УДК 519.812.3 004.942 519.876.5 DOI: 10.17587/it.24.435-444

М. М. Гурарий, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., e-mail: gourary@yandex.ru,
М. М. Жаров, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., e-mail: zarov@ippm.ru,
С. Г. Русаков, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., e-mail: rusakov@ippm.ru,
С. Л. Ульянов, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., e-mail: ulyas@ippm.ru,
Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, 124365, Москва

Минимаксная оптимизация в задачах схемотехнического проектирования

Рассмотрены направления совершенствования методов минимаксной оптимизации при решении задач проектирования, включающие: способ задания частных критериев в виде произвольной кусочно-линейной выпуклой функции; использование особенностей задачи и алгоритмов схемотехнического моделирования для ускорения процедур оптимизации; принципы построения алгоритма решения линейной минимаксной задачи на шаге оптимизации с учетом возможной многокритериальности.

Ключевые слова: *автоматизация проектирования, минимаксная оптимизация, схемотехническое моделирование, линейное программирование, аналоговая схема, итерационные методы, многокритериальные задачи*

Введение

В настоящее время разработка интегральных схем выполняется с применением средств САПР. Разработаны и широко внедрены разнообразные программные продукты, пользуясь которыми разработчик схем может получать значения показателей качества схемы, задавая параметры компонентов схемы, технологического процесса, режимов работы и внешних условий ее функционирования [1, 2]. В рамках этих программ у разработчика имеется также возможность получать зависимости показателей работы схемы от ее параметров. Однако проектирование требует значительного времени ввиду необходимости его многократного повторения до удовлетворения заданных требований к схеме.

По мере увеличения степени интеграции БИС все более актуальной становится задача организации автоматического направленного изменения параметров для обеспечения удовлетворения заданным требованиям в отношении показателей качества схемы. Поиск таких параметров может быть осуществлен на основе алгоритмов численной оптимизации [3, 4].

В настоящее время известно много работ, посвященных разработанным или предлагаемым системам проектирования аналоговых схем на основе оптимизационного подхода. Эти системы различаются математической формулировкой оптимизационных задач.

Классическая постановка задачи, когда один из качественных показателей схемы используется как критерий, а остальные показатели — как ограничения, применяется в IDAC3 [5], GPCAD [6], MOJITO [7]. Ряд систем используют критерий в виде взвешенной суммы показателей: OPASYN [8], ASTRX/OBLX [9], FASY [10]. Здесь все показатели включаются в критерий, а ограничения в явном виде не задаются. В системах FPAD [11], OPTIMAN [12], MAELSTROM [13], gaRFeeld [14] часть показателей не включены в критерий, а учитываются в ограничениях. В большинстве перечисленных систем для оценки значений показателей используются явные формульные представления моделей схемы. В то же время среди существенно более мощных и универсальных систем, основанных на методах электрического моделирования, преобладает минимаксный (или близкий ему) критерий. К таким системам можно отнести EF2ef [15], ΣΔ Modulators [16], DELIGHT.SPICE [17].

Минимаксная оптимизация состоит в выборе параметров схемы, обеспечивающих наибольшее превышение требуемого уровня показателя над его фактическим значением для того показателя, у которого это значение наименьшее. Такой критерий обладает следующими преимуществами над другими известными критериями.

1. По сравнению с заданием критерия в виде аналитической функции (например, суммы квадратов) от недопустимых отклонений минимаксный критерий имеет более ясный смысл для разработчика. Результат "схема удовлетворяет всем требованиям с запасом не менее 10 %" понятнее, чем "среднеквадратичный запас по требованиям равен 10 %".

2. По сравнению с выбором одного показателя как критерия, а остальных в виде ограничений минимакс при невозможности удовлетворения всех требований получает полезный результат в виде отрицательного запаса.

3. По сравнению с комплексным критерием в виде аналитического выражения минимаксный критерий при возможности удовлетворения ограничений на показатели всегда достигает этого.

Используемые в существующих системах алгоритмы минимаксной оптимизации основаны на известных математических методах решения таких задач [18—20]. Эти методы не учитывают особенности расчета показателей схемы с помощью алгоритмов моделирования, поэтому вычислительные затраты часто оказываются избыточными. В математических работах по методам оптимизации явно или неявно предполагается, что затраты на вычисление целевой функции и ограничений несущественны, и поэтому общие затраты определяются числом шагов и собственными затратами алгоритма оптимизации. Отсутствуют работы, в которых бы рассматривалось построение алгоритмов с существенными и разными затратами на вычисление показателей, зависящими от точности их расчета и т.п. Поэтому одной из задач данной работы является разработка направлений развития минимаксных алгоритмов оптимизации с учетом характеристик используемых алгоритмов схемотехнического моделирования.

В работе также предложено распространение известной линейной формы задания частных критериев на случай произвольной кусочно-линейной выпуклой функции. Рассматриваются условия представления минимаксной задачи в многокритериальной форме, приводится описание алгоритма ее решения для линейного случая.

1. Постановка задачи минимаксной оптимизации при проектировании

Задача проектирования электронной схемы состоит в таком выборе ее конфигурации и параметров, чтобы наилучшим образом удовлетворить требования, предъявляемые к схеме. Для этого необходимо определить единый числовой критерий, который позволил бы проводить сравнение различных проектных решений. При этом предполагаются известными:

а) набор показателей схемы: $y = \{y_1, y_1, ..., y_M\}$;

б) направление изменения (увеличение или уменьшение) каждого из показателей, приводящее к улучшению качества схемы, для определенности будем полагать в дальнейшем, что это — уменьшение;

в) предельно-допустимые значения показателей:

$$y_i \leqslant \hat{y}_i,\ i = 1, \ldots, M; \qquad (1)$$

г) математическая модель схемы, определяющая вектор показателей $y = \tilde{y}(d)$ по заданному вектору параметров: $d = \{d_1, d_2, ..., d_N\}$.

Имеются два основных варианта постановки оптимизационной задачи:

— оптимизация одного из показателей при ограничениях на остальные:

$$\tilde{y}_k(d) \to \min,\ \tilde{y}_i(d) \leqslant \hat{y}_i \ \text{при}\ i \neq k; \qquad (2)$$

— оптимизация комплексного критерия в виде скалярной функции φ:

$$\varphi(\tilde{y}(d)) \to \min. \qquad (3)$$

Применение первого подхода не всегда является эффективным, так как он приводит к тому, что большинство значений показателей находятся на границе допуска. В то же время использование второго подхода на основе выражения (3) при достаточно удачном выборе целевой функции позволяет получать реше-

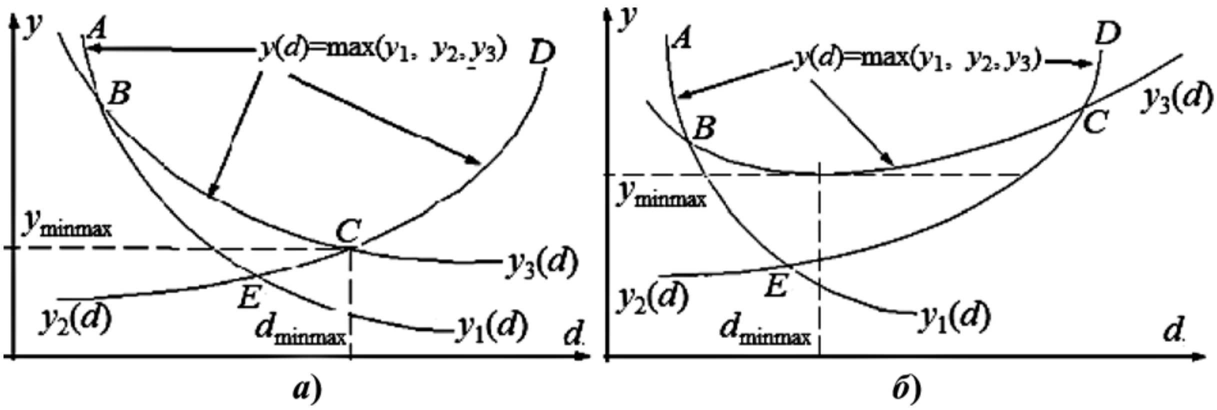

Рис. 1. Одномерные минимаксные задачи с минимумом в точке пересечения критериев (*а*) и с минимумом по одному показателю (*б*)

ние, соответствующее улучшению всех качественных показателей. В рамках второго подхода определение функции целесообразно проводить в два этапа. Сначала для каждого показателя определяется его индивидуальная целевая функция (частный критерий), отражающая степень влияния данного показателя на улучшение качества схемы. Эта функция преобразует значение показателя к безразмерной величине и имеет фиксированное (обычно нулевое) значение при предельно-допустимом значении показателя $\varphi_i(\hat{y}_i) = 0$.

Определив частные критерии, можно выбрать какое-либо симметричное выражение от этих величин в качестве целевой функции задачи (3). Для минимаксной задачи оптимизации выражение (3) принимает вид:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant M}(\varphi_i(\hat{y}(d))) \to \min. \qquad (5)$$

Отметим, что алгоритмы минимаксной оптимизации более сложные и трудоемкие, чем алгоритмы оптимизации гладких функций. Однако вычислительные затраты в большинстве случаев можно сокращать по сравнению с затратами на гладкую оптимизацию. Объясним это на иллюстративном примере. На рис. 1, *а* показана минимаксная задача для трех функций одной переменной. Функция максимума $\max(y_1(d), y_2(d), y_3(d))$ представляет собой ломаную линию *A—B—C—D*, а минимум этой функции находится в точке *C* — пересечение кривых $y_2(d)$ и $y_3(d)$. Другой вариант такой задачи показан на рис. 1, *б*, где минимум функции максимума является локальным минимумом функции $y_3(d)$. В этом случае точка минимума определена менее четко, и ее нахождение требует большего числа итераций. Такой случай всегда реализуется для критерия в виде аналитического выражения, а для минимаксной задачи вариант рис. 1, *б* на практике встречается редко, так как обычно каждый из показателей монотонно зависит от параметров, и оптимальное решение представляет собой компромисс между различными требованиями, как это имеет место на рис. 1, *а*. Поэтому при вычислении функции максимума на шаге оптимизационного процесса можно во многих случаях не вычислять все значения показателей, а ограничиться лишь теми, прогнозируемые значения которых близки к критическому значению. Можно предложить и другие приемы для снижения трудоемкости процесса оптимизации, которые предполагается рассмотреть далее. Конечно, использование подобных особенностей минимаксной задачи приводит к усложнению алгоритма получения решения. Однако при вычислении показателей высокозатратными методами схемотехнического моделирования эти усложнения представляются оправданными.

2. Определение частных критериев

Эффективность решения задач проектирования при использовании минимаксного подхода зависит от выбора коэффициентов в выражениях для частных критериев. Эти коэффициенты должны задавать относительную значимость требований к различным показателям. Методика определения коэффициентов, предложенная в работе [17], получила наибольшее распространение. Она используется также в работах [9, 13] и состоит в следующем.

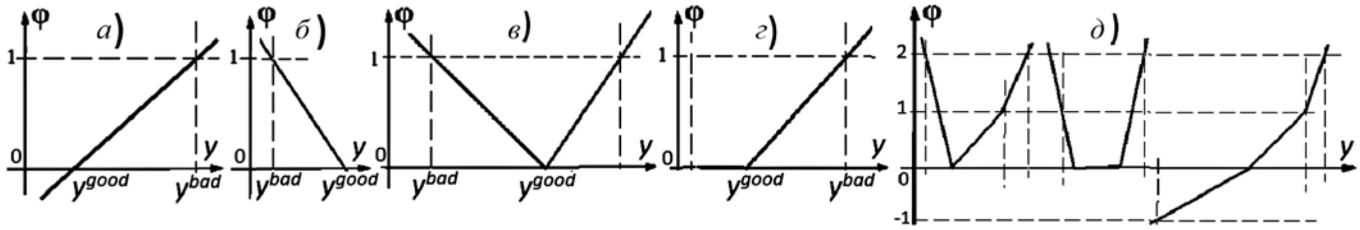

Рис. 2. Вид частных критериев на основе "хороших" и "плохих" значений: возрастающая (*а*) и убывающая (*б*) линейные зависимости, двустороннее отклонение (*в*), "мягкое" ограничение (*г*), предлагаемые произвольные выпуклые критерии (*д*)

Пользователь задает для каждого показателя два значения, которые называются "хорошее" и "плохое" ($y_i^{\text{good}}, y_i^{\text{bad}}$). Предполагается, что "хорошее" значение соответствует предельному значению для данного показателя, а "плохое" значение — определенному ухудшению качества схемы, причем степень этого ухудшения одинакова для "плохого" значения любого показателя. Тогда частный критерий для *i*-го показателя примет вид:

$$\varphi_i(y_i) = (y_i - y_i^{\text{good}})/(y_i^{\text{good}} - y_i^{\text{bad}}). \qquad (6)$$

Частный критерий (6) принимает нулевое значение при "хорошем" значении показателя и единичное значение при "плохом", и улучшение качества схемы при изменении одного показателя всегда соответствует уменьшению частного критерия независимо от того, какое при этом должно быть изменение значения самого показателя. Эти свойства проиллюстрированы на рис. 2, *а*, *б*.

Если требуется максимальная близость показателя к заданному значению, то можно задать два "плохих" значения, соответствующих отклонениям от "хорошего" значения в большую и меньшую стороны. Тогда частный критерий примет кусочно-линейный вид, показанный на рис. 2, *в*, что можно записать как

$$\begin{aligned}\varphi_i(y_i) = \max((y_i - y_i^{\text{good}})/(y_i^{\text{good}} - y_i^{\text{bad1}}),\\ (y_i - y_i^{\text{good}})/(y_i^{\text{good}} - y_i^{\text{bad2}})).\end{aligned} \qquad (7)$$

Кусочно-линейный вид частного критерия возможен также при отнесении показателя к "мягким" [17] ограничениям, при которых показатель исключается из минимаксного критерия после достижения своего "хорошего" значения. Это эквивалентно заданию частного критерия в кусочно-линейном виде (рис. 2, *г*).

Мы полагаем, что целесообразно дать пользователю возможность задавать частные критерии не только в виде (6), (7), но и в более общем виде выпуклой кусочно-линейной зависимости, примеры которой представлены на рис. 2, *д*. Для этого можно отказаться от однозначного соответствия между индексом критерия и индексом показателя — $\varphi_i(y_i)$, а допустить задание пользователем нескольких частных критериев для одного показателя.

Таким образом, предлагается для каждого *k*-го частного критерия ψ_k задавать следующие параметры: номер показателя $I(k)$, уровень хорошего значения lev_k (необязательно 0), а также "хорошее" и "плохое" значения показателя $I(k)$: $y_{I(k)}^{\text{good}}, y_{I(k)}^{\text{bad}}$. Тогда *k*-й критерий (6) можно записать в следующем виде:

$$\psi_k(y_{I(k)}) = lev_k + (y_{I(k)} - y_k^{\text{good}})/(y_k^{\text{good}} - y_k^{\text{bad}}). \qquad (8)$$

Максимум из функций (8) можно вычислить, предварительно сгруппировав функции, относящиеся к одному (*i*-му) показателю:

$$\begin{aligned}&\max_{1\leqslant k\leqslant K}(\psi_k(y_{I(k)}(d))) =\\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant M}\left(\max_{k:I(k)=i}(\psi_k(y_i(d)))\right) =\\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant M}(\varphi_i'(y_i(d))).\end{aligned} \qquad (9)$$

Таким образом, частный критерий φ_i' по показателю *i* определен в (9) как выпуклая оболочка заданных для него линейных критериев ψ_k. Поэтому может быть реализован любой из вариантов, показанных на рис. 2, *д*.

3. Методы минимаксной оптимизации и направления их совершенствования для задач схемотехнического проектирования

Для решения локальной минимаксной задачи используются как методы, специально предназначенные для ее решения, так и общие методы нелинейного программирования. Сведение минимаксной задачи к задаче нелинейного программирования выполняется следующим образом [18].

Пусть минимаксная задача записана в форме (5). Введем дополнительную переменную d_0, включенную в вектор d, которая всегда должна быть равна функции максимума $d_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant M}(\varphi_i(d))$. Тогда задачу (5) можно переписать как

$$f_0(d) = d_0 \to \min_{d} \text{ при } f_i(d) = \varphi_i(d) - d_0. \quad (10)$$

К наиболее эффективным методам нелинейного программирования для задач общего вида относятся методы спуска [18, 19]. К методам спуска относятся методы возможных направлений, условного градиента, проекции градиента, метод линеаризации [18]. Имеется много вариантов этих методов, общая схема которых реализует последовательное приближение к оптимуму. Эта схема включает вычисление целевой функции, ограничений, а также их частных производных по оптимизируемым переменным. Линеаризованные функции и ограничения шага формируют задачу линейного программирования, решение которой соответствует направлению улучшения целевой функции при выполнении ограничений. Направление поиска следующей точки для нелинейной минимаксной задачи (10) определяется из решения линейной минимаксной задачи с линейными ограничениями на значение шага:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant M}\left(\varphi_i(d^{(n)}) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial d} h\right) \to \min_{h} \quad \text{при } h_i \leqslant h^{\max}. \quad (11)$$

Принцип определения следующей точки на основе решения задачи (11) для одномерной задачи в том случае, когда ограничения на значение шага не критичны, показан на рис. 3, где рассматриваются три функции скалярной переменной d — $\varphi_1(d)$, $\varphi_2(d)$, $\varphi_3(d)$. В точке n-й итерации $d^{(n)}$ проводится линеаризация задачи, т. е. определяются касательные к кривым $\varphi_i(d)$. Решением линейной минимаксной задачи является точка C, в которой значение параметра ($d^{(n+1)}$) определяет следующую итерацию.

Из рис. 3 видно, что такой способ решения минимаксной задачи вблизи минимакса аналогичен решению уравнения $\varphi_2(d) = \varphi_3(d)$ методом Ньютона. Как известно, метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости, которая не достигается в большинстве оптимизационных методов для гладких критериев. Это подтверждает утверждение, что результирующие затраты на решение минимаксной задачи при разумной организации алгоритма ниже затрат на гладкую оптимизацию.

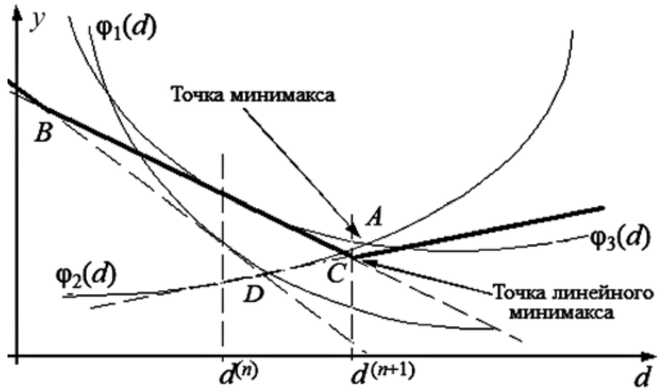

Рис. 3. Иллюстративный пример решения одномерной минимаксной задачи с помощью линеаризации

Таким образом, метод последовательного решения линеаризованных минимаксных задач должен быть выбран в качестве базисного при разработке общих алгоритмов нелинейной минимаксной оптимизации.

Для разработки наиболее эффективных алгоритмов оптимизации на основе выбранного подхода необходимо учитывать вычислительные затраты как на вычисление функций, входящих в минимаксный критерий, так и на выполнение операций самого алгоритма оптимизации. При разработке различных вариантов метода спуска [20] обычно учитывают только затраты на последнем шаге. Основные усилия направляют на сокращение числа итераций (11) и снижение размерности линейной задачи на каждой итерации.

Однако вычисление значений показателей методами электрического моделирования требует, как правило, значительно большего времени, чем решение даже сравнительно высокоразмерной задачи ЛП, поэтому вряд ли стоит прилагать большие усилия для снижения ее размерности. Что касается сокращения числа итераций, то следует учесть, что на каждой итерации вычисления показателей выполняются не только при определении направления спуска, но и при сокращении шага, поэтому необходимо принимать во внимание общие затраты на всех шагах.

Помимо затрат на моделирование схемы при разработке алгоритмов оптимизации следует учесть другие особенности алгоритмов электрического моделирования: необходимость проведения отдельных реализаций процесса моделирования для различных групп выходных показателей при заданных значениях параметров; существенный разброс в затратах на различные процедуры моделирования; возможность задания точности расчетов и зависимость от нее времени моделирования; наличие моделей разного уровня с различной точностью и затратами на моделирование.

Для того чтобы в максимальной степени учесть эти особенности для снижения затрат, предполагается включить в разрабатываемые алгоритмы реализацию следующих принципов.

Адаптивность алгоритмов выбора шага. Так как затраты на моделирование, как правило, намного превосходят возможные затраты на операции самого алгоритма, то представляется целесообразным обеспечить хранение всей ранее полученной информации и при выборе очередного шага учитывать предыдущие результаты для наиболее рационального выбора. Многие существующие алгоритмы включают принцип адаптивности, но ограничиваются обработкой информации от последних одного-двух шагов. Здесь предлагается существенно увеличить объем хранимой и обрабатываемой информации.

Асинхронность вычисления показателей. Зависимости показателей, входящих в минимаксный критерий, от параметров, как правило, имеют весьма разную степень нелинейности. Поэтому можно предполагать, что при решении линеаризованной минимаксной задачи для определения следующей точки можно заменить вычисление слабонелинейных показателей и их частных производных применением их линеаризованных зависимостей, полученных в предыдущей точке. Допустимость такого использования зависит также от близости значения этого показателя к текущему минимаксному значению, от близости текущей точки к оптимуму и от вычислительных затрат на получение значения показателя. Должны быть разработаны критерии, учитывающие все приведенные факторы, и проведено их теоретическое и экспериментальное исследование.

Управление точностью моделирования. Текущее значение показателя и его производных целесообразно при определенных условиях заменить значениями, полученными более быстрыми процедурами, но с большей погрешностью. Предполагая, что зависимость времени расчетов от допустимой погрешности заданных показателей известна, можно поставить задачу оптимального выбора расчетной процедуры и требований к ее точности.

5. Минимаксная задача в многокритериальной форме и построение алгоритма ее решения

Формулировка задачи проектирования в минимаксной форме (5) не всегда позволяет получить однозначное и наилучшее решение. Рассмотрим такой случай на следующем примере. Пусть параметры проектируемой схемы представлены номиналами резисторов и емкостей, а ее показатели разбиты на две группы: статические, например напряжение и мощность в рабочей точке, и динамические, например задержки на разных выходах и/или ширина полосы частот. Очевидно, что статические показатели не зависят от значений емкостей, а динамические показатели зависят от всех параметров. Тогда, если минимаксное значение для задачи в целом достигается на статических показателях, то оно не зависит от емкостей, значения которых однозначно не определены. Для их определения нужно решить еще одну минимаксную задачу в отношении динамических показателей как функций от значений емкостей при найденных номиналах резисторов. Проблема заключается в том, чтобы подобное последовательное решение минимаксных задач обеспечивалось автоматически в рамках алгоритма.

Указанное расширение минимаксной задачи относится в работе [21] к многокритериальным задачам с однородными равноценными критериями, для которых даются подробные формально-математические характеристики. Однако рассмотрение практических алгоритмов в [21] ограничивается дискретным случаем. Поэтому ниже приведено общее описание такого алгоритма для решения линеаризованной задачи вида (11).

Рассмотрим линейную минимаксную задачу в следующей форме.

Заданы следующие линейные зависимости показателей от параметров:

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{M} a_{ij}x_j + b_i,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ M < N. \quad (12)$$

Требуется найти такие значения вектора параметров x $(\ldots x_j \ldots)$, что максимальное значение показателя принимает наименьшее возможное значение:

$$\max_i (y_i(x)) \to \min_x. \quad (13)$$

Прежде всего отметим, что задача (13) в одномерном случае ($M = 1$) для скалярного аргумента x записывается как

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} (a_i x + b_i) \to \min_x \quad (14)$$

и имеет простое решение, что наглядно иллюстрирует рис. 4. Соответствующий алгоритм приводить не будем — он достаточно очевиден.

Система (12) с помощью гауссовского исключения переменных x_j может быть приведена к виду:

$$Hx + uy + v = 0; \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij}y_j + d_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, K,\ K = N - M < N, \quad (16)$$

где H — верхняя треугольная матрица, $K = N - M < N$.

Таким образом, задача (13) сведена к задаче

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} (y_i) \to \min_y \quad (17)$$

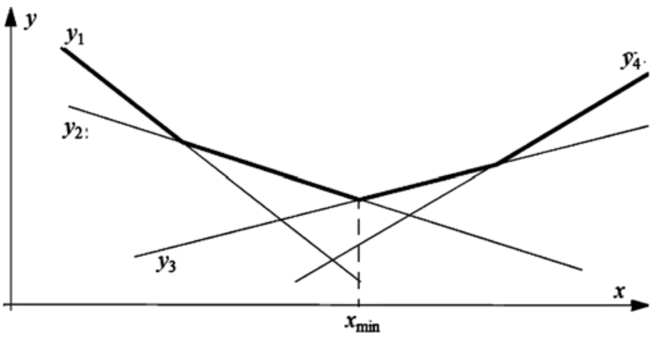

Рис. 4. Решение одномерной линейной минимаксной задачи. Полужирные линии показывают функцию $\max(y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x))$

при линейной связи (16) переменных y. Система (15) используется не при оптимизации (16), (17), а после ее завершения для определения параметров x.

Прежде чем переходить к решению общей задачи (16), (17), рассмотрим ее частный случай для одного уравнения ($K = 1$):

$$\sum_{j=1}^{N} c_j y_j + d = 0. \quad (18)$$

Если все коэффициенты c_j имеют одинаковый знак, решением задачи (17), (18) будут равные значения показателей: $y_j = -d \Big/ \sum_{j=1}^{N} c_j$, так как уменьшение какого-либо y_j приводит к необходимости увеличить максимальное значение, чтобы сохранить сумму в уравнении (18). Если же в (18) имеются хотя бы два коэффициента c_j с разными знаками, то задача не имеет решения, так как можно улучшать оба показателя, не меняя сумму (18).

Решение общей задачи (16), (17) будем искать следующим образом. Множество переменных y разобьем на K групп, обозначив s_k — множество индексов k-й группы и полагая, что все переменные такой группы имеют одинаковое значение $y_j = z_k$, $j \in s_k$. Тогда система уравнений с квадратной матрицей относительно общих значений z_k примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{K} q_{ik}z_k + d_i = 0, \text{ где } q_{ik} = \sum_{j \in s_k} c_{ij}. \quad (19)$$

Систему (19) линейным преобразованием всегда можно привести к единичному диагональному виду: $q_{ii} = 1$, $q_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Такое преобразование соответствующим образом изменит и коэффициенты d_i и c_{ij}. Предполагая сортировку уравнений в (19) по возрастанию d_i и учитывая для c_{ij} условие диагональности матрицы q, получим следующие соотношения:

$$A: d_i > d_{i+1};\ B: \sum_{j \in s_i} c_{ij} = 1;\ C: \sum_{j \in s_k, k \neq i} c_{ij} = 0. \quad (20)$$

Отметим, что в силу диагональности системы (19) ее решение (общие значения переменных из группы) $z_i = -d_{i+1}$ удовлетворяет условию $z_i > z_{i+1}$. К виду, удовлетворяющему условиям (19), (20), можно привести любую систему, задав некоторым образом разбиение переменных на группы. Для такой системы задача (16), (17) будет решена, если выполнены следующие условия:

$$c_{ij} \geqslant 0,\ j \in s_i; \tag{21}$$

$$c_{ij} = 0,\ j \in s_k,\ k > i. \tag{22}$$

Условие (21) следует из свойства задачи с одним уравнением (19) — общий знак для всех коэффициентов. Равенство (22) следует из того, что ненулевой коэффициент влияния показателя k-й группы на i-й критерий не может существовать в точке оптимума, так как при этом становится возможным улучшить (снизить) i-й критерий за счет k-го (менее критичного при $k > i$).

Невыполнение условий (21), (22) позволяет определить направление изменения одного из показателей для улучшения одного из критериев. Продемонстрируем принцип построения соответствующего алгоритма для наиболее важного случая невыполнения условия (10) для первого уравнения.

Пусть m — индекс переменной, для которой (10) при $i = 1$ не выполняется, а n — индекс соответствующей группы $c_{1m} < 0,\ m \in s_n$. Удалим из n-й группы переменную y_m, обозначив s'_n образовавшуюся группу без этой переменной. Для сохранения в "сокращенной" группе s'_n равенства (20) для B разделим n-ю строку (без m-го элемента) на $c'_n = \sum\limits_{j \in s'_n} c_{nj}$: $c'_{nk} = c_{nk}/c'_n$, $d'_n = d_n/c'_n$, $k = 1, 2, ..., K$.

Вычтем из каждой другой строки системы n-ю строку, умноженную на величину, которая позволит сохранить равенство (20) для C для остальных групп:

$$c'_{ik} = c_{ik} - c'_{nk}c'_i,\ d'_i = d_i - d'c',$$

$$i,\ k = 1, 2, ..., K,\ (k \neq n).$$

Тогда систему относительно общих значений, аналогичную (19), можно записать в виде

$$z_i = -d'_i - c_{im}y_m. \tag{23}$$

Полагая, что переменная y_m образует дополнительную $(K + 1)$-ю группу, запишем для нее $z_{K+1} = y_m$, что можно рассматривать как дополнительное уравнение в (23) с $d'_{K+1} = 0$, $c_{K+1,\,m} = -1$. Тогда равенства (23) задают условия для одномерной минимаксной задачи (аналогичной (14)):

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant K+1}(z_i) = \max_{1 \leqslant i \leqslant K+1}(-d'_i - c_{im}y_m) \to \min_{y_m}. \tag{24}$$

Решив эту задачу (см. рис. 4), получим значение y_m и улучшенное значение критерия. После этого нужно снова сократить число групп и привести систему к исходной форме, удовлетворяющей условиям (20). Для этого учтем, что минимум на рис. 4 соответствует совпадению общих значений переменных из двух групп (обозначим их p и r), и объединим их в одну новую группу, которой присвоим индекс 1, так как ее общее значение максимально среди всех групп. Значение y_m, соответствующее точке пересечения, определяется из равенства $z'_p = z'_r = -d'_p - c_{pm}y_m = -d'_r - c_{rm}y_m$, откуда получаем

$$y_m = (d'_r - d'_p)/(c_{rm} - c_{pm}). \tag{25}$$

Подставив (25) в систему (23), найдем значения всех компонентов вектора критериев z_m. Затем следует провести сортировку уравнений по значениям z_m для выполнения (20 A) и линейное преобразование новой системы (19), чтобы обеспечить выполнение условий (20 B и C).

В том случае, если после получения минимаксного значения имеются группы, содержащие более одного показателя, можно продолжить процесс оптимизации, отбросив показатели из первой группы. Этим автоматически осуществляется последовательное решение минимаксных задач, о которых говорилось в начале раздела. Таким образом, предложенный метод позволяет осуществлять векторную (многокритериальную) оптимизацию.

Заключение

Выполнен анализ проблемы выбора обобщенного критерия качества для схемотехнического проектирования интегральных схем. Показано, что минимаксный критерий предпочтительнее других применяемых критериев.

Рассмотрены вопросы задания частных критериев, входящих в общий минимаксный критерий. Отмечены достоинства методики определения весовых коэффициентов на основе опыта разработчика. Предложено обобщение этой методики на более широкий класс выпуклых кусочно-линейных функций.

Проведен анализ известных подходов к построению алгоритмов минимаксной оптимизации. Показано, что в качестве базового метода следует выбрать метод последовательного решения линеаризованных минимаксных задач. Предложены основные направления совершенствования алгоритмов минимаксной оптимизации для задач схемотехнического проектирования, учитывающие особенности алгоритмов электрического моделирования и основанные на адаптивности выбора шага, асинхронности вычисления показателей и управлении точностью моделирования.

Показана необходимость учета многокритериальности при схемотехническом проектировании на базе минимаксной оптимизации, и разработаны принципы построения алгоритма решения линейной минимаксной задачи с учетом эффекта многокритериальности.

Предложенные подходы к построению оптимизационных минимаксных алгоритмов предполагается использовать при разработке программного обеспечения для подсистемы проектирования аналоговых интегральных схем.

Список литературы

1. **Баталов Б. В., Егоров Ю. Б., Русаков С. Г.** Основы математического моделирования больших интегральных схем на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1983. 168 с.
2. **Lavagno L., Markov I. L., Martin G. E., Scheffer L. K.** Electronic Design Automation for Integrated Circuits Handbook. Second Edition. Two Volume Set CRC Press Reference. May 5, 2016. 1430 p.
3. **Бененсон З. М., Елистратов М. Р., Ильин Л. К.** Моделирование и оптимизация на ЭВМ радиоэлектронных устройств. М.: Радио и связь, 1981. 272 с.
4. **Батищев Д. И.** Методы оптимального проектирования: учеб. пособие. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
5. **Degrauwe M. G. R., Goffart B. L. A. G., Meixenberger C.** et al. Towards an Analog System Design Environment // IEEE J. of Solid-State Circuits. 1989. Vol. 24, N. 3. P. 659—670.
6. **Hershenson M., Boid S. P., Lee T. H.** GPCAD: A Tool for CMOS Op-Amp Synthesis // ICCAD ‘98 Proceedings of the 1998 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design. P. 296—303.
7. **McConaghy T., Palmers P., Steyaert M., Gielen G.** Trustworthy Genetic Programming-Based Synthesis of Analog Circuit Topologies Using Hierarchical Domain-Specific Building Blocks // IEEE Trans. on Evolutionary Computation. 2011. Vol. 15, N. 4. P. 557—570.
8. **Koh H. Y., Seqin C. H., Gray P. R.** OPASYN: A Compiler for CMOS Operational Amplifiers // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems. Feb. 1990. Vol. 9, N. 2. P. 113—125.
9. **Ochotta E. S., Rulenbar R. A., Carley L. R.** Synthesis of High-Performance Analog Circuits in ASTRX/OBLX // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems. March 1996. Vol. 15, N. 3. P. 273—292.
10. **Torralba A., Chavez J., Franquelo L. G.** FASY: A Fuzzy-Logic Based Tool for Analog Synthesys // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems. July 1996. Vol. 15, N. 7. P. 705—715.
11. **Fares M., Kaminska B.** FPAD: A Fuzzy Nonlinear Programming Approach to analog Circuit Design // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems. July 1995. Vol. 14, N. 7. P. 785—793.
12. **Gielen G., Walscharts H., Sansen W.** Analog Circuit Design Optimization Based on Symbolic Simulation and Simulfted Annealing // IEEE J. of Solid-State Circuits. 1990. Vol. 25, N. 3. P. 707—713.
13. **Krasnicki M., Phelps R., Rutenbar R., Carley L.** MAELSTROM: Efficient Simulation-Based Synthesis for Custom Analog Circuits // Proc. DAC99, New Orleans, Louisiana. 1999. P. 945—950.
14. **Vancorenland P., De Ranter C., Steyaert M., Gielen G.** Optimal RF Design using Smart Evolutionary Algorithms // Proc. 37th Design Automation Conference. Los Angeles, California, 2000. P. 7—10.
15. **Leyn F., Daems W., Gielen G., Sansen W.** A Behavioral Signal Path Modeling Methodology for Qualitative Insight in and Efficient Sizing of CMOS Opamps // Proc. ACM/IEEE ICCAD97. San Jose, California, 1997. P. 374—381.
16. **Medeiro F. Perez-Verdu B., Rodriguez-Vazquez A., Huertas J. L.** A Vertically Integrated Tool for Automated Design of ΣΔ Modulators // IEEE J. of Solid-State Circuits. 1995. Vol. 30, N. 7. P. 762—772.
17. **Nye W., Riley D. C., Sangiovanny-Vincentelly A., Tits A. L.** DELIGHT.SPICE: An Optimization-Based System for the Design of Integrated Circuits // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems. 1988. Vol. 7, N. 4. P. 501—518.
18. **Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.** Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.
19. **Карманов В. Г.** Математическое программирование: учеб. пособие. 5 изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 264 с.
20. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
21. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: ЛЕНАНД, 2016. 194 с.

M. M. Gourary, Ph. D., Senior Research Associate, gourary@ippm.ru,
M. M. Zharov, Ph. D., Leading Research Associate, zarov@ippm.ru,
S. G. Rusakov, D. Sc., Principal Research Associate, rusakov@ippm.ru,
S. L. Ulyanov, D. Sc., Principal Research Associate, ulyas@ippm.ru,
Institute for Design Problems in Microelectronics RAS, Moscow, 124365, Russian Federation

Minimax Optimization in Circuit Design Problems

The directions of improvement of minimax methods for circuit design problems are considered. The choices of generalized quality criterion for the circuit design is discussed. It is concluded that the minimax criterion has advantages over other formulations of design targets. New approach to setting of individual objectives for each performance indicator is proposed. The approach extends well-known weighting techniques based on designer's experience to the representation of arbitrary piecewise linear dependences. From the analysis of known minimax optimization algorithms, it was considered that the method of sequential linearized minimax solvings should be the basis of the computational algorithm. Main directions of the development of minimax optimization methods are proposed taking into account specific features of simulation algorithms included in the optimization procedure. The directions are based on the stepsize adaptability, asynchronous performances evaluations and the simulation accuracy control. The possible need for the multi-objective formulation of minimax problem is illustrated by the circuit example. An outline of the linear minimax optimization algorithm taking into account the possible multicriteria is presented.

Keywords: *electronic design automation, minimax optimization, circuit simulation, linear programming, analog circuit, iterative methods, multi-objective optimization*

DOI: 10.17587/it.24.435-444

References

1. **Batalov B. V., Egorov Ju. B., Rusakov S. G.** *Osnovy matematicheskogo modelirovanija bol'shih integral'nyh shem na JeVM* (Basics of Mathematical Modeling of Large Integrated Circuits), Moscow, Radio i svjaz', 1983, 168 p. (in Russian).
2. **Lavagno L., Markov I. L., Martin G. E., Scheffer L. K.** *Electronic Design Automation for Integrated Circuits Handbook*, Second Edition, Two Volume Set May 5, 2016 by CRC Press Reference, 1430 p. (in Russian).
3. **Benenson Z. M., Elistratov M. R., Il'in L. K.** *Modelirovanie i optimizacija na JeVM radiojelektronnyh ustrojstv* (RF Devices Computer Simulation and Optimization), Moscow, Radio i svjaz', 1981, 272 p. (in Russian).
4. **Batishhev D. I.** *Metody optimal'nogo proektirovanija*: uchebnoe posobie (Optimal Design Methods. Textbook), Moscow, Radio i svjaz', 1984, 248 p. (in Russian).
5. **Degrauwe M. G. R., Goffart B. L. A. G., Meixenberger C.** Towards an Analog System Design Environment, *IEEE J. of Solid-State Circuits*, 1989, vol. 24, no. 3, pp. 659—670,
6. **Hershenson M., Boid S. P., Lee T. H.** GPCAD: A Tool for CMOS Op-Amp Synthesis, *ICCAD '98, Proceedings of the 1998 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design*, pp. 296—303.
7. **McConaghy T., Palmers P., Steyaert M., Gielen G.** Trustworthy Genetic Programming-Based Synthesis of Analog Circuit Topologies Using Hierarchical Domain-Specific Building Blocks, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2011, vol. 15, no. 4, pp. 557—570.
8. **Koh H. Y., Seqin C. H., Gray P. R.** OPASYN: A Compiler for CMOS Operational Amplifiers, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems*, Feb. 1990, vol. 9, no. 2, pp. 113—125.
9. **Ochotta E. S., Rulenbar R. A., Carley L. R.** Synthesis of High-Performance Analog Circuits in ASTRX/OBLX, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems*, March 1996, vol. 15, no. 3, pp. 273—292.
10. **Torralba A., Chavez J., Franquelo L. G.** FASY: A Fuzzy-Logic Based Tool for Analog Synthesys, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems*, July 1996, vol. 15, no. 7, pp. 705—715.
11. **Fares M., Kaminska B.** FPAD: A Fuzzy Nonlinear Programming Approach to analog Circuit Design, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems*, July 1995, vol. 14, no. 7, pp. 785—793.
12. **Gielen G., Walscharts H., Sansen W.** Analog Circuit Design Optimization Based on Symbolic Simulation and Simulfted Annealing, *IEEE J. of Solid-State Circuits*, 1990, vol. 25, no. 3, pp. 707—713.
13. **Krasnicki M., Phelps R., Rutenbar R., Carley L.** MAELSTROM: Efficient Simulation-Based Synthesis for Custom Analog Circuits, *Proc. DAC99, New Orleans, Louisiana*, 1999.
14. **Vancorenland P., De Ranter C., Steyaert M., Gielen G.** Optimal RF Design using Smart Evolutionary Algorithms, *Proc. Design Automation Conference*, 2000.
15. **Leyn F., Daems W., Gielen G., Sansen W.** A Behavioral Signal Path Modeling Methodology for Qualitative Insight in and Efficient Sizing of CMOS Opamps, *Proc. ACM/IEEE ICCAD97*, 1997.
16. **Medeiro F. Perez-Verdu B., Rodriguez-Vazquez A., Huertas J. L.** A Vertically Integrated Tool for Automated Design of ΣΔ Modulators, *IEEE J. of Solid-State Circuits*, 1995, vol. 30, no. 7, pp. 762—772.
17. **Nye W., Riley D. C., Sangiovanny-Vincentelly A., Tits A. L.** DELIGHT.SPICE: An Optimization-Based System for the Design of Integrated Circuits, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuit and Systems*, 1988, vol. 7, no. 4, pp. 501—518.
18. **Pshenichnyj B. N., Danilin Ju. M.** *Chislennye metody v jekstremal'nyh zadachah* (Numerical Methjds in extreme problems), Moscow, Nauka, 1975, 320 p. (in Russian).
19. **Karmanov V. G.** *Matematicheskoe programmirovanie*, Uchebnoe posobie. — 5 izd. (Mathematical Programming), Moscow, FIZMATLIT, 2004, 264 p. (in Russian).
20. **Dem'janov V. F., Malozemov V. N.** *Vvedenie v minimaks* (Introduction in Minimax), Moscow, Nauka, 1972, 368 p. (in Russian).
21. **Podinovskij V. V., Gavrilov V. M.** *Optimizacija po posledovatel'no primenjaemym kriterijam* (Optimization by Sequentially Applied Criteria), Moscow, LENAND, 2016, 194 p. (in Russian).