УДК 004.942 519.876.5 DOI: 10.17587/it.24.563-572

М. М. Гурарий, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., e-mail: gourary@yandex.ru,
М. М. Жаров, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., e-mail: zarov@ippm.ru,
С. Г. Русаков, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., e-mail: rusakov@ippm.ru,
С. Л. Ульянов, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., e-mail: ulyas@ippm.ru,
Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, Москва, 124365

Редуцирование модели электрической схемы с учетом характеристик внешних цепей

Показано, что важным направлением совершенствования проекционных методов редуцирования моделей линейных электрических цепей является учет характеристик их схемного окружения. Для решения этой задачи разработан подход к построению редуцированной модели подсхемы линейной цепи на основе метода отбора векторов состояния. Обсуждаются возможности учета нелинейного окружения схемы. Численные эксперименты показали существенное повышение точности и снижение порядка редуцированной модели при использовании предложенного метода.

Ключевые слова: *автоматизация проектирования, понижение порядка моделей, схемотехническое моделирование, линейная подсхема, проекционные методы редукции, подпространство Крылова*

Введение

В последние десятилетия интенсивно развиваются методы редукции моделей (*model order reduction* — MOR) линейных цепей [1, 2]. Среди известных подходов выделяются проекционные алгоритмы, которые обеспечивают более экономичные модели по сравнению с селективными методами [3] и требуют, как правило, существенно меньших затрат по сравнению с методами балансной реализации [4]. Впервые проекционные алгоритмы были реализованы в методе AWE [5], основанном на Паде-аппроксимации передаточной функции (ПФ) схемы. Существенным недостатком метода был рост вычислительного шума при использовании моментов высокого порядка. Избавиться от этого позволило применение алгоритмов на основе подпространств Крылова в методах PVL [6] и Арнольди [7]. Дальнейшее усовершенствование проекционных алгоритмов в методе PRIMA [8] дало возможность сохранения пассивности благодаря явному проектированию исходной матрицы на базис подпространства Крылова. Проекционные методы для многопортовых схем разрабатывали как распространение однопортовых алгоритмов на блочную форму подпространства Крылова [9]. Эти алгоритмы включают ортогонализацию моментов векторов состояния, соответствующих единичному возбуждению каждого входного порта. При этом выполняется отбрасывание (*deflation*) векторов по критерию линейной зависимости.

Основной недостаток многопортовых проекционных методов типа PRIMA — это избыточность размера проекционной матрицы [10]. В результате порядок редуцированной модели часто оказывается намного больше порядка, требуемого для обеспечения желательной точности. Для получения более компактных моделей были предложены многоточечные версии известных подходов [11, 12], но в большинстве случаев это не приводило к заметному снижению избыточности, что связано с фиксированной последовательностью генерации векторов состояния, содержащей сильно коррелированные вектора.

Этого можно избежать, определив базис на основе анализа моментов решений для избыточного множества частотных точек в требуемом диапазоне. Такой анализ может быть выполнен с помощью сингулярного разложения (SVD) множества векторов и последующего формирования базиса из векторов с наибольшими сингулярными значениями. В PMTBR [13]

SVD применяется к взвешенным значениям векторов состояния, полученным при единичном возбуждении каждого входного порта во всех частотных точках, заданных пользователем. Теоретической основой PMTBR является метод ограниченной балансной реализации (TBR) [4] и приближенная оценка грамиана управляемости с помощью SVD. Грамиан наблюдаемости при этом не учитывается, что для несимметричных систем может приводить [14] к избыточности построенного базиса и к неверной оценке погрешности.

Другой подход к снижению избыточности состоит в адаптивном выборе частотной точки с максимальной ошибкой текущей редуцированной модели. Такой выбор снижает корреляцию отбираемых векторов, что уменьшает избыточность. Для оценки ошибки используют разложение в ряд Тейлора [15, 16] либо значение невязки с учетом спектра матрицы [17, 18]. Прямая и надежная оценка применяется в методе отбора векторов состояния (SVS) в работе [14], где (аналогично PMTBR) генерируется избыточное множество векторов состояния в заданных частотных точках. Оценка ошибки и адаптивный выбор очередной точки осуществляются только из этого множества.

Однако снижение коррелированности исходных векторов не решает полностью проблему избыточности. Каждая линейная подсхема интегральной схемы находится в окружении известных линейных и нелинейных компонентов, которые ограничивают мощности сигналов на ее выводах. Существующие процедуры редуцирования предполагают произвольный характер сигналов на выводах подсхемы, что может приводить к обеспечению требуемой точности для режимов, которые никогда не реализуются в рамках конкретного окружения этой подсхемы. Поэтому целесообразно, чтобы при редуцировании приближенно учитывалась среда схемы, например максимальные уровни сигналов и токов нагрузки, пределы значений емкостей нагрузок, импедансы источников и т. п. В существующих методах такой учет отсутствует.

В работе обсуждается ресурс понижения избыточности благодаря учету среды функционирования редуцируемой схемы и предлагается алгоритм, позволяющий при построении редуцирования модели линейной электрической схемы добиться существенного снижения ее избыточности за счет учета характеристик схемного окружения.

1. Принципы редуцирования на основе проективных методов

Описание линейной динамической системы. Линейная система с N_{inp} входами, N_{out} выходами и N внутренними состояниями в матричном виде имеет следующую форму:

$$(G + sC)X = B;\ Z = D^T X, \tag{1}$$

где s — лапласовская переменная (обобщенная частота), а матрицы в (1) с указанными ниже размерностями задают:

— G, C ($N\times N$) — внутренние проводимости и емкости;

— B ($N\times N_{\text{inp}}$) — возмущения внутренних состояний от входных сигналов;

— D ($N\times N_{\text{out}}$) — передачи внутренних состояний на выходы;

— Z ($N_{\text{out}}\times N$) — ПФ от входных к выходным портам;

— X ($N\times N_{\text{inp}}$) — ПФ от входных портов к внутренним состояниям.

Обозначив $Y(s) = G + sC$, можно записать решение (1) в виде:

$$X(s) = Y(s)^{-1}B;\ Z(s) = D^T Y(s)^{-1}B. \tag{2}$$

Моменты решения системы (1) в частотной (лапласовской) точке s — $X^{[k]}(s)$ получаются последовательным дифференцированием (2) и имеют вид:

$$\begin{aligned} &X^{[0]}(s) = X(s) = Y(s)^{-1}B,\\ &X^{[k]}(s) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}X(s) = -Y(s)^{-1}CX^{[k-1]}(s). \end{aligned} \tag{3}$$

Для систем с одним входом ($N_{\text{inp}} = 1$, B и $X^{[k]}(s)$ — вектор-столбцы) из (3) видно, что моменты определяют пространство Крылова с матрицей $-Y(s)^{-1}C$. При $N_{\text{inp}} > 1$ выражения (3) задают блочное пространство Крылова.

Проекционные методы. Проекционные методы редуцирования состоят в преобразовании системы (1) в систему порядка $N_{\text{red}} < N$ путем умножения (1) на правую (V) и левую (W) матрицы проектирования с размерностями $N\times N_{\text{red}}$:

$$(\widehat{G} + s\widehat{C})\widehat{X} = \widehat{B};\ \widehat{Z} = \widehat{D}^T\widehat{X}, \tag{4}$$

где

$$\widehat{G} = W^T GV,\ \widehat{C} = W^T CV,\ \widehat{B} = W^T B,\ \widehat{D} = V^T D. \tag{5}$$

Вид проективной формы редуцированной системы (4), (5) получается путем использования метода Галеркина и может быть объяснен следующим образом.

Обозначим i-е столбцы матриц B, D, X, Z, V как $b^{\{i\}}$, $d^{\{i\}}$, $x^{\{i\}}$, $z^{\{i\}}$, $v^{\{i\}}$. Тогда решение системы (1) в точке s для единичного значения i-го входа можно аппроксимировать линейной комбинацией столбцов матрицы V ($v^{\{k\}}$) с коэффициентами, являющимися переменными редуцированной системы (4):

$$x^{\{i\}}(s) \approx \tilde{x}^{\{i\}}(s) = V\hat{x}^{\{i\}}(s) = \sum_{k=1}^{N_{red}} \hat{x}_k^{\{i\}}(s) v^{\{k\}},$$
$$i = 1, 2, ..., N_{inp}. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{x}^{\{i\}}(s)$ — аппроксимация $x^{\{i\}}(s)$; $\hat{x}_k^{\{i\}}(s)$ — k-й компонент вектора $\hat{x}^{\{i\}}(s)$.

Вектор невязки системы (1) после подстановки (6) (далее — вектор аппроксимационной невязки), имеющий вид

$$\tilde{r}^{\{i\}}(s) \approx Y(s)\tilde{x}^{\{i\}}(s) - b^{\{i\}}(s) =$$
$$= (GV + sCV)\tilde{x}^{\{i\}}(s) - b^{\{i\}}(s),$$
$$i = 1, 2, ..., N_{inp}, \quad (7)$$

должен быть ортогональным ко всем столбцам матрицы W:

$$W^T \tilde{r}^{\{i\}}(s) = 0, \ i = 1, 2, ..., N_{inp}. \quad (8)$$

Приближенные значения выходных переменных находятся подстановкой аппроксимации $\tilde{X}(s)$ вместо $X(s)$ в выражение для выходных значений в (1):

$$\hat{z}^{\{i\}}(s) = D^T \tilde{x}^{\{i\}}(s) = D^T V \hat{x}^{\{i\}}(s),$$
$$i = 1, 2, ..., N_{inp}. \quad (9)$$

После подстановки (7) в (8) и (6) в (9) получим уравнения для столбцов, соответствующие (4), (5). Решением редуцированной системы (4) в точке s являются коэффициенты линейной формы представления аппроксимации решения (6), которые обеспечивают ортогональность вектора невязки ко всем столбцам матрицы W в данной точке s. Отсюда следует теорема: вектор состояния исходной системы в некоторой точке s является линейной комбинацией столбцов матрицы V тогда и только тогда, когда этот вектор состояния совпадает со своей аппроксимацией в данной точке.

Эта теорема распространяется на моменты высших порядков. Она является основой методов согласования моментов, в рамках которых [19] матрица проектирования V формируется путем построения ортонормированного базиса заданного набора моментов. Преобразование (5) называется конгруэнтным*, если обе матрицы проектирования равны между собой ($W = V$). Такое преобразование гарантирует сохранение симметричности матриц C, G и системы в целом, а также пассивности системы в целом [8]. Поэтому далее мы будем рассматривать только конгруэнтные преобразования.

Как было указано ранее, избыточность крыловских методов вызвала разработку подходов на базе сингулярного разложения (SVD) и адаптивного выбора точек разложения. Адаптивный метод SVS обеспечивает возможность управлять оценкой погрешности. Этот метод мы будем использовать далее. Ниже приводится его описание.

Алгоритм редукции методом отбора векторов состояния (SVS). На начальном шаге SVS решается система (1) применением (2) в достаточно плотном множестве частотных точек $\{s_1, s_2, ..., s_M\}$, и в памяти сохраняются все матрицы $X(s_m)$, $Z(s_m)$. Далее выполняется итерационный процесс, в котором после определения n базисных векторов (столбцы матрицы проектирования $V^{(n)} = \{v^{(1)}, ..., v^{(n)}\}$) и матриц (5) редуцированной системы (4) для определения (n + 1)-го базисного вектора нужно выполнить следующие шаги.

1. Решить текущую редуцированную систему (4) во всех частотных точках $\widehat{Z}^{(n)}(s_m) = D^{(n)}(Y^{(n)}(s_m))^{-1}B^{(n)}$ и найти частоту $s = s_M$ и входной вектор u^*, реализующие максимальную ошибку, выполнив два шага:

а) для каждой частоты найти максимальную ошибку по заданной норме

$$e^{\max}(s_m) = \max_{u \in U} \|(Z(s_m) - \widehat{Z}^{(n)}(s_m))u\|,$$
$$m = 1, 2, ... \quad (10)$$

и "наихудший" входной вектор $u^*(s_m)$, при котором она достигается; здесь U — это область допустимых входных амплитуд;

б) найти частоту s_M максимальной ошибки $M = \arg\max_m e^{\max}(s_m)$.

---

* В линейной алгебре понятие конгруэнтности [20] определено только для квадратной матрицы V, но в работах по редукции линейных систем используется его расширение на случай произвольной прямоугольной матрицы.

2. Если $e^{\max}(s_M) < E$, то завершить процесс редуцирования.

3. Определить новый базисный вектор ортогонализацией "наихудшего" вектора состояния $x^* = X(s_M)u^*$ к предыдущим базисным векторам

$$v^{(n+1)} = x^* \perp V^{(n)},\ V^{(n+1)} = [V^{(n)},\ v^{(n)}]. \quad (11)$$

4. Определить матрицы (5) редуцированной системы порядка $n + 1$.

5. Перейти к п. 1 для выполнения следующей итерации.

Важным достоинством алгоритма SVS является то, что норма ошибки не задана заранее в виде какого-либо математического определения, а может быть гибко изменена в зависимости от требований пользователя. В [14] рассмотрены примеры задания нормы в виде наибольшей погрешности среди ПФ между всеми входами и выходами схемы, а также как максимальную погрешность среди выходов схемы при наихудшем сочетании амплитуд входных сигналов.

Применение проекционных методов для редуцирования модели линейной электрической схемы. Представленные выше методы решают задачу редуцирования линейной динамической системы (1). Для их применения к редуцированию линейной электрической схемы необходимо представить ее уравнения в виде (1). Если схема описывается модифицированным методом узловых потенциалов — MNA [21], то переменные состояния x — это узловые напряжения (включая напряжения на внешних выводах) и токи индуктивностей, а C и G — это соответствующие MNA матрицы. При этом следует учесть, что полные лапласовские проводимости элементов матриц ($Y_{ij} = G_{ij} + sC_{ij}$) связаны с параметрами линейных компонент схемы ($y_{ij} = g_{ij} + sc_{ij}$) соотношениями

$$Y_{ij} = -y_{ij}\ (i \neq j),\ Y_{ii} = \sum_{k=0}^{N} y_{ik}, \quad (12)$$

где y_{i0} — проводимость между i-м узлом схемы и "землей".

Для генерации решений $X(s_m)$, $Z(s_m)$ при редуцировании схемы к ее внешним выводам подключают единичные источники тока и/или напряжения [8], задающие входные сигналы системы (1). Если i-й входной сигнал задается источником тока в k-м узле схемы, то в матрице B формируется $B_{ki} = 1$. В случае источника напряжения ток источника становится дополнительной (m-й) переменной состояния, матрица G расширяется на m-е столбец и строку с $G_{km} = G_{mk} = 1$, а в матрице B устанавливается $B_{mi} = 1$. Выходные переменные определяются двойственным образом: как напряжения на источниках тока и токи источников напряжения. При этом $D = B$.

Пример схемы из трех узлов с двумя выводами представлен на рис. 1, *а* (см. вторую сторону обложки).

Вектора и матрицы динамической системы для этой схемы имеют вид

$$X = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_2 \end{bmatrix};\quad \begin{matrix} U = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \\ Z = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \end{matrix}$$
$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & 0 \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} & 1 \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ B = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где элементы Y_{ij} определяются из y_{ij} на рис. 1, *а*, по формулам (12).

Результат редуцирования также имеет форму динамической системы (4), которую нужно преобразовать в электрическую подсхему для ее подключения к узлам внешней цепи. Пусть редуцированная система вида (4) имеет 2×2 матрицы $\hat{Y}, \hat{B}, \hat{D}$, а переменные вход/выход соответствуют источникам на рис. 1, *а*, (см. вторую сторону обложки). Соответствующая этой системе схема (рис. 1, *б*, см. вторую сторону обложки) содержит два внутренних узла (1, 2) и два вывода: $U1$ — напряжение/ток, $U2$ — ток/напряжение. Внутренние узлы соединены проводимостями $\hat{y}$, полученными из (12), и к ним подключены источники тока, управляемые входными переменными каждого из выводов с коэффициентами передачи из матрицы $\hat{B}$. Выходные переменные выводов формируются источниками необходимого типа, управляемыми напряжениями внутренних узлов с коэффициентами передачи из матрицы $\hat{D}$.

2. Редуцирование модели подсхемы линейной электрической схемы

Редуцирование схемы при ее возбуждении идеальными источниками сигнала может недостаточно соответствовать реальным режимам работы схемы. Сигналы на выводах редуцируемой схемы формируются за счет взаимодействия ее компонентов и компонентов ее схемного окружения, включая источники сигналов. Для учета этого взаимодействия предлагается рассмотреть задачу редуцирования электрической цепи в рамках линейного схемного окружения, приближенно отражающего условия функционирования этой схемы в ИС. Простейшими примерами такого линейного окружения могут быть выходные сопротивления источников сигналов и емкости нагрузки. Предполагается, что взаимодействие окружения со схемой осуществляется только через выводы (граничные узлы) схемы, которые полностью или частично совпадают с узлами окружения. Указанную задачу редуцирования подсхемы линейной электрической схемы можно сформулировать следующим образом.

Пусть задана линейная электрическая схема, характеризуемая вектором состояний (узловых потенциалов и токов индуктивных ветвей) с размерностью N. Частью этой схемы является редуцируемая подсхема с вектором внутренних состояний x_I размерностью N_I. Остальная часть схемы (окружение) описывается вектором состояний x_S размерностью N_S. Предполагается, что компоненты каждого из частных векторов непрерывно следуют друг за другом в пределах общего вектора x, т. е.: $x = [x_I\, x_S]^T$, $N = N_I + N_S$. Индексы I и S обозначают множества внутренних узлов подсхемы и узлов окружения соответственно.

Состояние схемы определяется из системы лапласовских уравнений

$$\left(\begin{bmatrix} G_{II} & G_{IS} \\ G_{SI} & G_{SS} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} C_{II} & C_{IS} \\ C_{SI} & C_{SS} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} X_I \\ X_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_S \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Индексы матриц в (14) определяют множества узлов, между которыми заданы соответствующие элементы матрицы проводимостей и емкостей, а матрица B_S размерностью $N_S \times N_{inp}$ определяет амплитуды сигналов источников напряжения и тока общим числом N_{inp}, включенных в схемное окружение.

Предполагается, что воздействие на подсхему осуществляется только через узлы схемного окружения, а непосредственное воздействие на внутренние узлы отсутствует. Выходные показатели обычно определяются состоянием схемного окружения (X_S), которое является результатом решения (14).

Определим задачу редуцирования подсхемы внутри заданного окружения как получение матриц $(\hat{G}_{II}, \hat{C}_{II}, \hat{G}_{IS}, \hat{C}_{IS}, \hat{G}_{SI}, \hat{C}_{SI})$ редуцированной подсхемы, обеспечивающих близость (в заданном смысле) состояния полной исходной схемы (14) к состоянию схемы с редуцированной моделью подсхемы:

$$\left(\begin{bmatrix} \hat{G}_{II} & \hat{G}_{IS} \\ \hat{G}_{SI} & G_{SS} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \hat{C}_{II} & \hat{C}_{IS} \\ \hat{C}_{SI} & C_{SS} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \hat{X}_I \\ \hat{X}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_S \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Здесь матрицы окружения G_{SS}, C_{SS} не редуцируются.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом Галеркина, но в отличие от редуцирования линейной системы (1) мы используем $N_S \times N_I$ матрицу проектирования для аппроксимации только внутреннего состояния подсхемы в виде: $x_I(s) \approx \tilde{x}_I(s) = V\hat{x}_I(s)$, а окружение подсхемы не должно меняться при редуцировании: $x_S(s) \approx \tilde{x}_S(s) = \hat{x}_S(s)$. Тогда аппроксимация состояния системы (14) на основе решения (15) запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} x_I(s) \\ x_S(s) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{x}_I(s) \\ \tilde{x}_S(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\hat{x}_I(s) \\ \hat{x}_S(s) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Невязка системы (14) при подстановке в нее (16) определится выражением

$$\begin{bmatrix} r_I \\ r_S \end{bmatrix} = \\ = \left(\begin{bmatrix} G_{II}V & G_{IS} \\ G_{SI}V & G_{SS} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} C_{II}V & C_{IS} \\ C_{SI}V & C_{SS} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \hat{x}_I \\ \hat{x}_S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ b_S \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Для однозначного определения редуцированного решения добавим к (17) условия ортогональности вектора внутренней невязки подсхемы ко всем столбцам матрицы проектирования $V - V \cdot r_I = 0$ и нулевого значения невязки (выполнения законов Кирхгофа) во всех узлах окружения — $r_S = 0$. Выполнив эти операции, получим из (17) линейную систему для определения $\hat{x}$:

$$\left(\begin{bmatrix} V^T G_{II} V & V^T G_{IS} \\ G_{SI} V & G_{SS} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} V^T C_{II} V & V^T C_{IS} \\ C_{SI} V & C_{SS} \end{bmatrix}\right) \times \\ \times \begin{bmatrix} \hat{x}_I \\ \hat{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_S \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Полученная система (18) совпадает с (15) при следующих значениях редуцированных матриц:

$$\begin{aligned}&\widehat{G}_{II}=V^TG_{II}V, \widehat{G}_{SI}=G_{SI}V,\\ &\widehat{G}_{IS}=V^TG_{IS}, \widehat{G}_{SS}=G_{SS},\\ &\widehat{C}_{II}=V^TC_{II}V, \widehat{C}_{SI}=C_{SI}V,\\ &\widehat{C}_{IS}=V^TC_{IS}, \widehat{C}_{SS}=C_{SS}.\end{aligned} \quad (19)$$

Следует учесть, что элементы матриц Y_{SI}, Y_{IS} могут быть ненулевыми только для граничных (B) узлов подсхемы (их число — N_B), которые являются общими для подсхемы и ее окружения. Поэтому можно записать

$$\begin{aligned}&Y_{SI}=G_{SI}+sC_{SI}=\begin{bmatrix}Y_{BI}\\0\end{bmatrix},\\ &Y_{IS}=G_{IB}+sC_{IS}=\begin{bmatrix}Y_{IB} & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (20)$$

Тогда матрицы самой подсхемы (включающей все ее внутренние и граничные узлы) будут редуцироваться по формулам, полученным из (19, 20):

$$\begin{aligned}&\widehat{Y}_{II}=V^TY_{II}V;\ \widehat{Y}_{BI}=Y_{II}V;\\ &\widehat{Y}_{IB}=V^TY_{IB};\ \widehat{Y}_{BB}=Y_{BB}.\end{aligned} \quad (21)$$

Последнее равенство в (21) показывает, что матрицы между выводами подсхемы (G_{BB}, C_{BB}) не меняются при редуцировании, что представляется вполне естественным. Матрицы редуцированной подсхемы ($\widehat{Y}^{sub}=\widehat{G}^{sub}+s\widehat{C}^{sub}$) объединяют компоненты, относящиеся ко всем ее узлам:

$$\widehat{G}^{sub}=\begin{bmatrix}\widehat{G}_{II} & \widehat{G}_{IB}\\ \widehat{G}_{BI} & G_{BB}\end{bmatrix}, \widehat{C}^{sub}=\begin{bmatrix}\widehat{C}_{II} & \widehat{C}_{IB}\\ \widehat{C}_{BI} & C_{BB}\end{bmatrix}. \quad (22)$$

Для моделирования электрической цепи, включающей (22), нужно сформировать проводимости компонентов подсхемы на основе (12), (22) и присвоить граничным узлам подсхемы имена тех узлов внешней цепи, к которым они подсоединены. Не требуется включать дополнительные узлы и компоненты, подобные приведенным на рис. 1, *б* (см. вторую сторону обложки).

3. Использование формы подсхемы в алгоритмах редуцирования и способы учета нелинейного окружения

Прежде всего отметим, что свойства редуцирования в форме подсхемы (15), (19) аналогичны свойствам редуцирования в стандартной форме (4), (5), так как (21), (22) могут быть представлены в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}&\widehat{G}^{sub}=\overline{V}^TG^{sub}\overline{V}\\ &\widehat{G}^{sub}=\overline{V}^TC^{sub}\overline{V}\end{aligned}, \text{ где } \overline{V}=\begin{bmatrix}V & 0\\ 0 & E_B\end{bmatrix}. \quad (23)$$

Здесь E_B — единичная матрица размерности $N_B \times N_B$. То есть преобразование (21), (23) является конгруэнтным и, следовательно, обеспечивает сохранение положительной определенности матриц и в результате сохранение пассивности.

Для того чтобы теорема о совпадении моментов также сохранялась, нужно, чтобы столбцы матрицы V составляли базис в пространстве усеченных (до подвекторов) моментов системы (15). Это можно обеспечить нахождением моментов решений (15) и построением ортонормированного базиса в пространстве подвекторов. Следует учесть, что моменты высших порядков для подвекторов могут не образовывать крыловского пространства вида (3), что препятствует непосредственному применению алгоритма Арнольди. Этот вопрос требует дальнейшего исследования. Для методов, не использующих моменты высших порядков (PMTBR, SVS), применение подвекторов трудностей не представляет и практически не меняет структуру алгоритмов.

Необходимо также рассмотреть определение выходных показателей задачи редуцирования. Как было указано выше, включение подсхемы в виде (22) в общую схему проводится естественным путем и не требует задания выходных показателей. Сама процедура редуцирования может использовать значения выходных показателей для оценки погрешности в методах с адаптивным выбором точек, в частности в SVS. Для этого можно задать выход (Z) аналогично (1) для внутренних узлов подсхемы (Z_I) и узлов окружения (Z_S):

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}Z_I\\Z_S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_IX_I\\D_SX_S\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\widehat{Z}_I\\ \widehat{Z}_S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{D}_I\widehat{X}_I\\ \widehat{D}_S\widehat{X}_S\end{bmatrix},\\ &\begin{bmatrix}\widehat{D}_I\\ \widehat{D}_S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V^TD_I\\ D_S\end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (24)$$

Другой вариант учета погрешности не требует явного задания выходных показателей, а включает преобразования (24) в выражения для нормы ошибки.

На практике редуцируемая схема никогда не работает в фиксированном линейном окружении. Поэтому целесообразно обсудить подходы, позволяющие учесть произвольное окружение. Для алгоритма с отбором точек рассмотрим случай, когда внешняя часть схемы представлена несколькими возможными вариантами линейного окружения:

$$G_{SS}^{(i)}, C_{SS}^{(i)}, B_{S}^{(i)}, D_{S}^{(i)},\ i = 1, 2, ..., M. \quad (25)$$

Отметим, что в различных вариантах окружения входные воздействия и выходные показатели могут быть, вообще говоря, различны. Наиболее разумным представляется учет такой многовариантности на каждом шаге алгоритма путем поиска максимума ошибки не только по индексу точки, входного вектора и (при оценке нормы по наихудшей компоненте вектора) выходного показателя (10), но и по индексу варианта окружения.

Задание дискретного набора вариантов окружения для каждого вывода многопортовой схемы может приводить к резкому росту общего числа вариантов и, следовательно, высоких вычислительных затрат. Более практичным представляется возможность задания определенной конфигурации внешнего окружения со значениями параметров, находящихся в заданных пределах. Если определять максимальную ошибку в точке перебором всех вариантов предельных значений параметров, то принципиально этот случай не отличается от предыдущего. Для сокращения затрат возможен подход на основе оценки коэффициентов чувствительности выходных показателей к параметрам окружения для исходной и редуцированной схем. Зная коэффициенты чувствительности и диапазон значений параметров, можно найти оценку наибольшей ошибки аналогично (10), на основе чего определить новый базисный вектор (11).

Решение задачи для заданного диапазона параметров внешнего окружения может послужить основой для решения задачи редуцирования подсхемы в нелинейном окружении. Вообще говоря, окружением линейной подсхемы является вся интегральная схема, но для задачи редуцирования, мы полагаем, в большинстве случаев можно ограничиться соседними компонентами.

Часть нелинейных компонентов можно представлять линейными элементами со значениями в соответствующем диапазоне параметров. Другие компоненты можно представлять набором источников сигнала, амплитуды и выходные импедансы которых определяются линеаризацией вольт-амперных характеристик компонента в нескольких рабочих точках, определенных на основе предварительного анализа возможных режимов работы нелинейного компонента.

4. Численный эксперимент

Для проверки предложенных модификаций алгоритма редуцирования, учитывающих характеристики схемного окружения, была выбрана схема *RC*-линии (рис. 2, см. вторую сторону обложки), содержащей 50 П-образных секций с параметрами $R = 0{,}02$ Ом, $C = 0{,}05$ пФ. Схемное окружение *RC*-линии включает входной источник единичного напряжения $V = 1$ В с внутренним сопротивлением $R_S = 0{,}01$ Ом и емкостную нагрузку, которая меняется вблизи среднего значения $C_L = 10$ пФ.

В эксперименте сравнивали два способа редуцирования: без учета нагрузки ($C_L = 0$) и с заданием нагрузки $C_L = 10$ пФ. В результате редукции с заданием допустимой погрешности $tol = 0{,}05$ В (т. е. 5 % от статической ПФ) были получены матрицы проводимостей и емкостей 4×4 (с учетом нагрузки) и 6×6 (без учета нагрузки). Увеличение порядка объясняется расширением полосы рабочих частот у ПФ линии без нагрузки, что видно из рис. 3, *а* (см. вторую сторону обложки).

Затем к каждой модели была подключена нагрузка $C_L = 10$ пФ и получены отклонения их ПФ от ПФ полной модели с той же нагрузкой, показанные на рис. 3, *б* (см. вторую сторону обложки). Из графиков видно, что учет нагрузки при редукции обеспечивает снижение ошибки почти вдвое, несмотря на заметно более низкий порядок.

Более подробно сравнение редуцированных моделей в зависимости от заданного допуска на ошибку представлено в табл. 1.

Для каждого значения допуска в таблице приведены значения порядка моделей и значение ошибки ПФ при номинальной нагрузке 10 пФ. В графе 4 показана фактическая ошибка, достигнутая при редуцировании в режиме "Без нагрузки". Аналогичная величина для номинального режима совпадает с содержимым графы 5 в этом режиме. В последней графе приведено отношение ошибки модели без учета нагрузки к ошибке модели с учетом реальной нагрузки в процедуре редукции.

Таблица 1

Сравнение моделей при номинальной нагрузке (10 пФ)

№	Допуск, В	Режим редукции					Отношение ошибок Err0/Err*C*
		Без учета нагрузки			Нагрузка 10 пФ		
		Порядок	Погрешн.	Ошибка	Порядок	Ошибка	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	10^{-1}	5	$7{,}7 \cdot 10^{-2}$	$7{,}4 \cdot 10^{-2}$	4	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	2,30
2	10^{-2}	7	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$4{,}6 \cdot 10^{-2}$	5	$5{,}9 \cdot 10^{-3}$	7,68
3	10^{-3}	9	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$	7	$4{,}8 \cdot 10^{-4}$	30,1
4	10^{-4}	10	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	9	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	867,5
5	10^{-5} 10^{-6}	11	$7{,}0 \cdot 10^{-7}$	$8{,}0 \cdot 10^{-3}$	10	$6{,}8 \cdot 10^{-7}$	11 753
6	10^{-7}	12	$3{,}1 \cdot 10^{-8}$	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$	11	$4{,}3 \cdot 10^{-8}$	145 110
7	10^{-8}	13	$2{,}3 \cdot 10^{-9}$	$4{,}9 \cdot 10^{-3}$	12	$2{,}2 \cdot 10^{-9}$	2 239 200

Из табл. 1 видно, что выигрыш от генерации модели с учетом реальной нагрузки резко возрастает при усилении требований к точности модели. В данном случае это объясняется тем, что ошибка модели с учетом нагрузки примерно пропорциональна допуску на погрешность, в то время как ошибка модели без учета нагрузки слабо меняется с уменьшением допуска.

Табл. 1 представляет результаты, соответствующие идеальному случаю, когда значение нагрузки точно совпадает со значением, использованным при редуцировании схемы. На практике нам обычно может быть известно среднее значение нагрузки, а ее значение в каждый момент зависит от нелинейности схемы, изменения режима и т. д. Поэтому были проведены эксперименты по оценке точности моделей при отклонении нагрузки ±40 % от номинальной.

В табл. 2 приведены результаты этих экспериментов, показывающие зависимость отношения ошибок моделей от нагрузки при различных значениях допуска на погрешность. Видно, что, несмотря на некоторое ухудшение по сравнению с точным заданием нагрузки, отношение ошибок показывает высокую эффективность предложенного подхода во всем рассматриваемом диапазоне нагрузок. Как и в табл. 1, наблюдается существенный рост эффективности подхода при возрастании требований к точности редуцированной модели.

Таблица 2

Сравнение при отклонении нагрузки от номинальной

№	C_L, пФ	Допуск погрешности при редукции						
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5} 10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
1	14	3,2	10,9	42,7	1233	11 309	17 153	21 650
2	12	2,8	9,27	36,4	1050	14 141	25 673	32 399
3	10	2,3	7,68	30,1	867,5	11 753	145 110	2 239 200
4	8	1,8	6,09	23,8	685,1	7911	12 025	15 180
5	6	1,4	4,51	17,5	503,9	2338	3549	4480

Заключение

В работе рассмотрены основные этапы развития проекционных методов редуцирования электрических цепей. Показано, что дальнейший прогресс в понижении избыточности моделей может быть обеспечен за счет учета характеристик схемного окружения редуцируемой схемы. Существующие процедуры предполагают непосредственное подключение источников сигналов к выводам схемы, что часто приводит к повышению порядка модели для обеспечения требуемой точности для режимов, которые никогда не реализуются в рамках конкретного окружения этой схемы. В результате порядок редуцированной подсхемы может оказаться существенно выше минимально необходимого порядка.

Для реализации учета окружения сформулирована задача редуцирования подсхемы линейной электрической схемы. Предложенный алгоритм решения задачи основан на методе Галеркина, используемом при редуцировании схем на основе представления их уравнений в классической форме линейной динамической системы. Отличие предлагаемого подхода состоит в редуцировании системы уравнений Кирхгофа только для внутренних узлов подсхемы. Базис проектирования формируется из векторов состояний подсхем, полученных решением уравнений полной схемы. Адаптивный выбор частотных точек и сигналов источников проводится на основе метода отбора векторов состояния (SVS) и продолжается до достижения заданной точности. Полученная модель подсхемы в виде матриц емкостей и проводимостей может быть включена в любое схемное окружение без дополнения вспомогательными управляемыми источниками тока или напряжения.

Вычислительные эксперименты по моделированию RC-линии показали существенное снижение погрешности моделирования за счет учета при редуцировании среднего значения емкости нагрузки.

Список литературы

1. **Silva J. M. S., Villena J. F., Flores P., Silveira L. M.** Outstanding Issues in Model Order Reduction // Scientific Computing in Electrical Engineering, Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. P. 139—152.
2. **Benner P., Hinze M., Jan E., ter Maten W.** (Editors). Model Reduction for Circuit Simulation // Series: Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2011, Vol. 74.
3. **Гурарий М. М., Жаров М. М., Русаков С. Г., Ульянов С. Л.** Методы возмущений и селективные методы в задачах редукции высокоразмерных моделей // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. 2008. № 1. С. 86—91.
4. **Moore B. C.** Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction // IEEE Trans. Autom. Control, 1981. Vol. AC-26, N. 1. P. 17—32.
5. **Pillage L. T., Rohrer R. A.** Asymptotic waveform evaluation for timing analysis // IEEE Trans. Computer-Aided Design, 1990. Vol. 9, N. 4. P. 352—366.
6. **Feldmann P., Freund R. W.** Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 1995. Vol. 14, N. 5. P. 639—649.
7. **Silveira L. M., Kamon M., Elfadel I., White J.** A coordinate transformed Arnoldi algorithm for generating guaranteed stable reduced order models of RLC circuits // In Proc. ICCAD. November 1996. P. 288—294.
8. **Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L. T.** PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm // IEEE Trans. CAD. 1998. Vol. 17, No. 8. P. 645—654.
9. **Feldmann P., Freund R. W.** Reduced-order modeling of large linear subcircuits via a block Lanczos algorithm // Proc. 32nd ACM/IEEE Design Automation Conf. 1995. P. 474—479.
10. **Heres P. J., Schilders W. H. A.** Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction // Scientific Computing in Electrical Engineering. Series: Mathematics in Industry. Springer. 2006. Vol. 9. P. 39—44.
11. **Nguyen T. V., Li J.** Multipoint Pade approximation using a rational block Lanczos algorithm //Proc. of IEEE Int. Conf. on Comp. Aided Design (ICCAD). 1997. P. 72—77.
12. **Elfadel I. M., Ling D. L.** A block rational Arnoldi algorithm for multipoint passive model-order reduction of multiport RLC networks // Proc. Int. Conf. Comput.-Aided Des. 1997. P. 66—71.
13. **Phillips J. R., Silveira L. M.** Poor man's TBR: a simple model reduction scheme // IEEE Trans. Comp. Aided Design Integr. Circuits Syst. 2005. Vol. 24. P. 43—55.
14. **Gourary M. M., Ulyanov S. L., Zharov M. M.** Model order reduction by state vector selection (SVS) approach // European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD). 2013. P. 1—4.
15. **Lee Herng-Jer, Chu Chia-Chi, Feng Wu-Shiung.** An adaptive-order rational Arnoldi method for model-order reductions of linear time-invariant systems // Linear Algebra and its Applications. 2006. Vol. 415. P. 235—261.
16. **De Luca G., Antonini G., Benner P.** Parallel Model Order Reduction for Sparse Electromagnetic/Circuit Models // Applied Computational Electromagnetics Society Journal. 2015. Vol. 30, N. 1. P. 1—21.
17. **Abidi O., Hached M., Jbilou K.** Adaptive rational block Arnoldi methods for model reductions in large-scale MIMO dynamical systems // New Trends in Mathematical Sciences. 2016. Vol. 4, N. 2. P. 227—239.
18. **Druskin V., Lieberman C., Zaslavsky M.** On adaptive choice of shifts in rational Krylov subspace reduction of evolutionary problems // SIAM J. Sci. Comput. 2010. Vol. 32, N. 5. P. 2485—2496.
19. **Grimme E.** Krylov Projection Methods for Model Reduction, PhD thesis, Coordinated-Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign. Urbana-Champaign, IL, 1997.
20. **Бортаковский А. С., Пантелеев А. В.** Линейная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005. 591 с.
21. **Влах И., Сингхал К.** Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.

M. M. Gourary, Senior Research Associate, gourary@ippm.ru,
M. M. Zharov, Leading Research Associate, zarov@ippm.ru,
S. G. Rusakov, Principal Research Associate, rusakov@ippm.ru,
S. L. Ulyanov, Principal Research Associate, ulyas@ippm.ru,
Institute for Design Problems in Microelectronics RAS, Moscow, 124365, Russian Federation

Model Order Reduction of Electrical Circuits Taking Account of External Networks Characteristics

Main stages of projective model order reduction (MOR) methods for electrical circuits include model construction by Pade approximation, implementation of Krylov subspace methods for essential decrease of computational noise, application of congruent transform to save circuit passivity, using block-Krylov methods for multiport circuits and multipoint rational-Krylov algorithms to mitigate the redundancy of reduced models. The considerable drop in the redundancy was achieved by applying singular value decomposition and by adaptive choosing the expansion points to be used for the moment matching. Thus, further progress in redundancy elimination cannot be provided by the modifications improvement of basis construction algorithms, and other directions to decrease redundancy should be considered. Known methods suppose direct connection of signal sources to network ports, thus resulting in the network solutions that often cannot exist in the framework of real surrounding. Then the reduction *algorithm to provide required accuracy for such solutions excessively increases the model order. So, taking account of external circuitry in MOR procedures is the promising approach to minimize the order of reducing network. To take surrounding into account the MOR problem for the subcircuit of linear electrical circuit is considered. The problem solving is based on Galerkin method similarly with standard approach for linear dynamical system. Departing from that approach, the proposed method reduces Kirchhoff equations for the subcircuit internal nodes only. The projective basis is generated in the space of the subcircuit state vectors obtained by evaluations of the whole circuit. The reduced model presented by admittance matrix with the saved set of the subcircuit boundary nodes can be directly included in any electrical network. Numerical simulation of RC-line and its reduced versions demonstrated essential decrease of the error if the average capacitance load is taken into account.*

Keywords: *electronic design automation, model order reduction, circuit simulation, linear subcircuit, projection matrix, Krylov subspace*

DOI: 10.17587/it.24.563-572

References

1. **Silva J. M. S., Villena J. F., Flores P., Silveira L. M.** *Outstanding Issues in Model Order Reduction*, Scientific Computing in Electrical Engineering, Berlin Heidelberg, Springer, Germany, 2007, pp. 139—152.
2. **Benner P., Hinze M., Jan E., ter Maten W. (Editors)** *Model Reduction for Circuit Simulation*, Series: Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2011, Vol. 74.
3. **Gourary M. M., Zharov M. M., Rusakov S. G., Ulyanov S. L.** Metody vozmushhenij i selektivnye metody v zadachah redukcii vysokorazmernyh modelej (Perturbation methods and selective methods in problems of a reduction of high-dimension models), *Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development*, 2008, no. 1, pp. 86—91 (in Russian).
4. **Moore B. C.** Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, vol. AC-26, no. 1, pp. 17—32.
5. **Pillage L. T., Rohrer R. A.** Asymptotic waveform evaluation for timing analysis, *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 1990, vol. 9, no. 4, pp. 352—366.
6. **Feldmann P., Freund R. W.** Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 1995, vol. 14, no. 5, pp. 639—649.
7. **Silveira L. M., Kamon M., Elfadel I., White J.** A coordinate transformed Arnoldi algorithm for generating guaranteed stable reduced order models of RLC circuits, *In Proc. ICCAD*, November 1996, pp. 288—294.
8. **Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L. T.** PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm, *IEEE Trans. CAD*, 1998, vol. 17, no. 8, pp. 645—654.
9. **Feldmann P., Freund R. W.** Reduced-order modeling of large linear subcircuits via a block Lanczos algorithm, *Proc. 32nd ACM/IEEE Design Automation Conf.*, 1995, pp. 474—479.
10. **Heres P. J., Schilders W. H. A.** Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction, *In Scientific Computing in Electrical Engineering, Series: Mathematics in Industry*, Springer, 2006, vol. 9, pp. 39—44.
11. **Nguyen T. V., Li J.** Multipoint Pade approximation using a rational block Lanczos algorithm, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Comp. Aided Design (ICCAD)*, 1997, pp. 72—77.
12. **Elfadel I. M., Ling D. L.** A block rational Arnoldi algorithm for multipoint passive model-order reduction of multiport RLC networks, *In Proc. Int. Conf. Comput.-Aided Des.*, 1997, pp. 66—71.
13. **Phillips J. R., Silveira L. M.** Poor man's TBR: a simple model reduction scheme, *IEEE Trans. Comp. Aided Design Integr. Circuits Syst.*, 2005, vol. 24, pp. 43—55.
14. **Gourary M. M., Ulyanov S. L., Zharov M. M.** Model order reduction by state vector selection (SVS) approach, *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, 2013, pp. 1—4.
15. **Lee Herng-Jer, Chu Chia-Chi, Feng Wu-Shiung.** An adaptive-order rational Arnoldi method for model-order reductions of linear time-invariant systems, *Linear Algebra and its Applications*, 2006, vol. 415, pp. 235—261.
16. **De Luca G., Antonini G., Benner P.** Parallel Model Order Reduction for Sparse Electromagnetic/Circuit Models, *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 2015, vol. 30, no. 1, pp. 1—21.
17. **Abidi O., Hached M., Jbilou K.** Adaptive rational block Arnoldi methods for model reductions in large-scale MIMO dynamical systems, *New Trends in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 4, no. 2, pp. 227—239.
18. **Druskin V., Lieberman C., Zaslavsky M.** On adaptive choice of shifts in rational Krylov subspace reduction of evolutionary problems, *SIAM J. Sci. Comput.* 2010, vol. 32, no. 5, pp. 2485—2496.
19. **Grimme E.** *Krylov Projection Methods for Model Reduction*, PhD thesis, Coordinated-Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, IL, 1997.
20. **Bortakovskij A. S., Panteleev A. V.** *Linejnaja algebra v primerah i zadachah* (Linear algebra in examples and problems). Moscow, Vysshaja shkola, 2005. 591 pp. (in Russian).
21. **Vlach J., Singhal K.** Mashinnye metody analiza i proektirovanija jelektronnyh shem (Computer methods for Circuit Analysis and Design), Moscow, Radio i svyaz, 1988, 560 p. (in Russian).