

A. V. Medvedev, Professor, e-mail: saor_medvedev@sibsau.ru,
Siberian State University of Science and Technology named after academician M. F. Reshetnev,
D. I. Yareshchenko, Teacher Lecture, e-mail: yareshenkodi@yandex.ru,
Siberian Federal University

Nonparametric Modeling of T-Processes under Incomplete Information

This work is devoted to building a new class of models in the context of incomplete information. We are talking about multidimensional inertialess objects for the case when the components of the output vector are stochastically dependent, and the nature of this dependence is a priori unknown. Building a model of a multidimensional inertia-free object in the case when the vectors of inputs and outputs are stochastically dependent (in particular, multicollinear), necessitates solving a system of implicit functions, which is a key component in the way of considering this problem.

Keywords: identification, discrete-continuous processes, mathematical modeling, T-models, T-processes

DOI: 10.17587/it.25.579-584

References

1. **Dub Dzh. L.** Probabilistic process, Moscow, Inostrannoj literatury Publ., 1956, 605 p. (in Russian).
2. **Medvedev A. V.** Fundamentals of adaptive systems theory, Krasnoyarsk, Sibirskij gosudarstvennyj aehrokosmicheskij universitet, 2015, 526 p. (in Russian).
3. **Ehjkhoff P.** Basics of identification of control systems, Moscow, Mir Publ., 1975, 7 p. (in Russian).
4. **Cypkin Ya. Z.** Fundamentals of information theory of identification, Moscow, Nauka Publ., 1984, 320 p. (in Russian).
5. **Nadaraya Eh. A.** Nonparametric estimation of probability density and regression curve, Tbilisi, Tbilisskij universitet Publ., 1983, 194 p. (in Russian).
6. **Vasil'ev V. A., Dobrovidov A. V., Koshkin G. M.** Nonparametric estimation of functionals of stationary sequences distributions, Moscow, Nauka Publ., 2004, 508 p. (in Russian).
7. **Medvedev A. V.** The theory of non-parametric systems, Krasnoyarsk, *Vestnik SibGAU*, 2010, no. 4 (30), pp. 4–9 (in Russian).
8. **Medvedev A. V.** Nonparametric adaptation systems, Novosibirsk, Nauka Publ., 1983 (in Russian).
9. **Medvedev A. V., Yareshchenko D. I.** About modeling of process of acquisition of knowledge by students at University, Moscow, *Vysshee Obrazovanie Segodnya*, 2017, no. 1, pp. 7–10 (in Russian).

УДК 004.942 + 519.624.3 + 621.373.132

DOI: 10.17587/it.25.584-590

М. М. Гурарий, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., e-mail: gourary@yandex.ru,
Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН

Эффективный алгоритм моделирования кольцевых генераторов методом гармонического баланса

Моделирование кольцевых генераторов (КГ) в частотной области встречает трудности, связанные с несходимостью процесса решения. Показано, что причиной несходимости является существование нескольких решений системы уравнений гармонического баланса для КГ. Предложено включение в процесс моделирования предварительного этапа, учитывающего только первую гармонику решения, что не только кардинально повысило надежность сходимости, но и обеспечило ускорение расчетов.

Ключевые слова: автоматизация проектирования, схемотехническое моделирование, кольцевой генератор, гармонический баланс, продолжение по параметру, итерационные методы

Введение

Автогенераторы являются важными компонентами, встречающимися практически в любой электронной системе для формирования

периодических сигналов. Разработка современных автогенераторов требует проведения анализа поведения нелинейной схемы в периодическом режиме, для чего может использоваться моделирование методом гармонического ба-

ланса (ГБ) [1]. Однако для автономных колебательных процессов прямое применение метода ГБ невозможно из-за неопределенности фазы колебаний и существования вырожденного решения. Для преодоления этих ограничений в работе [2] было предложено решать уравнения ГБ методом продолжения по параметру. Этот подход был усовершенствован в работах [3, 4], что позволило обеспечить сходимость процесса продолжения для подавляющего большинства генераторных схем.

Однако применение этих методов к моделированию кольцевых генераторов (КГ) показало [5] резкое усложнение процесса продолжения, приводящее к его прерыванию из-за несходимости шаговых уравнений. Поэтому в работе [5] было предложено заменить при моделировании полную схему КГ на эквивалентную однокаскадную схему с дополнительной задержкой. Но такая замена возможна только для КГ с идентичными ячейками, и, кроме того, она не обеспечивает получение решения для КГ с большим числом каскадов.

Целью данной статьи является исследование причин несходимости метода продолжения для КГ и разработка алгоритма, обеспечивающего эффективное моделирование как полной, так и однокаскадной схемы КГ.

1. Предварительные сведения

Метод ГБ для автономной схемы в периодическом режиме формирует и решает методом Ньютона систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье узловых напряжений схемы [1]:

$$H(X) = I(X) + j\omega KQ(X) + U = 0, \quad (1)$$

где представлены комплексные векторы узловых гармоник напряжений (X), внешних воздействий (U), токов ($I(X)$), зарядов ($Q(X)$) и системных невязок ($H(X)$). Компоненты векторов определяются двумя индексами — номерами узла (k) и гармоники (l), например X_{kl} . K — это блочно-диагональная матрица индексов гармоник, а ω — частота колебаний.

Для автогенератора отсутствуют внешние воздействия ($U = 0$), частота является дополнительной неизвестной, а совместность системы уравнений обеспечивается добавлением к системе (1) уравнения фиксации фазы первой гармоники одной из переменных:

$$\text{Im}(X_{1,r}) = 0. \quad (2)$$

Стандартное задание начального значения для итераций Ньютона не позволяет найти решение системы (1), (2) из-за того, что существующая в схеме генератора неустойчивая рабочая точка становится точкой сходимости итераций. Для поиска подходящего начального значения в работе [2] был предложен вариант метода продолжения, основанный на подключении к схеме фиктивного источника сигнала — зонда, который является соединением источника напряжения и фильтра и образует идеальный генератор напряжения для первой гармоники и разрыв цепи для остальных гармоник. Задавая частоту генератора и меняя амплитуду зонда, можно определить начальные значения гармоник для итераций Ньютона по точке минимума зависимости тока зонда (отклика схемы) от его амплитуды. Такой метод не всегда приводит к получению решения из-за того, что локальный минимум кривой отклика либо не существует, либо он не принадлежит области сходимости итераций (рис. 1, *a*).

Для устранения этого недостатка в работах [3, 4] предлагается при выполнении процесса продолжения фиксировать не частоту зонда, а фазу отклика, принимая ее равной нулю (относительно сигнала зонда). Это эквивалентно фиксации мнимой части отклика схемы на уровне 0. Такой тип процесса продолжения назван "зонд с подстройкой частоты" (ПЧ-зонд), так как его применение эквивалентно использованию зонда с частотой, меняющейся в зависимости от амплитуды таким образом, чтобы обеспечивалась нулевая фаза отклика схемы. Математически это записывается как

$$\text{Re}(X_{1,r}) = V_{probe}; \quad \text{Re}(U_{1,r}) = I_{probe}. \quad (3)$$

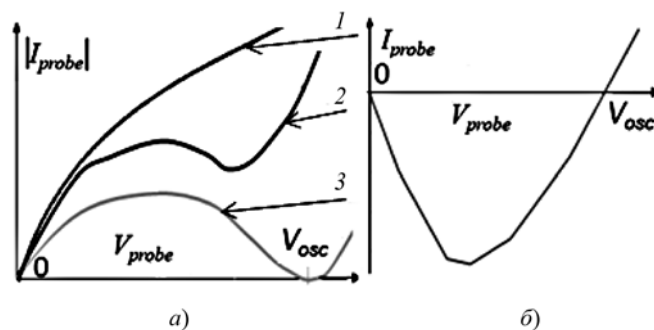


Рис. 1. Кривые отклика:

a — зонд с фиксированной частотой (1 — при равенстве частоты генерации частоте зонда, 2 — при отклонении частот, достаточно малом для существования локального минимума, 3 — при отклонении частот настолько значительном, что локальный минимум отсутствует); *b* — зонд с подстройкой частоты, решение системы соответствует точке V_{osc}

Система (1)–(3) в каждой точке продолжения по амплитуде зонда (V_{probe}) определяет текущее состояние автогенератора (X), его частоту (ω) и отклик (I_{probe}). Процесс продолжения завершается при $I_{probe} = 0$ (рис. 1, б), а начальное значение частоты определяется малосигнальными условиями генерации колебаний в неустойчивой рабочей точке по действительной части входного импеданса при нулевой мнимой части:

$$\text{Im}(Z(\omega_0)) = 0; \text{Re}(Z(\omega_0)) < 0. \quad (4)$$

2. Проблемы моделирования КГ методом продолжения

Анализ публикаций и вычислительные эксперименты показали наличие трудностей при моделировании КГ. Кривые продолжения имеют простой вид (рис. 1, б) для 3- и 5-каскадных КГ. Но начиная с 7-каскадного КГ наблюдается очень сложный процесс продолжения (рис. 2, а) без сходимости после нескольких тысяч шагов. Анализ входного импеданса в рабочей точке показал, что существует дополнительное значение частоты, удовлетворяющее условию (4). Моделирование с этой начальной частотой успешно выполняется, обеспечивая простую кривую продолжения (рис. 2, б). Однако найденное решение как по форме, так и по частоте (синусоида 2,33 ГГц) существенно отличается от основного колебания (импульсы 570,4 МГц). Таким образом, моделирование определяет другое решение для схемы КГ. Отметим, что нет дополнительных решений для 3- и 5-каскадных КГ.

Для решения проблемы сходимости в работе [5] предложен подход к моделированию КГ с n идентичными каскадами (рис. 3, а) с помощью эквивалентной однокаскадной схемы (рис. 3, б), где задержка одного каскада определена фазой

$$\theta = \pi(n + 1)/n. \quad (5)$$

Для однокаскадной схемы соотношение k -й входной и k -й выходной гармоник сигналов инвертора в системе (1) задается в виде уравнений

$$X_{k,inp} = X_{k,inp} \exp(jk\theta). \quad (6)$$

В рамках подхода вместо решения системы (1) для полной схемы

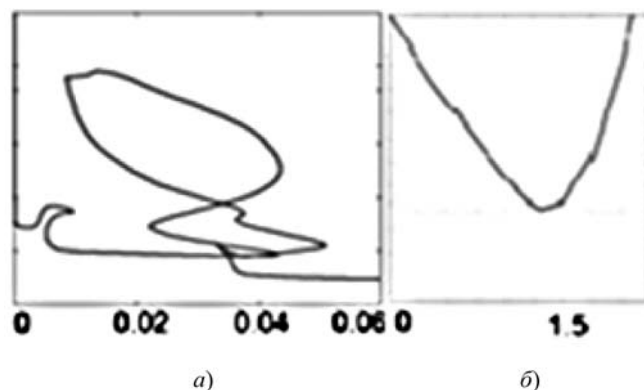


Рис. 2. Отклик схемы 7-каскадного КГ в алгоритме с подстройкой частоты:

а — основное решение (сложная траектория, нет сходимости); б — второе решение (нормальная сходимость)

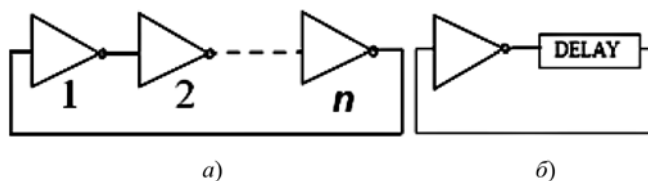


Рис. 3. Полная схема n -каскадного КГ (а); эквивалентная однокаскадная схема с задержкой (б)

КГ предлагается решить систему только для одной ячейки совместно с условиями (6), которые соответствуют основному ($m = 1$) решению КГ. Дополнительные решения с $m > 1$ в общем случае не существуют в системе уравнений ГБ на основе (5), (6).

Вычислительные эксперименты показали существенное улучшение надежности моделирования при использовании однокаскадной схемы с помощью алгоритма продолжения. Траектории продолжения 5-, 7-каскадных КГ имеют простые формы (аналогично рис. 1, б), и для получения решения требуется небольшое число шагов. Но для числа каскадов $n > 7$

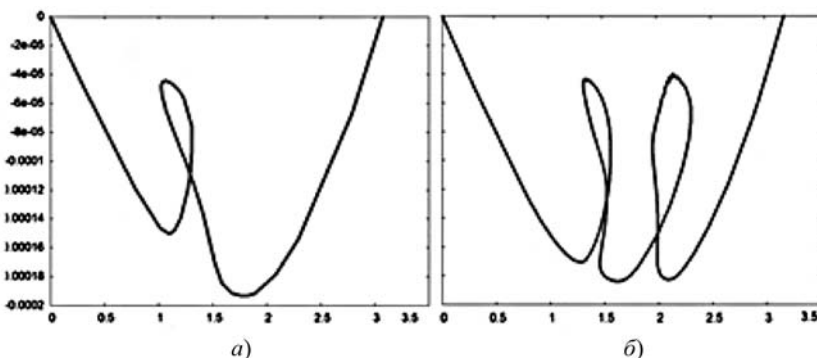


Рис. 4. Вид откликов однокаскадной модели для схем КГ размером: а — 9...15 каскадов; б — 17 каскадов

траектории содержат одну ($n = 9...15$) или две ($n = 17$) петли (рис. 4). В результате число шагов и затраты времени существенно увеличиваются.

3. Анализ причин возникновения проблем моделирования КГ

Рассмотрим причины существования нескольких решений уравнений КГ, для чего проанализируем КГ, содержащий одинаковые инверторы с постоянной задержкой τ . Условие автоколебаний требует, чтобы сигнал на выходе цепочки из n инверторов был задержан относительно входного сигнала на любое целое число периодов k :

$$n\tau = T/2 + kT, \quad (7)$$

где член $T/2$ соответствует прохождению входного сигнала через нечетное число инверторов. Из выражения (7) следует, что если задержка не зависит от частоты, то n -каскадный КГ имеет бесконечный ($k = 1, 2, \dots$) набор периодических колебаний с частотами

$$f_m^{(n)} = m/2n\tau = mf_1^{(n)}, \quad (8)$$

где $m = 2k + 1$.

Соотношение (8) справедливо для идеального КГ, а в реальных КГ задержка зависит от частоты, и число возможных периодических колебаний не может быть бесконечным, так как на высокой частоте усилительные свойства инвертора снижаются, и условия самовозбуждения не выполняются. Нечетное число m будем называть индексом решения. Отметим, что в работе [6] показано, что решения с индексом $m > 1$ неустойчивы.

Метод ГБ для генераторов сводится к решению алгебраической системы (1), (2) относительно вектора, содержащего частоту колебаний и гармоники переменных схемы $W = [\omega, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(i)}, \dots]$, где $X^{(i)}$ — вектор из i -х гармоник всех переменных схемы. Отметим, что периодическое состояние системы, определенное вектором W , также может быть определено векторами, соответствующими кратным периодам W , т. е.

$$\begin{aligned} W' &= [\omega/2, 0, X^{(1)}, 0, X^{(2)}, \dots, 0, X^{(i)}, \dots]; \\ W'' &= [\omega/3, 0, 0, X^{(1)}, 0, 0, X^{(2)}, \dots, 0, 0, X^{(i)}, \dots]. \end{aligned} \quad (9)$$

Вектор W назовем базовым вектором решения, а векторы вида (9) — его образами. Гармо-

ники образа решения, представляющие гармоники базового вектора ($X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(i)}, \dots$), назовем существенными гармониками, а все остальные (с нулевыми значениями) — фиктивными гармониками. Из соотношений (9) видно, что номера существенных гармоник l -го образа кратны l .

Таким образом, для каждого периодического состояния генератора существует бесконечное множество решений автономной системы ГБ. Конечно, это утверждение строго справедливо, если в системе (1) учитывается неограниченное множество гармоник сигналов. Усеченный по числу гармоник образ точного решения не является точным решением усеченной системы ГБ из-за пренебрежения некоторыми существенными гармониками. Можно предположить, что в любом случае образы образуют локальный минимум нормы невязки в пространстве переменных системы ГБ и, следовательно, создают дополнительные точки притяжения для траекторий продолжения. Также естественно предположить, что влияние образа зависит от отклонения его частоты от частоты искомого решения.

Поэтому можно предложить следующее объяснение причин несходимости метода продолжения для КГ. В случае единственности базового решения его собственные образы не влияют на сходимость метода, потому что их частоты существенно меньше базовой частоты. Однако, если существуют дополнительные решения (как в случае 7-каскадного КГ), то один из их образов может усложнить процесс продолжения, если его частота близка к частоте искомого решения. Это предположение применимо к полной схеме КГ (1), (2), но оно не объясняет усложнение траекторий (рис. 4) для однокаскадной схемы (5), (6). Объяснение может быть дано на основе следующего утверждения.

Теорема. Если полная схема КГ имеет дополнительное решение с индексом m , и соотношение частот решений равно соотношению для идеального КГ (8), то это решение существует также и в однокаскадной модели (5), (6).

Доказательство теоремы приведем в виде последовательности утверждений.

1. Решение для КГ с $m > 1$ можно найти с помощью однокаскадной модели (6), заменив (5) более общим выражением, полученным из (7):

$$\theta_m = \pi(n + m)/n, \quad (10)$$

и подставив в выражение (6) значение $\theta = \theta_m$. Отметим, что (9) справедливо и для основного решения ($m = 1$).

2. Из условия теоремы следует, что частоты гармоник дополнительного решения с номерами k равны частотам гармоник основного решения с номерами km . Подставив эти номера в показатель экспоненты в выражении (6), получим после элементарных преобразований с учетом (10)

$$km\theta = k\theta_m + 2\pi k(m-1)/2. \quad (11)$$

3. Второй член в выражении (10) кратен 2π в силу нечетности m , поэтому его можно отбросить в мнимом показателе экспоненты в (6). При $\theta = \theta_m$ дополнительное решение удовлетворяет условиям (6), из соотношения (11) следует, что оно удовлетворяет условиям (6) и при $\theta = \theta_1$, т. е. и для однокаскадной модели основного уравнения. Теорема доказана.

Наличие в однокаскадной модели дополнительного решения с частотой mf_1 приводит к тому, что частота m -го образа этого решения (f_1) совпадает с частотой основного решения, вызывая трудности в процессе продолжения.

4. Тестирование гипотезы на основе вычислительных экспериментов

Для проверки выдвинутых предположений было проведено моделирование КГ с 3...17 каскадами методом продолжения на основе систем ГБ полной схемы и однокаскадной модели как для основных, так и для дополнительных решений. Полученные значения частот основного и дополнительных решений, а также их соотношения представлены в таблице.

Из таблицы видно, что КГ с тремя и пятью каскадами не имеют дополнительных решений, что объясняет отсутствие проблем при моделировании. Представленные выше соображения позволяют объяснить поведение процесса продолжения для 7-каскадного КГ. Частота основного решения 570 МГц близка к четвертому образу второго решения с частотой $2,33 \text{ ГГц}/4 = 582,5 \text{ МГц}$, что приводит к несходимости (см. рис. 1, а). В то же время частота второго решения с индексом 3 намного выше, чем частота любого образа первого решения ($2,33 \gg 0,58/k$), поэтому никаких проблем при моделировании не возникает (см. рис. 1, б).

В идеальном КГ частота любого дополнительного решения (6) всегда кратна основной частоте и, тем самым, равна частоте образа основного решения. Учитывая, что реальный КГ приближается к идеальному с увеличени-

Частоты (ГГц) основного и дополнительных решений КГ

Число каскадов КГ	Основное решение	Частоты дополнительных решений и их соотношения с частотой основного решения						
		f_1	f_3	f_3/f_1	f_5	f_5/f_1	f_7	f_7/f_1
3	1,47							
5	0,80							
7	0,57	2,33	4,09					
9	0,44	1,47	3,32					
11	0,36	1,13	3,13	2,92	8,06			
13	0,30	0,94	3,05	1,86	6,07			
15	0,26	0,80	3,02	1,47	5,54			
17	0,23	0,71	3,01	1,24	5,30	2,13	9,06	

ем числа каскадов (см. таблицу), можно было ожидать плохой сходимости для основного решения КГ с большим числом ступеней. Это подтвердилось несходимостью процессов продолжения при моделировании полных моделей КГ с 9...17 каскадами. Отметим, что для 17-каскадного КГ соотношение частот, близкое к целочисленному, имеется для $m = 3$ и $m = 7$.

Приближение к идеальному КГ при 9...17 каскадах объясняет и сложности в процессе продолжения на рис. 4, так как из таблицы видно, что при $n > 7$ условия Теоремы близки к выполнению.

В отличие от этих случаев близость соотношения частот к целочисленному значению для 7-каскадного КГ ($f_3^{(7)} \approx 4f_1^{(7)}$) вызывает проблемы лишь при моделировании полной схемы (см. рис. 2, а), но никак не сказывается на однокаскадной модели в силу удаленности соотношения частот от условия Теоремы ($f_3^{(7)} = 3f_1^{(7)}$).

5. Модификация метода продолжения

Из представленного анализа можно заключить, что для улучшения сходимости метода продолжения для КГ необходимо снизить влияние образов дополнительных решений на процесс моделирования. Ранее отмечалось, что усеченный набор гармоник образа решения не является решением усеченной системы ГБ, но определяет локальный минимум нормы невязки, усложняя процесс продолжения. Можно ожидать, что этот эффект уменьшится со снижением числа учитываемых гармоник, особенно при числе гармоник меньшем, чем индекс влияющего образа. Например, если в решении учитываются только три гармоники, то его образы

(9) представляются как $W = [\omega, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}]$, $W' = [\omega/2, 0, X^{(1)}, 0]$, $W'' = [\omega/3, 0, 0, X^{(1)}]$, а в случае только одной гармоники — $W = [\omega, X^{(1)}]$, $W' = [\omega/2, 0]$, $W'' = [\omega/3, 0]$.

В последнем случае усеченные векторы решений вообще не содержат эффективных гармоник и не должны влиять на процесс моделирования. Это предположение подтверждается вычислительными экспериментами с малым числом гармоник, которые показывают, что при моделировании даже с одной гармоникой найденная частота колебаний близка к ее истинному значению.

Полученные результаты позволили предложить следующую модификацию алгоритма продолжения для КГ.

1. Выполнение процесса продолжения с одной гармоникой.

2. Задание исходного приближения для итераций Ньютона в виде полученного усеченного решения, дополненного нулями до требуемого числа гармоник.

3. Выполнение итераций Ньютона для автономной системы ГБ с необходимым числом гармоник.

Модификация алгоритма позволила проводить моделирование кольцевых генераторов до 17 каскадов без заметных осложнений. При этом также было получено существенное сокращение вычислительных затрат. Таким образом, предложенная модификация алгоритма продолжения с подстройкой частоты обеспечивает эффективное моделирование КГ с умеренным числом каскадов.

Заключение

В статье представлен анализ проблем сходимости, возникающих при моделировании КГ методом ГБ. Теоретические исследования и численные эксперименты подтвердили, что трудности сходимости можно объяснить существованием дополнительных фиктивных периодических решений в КГ. Показано, что эффект влияния фиктивных решений проявляется как в полных схемах КГ, так и в их однокаскадных моделях. Проведенный анализ позволил предложить модификацию алгоритма продолжения с подстройкой частоты, обеспечивающую успешное проведение моделирования.

Список литературы

1. Русаков С. Г. Моделирование нелинейных радиочастотных схем в системах автоматизации схемотехнического проектирования // Автоматизация проектирования, 1997, № 2.
2. Duan X., Mayaram K. An Efficient and Robust Method for Ring-Oscillator Simulation Using the Harmonic-Balance Method // IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 24, N. 8, pp. 1225–1233, 2005.
3. Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J. Simulation of high-Q oscillators // IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design. Nov. 1998. P. 162–169.
4. Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J. A robust and efficient oscillator analysis technique using harmonic balance // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Jan. 2000. Vol. 181. P. 451–466.
5. Docking S., Sachdev M. An Analytical Equation for the Oscillation Frequency of High-Frequency Ring Oscillators // IEEE Journal of Solid-State Circuits. February 2003. Vol. 39, N. 2.
6. Selting P., Zheng Q. Numerical stability analysis of oscillating integrated circuits // ELSEVIER J. of Computational and Applied Mathematics. 1997. Vol. 82. P. 367–378.

M. M. Gourary, Senior Research Associate, gourary@ippm.ru,
Institute for Design Problems in Microelectronics RAS

Effective Algorithm for Ring Oscillator Simulation Using the Harmonic Balance Method

Ring oscillators are a well-studied class of circuits due to their wide application. However, modeling their characteristics in the frequency domain encounters difficulties associated with the poor convergence of the numerical continuation process for the harmonic balance equations of such schemes. The paper presents an analysis of the features of the system of harmonic balance equations for ring oscillators, and it is shown that the existence of several solutions of this system is the source of difficulties. It is also shown that the problem persists within the framework of the approach proposed in the literature based on the simulation of an equivalent single-stage circuit representing ring oscillators with identical cascades. To solve the problem, the inclusion of a preliminary stage in the simulation that takes into account only one harmonic of the solution. The new approach to ring oscillator simulation not only essentially improves the reliability of convergence, but also reduces computational efforts of the steady-state simulation. Numerical experiments presented in the paper confirm the obtained theoretical conclusions.

Keywords: design automation, circuit simulation, ring oscillator, harmonic balance, parameter continuation, iterative methods

References

1. **Rusakov S. G.** Modelirovanie nelinejnyh radiochastotnyh shem v sistemah avtomatizacii shemotehnicheskogo proektirovanija (Simulation of nonlinear radio frequency circuits in circuit design automation systems), *Avtomatizacija Proektirovanija*, 1997, no. 2.
2. **Duan X., Mayaram K.** An Efficient and Robust Method for Ring-Oscillator Simulation Using the Harmonic-Balance Method, *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 2005, vol. 24, no. 8, pp. 1225–1233.
3. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli K. K., Mulvaney B. J.** Simulation of high-Q oscillators, *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*, Nov. 1998, pp. 162–169.
4. **Gourary M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L., Zharov M. M., Gullapalli, K. K., Mulvaney B. J.** A robust and efficient oscillator analysis technique using harmonic balance, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Jan. 2000, vol. 181, pp. 451–466.
5. **Docking S., Sachdev M.** An Analytical Equation for the Oscillation Frequency of High-Frequency Ring Oscillators, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, February 2003, vol. 39, N. 2.
6. **Selting P., Zheng Q.** Numerical stability analysis of oscillating integrated circuits, *ELSEVIER J. of Computational and Applied Mathematics*, 1997, vol. 82, pp. 367–378.

УДК 519.854.2

DOI: 10.17587/it.25.590-595

М. В. Ульянов, вед. науч. сотр., проф., д-р техн. наук, проф., e-mail: muljanov@mail.ru,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
М. И. Фомичёв, аспирант, преподаватель, e-mail: michan94@yandex.ru,
Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Сравнительный анализ комбинаций метода ветвей и границ с метаэвристическими алгоритмами для решения асимметричной задачи коммивояжера¹

Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ, для решения задачи коммивояжера — один из востребованных точных алгоритмов ее решения. Метаэвристические алгоритмы решения этой задачи не гарантируют получения точного решения, но работают "быстро". Для сокращения числа вершин порожденного дерева решений в методе ветвей и границ можно использовать решение, полученное метаэвристическим алгоритмом. За счет выбора метаэвристического алгоритма и его комбинации с методом ветвей и границ можно получить выигрыш во времени получения точного решения. Такой выбор необходимо подтвердить экспериментальными данными о временной эффективности программной реализации такого комбинированного алгоритма. В данной статье рассматриваются некоторые метаэвристические алгоритмы и комбинация таких алгоритмов с классической реализацией метода ветвей и границ для решения асимметричной задачи коммивояжера. Приводятся данные экспериментального исследования среднего времени получения точного решения для диапазона размерности задачи от 30 до 45 и даются рекомендации по выбору метаэвристического алгоритма.

Ключевые слова: задача коммивояжера, метод ветвей и границ, предвычисленный тур, сложность индивидуальной задачи, комбинированные алгоритмы, метаэвристические алгоритмы

Введение

В современном мире промедление в секунду или даже долю секунды может стоить миллионы рублей. Заинтересованному лицу важно получить точный ответ на вопрос в кратчайшие сроки. Но, к сожалению, даже при нынешних вычислительных мощностях многие задачи не могут быть решены точно за приемлемое время.

Задача коммивояжера является одной из таких задач. Целый ряд практических постановок в области бизнеса и логистики сводится к классической задаче коммивояжера. Она заключается в поиске гамильтонова цикла с минимальной стоимостью в полном асимметричном графе. Одним из самых известных точных алгоритмов решения задачи коммивояжера является алгоритм метода ветвей и границ, предложенный Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини и К. Кэрл в 1963 г. [1]. Однако данный алгоритм имеет экспоненциальную временную сложность по размерности задачи (числу вершин

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00656.