

А. Н. Божко, канд. техн. наук, доц., abozhko@inbox.ru,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Формализация размерных ограничений на проектные решения сборочного передела

Рассматривается влияние системы конструкторских размерных цепей на допустимые последовательности сборки и разбиения изделия на сборочные единицы. При сборке изделий должны выполняться правила связности и замкнутости конструкторских размерных цепей. Показано, что допустимые последовательности сборки представляют собой линейные продолжения иерархического порядка, который индуцирован размерной схемой на множестве деталей изделия. Даны численные оценки ограничений, которые размерные схемы накладывают на проектные решения сборочного этапа. Оказалось, что цепной способ простановки размеров является самым жестким, координатный — самым "толерантным". Разработано математическое описание принципа замкнутости размерной цепи. Показано, что для локализации размерной задачи требуется совпадение двух отношений эквивалентности на множестве деталей изделия. На основе полученных результатов сформулированы два принципа согласования размерной и механической структур изделия. Полученные результаты могут быть использованы для генерации рациональных размерных схем в интегрированных CAD/CAM-системах.

Ключевые слова: размерная цепь, последовательность сборки, разбиение на сборочные единицы, иерархический порядок, линейный порядок, размерный граф, отношение толерантности, отношение эквивалентности

Введение

Система конструкторских размеров — это важная часть проекта любого сложного изделия. Совокупность размеров и связанных с ними конструктивных элементов (деталей, поверхностей, осей и пр.) образует размерную структуру изделия. Размерная структура оказывает значительное влияние на содержание сборочных работ и экономические характеристики производства. Например, длинные размерные цепи затрудняют сборку с применением экономичных методов полной и неполной взаимозаменяемости. Размерные цепи с большим числом общих звеньев могут быть причиной конфликтов, когда реализация одной цепи влечет за собой потерю точности другой. В проектной практике эти свойства размерной структуры объективированы в форме двух правил, которые обычно называют *принципами кратчайшей размерной цепи* и *минимального числа пересечений*.

От размерной структуры изделия зависят проектные решения сборочного передела. В работе [1] отмечается, что анализ конструкторских размерных цепей помогает понять взаимосвязи деталей, составляющих изделие и ее сборочные единицы, найти рациональные методы достижения точности замыкающих зве-

ньев, проверить корректность простановки размеров и допусков, **наметить последовательность сборки изделия и ее сборочных единиц**. В самом деле, простановка конструкторских размеров индуцирует на множестве деталей изделия отношения порядка и эквивалентности. Эти отношения не должны противоречить упорядоченности деталей в процессе сборки изделия и его разбиению на сборочные единицы. Два простых примера, для которых это требование не выполняется, приведены на рис. 1.

Размерная структура создается на этапе проектирования, а реализуется в процессе сборки изделия, когда ревизия размерной схемы влечет за собой большие экономические и временные издержки. Поэтому в состав CAD/CAM-систем должны входить средства, которые позволяют оценить корректность размерной схемы по критериям сборочного производства и выработать рекомендации по настройке размерной и механической структур изделия. В данной статье предложены оценки жесткости и принципы согласования системы конструкторских размерных цепей. Полученные результаты могут быть использованы для математического и методического обеспечения интегрированных систем, реализующих современные парадигмы проектирования (например, Design for manufacturing, Design for assembly, Concurrent

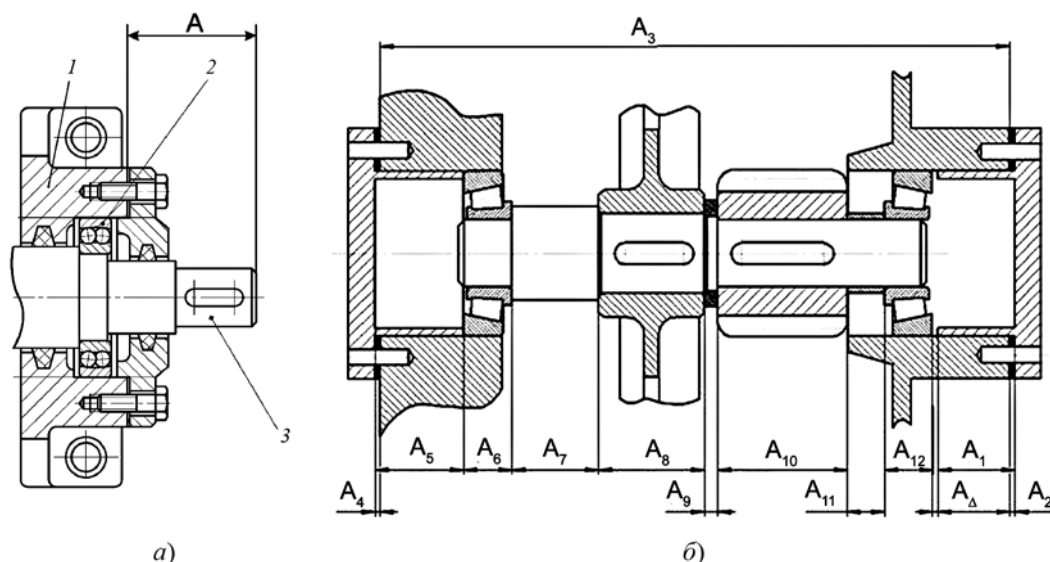


Рис. 1. Примеры конструкций, у которых не согласованы размерная и механическая структуры

engineering), которые требуют согласованной и параллельной работы конструкторов и технологов над проектом сложного изделия [2].

1. Конструкторские размерные цепи

Конструкторские размерные цепи разделяют на поддетальные и сборочные [3]. Первые задают размерные связи между геометрическими элементами деталей, вторые определяют координацию и точность изделия. Составляющими звеньями сборочной размерной цепи могут быть собственные размеры деталей, размеры между разными деталями, поддетальные размерные цепи и производные сборочные размерные цепи. Замыкающие звенья, их номиналы и допуски определяют по условиям эксплуатации или сборки изделия. Замыкающими звеньями служат линейные или угловые размеры между геометрическими элементами (поверхностями, осями и др.), принадлежащими различным деталям. В статье рассматриваются только линейные сборочные размерные цепи и их влияние на основные проектные решения сборочного передела: последовательность сборки и декомпозицию изделия на сборочные единицы.

Замыкающее звено конструкторской размерной цепи получается автоматически после монтажа деталей, которые служат носителями составляющих размеров. Это значит, что размерная схема индуцирует на множестве деталей порядковое отношение, которое не должно противоречить последовательности сборки и

разбиению изделия на сборочные единицы. На рис. 1 приведены примеры двух конструкций, у которых это требование не выполняется, т. е. размерная и механическая структуры изделий не являются согласованными.

В примере на рис. 1, а размер A является составляющим. Легко видеть, что после сборки фрагмента, состоящего из колеса 1, подшипника 2 и вала 3, возникнет неразрешимая (замкнутая) размерная цепь, которую образуют размер A и габаритные размеры трех данных деталей.

В примере на рис. 1, б размерная цепь с замыкающим размером A_{Δ} состоит из 12 звеньев (A_1, \dots, A_{12}). Это очень длинная цепь, которая не может быть реализована экономичными методами полной или неполной взаимозаменяемости. Кроме того, носители данной цепи принадлежат всему изделию, что делает невозможным локализацию и решение точностных задач в пределах одной сборочной единицы.

В работах [4–9] обсуждаются различные аспекты сложной проблемы синтеза рациональных размерных схем в системах автоматизированного проектирования. В статьях [4, 5] предложены способы генерации размерной схемы по трехмерной геометрической модели изделия. Оптимальное распределение допуска на замыкающее звено по звеньям размерной цепи рассматривается в работе [6]. Статья [7] посвящена синтезу трехмерной геометрической модели изделия с учетом заданной размерной схемы. В работе [8] предложен метод моделирования конструкторских размерных

цепей с помощью аппарата теории графов. Проблема синтеза размерной схемы, которая заведомо может быть реализована с помощью методов полной и неполной взаимозаменяемости, обсуждается в статье [9].

Рассмотренные работы по автоматизированному синтезу размерной структуры сложных изделий имеют ряд общих недостатков:

- основное внимание уделено подетальным конструкторским цепям;
- для генерации рациональных размерных структур используются только классические критерии минимального числа звеньев и минимального числа пересечений связанных цепей;
- не обсуждается влияние размерной структуры сложного изделия на допустимые последовательности сборки и декомпозиции на сборочные единицы.

2. Базовые правила реализации размерной схемы

Основные взаимные связи между размерной схемой и проектными решениями сборочного этапа сформулируем в виде двух основных правил реализации.

1. *Правило связности* "растущей" размерной цепи. В сборочной операции можно реализовать такой составляющий размер конструкторской сборочной размерной цепи, который инцидентен собранному фрагменту изделия.

2. *Правило замкнутости*. Детали, которые являются носителями составляющих звеньев сборочной размерной цепи, должны принадлежать одной сборочной единице (СЕ).

Составляющие звенья сборочных размерных цепей разделим на два типа. К первому типу относятся размеры, соединяющие геометрические элементы одной детали, например размеры $A_1, A_2, A_4, \dots, A_{12}$ на рис. 1, б. Ко второму типу относятся размеры, координирующие элементы разных деталей изделия (A_3 на рис. 1, б).

Пусть все звенья размерной цепи относятся к первому типу. В этом случае любая последовательность их реализации размеров индуцирует очевидную упорядоченность деталей, которые являются их носителями.

3. Формализация размерных ограничений на последовательности сборки изделия

Представим размерную схему в виде графа, в котором ребра соответствуют размерам, а вер-

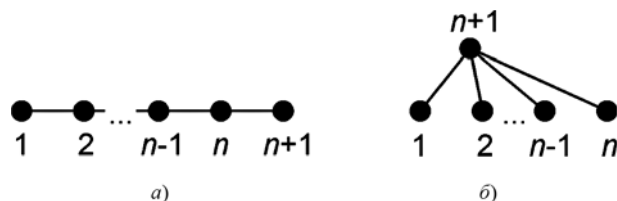


Рис. 2. Размерные графы:

a — цепного метода; *б* — координатного метода

шины описывают их инцидентность (контакты поверхностей, совпадение осей и др.). Рассмотрим два размерных графа, соответствующих основным методам простановки размеров: цепному (рис. 2, *a*) и координатному (рис. 2, *б*).

Обозначим CR_n^1 — число всех последовательностей реализации $(n + 1)$ -вершинной цепи (рис. 2, *a*), которые удовлетворяют правилу связности, а TR_n^1 — число всех таких последовательностей для $(n + 1)$ -вершинного дерева (рис. 2, *б*). Здесь единичный верхний индекс означает принадлежность всех элементов размерной цепи к первому типу.

Легко видеть, что любая последовательность реализации размеров дерева сохраняет связность цепи в корне, поэтому $TR_n^1 = n!$.

Подсчитаем CR_n^1 . Число допустимых реализаций $(n + 1)$ -вершинной цепи зависит от выбора первого ребра. Если исполнение начать с левого (правого) ребра, то допустимой является только одна последовательность звеньев, которая описывается порядком вершин $3, 4, \dots, n$ ($n - 2, n - 3, \dots, 1$ — при выборе правого ребра). Пусть первым будет размер, соответствующий любому внутреннему ребру цепи. Тогда цепь разделится на две подцепи, реализацию которых можно продолжить единственным способом: левая подцепь исполняется справа налево, а правая — в противоположном направлении. Это превращает подцепи в упорядоченные множества. Пусть $r_i = (i, i + 1)$ — ребро, которое соединяет вершины с номерами i и $i + 1$. На рис. 3 показаны упорядочения размеров, порожденные выбором первого звена.

Обозначим $L(r_i)$ — число допустимых реализаций размерных звеньев цепи (см. рис. 2, *a*) при условии, что первым исполняется размер r_i (рис. 3). Очевидно, что $CR_n^1 = \sum_{i=1}^n L(r_i)$. Для расчета CR_n^1 воспользуемся методом перечисления числа линейных продолжений дискретной суммы упорядоченных множеств, описанным в работе [10].

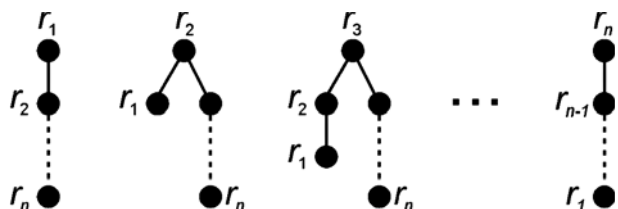


Рис. 3. Варианты упорядочения размеров, которые порождаются выбором первого звена

Пусть (P_i, \leq_i) , $i = \overline{1, r}$, — семейство упорядоченных множеств.

Определение. Упорядоченное множество (P, \leq) называется дискретной суммой упорядоченных подмножеств (P_i, \leq_i) , $i = \overline{1, r}$, если $P = \bigcup_{i=1}^r P_i$ и $\forall a, b \in P$, $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $\forall a, b \in P$, $a \leq b$ [11].

Число линейных продолжений упорядоченного множества можно найти по формуле

$$N = \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_r!} N_1 N_2 \dots N_r, \quad (1)$$

где $m_i = |P_i|$, $m = |P| = \sum_{i=1}^r m_i$, а N_i — число линейных продолжений упорядоченного множества (P_i, \leq_i) , $i = \overline{1, r}$ [10].

Используя формулу (1), найдем число линейных продолжений упорядоченного множества, общий вид которого показан на рис. 4. В терминах теории графов это корневое дерево, каждое поддерево которого является цепью.

Все линейные продолжения данного порядка начинаются с корневой вершины. Если убрать эту вершину из дерева, то получим

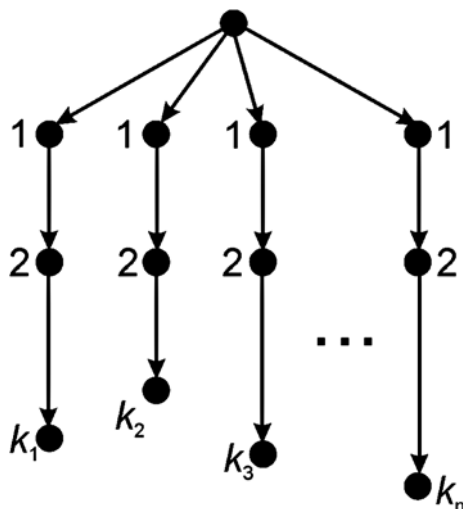


Рис. 4. Иерархический частичный порядок

дискретную сумму r упорядоченных подмножеств, каждое из которых представляет собой цепь. Любая цепь имеет только одно линейное продолжение, поэтому $N_1 = N_2 = \dots = N_r = 1$, поэтому формула (1) примет вид

$$N = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}, \quad (2)$$

где k_i , $i = \overline{1, n}$, — число вершин в i -й ветви, растущей из корня дерева.

Теперь $\forall i = 2, \dots, n-1$ $L(r_i)$ можно найти как число линейных продолжений упорядоченного множества, которое представляет собой дискретную сумму двух линейных порядков, состоящих из $i-1$ и $n-i$ вершин, т. е. $k_1 = i-1$, а $k_2 = n-i$. Подставив эти значения в формулу (2), получим $L(r_i) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$. Отсюда

да $CR_n^1 = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + 2$. Внесем одну единицу под операцию суммирования, получим

$CR_n^1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + 1$ (теперь суммирование начинается с единицы). Подстановка $j = i-1$

даёт $CR_n^1 = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} + 1$. Представим

единицу в виде $1 = \frac{(n-1)!}{(n-1)!0!}$ и внесем это сла-

гаемое под знак суммирования. В результате получим полную сумму биномиальных коэффициентов для числа $n-1$, которая равна

$$CR_n^1 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} = 2^{n-1}. \quad (3)$$

Рассмотрим вариант сборочной размерной цепи, в которой все составляющие размеры относятся ко второму типу, т. е. они соединяют геометрические элементы разных деталей. Если во множестве деталей, образующих сборочную размерную цепь, выбрать базовую деталь (т. е. деталь, которая устанавливается первой), то данная цепь индуцирует на множестве иерархическое отношение частичного порядка, а допустимые последовательности сборки представляют собой линейные продолжения этого порядка. Выразим данное утверждение в точных терминах.

Пусть $A \subseteq X = \{x_i\}_{i=1}^n$ — множество деталей изделия X , которые своими геометрическими элементами участвуют в формировании сборочной размерной цепи. Для любых $x_k, x_l \in A$

обозначим $x_k R x_l$ ситуацию, когда две детали x_k и x_l связаны размером. Пусть $z \in A$ — деталь, которая устанавливается первой в данной размерной цепи. Детали x и y состоят в отношении иерархического частичного порядка xTy тогда и только тогда, когда существует последовательность $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} \in A$ такая, что $\forall k = \overline{1, r-1} \ x_{i_k} R x_{i_{k+1}}, \ x_{i_1} = z, \ x_{i_r} = y$ и $\exists t \in \{2, r-1\} \mid x = x_{i_t}$. Иерархически упорядоченные множества такого типа представляют в виде корневых деревьев, в которых корнем служит базовая деталь, а дуги представляют отношение предшествования, индуцированное размерными связями. На рис. 5 показаны примеры двух иерархических порядков, которые порождаются цепным и координатным методами простановки размеров.

Обозначим $T(r)$ — иерархический порядок, который порождается на множестве A выбором корневой вершины с номером r ; $N(T(r))$ — число линейных продолжений порядка $T(r)$; CR_n^2 — число реализаций n -вершинной цепи; а TR_n^2 — число допустимых реализаций n -вершинного дерева, удовлетворяющих правилу связности "растущей" цепи. Верхний индекс означает, что все звенья размерных цепей принадлежат ко второму типу. Эти числа можно найти по формулам $CR_n^2 = \sum_{r=1}^n N(T(r))$ и $TR_n^2 = \sum_{r=1}^n N(T(r))$.

Легко видеть, что каждому иерархическому порядку $T(r)$, порожденному цепью, можно поставить в соответствие одно и только одно корневое дерево семейства, показанного на рис. 3. Поэтому справедливо равенство

$$CR_n^2 = \sum_{r=1}^n N(T(r)) = \sum_{i=1}^n L(r_i) = 2^{n-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим иерархический порядок T (рис. 5, б), который порождает координатный

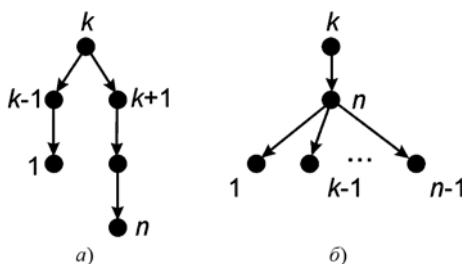


Рис. 5. Иерархические порядки T для цепного (а) и координатного (б) методов простановки размеров

способ простановки размеров. Легко видеть, что у данного дерева с корнем в вершине k существует $(n-1)!$ линейных продолжений. Кроме того, реализацию размерной цепи можно начать с любой из деталей с номерами от 1 до $n-1$, что дает еще $(n-1)(n-2)!$ линейных порядков. Общее число последовательностей, согласованных с данной размерной структурой, равно

$$TR_n^2 = (n-1)! + (n-1)(n-2)! = 2(n-1)!. \quad (5)$$

Числа $CR_n^1, CR_n^2, TR_n^1, TR_n^2$ являются измерителями силы ограничений, которые размерная схема изделия накладывает на допустимые последовательности сборки изделия. Для $n = 4, 5, \dots$ выполняются соотношения $CR_n^1 = CR_n^2 < TR_n^2$ и $TR_n^2 < TR_n^1$. Если $CR_2^1 = CR_2^2 = TR_2^1 = TR_2^2$, то, как легко видеть, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CR_n^1}{TR_n^1} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{TR_n^1}{TR_n^2} = 0$. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CR_n^1}{TR_n^1}$. Представим CR_n^1 в виде суммы $CR_n^1 = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + 2$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CR_n^1}{TR_n^1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + 2}{2(n-1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2(i-1)!(n-i)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) = 0. \end{aligned}$$

Приведенные соотношения показывают, что цепной способ простановки размеров — самый жесткий. Он отсекает большое число последовательностей, для которых не выполняется правило связности "растущей" размерной цепи. Из всех рассмотренных самым "толерантным" является координатный способ образмеривания с поддетальными составляющими размерами. Разница между размерными схемами быстро растет с увеличением мощности размерной цепи.

Чаще всего в конструкторской практике используют так называемый комбинированный способ простановки размеров. В этом случае размеры могут ставиться от основной базы, промежуточных баз и образовывать размерные цепи произвольной длины. Размерные цепи, которые порождает комбинированный способ, описываются деревьями общего вида. Оценим жесткость ограничений, которые накладывает комбинированная размерная схема на возмож-

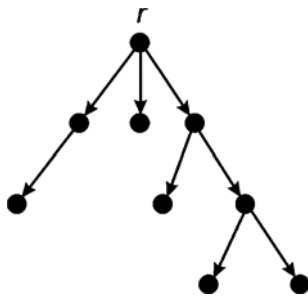


Рис. 6. Иерархический порядок $T(r)$, который порождается на дереве выбором корневой вершины r

ные последовательности сборки, по числу возможных линейных продолжений. Рассмотрим размерную схему, у которой все составляющие размеры принадлежат ко второму типу.

Как и ранее, выбор базовой детали, с которой начинается реализация размерной схемы, превращает размерное дерево в иерархически упорядоченное множество. Обозначим $T(r)$ — иерархический порядок, который порождает на дереве выбор корня r (рис. 6), а PR_n^2 — число допустимых реализаций размерной схемы, удовлетворяющих правилу "растущей" размерной цепи. Это число, как и ранее, равняется сумме линейных продолжений иерархических порядков $T(r)$, взятой по всем корневым вершинам r , т. е. $PR_n^2 = \sum_{r=1}^n N(T(r))$.

В работе [10] показано, что $N(T)$ — число линейных продолжений иерархического порядка можно найти по формуле

$$N(T) = \frac{|T|!}{|T| \times |T_1| \times |T_2| \times \dots \times |T_r|}, \quad (6)$$

где $|T|$ — число вершин дерева T ; $|T_i|$, $i = \overline{1, r}$ — число вершин во всех поддеревьях, содержащих более одной вершины.

Пусть T_1, T_2, T_3 — три n -вершинных иерархических порядка разного типа, т. е. $|T_1| = |T_2| = |T_3|$; T_1 — цепь, полученная выбором корня в любой внутренней вершине (рис. 7, а), T_2 —

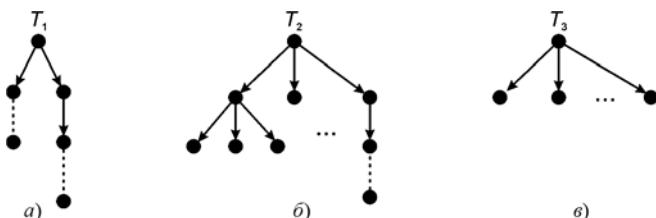


Рис. 7. Примеры различных иерархических порядков

дерево произвольной структуры (рис. 7, б) и T_3 — одноуровневое дерево (рис. 7, в).

Из формулы (6) следуют неравенства $N(T_1) \leq N(T_2) \leq N(T_3)$, связывающие числа линейных продолжений иерархических порядков разного типа. Почленное суммирование данных неравенств по всем n корневым вершинам дает следующие соотношения:

$$CR_n^2 \leq PR_n^2 \leq TR_n^2. \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что самые жесткие ограничения на возможные последовательности сборки накладывает цепной способ простановки размеров, самые мягкие — координатный. Комбинированная система образмеривания занимает промежуточное положение между данными размерными схемами.

Пусть размерная схема является смешанной, т. е. в нее входят как поддетальные размеры, так и размеры, соединяющие геометрические элементы разных деталей. Пример такой схемы приведен на рис. 1, б. Очевидно, что любая смешанная размерная схема также может быть представлена в виде дерева. Правило связности "растущей" размерной цепи должно выполняться и в этом случае, поэтому любая допустимая последовательность реализации размеров смешанной размерной цепи является линейным продолжением древесного (иерархического) порядка, заданного на множестве деталей-носителей.

Опуская громоздкие формальные выкладки, скажем, что для любых размерных цепей (первого, второго типов и смешанных) равной мощности выполняется соотношение $CR_n \leq PR_n \leq TR_n$.

Формулы (4)–(7) дают оценки числа последовательностей сборки изделия, согласованных с размерной схемой. Эти числа достаточно велики, нижняя граница составляет $CR_n = 2^{n-1}$, где n — число вершин размерного графа. В большинстве случаев размерная цепь соединяет только часть деталей изделия. Любая перестановка деталей, не входящих в размерную цепь, сохраняет правило связности растущей цепи. Это значит, что число последовательностей сборки, согласованных с размерной схемой, превышает нижнюю границу, равную CR_n . Более точно, пусть N — число деталей изделия. Тогда число согласованных последовательностей больше, чем $(N - n)!CR_n$.

Механическая структура изделия (множество деталей, связанных соединениями и сопряжениями) накладывает значительно более сильные ограничения на допустимые последовательности сборки. Легко привести примеры структур, для которых существует только одна такая последовательность [12]. Это позволяет сформулировать следующий принцип согласования механической и размерной структур изделия.

Утверждение 1. Сборочная размерная цепь согласована с механической структурой изделия по критерию собираемости, если для каждой последовательности сборки изделия, удовлетворяющей условиям базирования, выполняется правило связности "растущей" размерной цепи.

4. Формализация размерных ограничений на сборочные декомпозиции

Система сборочных размерных цепей влияет не только на возможные последовательности сборки изделия. От этого проектного решения зависит способ разбиения изделия на сборочные единицы. В самом деле, любая сборочная размерная цепь решает определенную точностную задачу, которая формулируется по условиям эксплуатации или для обеспечения собираемости изделия или его сборочных единиц. В процессе сборки требуется не только реализовать сборочную размерную цепь, но и осуществить контрольные мероприятия, гарантирующие достижение заданной точности замыкающего звена. Эти технологические и метрологические операции выполняют на отдельных рабочих местах над группой деталей, которые должны быть собраны независимо от остальных фрагментов изделия. Поэтому все детали, которые являются носителями составляющих звеньев сборочной цепи, должны входить в одну сборочную единицу.

Выразим это утверждение в точных математических терминах. Пусть, как и ранее, $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ — множество деталей изделия. Рассмотрим бинарное отношение $RC \subseteq X \times X$ на множестве X , в котором $xRCy$ тогда и только тогда, когда детали x и y некоторыми своими размерами или геометрическими элементами участвуют в формировании сборочной размерной цепи.

Легко убедиться, что для отношения RC выполняются следующие свойства:

- $xRCx \forall x \in X$ (рефлексивность);
- $xRCy \Rightarrow yRCx \forall x, y \in X$ (симметричность).

Из этого следует, что RC представляет собой отношение толерантности [11].

Обозначим $\tau(RC)$ — транзитивное замыкание отношения RC . Это минимальное бинарное отношение, включающее в себя RC и обладающее свойством транзитивности. Транзитивное замыкание можно найти по формуле $\tau(RC) = RC \cup RC^2 \cup \dots \cup RC^n$, где n — мощность носителя (число деталей изделия) [11].

Отношение $\tau(RC)$ обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности на множестве X . Известно, что любое бинарное отношение эквивалентности разбивает свой носитель на совокупность непересекающихся подмножеств, элементы которых попарно эквивалентны друг другу [11]. Классы эквивалентности отношения $\tau(RC)$ — это множества деталей, замкнутые относительно сборочных размерных цепей. В них входят детали, собственные размеры которых образуют одну сборочную размерную цепь или являются звеньями производных или связанных размерных цепей.

Пусть SD — некоторая r -уровневая схема декомпозиции изделия $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ на сборочные единицы (рис. 8). Обозначим S_i^k , $i = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, r}$, — совокупность сборочных единиц, принадлежащих k -му уровню иерархии, p_k — число сборочных единиц на данном уровне. Будем рассматривать множество деталей и собранное изделие X как тривиальные разбиения на сборочные единицы, т. е. $S_i^1 = x_i$, $i = \overline{1, n}$; $p_1 = n$ и $S^r = X$, $p_r = 1$.

На любом уровне $k = \overline{1, r}$ совокупность $S^k = \{S_1^k, S_2^k, \dots, S_{p_k}^k\}$ образует разбиение мно-

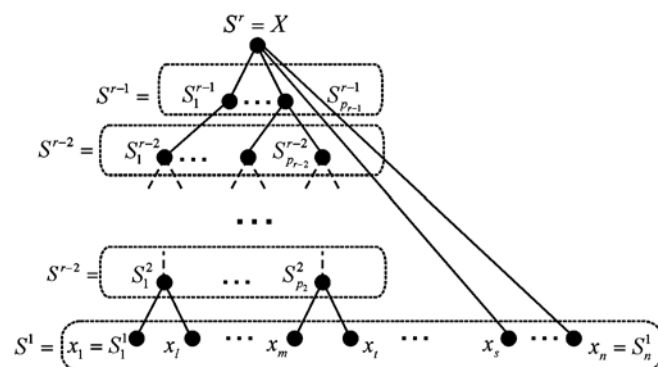


Рис. 8. Многоуровневая схема декомпозиции изделия на СЕ

жества $D^k = \bigcup_{i=1}^{p_k} S_i^k$; $D^k \subseteq X$ и $D^1 = D^r = X$. Элементы разбиения можно рассматривать как классы бинарного отношения эквивалентности $\lambda^k \subseteq D^k \times D^k$. Более точно это условие можно определить как $x\lambda^k y \Leftrightarrow \exists i | x, y \in S_i^k$.

На эквивалентностях $\lambda^k, k = \overline{1, r}$, в свою очередь зададим бинарное отношение подразбиения (измельчения) \triangleleft следующим образом:

$$\lambda^q \triangleleft \lambda^t \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, p_q\} \exists j \in \{1, \dots, p_t\} | S_i^q \subseteq S_j^t.$$

Легко проверить, что это отношение обладает свойствами:

- $\lambda^k \triangleleft \lambda^k, \forall k \in \{1, \dots, r\}$ — рефлексивности;
 - $\lambda^q \triangleleft \lambda^t, \lambda^t \triangleleft \lambda^q \Rightarrow \lambda^t = \lambda^q$ — антисимметричности;
 - $\lambda^q \triangleleft \lambda^t, \lambda^t \triangleleft \lambda^s \Rightarrow \lambda^q \triangleleft \lambda^s$ — транзитивности,
- т. е. является отношением нестрогого порядка [11].

Обозначим $\lambda = \bigcup_{k=1}^r \lambda^k$ — множество всех эквивалентностей, порожденных многоуровневой декомпозицией на сборочные единицы. Это множество вместе с заданным на нем отношением подразбиения станет упорядоченным множеством (λ, \triangleleft) .

Упорядоченное множество (λ, \triangleleft) обладает двумя важными свойствами. Во-первых, оно имеет наибольший элемент (порядковую единицу). Единицей множества (λ, \triangleleft) является эквивалентность λ^k , состоящая из одного класса X . Во-вторых, оно является древесным порядком, поскольку таковыми являются любые схемы декомпозиции SD (рис. 8).

В общем случае (λ, \triangleleft) может не быть линейным порядком (цепью), поскольку сборочные единицы нижних уровней могут входить в сборочные единицы верхних уровней, минуя промежуточные вхождения. Например, часто возникает ситуация, когда отдельные детали участвуют в сборке самого изделия, например детали x_s, \dots, x_n на рис. 8.

Образует объединенное множество отношений $\delta = \bigcup_{k=1}^r \lambda^k \cup \tau(RC)$, элементами которого служат эквивалентности, индуцированные разбиением изделия на СЕ и простановкой конструкторских размеров.

Рассмотрим множество δ вместе с порядком, который создает на нем отношение подразбиения. Обозначим это упорядоченное множество

(δ, \triangleleft) . Множество (δ, \triangleleft) является связным и, поскольку $\tau(RC) \triangleleft \lambda^r$, имеет наибольший элемент λ^r . В общем случае множество (δ, \triangleleft) может не быть древесным порядком, но в нем элемент $\tau(RC)$ покрывает только один элемент $\lambda^i \in \lambda$. Если бы существовали различные λ^i и λ^j такие, что $\tau(RC) \triangleleft \lambda^i$ и $\tau(RC) \triangleleft \lambda^j$, то $\lambda^i \cap \lambda^j \neq \emptyset$ (символ \triangleleft означает порядковое покрытие). Это, очевидно, противоречит древесной структуре упорядоченного множества (λ, \triangleleft) .

Используя введенную формализацию, можно дать точное описание согласованности системы сборочных размерных цепей и принятого варианта декомпозиции на сборочные единицы.

Утверждение 2. Сборочная размерная цепь согласована с механической структурой изделия по критерию расчленяемости, если в многоуровневом разбиении SD найдется такой уровень с номером $i, 1 < i < r$, для которого выполняется равенство $\lambda^i = \tau$.

Если выполняется утверждение 2, то поставленная конструктором точностная задача решена наиболее экономным способом, поскольку в сборочные единицы вошли только те детали, которые структурируют заданные конструктором размерные цепи изделия.

Пусть не существует i такого, что $\lambda^i = \tau$. Тогда найдется λ^j такой, что $\tau \triangleleft \lambda^j$. В этом случае хорошим согласованием можно считать такой вариант разбиения λ^j , для которого справедливо $f_r(\lambda^j) \rightarrow \max$. В этом случае сборка СЕ, включающих в себя конструкторские размерные цепи, будет выполнена на ранних стадиях производственного процесса. Поэтому общая сборка изделия будет максимально освобождена от технических мероприятий по контролю, пригонке и регулировке размерных цепей.

Заключение

1. Рассмотрено влияние системы конструкторских размерных цепей на основные проектные решения сборочного передела: последовательность сборки и декомпозицию изделия на сборочные единицы.

2. Показано, что сборка изделия должна быть организована таким образом, чтобы для конструкторских размерных цепей выполнялись два базовых правила: связность и замкнутость размерной цепи.

3. Разработана формализация правила связности и показано, что последовательность

сборки изделия должна представлять собой линейное продолжение иерархического порядка, порожденного размерной цепью на множестве деталей.

4. Рассчитаны интенсивности ограничений, которые накладывают на допустимые последовательности сборки различные способы простановки конструкторских размеров (цепной, координатный и комбинированный).

5. Разработана формализация правила замкнутости и показано, что для согласования механической и размерной структур изделия по критерию расчленяемости требуется совпадение двух отношений эквивалентности на множестве деталей изделия.

Список литературы

1. Маталин А. А. Технологии машиностроения. М.: Лань, 2015. 512 с.
2. Anderson D. M. Design for Manufacturability: How to Use Concurrent Engineering to Rapidly Develop Low-Cost, High-Quality Products for Lean Production. CRC Press. 2014. 434 p.
3. Емельянов С. Г., Рудской А. М., Учаев П. Н. и др. Размерный анализ в машиностроении. М.: ТНТ, 2012. 332 с.
4. Gao Zhenbo, Wang Jing, Cao Yanlong, Yang Jiangxin. Automatic Generation of 3D Assembly Dimension Chain Based on Feature Model // Procedia CIRP. Vol. 43. 2016. P. 70–75. DOI:10.1016/j.procir.2016.02.012.
5. Heng Wang, Ruxin Ning, Yan Yan. Simulated toleranced CAD geometrical model and automatic generation of 3D dimension chains // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. Vol. 29, Iss. 9–10. 2006. P. 1019–1025. DOI: 10.1007/s00170-005-2617-x.
6. Payam Haghighi, Prashant Mohan, Jami J. Shah and Joseph K. Davidson. Automatic Detection and Extraction of Tolerance Stacks in Mechanical Assemblies // ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Vol. 2B: 40th Design Automation Conference Buffalo, New York, USA. 2014. P. 353–363. DOI: 10.1115/DETC2014-35315.
7. Pradeep K. Singh, Satish C. Jain, Pramod K. Jain. Advanced optimal tolerance design of mechanical assemblies with interrelated dimension chains and process precision limits // Computers in Industry. Vol. 56, Iss. 2. 2005. P. 179–194. DOI: 10.1016/j.compind.2004.06.008.
8. Ya Zhang, Lin Zhang. Graph Theory Solution Method to Solve The Complex Assembly Dimension Chain // Proc. of the 2017 7th International Conference on Mechatronics, Computer and Education Informationization (MCEI 2017). 2017. DOI: 10.2991/mcei-17.2017.140.
9. Zhenbo Gao, Zhexing Wang, Zijian Wu, Yanlong Cao. Study on Generation of 3D Assembly Dimension Chain. Procedia CIRP. 2015. Vol. 27. P. 163–168. DOI: 10.1016/j.procir.2015.04.060.
10. Розен В. В. Цель — оптимальность — решение (математические модели принятия оптимальных решений). М.: Радио и связь, 1982. 168 с.
11. Гуров С. И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: Определения, свойства, примеры. М.: Либроком, 2013. 352 с.
12. Божко А. Н. Алгебраические модели сборки изделий // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 12. DOI: 10.7463/1216.0852565.

A. N. Bozhko, Assistant Professor, e-mail: abozhko@inbox.ru,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Formalization of Dimensional Constraints on Design Decisions of the Assembly Stage

The paper considers the influence of the system of design dimensional chains on permissible sequences of assembling and splitting the product into assembly units. When assembling products, the rules of connectivity and closure of design dimensional chains must be fulfilled. It is shown that admissible assembly sequences are linear extensions of a hierarchical order that is induced by a dimensional scheme on a set of parts of the product. Numerical estimates of the strength of constraints are given, which dimensional schemes impose design solutions of the assembly stage. It turned out that the chain method of dimensioning is the most rigid one, coordinating — the most "tolerant" one. A mathematical description of the principle of the closure of a dimensional chain is developed. It is shown that the localization of a dimensional problem requires the coincidence of two equivalence relations on the set of parts of the product. On the basis of the results obtained, two principles for reconciling the dimensional and mechanical structures of the product are formulated. The obtained results can be used to generate rational dimensional schemes in integrated CAD/CAM-systems.

Keywords: dimensional chain, assembly sequence, splitting into assembly units, hierarchical order, linear order, dimensional graph, tolerance relation, equivalence relation

DOI: 10.17587/it.24.454-463

References

1. **Matalin A. A.** *Tekhnologii mashinostroyeniya* (Technology of mechanical engineering), Moscow, Lan, 2015, 512 p. (in Russian).
2. **Anderson D. M.** Design for Manufacturability: How to Use Concurrent Engineering to Rapidly Develop Low-Cost, High-Quality Products for Lean Production. CRC Press, 2014, 434 p.
3. **Yemelyanov S. G., Rudskoy A. M., Uchayev P. N.** and etc. *Razmernyy analiz v mashi-nostroyenii* (Dimensional analysis in machine building), Moscow, TNT, 2012, 332 p. (in Russian).
4. **Gao Zhenbo, Wang Jing, Cao Yanlong, Yang Jiangxin.** Automatic Generation of 3D Assembly Dimension Chain Based on Feature Model, *Procedia CIRP*, 2016, vol. 43, pp. 70–75. DOI: 10.1016/j.procir.2016.02.012.
5. **Heng Wang, Ruxin Ning, Yan Yan.** Simulated toleranced CAD geometrical model and automatic generation of 3D dimension chains, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2006, vol. 29, iss. 9 – 10, pp. 1019–1025. DOI: 10.1007/s00170-005-2617-x.
6. **Payam Haghighi, Prashant Mohan, Jami J. Shah and Joseph K. Davidson.** Automatic Detection and Extraction of Tolerance Stacks in Mechanical Assemblies, *ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 2B: 40th Design Automation Conference Buffalo, New York, USA, 2014, pp. 353–363. DOI: 10.1115/DETC2014-35315.
7. **Pradeep K. Singh, Satish C. Jain, Pramod K. Jain.** Advanced optimal tolerance design of mechanical assemblies with interrelated dimension chains and process precision limits, *Computers in Industry*, 2005, vol. 56, iss. 2, pp. 179–194. DOI: /10.1016/j.compind.2004.06.008.
8. **Ya Zhang, Lin Zhang.** Graph Theory Solution Method to Solve The Complex Assembly Dimension Chain, *Proceedings of the 2017 7th International Conference on Mechatronics, Computer and Education Informationization (MCEI 2017)*, 2017, DOI: 10.2991/mcei-17.2017.140.
9. **Zhenbo Gao, Zhexiong Wang, Zijian Wu, Yanlong Cao.** Study on Generation of 3D Assembly Dimension Chain, *Procedia CIRP*, 2015, vol. 27, pp. 163–168. DOI: 10.1016/j.procir.2015.04.060.
10. **Rozen V. V.** *Tsel – optimalnost – resheniye (matematicheskiye modeli prinya-tiya optimalnykh resheniy)* (The goal – optimality – a solution (mathematical models for the adoption of optimal solutions)), Moscow, Radio i svyaz, 1982, 168 p. (in Russian).
11. **Gurov S. I.** *Bulevy algebrы, uporyadochennyye mnozhestva, reshetki: Opredeleniya, svoystva, primery* (Boolean algebras, ordered sets, lattices: Definitions, properties, examples), Moscow, Librokom, 2013, 352 p. (in Russian).
12. **Bozhko A. N.** *Algebraicheskiye modeli sborki izdeliy* (Algebraic models of assembly of products), *Nauka i obrazovaniye. MGTU im. N. E. Baumana. Elektron. zhurn.*, 2016, no. 12. DOI: 10.7463/1216.0852565. (in Russian).



Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
проводит с 17 по 22 сентября 2018 г.

XX Всероссийскую конференцию Научный сервис в сети Интернет



Конференция посвящена основным направлениям и тенденциям использования интернет-технологий в современных научных исследованиях. Основная цель конференции — предоставить возможность для обсуждения, апробации и обмена мнениями о наиболее значимых результатах, полученных ведущими российскими учеными за последнее время в данной области деятельности.

ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ

- Научные исследования и интернет, интернет-представительство научных организаций и проектов.
- Решение задач и обработка данных на суперкомпьютерах центров коллективного пользования.
- Интернет-проекты в области параллельных вычислений, математическое моделирование, вычислительные сервисы.
- Интернет-проекты для биомедицины.
- Модели и методы построения поисковых систем и систем навигации в интернете, технологии и системы распределенного хранения и обработки данных,
- Технологии и опыт построения информационных систем и баз данных, документации и результатов эксперимента на основе интернет-технологий.
- Цифровые библиотеки и библиографические базы, семантический веб, наукометрия в интернете.
- Онлайн-научная публикация, открытая наука, живая публикация, онлайн-рецензирование, мультимедийные иллюстрации.
- Популярный научный интернет, онлайн-энциклопедии, история науки в интернете.
- Интернет-активность ученого, персональная страница, профили ученого в библиографических базах, аттестация в интернете.
- Системное и инструментальное программное обеспечение, языки и модели программирования, формальные методы для интернет-технологий.

Сайт конференции: <http://agora.guru.ru/abrau2018>