УДК 514.18 DOI: 10.17587/it.25.46-51

Е. В. Конопацкий, канд. техн. наук, доц., e-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru,
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

Аппроксимация геометрических объектов с помощью дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки

Рассматривается способ аппроксимации геометрических объектов многомерного аффинного пространства с помощью дуг алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, который позволяет существенно уменьшить аналитическое описание многофакторных процессов и явлений. Приводится пример использования предложенного способа аппроксимации для аналитического описания геометрической модели распределения прочностных характеристик по всему объему бетонной колонны.

Ключевые слова: *аппроксимация, геометрический объект, геометрическое моделирование, дуга кривой, наперед заданные точки, многомерная интерполяция, факторы влияния, функция отклика, точечное уравнение, точность аппроксимации, коэффициент детерминации*

Введение

В инженерной практике и научной работе постоянно возникает необходимость моделирования и аналитического описания многофакторных процессов и явлений на основе экспериментальных и статистических данных для их анализа, прогнозирования и оптимизации результатов моделирования. Для решения этой задачи широко используются методы аппроксимации и интерполяции. Общая концепция моделирования геометрических объектов методом многомерной интерполяции применительно к решению задач моделирования и оптимизации многофакторных процессов и явления была изложена в работе [1]. Однако итоговый результат моделирования таких объектов, включающий в себя большое количество исходных данных, может иметь значительный размер, что с одной стороны не является неразрешимой проблемой, учитывая мощность современной вычислительной техники, но с другой стороны, это значительно затрудняет анализ и дальнейшее использование результатов моделирования. Одним из выходов из этой ситуации является использование аппроксимации геометрических объектов. При этом следует учитывать сложность визуального восприятия многомерного пространства, что приводит к необходимости использования не зрительной, но логической наглядности, основанной на методах обобщения и аналогии.

В соответствии с определением [2] под аппроксимацией следует понимать замену одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. В данном случае под аппроксимацией будем понимать замену одних геометрических объектов другими, имеющими одинаковое число текущих параметров с исходными объектами. К примеру, дуга кривой как однопараметрическое множество точек имеет один текущий параметр, и аппроксимирующий ее геометрический объект также должен быть однопараметрическим множеством точек. Аналогичным образом отсек поверхности как двухпараметрическое множество точек аппроксимируется другим отсеком поверхности и т. д.

На данный момент существует достаточно большое число методов аппроксимации, классифицированных в работе [3]. Существенным их недостатком является сложность обобщения на многомерное пространство, в котором можно моделировать многофакторные процессы и явления практически не имеющие ограничений по числу моделируемых факторов. С практической точки зрения широкое распространение получил метод наименьших квадратов, на котором основаны другие методы (например, регрессионный анализ [4]). К недостаткам таких методов можно отнести слабую устойчивость по отношению к изменениям исходных данных. Среди алгоритмов машинной графики [5, 6] широкое распространение получили аппроксимационные алгоритмы на основе составных кривых, к которым относятся различные сплайны [7] и обводы [8—10]. Главным недостатком использования составных кривых для моделирования многофакторных процессов и явлений является использование равномерной сети точек и связанная с этим сложность использования в многомерном пространстве. Другим недостатком составных кривых является требование к порядку гладкости стыковки дуг между собой, хотя этот недостаток применительно к геометрическому моделированию процессов и явлений можно считать весьма условным. Также к недостаткам составных кривых следует отнести невозможность прогнозирования поведения функции отклика в случае, когда факторы влияния выходят за пределы исследуемой области. Резюмируя, можно сделать вывод о том, что любой метод моделирования имеет свои преимущества и недостатки. Наибольшее же значение имеет целесообразность применения того или иного метода для решения конкретной практической задачи.

В работе [1] для моделирования геометрических объектов методом многомерной интерполяции используются дуги алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, модифицированные на основе полиномов Бернштейна [11, 12]. Эти же дуги кривых могут быть эффективно использованы для аппроксимации геометрических объектов многомерного аффинного пространства. Тогда задача сводится к определению узловых точек аппроксимации. В некоторых случаях их можно выделить из имеющихся узлов интерполяции.

Модель распределения прочностных характеристик в бетонной колонне, полученная методом многомерной интерполяции

Рассмотрим в качестве примера моделирование распределения прочностных характеристик по всему объему бетонной колонны. С точки зрения геометрического моделирования этот процесс можно представить в виде гиперповерхности отклика, принадлежащей четырехмерному пространству, которая определяется тремя факторами, влияющими на процесс. В качестве факторов влияния используются координаты x, y и z, определяющие положение искомой точки по всему объему бетонной колонны, а в качестве функции отклика — показатели соотношения характеристик бетона к показателям характеристик стандартных образцов в процентах. Изначально постановка задачи и первый вариант ее решения были опубликованы в работах [11, 13]. Однако предложенное решение основывалось на том аппарате моделирования, который был развит в то время и имело ряд ограничений. Более прогрессивным и качественным оказалось решение с использованием метода многомерной интерполяции и дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, предложенное в работе [14], в соответствии с которым процесс моделирования был разбит на три этапа.

1 этап. Определение направляющих линий 1-го яруса (рис. 1) с помощью дуг кривых 4-го порядка, проходящих через пять наперед заданных точек:

$$M_{11} = M_{15} = af_1 + be_1 + cd_1 + de_1 + ef_1;$$
$$M_{12} = M_{14} = ae_1 + bc_1 + cb_1 + dc_1 + ee_1;$$
$$M_{13} = ad_1 + bb_1 + ca_1 + db_1 + ed_1,$$

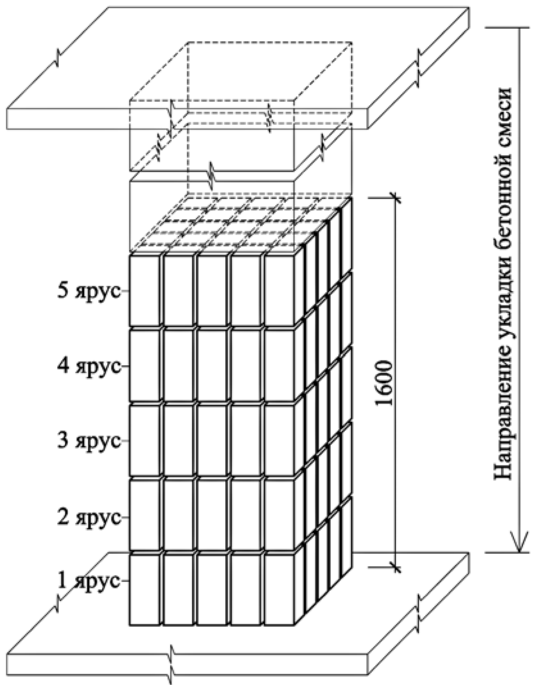

Рис. 1. Схема расположения вертикальных ярусов выпиленных образцов

где

$$a = \overline{u}^4 - \frac{13}{3}\overline{u}^3 u + \frac{13}{3}\overline{u}^2 u^2 - \overline{u}u^3;$$

$$b = 16\overline{u}^3 u - \frac{64}{3}\overline{u}^2 u^2 + \frac{16}{3}\overline{u}u^3;$$

$$c = -12\overline{u}^3 u + 40\overline{u}^2 u^2 - 12\overline{u}u^3;$$

$$d = \frac{16}{3}\overline{u}^3 u - \frac{64}{3}\overline{u}^2 u^2 + 16\overline{u}u^3;$$

$$e = -\overline{u}^3 u + \frac{13}{3}\overline{u}^2 u^2 - \frac{13}{3}\overline{u}u^3 + u^4;$$

u — текущий параметр дуги кривой 4-го порядка, проходящей через пять наперед заданных точек; $\overline{u} = 1 - u$ — дополнение параметра до 1; $0 \leqslant u \leqslant 1$; a_i, b_i, c_i, d_i, f_i, e_i — значения прочностных характеристик (i — номер яруса, для первого яруса $i = 1$) (рис. 2).

Экспериментальные значения прочностных характеристик, которые являются функциями отклика, приводятся в работах [11, 13—14].

2 этап. Точечное уравнение образующей поверхности отклика для 1-го яруса:

$$M_1 = M_{11}\left(\overline{v}^4 - \frac{13}{3}\overline{v}^3 v + \frac{13}{3}\overline{v}^2 v^2 - \overline{v}v^3\right) +$$

$$+ M_{12}\left(16\overline{v}^3 v - \frac{64}{3}\overline{v}^2 v^2 + \frac{16}{3}\overline{v}v^3\right) +$$

$$+ M_{13}\left(-12\overline{v}^3 v + 40\overline{v}^2 v^2 - 12\overline{v}v^3\right) +$$

$$+ M_{14}\left(\frac{16}{3}\overline{v}^3 v - \frac{64}{3}\overline{v}^2 v^2 + 16\overline{v}v^3\right) +$$

$$+ M_{15}\left(-\overline{v}^3 v + \frac{13}{3}\overline{v}^2 v^2 - \frac{13}{3}\overline{v}v^3 + v^4\right),$$

где $\overline{v} = 1 - v$; $0 \leqslant v \leqslant 1$.

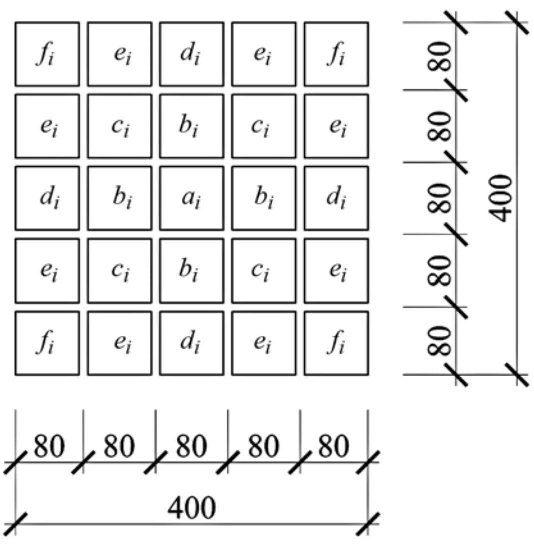

Рис. 2. Схема расположения, адресации и размеров выпиленных образцов на плане

Остальные точечные уравнения четырех поверхностей отклика, соответствующие 2, ..., 5 ярусам (см. рис. 1), определяются аналогичным образом. В уравнениях изменяются только индексы значений прочностных характеристик.

3 этап. Определение гиперповерхности отклика, для которой направляющими являются текущие точки образующих поверхностей отклика с первого по пятый ярус включительно:

$$M = M_1\left(\overline{w}^4 - \frac{13}{3}\overline{w}^3 w + \frac{13}{3}\overline{w}^2 w^2 - \overline{w}w^3\right) +$$

$$+ M_2\left(16\overline{w}^3 w - \frac{64}{3}\overline{w}^2 w^2 + \frac{16}{3}\overline{w}w^3\right) +$$

$$+ M_3\left(-12\overline{w}^3 w + 40\overline{w}^2 w^2 - 12\overline{w}w^3\right) +$$

$$+ M_4\left(\frac{16}{3}\overline{w}^3 w - \frac{64}{3}\overline{w}^2 w^2 + 16\overline{w}w^3\right) +$$

$$+ M_5\left(-\overline{w}^3 w + \frac{13}{3}\overline{w}^2 w^2 - \frac{13}{3}\overline{w}w^3 + w^4\right),$$

где $\overline{w} = 1 - w$; $0 \leqslant w \leqslant 1$.

Таким образом, получаем вычислительный точечный алгоритм моделирования отсека гиперповерхности отклика, проходящей через 125 наперед заданных точек, который определяется тремя параметрами: u, v и w, которые соответствуют трем факторам влияния. Итоговое точечное уравнение с учетом исходных экспериментальных данных в работе [14] не было приведено из-за большого его объема, а результат был представлен в виде вычислительного алгоритма геометрической модели. Следует также отметить, что все представленные выше точечные уравнения получены в рамках математического аппарата БН-исчисление (точечное исчисление Балюбы—Найдыша) [15—17]. Для перехода от точечных уравнений, которые являются символьной записью, к системе параметрических уравнений необходимо выполнить покоординатный расчет, отчего объем вычислений увеличится в четыре раза. Однако используя равномерное распределение параметра, заложенное при определении точечных уравнений дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, можно перейти от значений параметров u, v и w, которые изменяются от 0 до 1, к натуральным значениям факторов влияния x, y и z. Это позволит существенно сократить вычислительный алгоритм, а с учетом аппроксимации и вообще представить его в виде одного итогового уравнения.

Аппроксимация модели распределения прочностных характеристик в бетонной колонне

Учитывая симметричное расположение значений функции отклика в плане (рис. 2), воспользуемся для аппроксимации дугой кривой 2-го порядка, проходящей через три наперед заданные точки, которая описывается следующим точечным уравнением:

$$M = A_1\bar{u}(1-2u) + 4\bar{u}uA_2 + A_3u(2u-1),$$

где A_i — исходные точки дуги кривой 2-го порядка.

В результате получим следующий вычислительный алгоритм, состоящий из трех этапов.

1 этап. Определение направляющих линий для 1-, 3- и 5-го ярусов (см. рис. 1):

$$\begin{gathered} M_{11} = M_{13} = 4d_1\bar{u}u + f_1(1-4\bar{u}u); \\ M_{12} = 4a_1\bar{u}u + d_1(1-4\bar{u}u); \\ M_{31} = M_{33} = 4d_3\bar{u}u + f_3(1-4\bar{u}u); \\ M_{32} = 4a_3\bar{u}u + d_3(1-4\bar{u}u); \\ M_{51} = M_{53} = 4d_5\bar{u}u + f_5(1-4\bar{u}u); \\ M_{52} = 4a_5\bar{u}u + d_5(1-4\bar{u}u). \end{gathered}$$

2 этап. Точечные уравнения образующих поверхностей отклика для 1-, 3- и 5-го ярусов:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{11}\bar{v}(1-2v) + 4\bar{v}vM_{12} + M_{13}v(2v-1); \\ M_3 &= M_{31}\bar{v}(1-2v) + 4\bar{v}vM_{32} + M_{33}v(2v-1); \\ M_5 &= M_{51}\bar{v}(1-2v) + 4\bar{v}vM_{52} + M_{53}v(2v-1). \end{aligned}$$

3 этап. Определение гиперповерхности отклика:

$$\frac{E_b^{э}}{E_b} = M_1\bar{w}(1-2w) + 4\bar{w}wM_3 + M_5w(2w-1),$$

где $\frac{E_b^{э}}{E_b}$ — показатель соотношения характеристик бетона, отнесенный к показателю характеристик стандартных образцов [14].

После подстановок и преобразований с учетом экспериментальных данных из работы [14] получим геометрическую модель гиперповерхности отклика, принадлежащую четырехмерному пространству, которая определяется тремя параметрами: u, v и w:

$$\begin{gathered} \frac{E_b^{э}}{E_b} = 123,5 - 92wu^2 + 92wu + 92wv - 92wv^2 + \\ + 51,2w^2u^2 - 51,2w^2u - 51,2w^2v + 51,2w^2v^2 + \\ + 518,4w^2u^2v + 518,4w^2uv^2 - 745,6wu^2v + \\ + 745,6wu^2v^2 - 518,4w^2u^2v^2 - 745,6wuv^2 + \\ + 745,6wuv - 518,4w^2uv - 90,6w + 59,2w^2. \end{gathered}$$

Для перехода от значений параметров к натуральным значениям факторов с учетом равномерности распределения параметра были получены следующие линейные зависимости:

$$\begin{cases} x = 320u; \\ y = 320v; \\ z = 1280w. \end{cases}$$

Таким образом, получим зависимость $\frac{E_b^{э}}{E_b} = f(x, y, z)$. Следует отметить, что в данном случае в качестве примера используется только один столбец экспериментальных данных, приведенных в работе [14]. Остальные две геометрических модели можно получить аналогичным образом, используя предложенный в статье вычислительный алгоритм и соответствующий столбец данных.

Оценка точности аппроксимации геометрической модели

Для оценки точности аппроксимации и проверки достоверности полученных моделей существует достаточно много различных критериев, к которым относятся коэффициент детерминации, стандартная ошибка модели, средняя относительная ошибка аппроксимации и т. п. Однако работ, посвященных оценке достоверности геометрических моделей с учетом их специфики, автору найти не удалось. Наиболее часто в литературе встречается точность аппроксимации применительно к методам математической статистики (например, к регрессионному анализу). В работе [18] предлагается для проверки адекватности и точности полученной модели процесса ниточного соединения использовать критерий Стьюдента и величину относительной погрешности. Однако эти критерии скорее учитывают специфику проверки достоверности самих экспериментальных данных на предмет случайных ошибок, чем специфику геометрических моделей. В сложившейся ситуации воспользуемся различными критериями математической статистики для оценки точности аппроксимации геометрической модели и сравним результаты.

В общем, точность любой модели характеризуется разностью между фактическими и расчетными значениями исследуемого показателя. Такой мерой точности является стандартная ошибка модели $S_{\text{мод}}$, которую можно вычислить по формуле:

$$S_{\text{мод}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}},$$

где $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ — сумма квадратов регрессионных остатков, которая включает фактические y_i и расчетные $\hat{y}_i$ значения исследуемой переменной.

Однако наиболее удобно оценивать точность модели с помощью средней относительной ошибки аппроксимации $E_{\text{отн}}$, которая показывает, на сколько процентов в среднем модельные значения $\hat{y}_i$ отличаются от фактических y_i:

$$E_{\text{отн}} \approx 0{,}8\frac{S_{\text{мод}}}{\bar{y}}100\ \%,$$

где $\bar{y}$ — выборочное среднее.

Если $E_{\text{отн}} \leqslant 5\ \%$, то считается, что модель имеет достаточно высокую точность. В нашем случае $E_{\text{отн}} = 2{,}16\ \%$.

Кроме того, для оценки адекватности полученной модели был использован коэффициент детерминации R^2, определяемый по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2},$$

где $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ — общая дисперсия.

Коэффициент детерминации для модели принимает значения от 0 до 1. Чем ближе значение коэффициента к 1, тем сильнее зависимость. При оценке геометрических моделей будем это интерпретировать как соответствие полученной модели исходным экспериментальным (или статистическим) данным. Для приемлемых моделей предполагается, что коэффициент детерминации должен быть хотя бы не меньше 50 %. Модели с коэффициентом детерминации выше 80 % можно признать достаточно хорошими. Равенство коэффициента детерминации 1 означает, что было достигнуто полное соответствие между геометрической моделью и исходными данными. В нашем случае коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}94$.

Таким образом, вне зависимости от выбора критериев адекватности геометрической модели, заимствованных из математической статистики, в данном случае была достигнута очень хорошая сходимость между геометрической моделью и исходными экспериментальными данными.

Заключение

В работе предложен способ аппроксимации геометрических объектов многомерного аффинного пространства с помощью дуг алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки. В качестве примера использовалась геометрическая модель распределения прочностных характеристик по всему объему бетонной колонны. Также были исследованы способы оценки точности аппроксимации геометрических моделей. Для этого были использованы методы математической статистики. В результате была достигнута очень хорошая сходимость между геометрической моделью и исходными экспериментальными данными (средняя относительная ошибка аппроксимации $E_{\text{отн}} = 2{,}16\ \%$ составила при коэффициенте детерминации $R^2 = 0{,}94$). К преимуществам использования дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, для аппроксимации геометрических объектов многомерного пространства следует отнести то, что часть исходных точек участвует в процессе аппроксимации в качестве узловых. Это способствует достижению высоких показателей точности аппроксимации. Вместе с тем к недостаткам предложенного способа можно отнести отсутствие методики выбора узловых точек аппроксимации из массива исходных данных. Это является перспективой дальнейших исследований.

Список литературы

1. **Конопацкий Е. В.** Геометрическое моделирование и оптимизация многофакторных процессов и явлений методом многомерной интерполяции // Тр. Междунар. науч. конф. по физико-технической информатике CPT2018, 28—31 мая 2018 г. Москва-Протвино, 2018. С. 299—306.

2. **Математика:** Энциклопедия / Под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. 845 с.

3. **Голубинский А. Н.** Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей // Вестник ВИ МВД России. 2007. № 2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/

metody-approksimatsii-eksperimentalnyh-dannyh-i-postroeniya-modeley (дата обращения: 22.07.2018).

4. **Шашков В. Б.** Прикладной регрессионный анализ. Многофакторная регрессия: Учеб. пособ. Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2003. 363 с.

5. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений / Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Кн. 2. 480 с.

6. **Роджерс Д., Адамс Дж.** Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 605 с.

7. **Квасов Б. И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 360 с.

8. **Иванов Г. С.** Конструирование одномерных обводов, принадлежащих поверхностям, путем их отображения на плоскость // Геометрия и графика. 2018. Т. 6, № 1. С. 3—9. DOI: 10.12737/ article_5ad07ed61bc114.52669586.

9. **Крысько А. А., Конопацкий Е. В., Чураков А. Я.** Геометрические основы конструирования одномерного обвода через *k* наперед заданных точек в БН-исчислении // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. Вып. 4. С. 76—81.

10. **Крысько А. А.** Геометрическое и компьютерное моделирование эксплуатируемых конструкций тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учетом несовершенств геометрической формы: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01, 05.01.01. Макеевка, 2016. 191 с.

11. **Конопацький Є.В.** Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Мелітополь, 2012. 164 с.

12. **Бумага А. И.** Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов в БН-исчислении: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05, 05.01.01. Макеевка, 2016. 164 с.

13. **Югов А. М., Булавицький М. С., Конопацький Є.В.** Визначення міцнісних та деформативних властивостей важкого бетону по об'єму монолітних колон при їх обстеженні // Дороги і мости: Збірник наукових праць. К.: ДерждорНДІ, 2009. Вип. 11. С. 372—379.

14. **Конопацкий Е. В., Воронова О. С.** Геометрическая модель процесса распределения прочностных характеристик в бетонной колонне // Прикладная математика и вопросы управления. Пермь: ПНИПУ, 2017. № 1. С. 37—44.

15. **Балюба И. Г.** Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01. Макеевка, 1995. 227 с.

16. **Найдыш В. М., Балюба И. Г., Верещага В. М.** Алгебра БН-исчисления // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. К.: КНУБА, 2012. Вип. 90. С. 210—215.

17. **Балюба И. Г., Найдыш В. М.** Точечное исчисление: Учеб. пособие; под ред. В. М. Верещаги. Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. 236 с.

18. **Чижик М. А.** Методология параметрического проектирования технологических процессов швейного производства на основе многомерного геометрического моделирования: дис. ... докт. техн. наук: 05.19.04. СПб., 2018. 272 с.

E. V. Konopatskiy, Assistant Professor, e-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka

Approximation of Geometric Objects Using Arcs of Curves Passing through to Advance Given Points

The paper proposes a method for approximating geometric objects of multidimensional affine space using arcs of algebraic curves passing through to advance given points. As an example, we used a geometric model of the distribution by strength characteristics over the entire volume of a concrete column. The estimation methods of accuracy the approximation of geometrical models were also investigated. Methods of mathematical statistics were used for this purpose. As a result, a very good convergence between the geometric model and the initial experimental data was achieved (the average relative approximation error was E_{real} = 2,16 % at the determination coefficient R^2 = 0,94). The advantages of using the arcs curves passing through the predetermined points for the approximation the geometric objects of multidimensional space include the fact that part of the initial points is involved in the process of approximation as nodal. This contributes to the achievement of high approximation accuracy. On the other hand, the disadvantages of the proposed method include the lack of a technique for selecting nodal approximation points from the array of initial data. This is a prospect for further research.

Keywords: *approximation, geometric object, geometric modeling, the arc of the curve, passing through to advance given points, multidimensional interpolation, factors of influence, the response function, point equation, approximation accuracy, the coefficient of determination*

DOI: 10.17587/it.25.46-51

References

1. **Konopackij E. V.** *Geometricheskoe modelirovanie i optimizaciya mnogofaktornyx processov i yavlenij metodom mnogomernoj interpolyacii* (Geometric modeling and optimization of multifactorial processes and phenomena by the method of multidimensional interpolation), *Trudy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii po fiziko-texnicheskoj informatike CPT2018*, Moskva-Protvino, 2018, pp. 299—306 (in Russian).

2. **Proxorov Yu. V.** ed. Matematika: E'nciklopediya (Mathematics: Encyclopedia), Moscow, Bol'shaya Rossijskaya e'nciklopediya, 2003, 845 p. (in Russian).

3. **Golubinskij A. N.** *Metody approksimacii e'ksperimental'nyx dannyx i postroeniya modelej* (Approximation methods of experi-

mental data and construction of models), *Vestnik VI MVD Rossii*, 2007, no. 2, available at: https://cyberleninka.ru/article/n/metody-approksimatsii-eksperimentalnyh-dannyh-i-postroeniya-modeley (date of access: 22.07.2018) (in Russian).

4. **Shashkov V. B.** *Prikladnoj regressionnyj analiz. Mnogofaktornaya regressiya* (Applied regression analysis. Multivariate regression), Orenburg, GOU VPO OGU, 2003, 363 p. (in Russian).

5. **Pre'tt U.** *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij* (Digital image processing, Moscow, Mir, 1982, vol. 2, 480 p.

6. **Rodzhers D., Adams Dzh.** *Matematicheskie osnovy mashinnoj grafiki* (Mathematical foundations of computer graphics), Moscow, Mir, 2001, 605 p. (in Russian).

7. **Kvasov B. I.** *Metody izogeometricheskoj approksimacii splajnami* (Isogeometric spline approximation methods), Moscow, FIZMATLIT, 2006, 360 p. (in Russian).

8. **Ivanov G. S.** *Konstruirovanie odnomernyx obvodov, prinadlezhashhix poverxnostyam, putem ix otobrazheniya na ploskost'* (Construction of Belonging to Surfaces One-Dimensional Contours by Mapping Them to a Plane), *Geometriya i grafika*, vol. 6, no. 1, pp. 3—9 (in Russian), DOI: 10.12737/article_5ad07ed61bc114.52669586 (in Russian).

9. **Krys'ko A. A., Konopackij E. V., Churakov A. Ya.** *Geometricheskie osnovy konstruirovaniya odnomernogo obvoda cherez k napered zadannyx tochek v BN-ischislenii* (Geometrical bases of construction of one-dimensional circle through k in advance of the given points in BN-calculation), *Suchasni problemi modelyuvannya: zb. nauk. prac'*, Melitopol', MDPU im. B. Xmel'nic'kogo, 2015, vol. 4, pp. 76—81 (in Ukrain).

10. **Krys'ko A. A.** *Geometricheskoe i komp'yuternoe modelirovanie e'kspluatiruemyx konstrukcij tonkostennyx obolochek inzhenernyx sooruzhenij s uchyotom nesovershenstv geometricheskoj formy. Kand, diss.* [Geometric and computer modeling of the operated structures of thin-walled shells of engineering structures taking into account the imperfections of the geometric shape. Cand. Diss.] Makeevka, 2016, 191 p. (in Russian).

11. **Konopac'kij E. V.** *Geometrichne modelyuvannya algebraïchnix krivix ta ïx vikoristannya pri konstruyuvanni poverxon' u tochkovomu chislenni Balyubi-Najdisha. Kand, Diss.* [Geometric modeling of algebraic curves and their use in the construction of surfaces in point calculus of Balyubi-Naidish. Cand. Diss.], Melitopol, 2012, 164 p. (in Ukrain).

12. **Bumaga A. I.** *Geometricheskoe modelirovanie fiziko-mexanicheskix svojstv kompozicionnyx stroitel'nyx materialov v BN-ischislenii. Kand, Diss.* [Geometric modeling the physical and mechanical properties of composite building materials in BN-calculation. Cand. Diss.], Makeevka, 2016, 164 p. (in Russian).

13. **Yugov A. M., Bulavic'kij M. S., Konopac'kij E. V.** *Viznachennya micnisnix ta deformativnix vlastivostej vazhkogo betonu po ob'єmu monolitnix kolon pri ïx obstezhenni* (Determination of strength and deformation properties of heavy concrete by volume of monolithic columns during their inspection), Dorogi i mosti, Zbirnik naukovix prac', K., DerzhdorNDİ, 2009, vol. 11, pp. 372—379 (in Ukrain).

14. **Konopackij E. V., Voronova O. S.** Geometricheskaya model' processa raspredeleniya prochnostnyx xarakteristik v betonnoj kolonne. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, Perm', PNIPU, 2017, no. 1, pp. 37—44 (in Russian).

15. **Balyuba I. G.** *Konstruktivnaya geometriya mnogoobrazij v tochechnom ischislenii. Dokt, Diss.* [Constructive geometry of manifolds in a point calculation. Doct. Diss.], Makeevka, 1995, 227 p. (in Russian).

16. **Najdysh V. M., Balyuba I. G., Vereshhaga V. M.** Algebra of BN-calculation, *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika*, 2012, vol. 90, pp. 210—215 (in Ukrain).

17. **Balyuba I. G., Najdysh V. M.** *Tochechnoe ischislenie* [Point calculation]. Melitopol, 2015, 236 p. (in Russian).

18. **Chizhik M. A.** *Metodologiya parametricheskogo proektirovaniya texnologicheskix processov shvejnogo proizvodstva na osnove mnogomernogo geometricheskogo modelirovaniya. Dokt, Diss.* [Methodology the parametric design of technological processes sewing production on the base of multidimensional geometric modeling. Doct. Diss.], SPb., 2018, 272 p. (in Russian).