^{(q_r)}(x_1, \ldots, x_n) \end{gathered} \qquad (1.5)$$

(здесь $q_1 < q_2 < ... < q_p$; $1 \leqslant r \leqslant p$)

и его частные случаи

$$\begin{gathered} \bigwedge_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(x_1,\ldots,x_n) = f^{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} r_i\right)}(x_1,\ldots,x_n); \\ \bigvee_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(x_1,\ldots,x_n) = f^{\left(\bigvee_{i=1}^{n} r_i\right)}(x_1,\ldots,x_n). \end{gathered} \qquad (1.6)$$

С помощью этих законов можно преобразовывать представления функций порядковой логики, не являющиеся выражениями НЛ.

2. Рассмотрим множество X_q, состоящее из q непересекающихся подмножеств $(x_{i1}, \ldots, x_{im_i})$, $i = 1, ..., q$, с элементами $x_{ij} \in [A, B]$, упорядоченными согласно условию

$$x_{i1} \leqslant x_{i2} \leqslant \ldots \leqslant x_{im_i},\ i = 1, ..., q. \qquad (1.7)$$

Число элементов этого множества $n = \sum_{i=1}^{q} m_i$. Множество X_q частично упорядоченное; его удобно записывать в виде *квазиматрицы* q-го порядка со строками — упорядоченными подмножествами

$$\mathbf{X}_q = \left\| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{array} \right\| = \|x_{ij}\|,$$

$$i = 1, ..., q;\ j = 1, ..., m_i. \qquad (1.8)$$

Квазиматрица (1.8) отличается от обычной матрицы неодинаковым числом элементов в различных строках и упорядоченностью элементов в строках согласно (1.7). Рассмотренное выше неупорядоченное множество $X = (x_1, ..., x_n)$ есть частный случай множества (1.8) при n строках из одного элемента каждая. Поэтому неупорядоченное множество X можно записать в следующем виде *матрицы-столбца:*

$$\mathbf{X}_n = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_n \end{array} \right\|. \qquad (1.9)$$

В другом частном случае, когда множество X_q полностью упорядочено, оно содержит лишь одно упорядоченное подмножество (одну строку в (1.8)). В этом случае матричная запись множества X_q имеет вид *матрицы-строки:*

$$\mathbf{X}_n = \|x_1, ..., x_n\|. \qquad (1.10)$$

Для частично упорядоченного множества X_q, заданного своей квазиматрицей (1.8), как и для упорядоченного множества X, вводится r-операция (1.2) в виде функции

$$y \equiv f^{(r)}(x_{11}, \ldots, x_{qm_q}) = x^{(r)},\ r = 1, \ldots, n, \qquad (1.11)$$

выделяющей нужный порядковый элемент $x^{(r)}$ из X_q. Эта функция называется *логическим определителем* (ЛО) r-го ранга q-го порядка от квазиматрицы $X_q = \|x_{ij}\|$ и обозначается

$$X_q^r = \left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{array} \right|^{(r)} = \|x_{ij}\|^{(r)},\ r = 1, ..., n. \qquad (1.12)$$

Специально отметим частные случаи — *определитель-столбец*

$$X_n^r = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_n \end{array} \right\|^{(r)},\ r = 1, ..., n, \qquad (1.13)$$

соответствующий матрице-столбцу (1.9) и совпадающий с обычной r-функцией вида (1.2), и *определитель-строку*

$$X_1^r = |x_1, \ldots, x_n|^{(r)} = x_r,\ r = 1, \ldots, n, \qquad (1.14)$$

соответствующий матрице-строке (1.10). Логический определитель X_q^r от квазиматрицы X_q является числовой характеристикой этой квазиматрицы, так же как обычный определитель (детерминант) есть характеристика квадратной матрицы. Формально ЛО — это обобщение обычной r-функции (1.2) на случай частично упорядоченного множества аргументов, сохраняющее все основные черты r-функции. Так, любой ЛО $X_q^r = |x_{ij}|^{(r)}$ на любом наборе элементов $x_{11}, \ldots, x_{qm_q}$ принимает значение одного из элементов. Далее, любая функция, аргументы которой являются элементами $x_{11}, \ldots, x_{qm_q}$ квазиматрицы X_q и которая представлена в виде суперпозиции ЛО X_q^r различных рангов r от X_q, есть функция порядковой логики. Так что ЛО и суперпозицию ЛО можно задать, указав для каждого варианта упорядочения элементов $x_{11}, \ldots, x_{qm_q}$ элемент x_{ij}, значение которого принимает функция. От такого задания ЛО можно перейти к их аналитическому представлению с помощью операций НЛ (пример 1). Значит, ЛО и их суперпозиции образуют специальный класс функций НЛ. Их можно подвергать эквивалентным преобразованиям с помощью законов НЛ и порядковой логики (1.3)—(1.6).

2. Свойства логических определителей

Свойство 1. ЛО является монотонно неубывающей функцией ранга

$$X_q^r \geqslant X_q^p, \text{ если } r > p. \tag{2.1}$$

Свойство 2. Перестановка любых двух строк ЛО X_q^r не меняет его значения.

Доказательства свойств 1, 2 вытекают из определения X_q^r.

Свойство 3. Общее для всех элементов определителя слагаемое можно вынести за знак ЛО:

$$|x_{ij} + c|^{(r)} = |x_{ij}|^{(r)} + c. \tag{2.2}$$

Доказательство: прибавление общего слагаемого ко всем элементам x_{ij} не меняет их взаимной упорядоченности согласно (1.7).

Свойство 4. Общий для всех элементов дизъюнктивный (конъюнктивный) член можно вынести за знак ЛО:

$$|x_{ij} \vee c|^{(r)} = |x_{ij}|^{(r)} \vee c; \; |x_{ij} \wedge c|^{(r)} = |x_{ij}|^{(r)} \wedge c. \tag{2.3}$$

Доказательство следует из того, что введение общего для всех элементов дизъюнктивного (конъюнктивного) члена c не меняет взаимной упорядоченности элементов, а лишь приводит к замене на c тех из них, которые вначале были меньше (больше) c.

Свойство 5. Общий для всех элементов сомножитель c можно вынести за знак ЛО с сохранением первоначального ранга r, если $c > 0$, и с заменой его на дополнительный ранг $n - r + 1$ при $c < 0$:

$$\left|x_{ij}c\right|^{(r)} = \begin{cases} c\left|x_{ij}\right|^{(r)}, & c > 0; \\ c\left|x_{ij}\right|^{(n-r+1)}, & c < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Доказательство: в случае $c > 0$ упорядоченность значений $x_{ij}c$ и x_{ij} ($i = 1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, m_i$) одинаковая, а в случае $c < 0$ — обратная (максимальному x_{ij} соответствует минимальное $x_{ij}c$ и т. д.).

Свойство 6. Если $c > x_{im_i}$ $(i = 1, \ldots, q)$, то значение ЛО не меняется при добавлении к нему справа столбца из элементов c:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} c \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} c \end{matrix}\right|^{(r)} = \begin{cases} \left|\begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)}, & r = 1, \ldots, n; \\ c, & r = n+1, \ldots, n+q. \end{cases} \tag{2.5}$$

Свойство 7. При добавлении к ЛО столбца из c при $c < x_{i1}$ ($i = 1, \ldots, q$) значение ЛО не изменится, если его ранг уменьшить на число строк:

$$\left|\begin{matrix} c\ x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline c\ x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \begin{cases} c, & r = 1, \ldots, q; \\ \left|\begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r-q)}, & r = q+1, \ldots, q+n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Свойство 8. Значение ЛО не меняется при исключении элемента ∞ (бесконечность) в конце какой-либо строки:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} \infty \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \begin{cases} \left|\begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)}, & r = 1, \ldots, n; \\ \infty, & r = n+1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Свойство 9. Значение ЛО не меняется, если из него исключить элемент $-\infty$ в начале какой-либо строки, а ранг уменьшить на единицу:

$$\left|\begin{matrix} -\infty x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \begin{cases} -\infty, & r = 1, \ldots, q; \\ \left|\begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r-1)}, & r = q+1, \ldots, q+n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательства свойств 6—9 вытекают из определения ЛО.

Свойство 10. Значение ЛО не изменится, если любую совокупность строк заменить ЛО, образованными этой совокупностью и расположенными в одной строке в порядке возрастания ранга:

$$X_q^r = \left| \begin{array}{c} X_{q \setminus i \ldots k} \\ \hline X_{i\ldots k}^1 X_{i\ldots k}^2 \ldots X_{i\ldots k}^N \end{array} \right|^{(r)}. \tag{2.9}$$

Здесь $X_{q\setminus i\ldots k}$ — квазиматрица, полученная из квазиматрицы X_q исключением строк i, ..., k; $X_{i\ldots k}^p = \left| \begin{array}{c} i \\ \hline k \end{array} \right|^{(p)}$ — ЛО p-го ранга из строк i, ..., k.

Доказательство: указанная замена означает совместное упорядочение элементов строк i, ..., k и не влияет на значение порядкового элемента $x^{(r)}$ множества X_q, а следовательно, и на значение X_q^r.

Свойство 11. ЛО q-го порядка с двумя одинаковыми строками можно представить как ЛО ($q - 1$)-го порядка с различными строками:

$$\left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hline x_{q-1,1} \ldots x_{q-1,m_{q-1}} \\ x_{q-1,1} \ldots x_{q-1,m_{q-1}} \end{array} \right|^{(r)} = \left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hline x_{q-1,1} x_{q-1,1} \ldots x_{q-1,m_{q-1}} x_{q-1,m_{q-1}} \end{array} \right|^{(r)}. \tag{2.10}$$

Доказательство: такая перестановка удовлетворяет условию упорядоченности элементов в строках (1.7), т. е. снова дает логический определитель, причем не меняет его значения.

Свойство 12. Конечный ЛО можно представить как бесконечный:

$$\left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{array} \right|^{(r)} = \left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_1} \; \infty \; \infty \ldots \\ \hline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \; \infty \; \infty \ldots \end{array} \right|^{(r)}. \tag{2.11}$$

Доказательство данного свойства получается повторным применением формулы (2.7).

Бесконечности в формуле (2.11) можно заменить конечными элементами x_{ik}, $k > m_i$, такими чтобы сохранилась упорядоченность (1.7) элементов в строках и выполнялись неравенства $x_{ik} \geqslant \bigvee\limits_{i=1}^{q} x_{im_i}$, $i = 1, \ldots, q$.

Свойство 13. Значение ЛО r-го ранга не изменится, если в любой i-й строке исключить элементы $x_{i,\, r+1}$; $x_{i,\, r+2}$...:

$$\left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{array} \right|^{(r)} = \left| \begin{array}{c} x_{11} \ldots x_{1r_1} \\ \hline x_{q1} \ldots x_{qr_q} \end{array} \right|^{(r)}, \tag{2.12}$$

где $r_i = r \wedge m_i$.

Доказательство: действительно, r-м порядковым элементом $x^{(r)}$ квазиматрицы X_q может быть только один из r первых элементов какой-либо ее строки.

***Свойство 14** (закон тавтологии)*:

$$\left| \begin{array}{c} x \ldots x \\ \hline x \ldots x \end{array} \right|^{(r)} = x, \ \ r = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Доказательство следует из определения ЛО.

***Свойство 15** (распределительный закон)*:

$$\left| \begin{array}{c} X_q^{p_{11}} \ldots X_q^{p_{1m_1}} \\ \hline X_q^{p_{s1}} \ldots X_q^{p_{sm_s}} \end{array} \right|^{(r)} = X_q^{P_s^r}, \quad \text{где } P_s^r = \left| \begin{array}{c} p_{11} \ldots p_{1m_1} \\ \hline p_{s1} \ldots p_{sm_s} \end{array} \right|^{(r)}. \tag{2.14}$$

Здесь $p_{i1} < p_{i2} < \ldots < p_{im_i}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, $n = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i$.

***Свойство 16** (частный случай распределительного закона)*:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} X_q^{p_i} = X_q^{\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} p_i}. \tag{2.15}$$

***Свойство 17** (частный случай распределительного закона):*

$$\bigvee_{i=1}^{n} X_q^{p_i} = X_q^{\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} p_i}. \tag{2.16}$$

Доказательство свойств 15—17 вытекает из свойства 1. По нему упорядочение множества ЛО X_q^r различных рангов r от одной квазиматрицы X_q можно заменить упорядочением множества рангов.

3. Раскрытие логического определителя

Раскрыть ЛО — значит указать аналитическое представление функции НЛ, выражающей значение ЛО через значения его элементов. В п. 1 был предложен прямой метод раскрытия ЛО. Однако этот метод громоздок и не работает в случае больших ЛО. Удобнее раскрывать ЛО по готовым формулам, дающим аналитическое представление функции НЛ, выражающей значения целого класса ЛО.

1. ЛО-столбец r-го ранга с n элементами выражается дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ):

$$X_n^r = \left|\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_n \end{array}\right|^{(r)} = \bigvee_{i_1\ne\ldots\ne i_{n-r+1}}^{n} (x_{i_1}\ldots x_{i_{n-r+1}}),\ x_{i_k}\in\{x_1,\ldots,x_n\} \qquad (3.1)$$

или конъюнктивной нормальной формой (КНФ):

$$X_n^r = \left|\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_n \end{array}\right|^{(r)} = \bigwedge_{i_1\ne\ldots\ne i_r}^{n} (x_{i_1}\vee\ldots\vee x_{i_r}),\ x_{i_k}\in\{x_1,\ldots,x_n\}. \qquad (3.2)$$

Доказательство (3.1). Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — упорядоченные согласно (1.1) элементы $x_1, \ldots, x_n$. Каждая конъюнкция состоит из $n - r + 1$ различных элементов. Одна конъюнкция вида $b = x^{(r)}x^{(r+1)}\ldots x^{(n)}$, остальные вида $b_i = x^{(s)}b_i'$, где $s < r$, т. е. $b = x^{(r)}$, $b_i \leqslant x^{(r)}$ и правая часть выражения (3.1) равна $x^{(r)}$, т.е. левой части. Формула (3.2) доказывается аналогично.

2. Общий бесконечный ЛО r-го ранга q-порядка выражается ДНФ:

$$X_q^r = \left|\begin{array}{c} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hline x_{21}\ldots x_{qi_q}\ldots \end{array}\right|^{(r)} = \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1}^{n} (x_{1i_1}\ldots x_{1q_q}). \qquad (3.3)$$

Доказательство. Сначала докажем частный случай (3.3) при $q = 2$:

$$X_2^r = \left|\begin{array}{c} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hline x_{21}\ldots x_{2i_2}\ldots \end{array}\right|^{(r)} = \bigvee_{k=1}^{r}(x_{1k}x_{2,r+1-k}). \qquad (3.4)$$

Согласно свойству 13 логический определитель X_2^r можно представить как конечный ЛО:

$$X_2^r = \left|\begin{array}{c} x_{11}\ldots x_{1r} \\ \hline x_{21}\ldots x_{2r} \end{array}\right|^{(r)}, \qquad (3.5)$$

который, не учитывая упорядоченности элементов в строках, представим в виде ЛО-столбца

$$X_2^r = \left|\begin{array}{c} x_{11} \\ \hline x_{1r} \\ x_{21} \\ \hline x_{2r} \end{array}\right|^{(r)}. \qquad (3.6)$$

Раскроем ЛО (3.6) по формуле (3.1). Каждая конъюнкция в (3.1) включает $r + 1$ различных элементов. Из этих элементов хотя бы один вида x_{1i} и хотя бы один вида x_{2j}. Пусть B_{ks} — s-я из конъюнкций, включающих k элементов вида x_{2j} и $r + 1 - k$ элементов вида x_{1i}. Тогда согласно (3.1) $X_2^r = \bigvee_{k=1}^{r}\bigvee_{s} B_{ks}$. При фиксированном k по условию (1.7) максимальна та конъюнкция B_{ks} ($s = 1, 2, \ldots$), в которую входят элементы $x_{1k}, \ldots$ $\ldots, x_{1r}$; $x_{2,r+1-k}, \ldots, x_{2r}$: она равна $x_{1k}x_{2,r+1-k}$. Отсюда $\bigvee_{s} B_{ks} = x_{1k}x_{2,r+1-k}$. Подставив это в выражение X_2^r, получим (3.4). Теперь формулу (3.3) докажем индукцией по q. При $q = 1$ (3.3) переходит в равенство $X_1^r = |x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots|^{(r)} = x_{1r}$, (см. (1.14)), а при $q = 2$ — в доказанное соотношение (3.4). Допустим, что формула (3.3) верна для некоторого $q = p$. Докажем, что тогда она верна и при $q = p + 1$. Представим X_{p+1}^r по правилу (2.9) в виде блочного определителя 2-го порядка:

$$X_{p+1}^r = \left|\begin{array}{l} \quad x_{11}\ \ldots\ x_{1i_1}\ldots \\ \hline x_{p1}\ \ldots\ x_{pi_p}\ldots \\ x_{p+1,1}\ \ldots\ x_{p+1,i_{p+1}} \end{array}\right|^{(r)} = \left|\begin{array}{l} X_p^1\ldots X_p^{i_1}\ldots \\ X_{p+1,1}\ldots x_{p+1,i_{p+1}}\ldots \end{array}\right|^{(r)}.$$

Раскроем последний по формуле (3.4) $X_{p+1}^r = \bigvee_{k=1}^{r} X_p^k x_{p+1,r+1-k}$. Согласно вышеуказанному допущению ЛО X_p^k можно выразить в виде (3.3). Отсюда

$$X_{p+1}^r = \bigvee_{k=1}^{r}\left(\bigvee_{\sum_{s=1}^{p} i_s = k+p-1} x_{1i_1}\ldots x_{pi_p}\right)x_{p+1,r+1-k} =$$

$$= \bigvee_{k=1}^{r}\ \bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p} x_{1i_1}\ldots x_{pi_p}x_{p+1,r+1-k} =$$

$$= \bigvee_{\substack{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p, \\ 1\leqslant i_{p+1}\leqslant r}} a_{1i_1}\ldots a_{p+1,i_{p+1}}.$$

В последнем полученном выражении по свойству 13 можно опустить условие $1 \leqslant i_{p+1} \leqslant r$, не изменив значение ЛО. В итоге будет справедливо равенство $X_{p+1}^r = \bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p} x_{1i_1}\ldots x_{p+1i_{p+1}}$, что и требовалось доказать.

3. Общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается ДНФ:

$$X_q^r = \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} \left(\breve{x}_{1i_1}^{m_1} \dots \breve{x}_{qi_q}^{m_q} \right). \qquad (3.7)$$

Здесь и ниже запись $\breve{x}_{1i_1}^{m_1}$ означает, что элемент x_{ki_k} исключается из тех конъюнкций, для которых из условия на Σi_s формально получается $i_k > m_k$.

Доказательство формулы (3.7) получается, если в соответствии с соотношением (2.11) представить конечный ЛО X_q^r как бесконечный и применить к последнему правило раскрытия (3.3), учитывая, что $x \wedge \infty = x$.

Пример 2. По формуле (3.1) раскроем ЛО-столбец

$$X_3^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} x_1x_2x_3, & r = 1; \\ x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, & r = 2; \\ x_1 \vee x_2x_3, & r = 3. \end{cases}$$

Второе из выписанных выражений было получено более сложным путем — с использованием прямого метода в примере 1.

Пример 3. По формуле (3.7) раскроем общий ЛО 2-го порядка:

$$X_3^r = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} x_{11}x_{21}, & r = 1; \\ x_{11}x_{22} \vee x_{12}x_{21}, & r = 2; \\ x_{12}x_{22} \vee x_{11}x_{21}, & r = 3; \\ x_{12}x_{22}, & r = 4. \end{cases}$$

4. Раскрытие больших логических определителей

1. Раскрытие больших ЛО (т. е. ЛО с большим числом элементов) по явным формулам п. 3 слишком трудоемко. В таких случаях целесообразнее применять *разложения* ЛО на ЛО меньших размеров. Простейшее такое разложение — (2.9).

Пример 4. Раскроем ЛО 4-го порядка

$$X_4^4 = \begin{vmatrix} x_{11}x_{12} \\ x_{21}x_{22} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{vmatrix}^{(4)}.$$

Запишем данный ЛО как блочный ЛО 2-го порядка, объединив первую строку со второй и третью с четвертой:

$$X_2^4 = \begin{vmatrix} B_2^1 & B_2^2 & B_2^3 & B_2^4 \\ C_2^1 & C_2^2 & & \end{vmatrix}^{(4)},$$

где

$$B_2^r = \begin{vmatrix} x_{11}x_{12} \\ x_{21}x_{22} \end{vmatrix}^{(r)}, \; r = 1, \dots, 4;$$

$$C_2^r = \begin{vmatrix} x_{31} \\ x_{41} \end{vmatrix}^{(r)}, \; r = 1, 2.$$

Раскроем теперь ЛО $X_2{}^4$ по формуле (3.7):

$$X_2^4 = B_2^2 \vee B_2^3C_2^2 \vee B_2^4C_2^1.$$

Остается подставить сюда выражения B_2^r из *примера 3* и значение определителя C_2^r:

$$C_2^r = \begin{cases} x_{31}x_{41}, & r = 1; \\ x_{31} \vee x_{41}, & r = 2. \end{cases}$$

Получаем окончательно выражение ЛО, сложность которого — 13 двухместных операций $\vee$ и $\wedge$ НЛ:

$$X_2^4 = x_{11}x_{22} \vee x_{12}x_{21} \vee (x_{12}x_{22} \vee x_{11} \vee x_{21}) \wedge \\ \wedge (x_{31} \vee x_{41}) \vee (x_{12} \vee x_{22})x_{31}x_{41}.$$

Раскрытие этого ЛО по формуле (3.7) дает выражение

$$X_2^4 = x_{11}x_{22} \vee x_{12}x_{21} \vee x_{11}x_{31} \vee x_{11}x_{41} \vee \\ \vee x_{21}x_{31} \vee x_{21}x_{41} \vee x_{12}x_{22}x_{31} \vee x_{12}x_{22}x_{41} \vee \\ \vee x_{12}x_{31}x_{41} \vee x_{22}x_{31}x_{41},$$

сложность которого — 23 операции.

Более конкретные правила разложения ЛО, когда однозначно указываются блоки, на которые разлагается ЛО, изложены ниже.

2. Назовем *логическим дополнением* элемента x_{ij} в ЛО X_q^r ЛО, полученный из X_q^r исключением элемента x_{ij}. Обозначим его $X_q^r \backslash x_{ij}$. ЛО-столбец r-го ранга с n элементами можно разложить поэлементно по следующей ДНФ:

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ \hline x_n \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i X_n^r \backslash x_i. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Раскрыв ЛО $X_n^r \backslash x_i$ в правой части по правилу (3.1), получим раскрытый по этому правилу ЛО левой части X_n^r.

Общий ЛО r-го ранга q-го порядка можно разложить поэлементно по ДНФ:

$$X_q^r = \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i,j} x_{ij} X_q^r \backslash x_{ij}. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Рассматривая ЛО X_q^r без учета упорядоченности элементов в строках (т. е. как ЛО-столбец), применяем к нему формулу (4.1).

Формулы (4.1), (4.2) задают разложения ЛО по элементам.

3. Пусть $X_q^r = \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qi_q}\ldots \end{matrix}\right|^{(r)}$ — общий бесконечный ЛО r-го ранга q-го порядка, а $X_{d,b}^s$ — это блок-ЛО s-го ранга, составленный из строк d, $d + 1$, ..., b ЛО X_q^r. Справедливо разложение ЛО по блокам:

$$X_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} X_{1,k_1}^{s_1} X_{k_1+1,k_2}^{s_2} \ldots X_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \qquad (4.3)$$

Доказательство. Представим X_q^r в блочном виде (2.9):

$$X_q^r = \left|\begin{matrix} X_{1,k_1}^{1} \ldots X_{1,k_1}^{i_1} \ldots \\ X_{k_1+1,k_2}^{1} \ldots X_{k_1+1,k_2}^{i_2} \ldots \\ \hdashline X_{k_{p-1}+1,q}^{1} \ldots X_{k_{p-1}+1,q}^{i_p} \ldots \end{matrix}\right|^{(r)}.$$

Рассматривая теперь блоки $X_{d,b}^s$ как элементы ЛО X_q^r, раскроем его по формуле (3.3). Получим соотношение (4.3).

Пусть $X_q^r = \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)}$ — общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка, а $X_{d,b}^s$ — см. выше. Тогда справедливо разложение ЛО по блокам:

$$X_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} \overset{M_1}{\breve{X}}{}_{1,k_1}^{s_1} \overset{M_2}{\breve{X}}{}_{k_1+1,k_2}^{s_2} \ldots \overset{M_p}{\breve{X}}{}_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \qquad (4.4)$$

Здесь M_i — это число элементов в соответствующем блок-ЛО $X_{d,b}^{s_i}$, а запись $\overset{M_i}{\breve{X}}{}_{d,b}^{s_i}$ означает, что ЛО $X_{d,b}^{s_i}$ не входит в те конъюнкции, для которых из условия на Σs_i получается $s_i > M_i$. Доказательство повторяет доказательство разложения (4.3), но с раскрытием ЛО по формуле (3.7).

4. Разложения (2.9), (4.1)—(4.4) составляют основу *иерархических процедур раскрытия ЛО.* В такой процедуре 1-й шаг — это разложение вычисляемого ЛО $X_q^r = |X_{ij}|_q^r$ по одной из формул (2.9), (4.1)—(4.4) на блоки-ЛО низшего порядка; 2-й шаг — разложение получившихся ЛО на ЛО еще более низкого порядка и т. д., пока не придем к выражению исходного ЛО через ЛО 1 порядка, т. е. элементы x_{ij}. Иерархическая процедура раскрытия ЛО показана выше в примере 4.

Трудоемкость такой процедуры и сложность получаемого выражения ЛО зависят от формулы разложения ЛО и способа его разделения на блоки. Наибольший эффект достигается при использовании поблочных разложений с делением на каждом шаге имеющихся ЛО на два равновеликих. При этом формулы разложения бесконечного (4.3) и конечного (4.4) ЛО принимают соответственно вид:

$$X_q^r = \bigvee_{i+j=r+1} X_{1,]q/2[}^{i} X_{]q/2[+1,q}^{j}; \qquad (4.5)$$

$$X_q^r = \bigvee_{i+j=r+1} \overset{M_1}{\breve{X}}{}_{1,]q/2[}^{i} \overset{M_2}{\breve{X}}{}_{]q/2[+1,q}^{j}$$

$$(]a[\text{ — целая часть } a). \qquad (4.6)$$

Получаемые по ним выражения ЛО обладают сложностью

$$\tilde{N}_q^r = r^2(q-1) + 2r - 1; \qquad (4.7)$$

$$\tilde{N}_q^r = krn,\ k \leqslant 2\ (k = \text{const}). \qquad (4.8)$$

Оценка (4.8) получена в предположении одинакового числа элементов m во всех q строках ЛО; в ней n — общее число элементов ($n = mq$). Использование дихотомических блочных разложений (4.5), (4.6) обеспечивает раскрытие больших ЛО с приемлемой сложностью вычислений.

5. При раскрытии особенно больших ЛО получаемые с помощью разложений (4.5), (4.6) выражения ЛО могут оказаться недопустимо сложными. В таких случаях целесообразно приближенное раскрытие ЛО, основанное на получении двусторонних аналитических оценок значения ЛО. Эти оценки имеют следующий вид:

для ЛО-столбца

$$\begin{gathered}(x_1 \ldots x_{n-r+1}) \vee (x_{n-r+2} \ldots x_{2(n-r+1)}) \vee \ldots \\ \ldots \vee (x_{(M_1-1)(n-r+1)} \ldots x_{M_1(n-r+1)}) \vee \\ \vee (x_r \ldots x_n) \leqslant \left|\begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix}\right|^{(r)} \leqslant \\ \leqslant (x_1 \vee \ldots \vee x_r) \wedge (x_{r+1} \vee \ldots \vee x_{2r}) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge (x_{(M_2-1)r+1} \vee \ldots \vee x_{M_2 r}) \wedge (x_{n-r+1} \vee \ldots \vee x_n),\end{gathered} \qquad (4.9)$$

где $M_1 =]n/(n - r + 1)[$, $M_2 =]n/r[$;

для общего бесконечного ЛО

$$x_{1l} \wedge \ldots \wedge x_{ql} \leqslant \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qi_q}\ldots \end{matrix}\right|^{(r)} \leqslant x_{1l} \vee \ldots \vee x_{ql}, \qquad (4.10)$$

где $l = [r/q]$ и $[\cdot]$ — символ округления до ближайшего большего целого числа;

для общего конечного ЛО

$$\overset{m_1}{\breve{x}}_{1d_1} \wedge \ldots \wedge \overset{m_q}{\breve{x}}_{qd_q} \leqslant \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} \leqslant x_{1l_1} \vee \ldots \vee x_{ql_q}, \quad (4.11)$$

где

$$d_p = \left]\frac{(q+r-1)m_p}{\sum\limits_{i=1}^{q} m_i}\right[, \; l_p = \left[\frac{rm_p}{\sum\limits_{i=1}^{q} m_i}\right], \; p = 1, \ldots, q.$$

Данные оценки позволяют получать приближенные выражения ЛО со сложностью, пропорциональной размерам ЛО, что делает возможным вычисление ЛО практически неограниченных размеров.

Пример 5. Оценим ЛО X_4^4 из примера 4. Так, $d_1 = d_2 =]7\cdot 2/6[= 2$, $d_3 = d_4 =]7\cdot 1/6[= 1$, $l_1 = l_2 = [4\cdot 2/6] = 2$, $l_3 = l_4 =]4\cdot 1/6] = 1$, и искомые оценки имеют вид:

$$x_{12}x_{22}x_{31}x_{41} \leqslant X_4^4 \leqslant x_{12} \vee x_{22} \vee x_{31} \vee x_{41}.$$

Сложность их совместного вычисления — в наличии шести операций, а точность зависит от численных значений x_{ij}. Например, если $x_{12} = x_{22} = 10$, $x_{31} = x_{41} = 11$, то имеем оценки $10 \leqslant X_4^4 \leqslant 11$, погрешность которых 10 %.

Заключение

Настоящая работа содержит математическую часть выполненных исследований по теории надежности систем. В ней описан математический аппарат создаваемой автором логической теории надежности сложных систем, так называемые логические определители. Изложена также общая методика и конкретные методы использования указанного аппарата для вычисления характеристик надежности сложных систем, сопровождаемые содержательными примерами. Далее на основе разработанного математического аппарата логической теории надежности решены задачи построения аналитических формул для вычисления характеристик надежности нескольких классов сложных систем произвольно высокой размерности.

Данная работа продолжает цикл исследований автора, посвященный математическому аппарату логической теории надежности. От опубликованных ранее работ автора [6—13] статья существенно отличается использованием нового оригинального математического аппарата логических определителей. Это позволило принципиально упростить как вычисление характеристик надежности сложных систем, так и анализ их надежностного поведения, причем эти операции оказались применимы в равной степени как к низкоразмерным, так и к высокоразмерным системам.

Список литературы

1. **Lloyd D. K., Lipov M.** Reliability: Management, Methods and mathematics. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1962. 528 p.
2. **Barlow R. E., Proshan F.** Mathematical Theory of Reliability. N.-Y.: John Wiley and Sons, 1965.
3. **Reinschke K.** Modelle Zur Zuverlssigkeits- und Empfindlichkeitsanalyse von Systemen. Berlin, Technik, 1979 (in German).
4. **Левин Б. Р.** Теория надежности радиотехнических систем. М.: Советское радио, 1978. 264 с.
5. **Левин В. И.** Динамика конечных автоматов и надежность сложных систем // Автоматика и вычислительная техника. 1976. № 6. С. 17—24.
6. **Левин В. И.** Динамические автоматы и надежность технических систем. I // Электронное моделирование. 1980. № 4. С. 12—17.
7. **Левин В. И.** Динамические автоматы и надежность технических систем. II // Электронное моделирование. 1980. № 5. С. 63—72.
8. **Левин В. И.** Логические методы в теории надежности. I // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2009. Т. 15, № 4. С. 873—884.
9. **Левин В. И.** Логические методы в теории надежности. II // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2010. Т. 16, № 1. С. 119—132.
10. **Левин В. И.** Логические методы расчета надежности систем. I // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 2. С. 182—195.
11. **Левин В. И.** Логические методы расчета надежности систем. II // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 3. С. 84—97.
12. **Левин В. И.** Логические методы в теории надежности сложных систем. I // Вестник Тамбовского университета. 2011. Т. 16, № 5. С. 15—28.
13. **Левин В. И.** Логические методы в теории надежности сложных систем. II // Вестник Тамбовского университета. 2011. Т. 16, № 6. С. 25—39.
14. **Безопасность** и надежность технических систем. М.: Университетская книга, Логос, 2008. 376 с.
15. **Викторова В. С., Степанянц А. С.** Модели и методы расчета надежности технических систем. М.: Ленанд, 2014. 256 с.
16. **Хан Дж. Дж., Догановский Н., Мир Уи. К.** Анализ надежности с учетом видов отказов // Методы менеджмента качества. 2013. № 6.
17. **Бусленко Н. П.** Математическое моделирование производственных процессов на ЦВМ. М.: Наука, 2010.
18. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.** Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 2010. 524 с.
19. **Капур К., Ламберсен Л.** Надежность и проектирование систем. М.: Мир, 2010. 504 с.
20. **Максимов Я. А.** Технология моделирования надежности информационных систем // В мире научных открытий. 2009. № 1.
21. **Половко А. М., Гуров С. В.** Основы теории надежности. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 702 с.
22. **Рябинин И. А.** Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2007.
23. **Острейковский В. А.** Теория надежности. Учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 2008.
24. **O'Connor P., Kleyner A.** Practical Reliability Engineering. N.-Y.: Wiley, 2012.

V. I. Levin, D. Sc., Professor, e-mail: vilevin@mail.ru,
Penza State Technological University, Penza, Russian Federation

Continuous Logic and Analysis of Reliability of Complex Systems. Mathematical Means

In recent years the increasing attention of scientists and designers of technical systems has been acquiring the issues of improving methods for assessing the reliability and safety of these systems, in connection with tasks of increasing the values of these characteristics. The purpose of the article is to develop an automata-logical model of reliability of complex technical systems and corresponding logical methods for evaluating the reliability of such systems, which, unlike known ones, use not the traditional probabilistic reliability indicators, but deterministic logical indicators. In order to achieve this goal, the article suggests using the observed moments of successive failures and recovery of the elements of the technical system as initial data, and as the reliability characteristics of the system itself the moments of successive failures and recovery of this system. In this case, the problem of estimating the reliability of a system is reduced to constructing its mathematical model in the form of automata logical functions expressing the moments of its successive failures and reconstructions through analogous moments of all its elements. This article is the first part of the work in which an automata-logical model designed to calculate the logical function of reliability of complex technical systems is developed in detail. The novelty of the work is the construction of an adequate logical model of the reliability of complex system, which makes it possible to reduce the estimation of reliability of a complex technical system to the calculation of its logical reliability functions. In the process of calculation, the mathematical apparatus of logical determinants is used for the first time, which allows us to solve the complexity problem. In the article the logical model of reliability and methods of its investigation are developed in detail, allowing to introduce new indicators of reliability of complex technical systems that do not require for their evaluation the use of probabilistic methods and initial statistical data on element failures. On the basis of the developed logical model of reliability and methods of its investigation, the problem of constructing an automata system for reliability of systems is solved, which will allow to fulfill practical calculations of complex technical systems by methods of the theory of dynamic automata using the apparatus of logical determinants.

Keywords: *complex system, switching process, reliability process, dynamical automaton, binary operator, structure of operator, logical theory of reliability*

DOI: 10.17587/it.25.195-204

References

1. **Lloyd D. K., Lipov M.** Reliability: Management, Methods and math-ematics, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1962, 528 p.
2. **Barlow R. E., Proshan F.** Mathematical Theory of Reliability, N.-Y., John Wiley and Sons, 1965.
3. **Reinschke K.** Modelle Zur Zuverlssigkeits- und Empfindlichkeitsana-lyse von Systemen, Berlin, Technik, 1979 (in German).
4. **Levin B. R.** *Teoriya nadezhnosti radiotehnicheskih system* (Theory of reliability of radio systems), Moscow, Sovetskoe radio, 1978. 264 p. (in Russian).
5. **Levin V. I.** *Dinamika konechnyh avtomatov i nadezhnost' slozhnyh system* (Dynamics of finite automata and reliability of complex systems), *Avtomatika i Vychislitel'naya Tehnika*, 1976, no. 6, pp. 17—24 (in Russian).
6. **Levin V. I.** *Dinamicheskie avtomaty i nadezhnost' tehnicheskih sistem. I* (Dynamic automata and reliability of technical systems. I), *Elektronnoe Modelirovanie*, 1980, no. 4, pp. 12—17 (in Russian).
7. **Levin V. I.** Dinamicheskie avtomaty i nadezhnost' tehnicheskih sistem. II (Dynamic automata and reliability of technical systems. II), *Elektronnoe Modelirovanie*, 1980, no. 5, pp. 63—72 (in Russian).
8. **Levin V. I.** *Logicheskie metody v teorii nadezhnosti. I* (Logical methods in the theory of reliability. I), *Vestnik Tambovskogo Gosudarstvennogo Tehnicheskogo Universiteta*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 873—884 (in Russian).
9. **Levin V. I.** *Logicheskie metody v teorii nadezhnosti. II* (Logical methods in the theory of reliability. II), *Vestnik Tambovskogo Gosudarstvennogo Tehnicheskogo Universiteta*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 119—132 (in Russian).
10. **Levin V. I.** *Logicheskie metody rascheta nadezhnosti sistem. I* (Logical methods for calculating the reliability of systems. I), *Sistemy Upravleniya, Svyazi i Bezopasnosti,* 2017, no. 2, pp. 182—195 (in Russian).
11. **Levin V. I.** *Logicheskie metody rascheta nadezhnosti sistem. II* (Logical methods for calculating the reliability of systems. II), *Sistemy Upravleniya, Svyazi i Bezopasnosti,* 2017, no. 3, pp. 84—97 (in Russian).
12. **Levin V. I.** *Logicheskie metody v teorii nadezhnosti slozhnyh sistem. I* (Logical methods in the theory of reliability of complex systems. I), *Vestnik Tambovskogo Universiteta*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 15—28 (in Russian).
13. **Levin V. I.** *Logicheskie metody v teorii nadezhnosti slozhnyh sistem. II* (Logical methods in the theory of reliability of complex systems. II), *Vestnik Tambovskogo Universiteta*, 2011, vol. 16, no. 6, pp. 25—39 (in Russian).
14. ***Bezopasnost'*** *i nadezhnost' tehnicheskih system* (Safety and reliability of technical systems), Moscow, Universitetska kniga, Logos, 2008, 376 p. (in Russian).
15. **Viktorova V. S., Stepanânc A. S.** Modeli i metody raseta nadezhnosti tehnicheskih system (Models and methods for calculating the reliability of technical systems), Moscow, Lenand, 2014, 256 p. (in Russian).
16. **Han Dž. Dž., Doganovskij N., Mir Ui. K.** *Analiz nadezhnosti s uchetom vidov otkazov* (Reliability analysis based on failure modes), *Metody Menedzhmenta Kachestva*, 2013, no. 6. (in Russian).
17. **Buslenko N. P.** *Matematicheskoe modelirovanie proizvodstvennyh processov na CVM* (Mathematical modeling of production processes on digital computers), Moscow, Nauka, 2010. (in Russian).
18. **Gnedenko B. V., Belâev Û. K., Solov'ev A. D**. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* (Mathematical methods in the theory of reliability), Moscow, Nauka, 2010, 524 p. (in Russian).
19. **Kapur K., Lambersen L.** *Nadezhnost' i proektirovanie system* (Reliability and system design), Moscow, Mir, 2010, 504 p. (in Russian).
20. **Maksimov Â. A.** *Tehnologiya modelirovaniya nadezhnosti informacionnyh system* (Information systems reliability modeling technology), *V Mire Nauchnyh Otkrytij,* 2009, no. 1. (in Russian).
21. **Polovko A. M., Gurov S. V.** *Osnovy teorii nadezhnosti* (Fundamentals of the theory of reliability), SPb., BHV-Peterburg, 2006, 702 p. (in Russian).
22. **Râbinin I. A.** *Nadezhnost' i bezopasnost' strukturno-slozhnyh system* (Reliability and safety of structurally complex systems), SPb., Publishing house of Sankt-Peterburgskii un-t, 2007. (in Russian).
23. **Ostrejkovskij V. A.** *Teoriya nadezhnosti* (Theory of Reliability), Moscow, Vyssha shkola, 2008. (in Russian).
24. **O'Connor P., Kleyner A.** Practical Reliability Engineering, N.-Y., Wiley, 2012.