УДК 519.854.2 DOI: 10.17587/it.24.387-392

Е. М. Бронштейн, д-р физ.-мат. наук, проф., e-mail: bro-efim@yandex.ru,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Р. В. Гиндуллин, канд. физ.-мат. наук, e-mail: gramiz@mail.ru,
Башкирский государственный университет

Решение задачи о заборе и доставке грузов одним транспортным средством с использованием пакета CPEX

Рассматривается задача формирования цикла минимальной длины, обеспечивающего доставку грузов разных весов от производителей потребителям при условии доставки груза от каждого производителя конкретному потребителю одним транспортным средством ограниченной вместимости. Рассмотрен частный случай задачи, в котором каждый груз должен быть сразу доставлен потребителю. Проведено сравнение эффективности построенных формализаций для общего и частного случаев задачи.

Ключевые слова: *маршрутизация, цикл, оптимизация, линейное целочисленное программирование*

Введение

Впервые задача маршрутизации транспортных средств (VRP — Vehicle Routing Problem) была поставлена в работе [1]. За истекшие десятилетия рассматривалось множество модификаций VRP. Информация по этой тематике аккумулируется на сайте [2].

В статье рассматривается вариант задачи VRP, именуемый "The pickup and delivery problem" (PDP) с одним транспортным средством ограниченной вместимости (SPDP), в котором предполагается наличие полного графа, вершинами которого являются пункты производства и потребления, а дугами — соответствующие пути, и единственного транспортного средства ограниченной вместимости, которое должно доставить грузы различного веса от поставщиков (производителей) потребителям, причем груз от каждого производителя должен быть доставлен конкретному потребителю. Задача относится к классу NP-сложных задач. Задачи вида SPDP также называют Pickup-Delivery Traveling Salesman Problem или Traveling Salesman Problem with Pickups and Deliveries [3].

Задача SPDP без учета вместимости транспортных средств и, соответственно, весов грузов была решена точным способом в работе [4]. Пример с 15 пунктами решался комбинацией методов ветвей и отрезов и жадного поиска.

В работах [5, 6] использовались различные подходы с перестановками пунктов в циклах для решения задачи SPDP без учета вместимости транспортных средств и весов грузов. Подходы были опробованы на группе из 108 задач из TSPLIB, включая задачу с 441 пунктом.

Также рассматривались родственные задачи:
- *Pickup and delivery problem with time windows* — вариант рассматриваемой задачи, в котором добавлены ограничения на временные окна. Успешно использовались методы ветвей и границ или ветвей и отсечений (генерации столбцов) [7]. В работе [8] данный подход развивается для задачи с временными окнами и несколькими транспортными средствами. Модели с полиномиально растущим числом ограничений там названы компактными;
- *задача "доставки по звонку"* (Dial-a-ride problem, DARP): имеются одно или несколько транспортных средств, а клиенты указывают пункты отправки и доставки людей или скоропортящихся грузов, что накладывает ограничения на время перевозки данных грузов. В качестве целевой функции вместо минимальных расстояний используется минимальное время ожидания клиента. В работе [9] приведен обзор методов решения задач данной категории.

В работе [10] построен ряд формализаций задачи SPDP с ограниченной вместимостью, в частности адаптацией описанных в обзорах [11, 12] приемов, применявшихся к квадратичной задаче о назначениях [13].

1. Постановка задачи

Пусть $P = \{1, ..., n\}$ — пункты вывоза грузов; $D = \{n + 1, ..., 2n\}$ — пункты доставки грузов; вес груза в i-м пункте q_i $(i = \overline{1, n})$. Множество пунктов есть $V = P \cup D \cup \{0\}$, где нулевой пункт является базой. Транспортное средство (ТС) вместимостью S должно объехать все пункты по циклу таким образом, чтобы доставить грузы из i-го пункта в $(n + i)$-й при всех i. Полагаем, что в $(n + i)$-м пункте вес груза отрицательный $(-q_i)$. Маршрут должен начинаться и заканчиваться в базовом пункте. Известны расстояния между всеми парами пунктов c_{ij}. Требуется найти допустимый цикл минимальной длины. Задача относится к классу NP-трудных, поскольку в случае, когда пункты каждой пары совпадают и вместимость ТС не ограничена, получим классическую задачу коммивояжера.

Сформулируем несколько свойств данной задачи.

1. Минимально допустимая вместимость ТС равна $\max\{q_i\}$. Действительно, очевидно, что при $S < \max\{q_i\}$ организовать перевозку невозможно. При $S = \max\{q_i\}$ допустимым является маршрут 0—1—$(n + 1)$—2—$(n + 2)$—...—n—$2n$—0. Тем самым, эта задача существенно отличается от более общей задачи транспортировки однородного груза, для которой задача вычисления минимально допустимой вместимости ТС является NP-трудной [10].

2. При неограниченной вместимости ТС число допустимых маршрутов равно $(2n)!/2^n$. Действительно, всего перестановок пунктов $(2n)!$, при этом каждая из допустимых перестановок порождает 2^n перестановок, полученных всевозможными перестановками пар пунктов с номерами i, $(n + i)$ при $i = 1, 2,..., n$. Этот результат получен в работе [4] более сложным рассуждением.

3. При $S \geqslant \max\{q_i\}$ любой допустимый отрезок маршрута можно продолжить. Действительно, если после прохождения отрезка ТС не содержит груза и при этом есть необслуженные пункты, то в качестве следующего можно принять любой пункт, в котором есть груз. Если ТС содержит груз, то это означает, что его забрали в некотором пункте i, но в $(n + i)$-й не доставили. Следующим пунктом маршрута можно принять $(n + i)$-й.

В работе [10] приведены одна квадратичная и восемь линейных целочисленных формализаций рассматриваемой задачи. Проведенные численные эксперименты показали, что наиболее эффективными моделями из работы [10] оказались двух- и трехиндексная целочисленные линейные модели. Приведем эти модели. Следует отметить, что в предложенных моделях число ограничений растет полиномиально с ростом размерности. Именно это позволяет использовать для решения задачи стандартные программные продукты.

Двухиндексная линейная модель. Пусть t_{ij} — булевы переменные, равные 1, если в цикле дуга из пункта i ведет в пункт j.

Ограничения:

$$\sum_{i=0}^{2n} t_{ij} = 1 \ (j = 0,1,\dots,2n); \qquad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} t_{ij} = 1 \ (i = 0,1,\dots,2n); \qquad (2)$$

$$t_{ii} = 0 \ (i = 0, \dots, 2n). \qquad . (3)$$

Для того чтобы избежать подциклов, следуя работе [11], вводятся вещественные переменные A_i, удовлетворяющие следующим ограничениям:

$$0 \leqslant A_i \leqslant 2n \ \ (i = 1,\dots,2n), \ \ A_0 = 0; \qquad (4)$$

$$A_i - A_j + (2n+1)t_{ij} \leqslant 2n \ \ (i, j = 1,\dots,2n). \qquad (5)$$

Из условий (4), (5) следует, что величины A_i автоматически целые, равные номерам пунктов в порядке прохождения в цикле.

Ограничение на правильность прохождения цикла:

$$A_i \leqslant A_{n+i} \ \ (i = 1,\dots,2). \qquad (6)$$

Ограничение на вместимость транспортного средства:

$$\sum_{i=0}^{2n} q_i [A_i \leqslant k] \leqslant S \ (k = 2,\dots,2n-2). \qquad (7)$$

Здесь $[a]$ — численное значение логической величины a.

Целевая функция:

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} c_{ij} t_{ij} \to \min. \qquad (8)$$

Трехиндексная линейная модель. Пусть v_{ij}^k $(i, j = 0, \dots, 2n;\ k = 1, \dots, 2n + 1)$ — булевы переменные, равные 1, если k-я по порядку дуга в маршруте ведет из пункта i в пункт j. Ограничения:

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n+1} v_{ij}^k = 1 \ (j = 0,\dots,2n); \qquad (9)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n+1} v_{ij}^k = 1 \ (i = 0,\dots,2n); \qquad (10)$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} v_{ij}^k = 1 \ (k = 0,\dots,2n+1); \qquad (11)$$

$$\sum_{j=0}^{n} v_{0j}^1 = 1, \ \sum_{i=n+1}^{2n} v_{i0}^{2n+1} = 1. \qquad (12)$$

Условие последовательного прохождения дуг (конец дуги k совпадает с началом дуги $k + 1$):

$$\sum_{i=0}^{2n} v_{ij}^{k} = \sum_{s=0}^{2n} v_{js}^{k+1} \ (j = 1, \ldots, 2n;\ k = 1, \ldots, 2n). \quad (13)$$

Условия правильности прохождения пунктов:

$$\sum_{s=1}^{2n} \sum_{k \leqslant s} \sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)j}^{k} - v_{ip}^{k}) \leqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n). \quad (14)$$

Действительно, если из i-го пункта ТС выезжает по дуге с номером k_1, а из $(n + i)$-го — по дуге с номером k_2, то $\sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)p}^{k} - v_{ij}^{k}) = 0$ при $k \leqslant \min(k_1, k_2)$, поскольку в этом случае $v_{(n+i)p}^{k} = v_{ij}^{k} = 0$ при любых p, i, т. е. $\sum_{k \leqslant s} \sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)p}^{k} - v_{ip}^{k}) = 0$, если $s \leqslant \min(k_1, k_2)$. Это же равенство справедливо при $s \geqslant \max(k_1, k_2)$, поскольку в этом случае $v_{(n+i)p}^{k_1} = v_{ij}^{k_2} = 1$ при некоторых однозначно определенных p, j, k_1, k_2 и $v_{(n+i)p}^{k} = v_{ij}^{k} = 0$ при всех остальных p, j, k. Если $k_1 < k_2$, $v_{ip}^{k_1} = 1$ для некоторого p и $v_{ip}^{k} = 0$ при остальных p, $v_{(n+i)p}^{k} = 0$ для всех p, т. е. неравенство (14) выполняется. Аналогично проверяется, что при $k_2 < k_1$ неравенство (14) не выполняется.

Ограничение на вместимость:

$$\sum_{k \leqslant s} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^{k} q_i \leqslant S \ (s = 1, \ldots, 2n). \quad (15)$$

Целевая функция:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^{k} c_{ij} \to \min. \quad (16)$$

Избыточные ограничения обычно ускоряют решение задачи. В работе [10] предложены два вида дополнительных ограничений для предложенных моделей.

Дополнительные ограничения 1-го вида. Сумма грузов в двух следующих друг за другом пунктах производства не должна превышать вместимости ТС. Аналогично для пунктов потребления.

- Для модели (1)—(8) ограничения имеют вид:

$$t_{ij} \leqslant [q_i + q_j \le S] \ \ (i, j = 1, \ldots, n); \quad (17)$$

$$t_{(i+n)(j+n)} \leqslant [q_i + q_j \le S] \ \ (i, j = 1, \ldots, n); \quad (18)$$

- для модели (9)—(16):

$$v_{ij}^{k} \leqslant [q_i + q_j \leqslant S] \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, 2n + 1); \quad (19)$$

$$v_{(i+n)(j+n)}^{k} \leqslant [q_i + q_j \leqslant S] \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, 2n + 1). \quad (20)$$

Дополнительные ограничения 2-го вида. Являются адаптацией ограничений для LIFO-случая [12]. Дуги, соединяющие пункты $i - (n + j)$ и $j - (n + i)$ при различных направлениях движения, одновременно в маршрут перевозок входить не могут, поэтому:

- для модели (1)—(8) добавляются ограничения:

$$t_{i(j+n)} + t_{j(i+n)} \leqslant 1 \ \ (i, j = 1, \ldots, n); \quad (21)$$

$$t_{i(j+n)} + t_{(i+n)j} \leqslant 1 \ \ (i, j = 1, \ldots, n); \quad (22)$$

$$t_{(i+n)j} + t_{(j+n)i} \leqslant 1 \ \ (i, j = 1, \ldots, n); \quad (23)$$

- для модели (9)—(16) — ограничения:

$$v_{i(j+n)}^{k} + v_{j(i+n)}^{p} \leqslant 1 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ k, p = 1, \ldots, 2n + 1); \quad (24)$$

$$v_{i(j+n)}^{k} + v_{(i+n)j}^{p} \leqslant 1 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ k, p = 1, \ldots, 2n + 1); \quad (25)$$

$$v_{(i+n)j}^{k} + v_{(j+n)i}^{p} \leqslant 1 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ k, p = 1, \ldots, 2n + 1). \quad (26)$$

Частный случай. В некоторых случаях важно, чтобы грузы из пунктов производства доставлялись в соответствующие пункты назначения без заезда в другие пункты. Это означает, что $(n + i)$-й пункт в цикле должен следовать непосредственно за i-м для любого $i = 1, ..., n$. Данная задача может быть сведена к задаче коммивояжера с асимметричной матрицей расстояний.

В этом случае:

- в обеих моделях принимаем $S = q_i = 1$ $(i = 1, ..., n)$;
- удаляются ограничения на вместимость;
- для модели (1)—(8) добавляются условия

$$t_{i,\,(n+i)} = 1 \ (i = 1, ..., n); \quad (27)$$

- для модели (9)—(16) добавляются условия

$$\sum_{k=1}^{2n+1} v_{i,(i+n)}^{k} = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n). \quad (28)$$

2. Вычислительные эксперименты

В данном разделе приводятся результаты вычислительных экспериментов для оценки эффективности двух- и трехиндексной линейных моделей. При проведении вычислительного эксперимента использовался ПК со следующими характеристиками: процессор *Intel Celeron* 1.6*GHz* 4*Gb RAM*, операционная система *Windows* 7 32bit. Использована среда *OPL Cplex* 12.6.1 как решатель задач линейного целочисленного программирования. Память, отведенная для расчетов, 2048 Мбайт.

Вычислительные эксперименты для моделей ставились на евклидовых задачах со случайно сгенерированными целочисленными координатами пунктов (включая базу) и весами q_i. Координаты пунктов для каждой точки вывоза или доставки генерировались случайным образом в соответствии с равномерным распределением на квадрате [0,100]×[0,100]. Целочисленный вес каждого пункта q_i генерировался случайным образом в диапазоне [1,10]. Вместимость ТС принималась минимально допустимой, т.е равной max q_i.

Серии численных экспериментов были проведены для двух- и трехиндексных линейных моделей.

Для $n = 3, 4, 5$ было сгенерировано по 50 примеров. Из-за высокой трудоемкости, при $n = 6$ число экспериментов было сокращено до 20, при $n = 7, 8$ — до 5. Среднее число итераций и средняя продолжительность нахождения решения примера в секундах представлены в табл. 1 и 2 соответственно. Если хоть один пример не был решен, то в поле ставится прочерк либо указывается число решенных примеров из всей совокупности сгенерированных примеров. Строка в таблице с наилучшим результатом выделена курсивом.

В ряде случаев повышение размерности ограничено памятью ПК, например, при $n = 8$ только трехиндексная модель может решить сгенерированные примеры без переполнения выделенного объема памяти. Кроме того, стоит отметить, что так как модели являются точными, то решения во всех примерах совпадают. Проверка корректности полученных решений моделей была проведена сравнением с результатами полного перебора при $n = 3$.

Далее проведен анализ эффективности введения дополнительных ограничений в наиболее эффективной трехиндексной линейной модели.

Как и в общем случае, решались евклидовы задачи со случайно сгенерированными цело-

Таблица 1

Сравнение моделей (число итераций)

Число примеров	50	50	50	20	5	2
Размерность задачи n	3	4	5	6	7	8
Двухиндексная модель	690	$3{,}7\cdot10^4$	$9{,}0\cdot10^5$	$3{,}2\cdot10^7$	$4{,}0\cdot10^7$ (решено 4/5 примеров)	—
Трехиндексная модель	*8*	*418*	$1{,}2\cdot10^4$	$9{,}5\cdot10^4$	$4{,}3\cdot10^5$	$1{,}3\cdot10^7$

Таблица 2

Сравнение моделей (с)

Число примеров	50	50	50	20	5	5
Размерность задачи n	3	4	5	6	7	8
Двухиндексная модель	0,1	1,8	53,6	1623,9	2855 (решено 4/5 примеров)	—
Трехиндексная модель	*0,0*	*0,4*	*1,7*	*16,6*	*134,6*	*3390,9*

Таблица 3

Сравнение эффективности ввода в модели дополнительных ограничений (число итераций)

n	Трехиндексная модель (доп. ограничения 1-го вида)	Трехиндексная модель (доп. ограничения 2-го вида)
3	2	2
3	1	2
3	2	3
3	3	3
3	2	2
3	3	4
4	59	2184
4	85	390
4	21	615
4	19	183
4	22	391
4	23	443
5	2043	21 649
5	414	3487
5	2678	14 911
5	37	13 325
5	68	19 858
5	50	18 432
6	2003	69 612
6	9306	308 456
6	21 669	181 926
6	466	46 370
6	9831	50 507
6	74	33 177

численными координатами пунктов (включая базу) и весами q_i. При n = 3, 4, 5, 6 были сгенерированы по 6 примеров. Результаты вычислений приводятся в табл. 3.

Приведенные результаты показывают, что добавление в модель ограничений 1-го вида повышает или не ухудшает эффективность поиска решения во всех случаях, а добавление дополнительных ограничений 2-го вида приводит к увеличению или к неуменьшению числа итераций в 18 из 24 примеров.

Для проведения сравнительного анализа моделей для частного случая использовалась библиотека примеров для симметричных задач TSPLIB [13]. Частный случай реализован с помощью принятия весов всех грузов и вместимости равными 1 (в табл. 4: 2_1 для трехиндексной линейной модели) и с помощью исключения ограничения на вместимость и включения равенств (27), (28) (в табл. 4: 1_2 и 2_2 для двух- и трехиндексной линейных моделей соответственно).

Координаты пунктов принимались согласно данным из библиотеки примеров:

- у примеров с четным числом точек последняя точка убирается;
- первая точка принимается за депо;
- первая половина оставшихся точек принимается за производителей (i), вторая — потребителей ($i + n$);
- веса грузов и вместимость ТС принимались равными 1.

Наиболее эффективными моделями для частного случая являются модели, в которых были устранены ограничения на вместительность и введены дополнительные ограничения (27), (28):

Таблица 4

Сравнение моделей для частного случая

n	Пример	Модель	Итерация	Время
7	ulysses16.tsp	1_2	24	0,3
7	ulysses16.tsp	2_1	557 972	170,0
7	ulysses16.tsp	2_2	93	0,7
14	bayg29.tsp	1_2	78	1,0
14	bayg29.tsp	2_2	831	6,0
25	eil51.tsp	1_2	136	1,0
25	eil51.tsp	2_2	2811	90,0
49	rat99.tsp	1_2	434	3,2
68	gr137.tsp	1_2	743	5,0
114	gr229.tsp	1_2	1882	8,7
287	rat575.tsp	1_2	7134	125
391	rat783.tsp	1_2	17 128	550

1) трехиндексная линейная модель (до n = 25, пример rat99.tsp, n = *49*, не был решен);

2) двухиндексная линейная модель (до n = 391, пример с n = *645* не был решен).

Заключение

Построены двух- и трехиндексная модели задачи о заборе и доставке грузов одним ТС, в том числе для частного случая, когда каждый груз должен быть сразу доставлен потребителю.

Проведена серия численных экспериментов с использованием оптимизационного пакета CPLEX для оценки эффективности рассмотренных моделей. Для общего случая задачи наиболее эффективной является трехиндексная линейная модель. Для частного случая задачи — двухиндексная линейная модель с соответствующими дополнительными ограничениями.

Представляется, что дальнейший прогресс связан как с совершенствованием моделей, в частности с введением дополнительных ограничений, так и с совершенствованием пакета CPLEX. Как отметила C. Archetti (Брешиа, Италия) на 3-м совещании Европейской рабочей группы VeRoLog (Осло, 2014 г) [14], CPLEX 11 (2007) работает почти в 30 000 раз быстрее, чем CPLEX 1 (1991).

Список литературы

1. **Danzig G., Ramser J.** The Truck Dispatching Problem // Management Science. 1959. Vol. 6, Iss. 1. P. 80—91.
2. **Vehicle** routing problem. URL: http://neo.lcc.uma.es/vrp/ (дата обращения: 11.11. 2017)
3. **Parragh S., Doerner K., Hartl R.** A survey on pickup and delivery problems. Part II: Transportations between customers and depot // Journal fur Betriebswirtschaft. 2008. Iss. 58. P. 21—51.
4. **Ruland K. S., Rodin E. Y.** The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm // Computers and Mathematics with Applications. June 1997. Vol. 33, Iss. 12. P. 1—13.
5. **Renaud J., Boctor F. F., Ouenniche J.** A heuristic for the pickup and delivery traveling salesman problem // Computers and Operations Research. 2000. Vol. 27, Iss. 9. P. 905—916.
6. **Renaud J., Boctor F. F., Laporte G.** Perturbation heuristics for the pickup and delivery traveling salesman problem // Computers and Operations Research. 2002. Vol. 29, Iss. 9. P. 1129—1141.
7. **Dumas Y., Desrosiers J., Soumis F.** The pickup and delivery problem with time windows. European Journal of Operation Research. 1991. Vol. 54, Iss. 1. P. 7—22.
8. **Furtadoa M., Munaria P., Morabito R.** Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation / Technical Report. Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Brazil. July 2015. URL: www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.html (дата обращения: 11.11.2017)
9. **Cordeau J.-F., Laporte G.** The dial-a-ride problem: models and algorithms // Annals of Operations Research. 2007. Vol. 153, N. 1. P. 29—46.

10. **Бронштейн Е. М., Гиндуллина Э. В., Гиндуллин Р. В.** Формализации задач погрузки и доставки // Вестник Южно-Уральского университета. Сер. Математика. Механика. Физика. 2017. Т. 9, № 1. С. 13—21.

11. **Miller C., Tucker A., Zemlin R.** Integer programming formulations and travelling salesman problems // Journal of the ACM. 1960. Vol. 7, N. 4. P. 326—329.

12. **Cordeau J.-F., Laporte G., Ropke S.** Recent models and algorithms for one-to-one pickup and delivery problems. In B. L. Golden, S. Raghavan, and E. A. Wasil (Eds.) // The Vehicle Routing Problem, Latest Advances and Challenges. Springer, Boston. 2007. P. 327—357.

13. **MP-TESTDATA** — The TSPLIB Symmetric Traveling Salesman Problem Instances. URL: http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/ (дата обращения: 11.11.2017)

14. **Archetti C.** Matheuristics for routing problems. 3-rd Workshop of European Working Group VeRoLog (Oslo, 2014 г). URL: https://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74d03904c7746ee1d8e77/matheuristics_routing_verolog2014_new.pdf (дата обращения 12.01.2018)

E. M. Bronstein, Professor, e-mail: bro-efim@yandex.ru,
Ufa State Aviation Technical University, Ufa,
R. V. Gindullin, Assistant Professor, e-mail: gramiz@mail.ru
Bashkir State University

Solving Single Vehicle Routing Problem with Pick-Ups and Deliveries with CPLEX

There is considered vehicle touring problem of forming a cycle of minimal length, that ensures delivery of cargo of various mass from producers to consumers with single vehicle. A cargo from a specific producer must be delivered to a specific consumer. Problem is called a single vehicle pickup-delivery problem (SPDP). Such problem can occur in carriage of passengers (e.g. taxi service). Particular case of the problem is considered, where each cargo must be delivered immediately to a consumer. Formalizations of both general and particular cases of SPDP are offered, and realized in CPLEX. Comparison of the efficiency of proposed formalizations for general case of the problem is conducted on randomly generated instances, and for particular case — on instances from TSPLIB.

Keywords: *vehicle routing, cycle, optimization, integer linear programming*

References

1. **Danzig G., Ramser J.** The Truck Dispatching Problem, Management Science, 1959, vol. 6, iss. 1, pp. 80—91.

2. **Vehicle** routing problem, available at: http://neo.lcc.uma.es/vrp/ (date of accessed 11.11. 2017)

3. **Parragh S., Doerner K., Hartl R.** A survey on pickup and delivery problems. Part II: Transportations between customers and depot, *Journal fur Betriebswirtschaft*, 2008, iss. 58, pp. 21—51.

4. **Ruland K. S., Rodin E. Y.** The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm, *Computers and Mathematics with Applications*, June 1997, vol. 33, iss. 12, pp. 1—13.

5. **Renaud J., Boctor F. F., Ouenniche J.** A heuristic for the pickup and delivery traveling salesman problem, *Computers and Operations Research*, 2000, vol. 27, iss. 9, pp. 905—916.

6. **Renaud J., Boctor F. F., Laporte G.** Perturbation heuristics for the pickup and delivery traveling salesman problem, *Computers and Operations Research*, 2002, vol. 29, iss. 9, pp. 1129—1141.

7. **Dumas Y., Desrosiers J., Soumis F.** The pickup and delivery problem with time windows, *European Journal of Operation Research*, 1991, vol. 54, iss. 1, pp. 7—22.

8. **Furtadoa M., Munaria P., Morabito R.** Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation, Technical Report. Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Brazil, July 2015, available at: www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.html (date of accessed 11.11.2017)

9. **Cordeau J.-F., Laporte G.** The dial-a-ride problem: models and algorithms, *Annals of Operations Research*, 2007, vol. 153, no. 1, pp. 29—46.

10. **Bronshtejn E. M., Gindullina Je. V., Gindullin R. V.** *Formalizacii zadach pogruzki i dostavki* (Formalizations of pickup and delivery problems), *Vestnik Juzhno-Ural'skogo universiteta. Serija: Matematika. Mehanika. Fizika* (News of South-Ural University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.), 2017, vol. 9, no.1, pp. 13—21 (in Russian).

11. **Miller C., Tucker A., Zemlin R.** Integer programming formulations and travelling salesman problems, *Journal of the ACM*, 1960, vol. 7, no. 4, ppP. 326—329.

12. **Cordeau J.-F., Laporte G., Ropke S.** Recent models and algorithms for one-to-one pickup and delivery problems, In B. L. Golden, S. Raghavan, and E. A. Wasil (Eds.), *The Vehicle Routing Problem, Latest Advances and Challenges*, Springer, Boston, 2007, pp. 327—357.

13. **MP-TESTDATA** — The TSPLIB Symmetric Traveling Salesman Problem Instances, available at: http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/ (accessed 11.11.2017)

14. **Archetti C.** Matheuristics for routing problems / 3-rd Workshop of European Working Group VeRoLog (Oslo, 2014), available at: https://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74d03904c7746ee1d8e77/matheuristics_routing_verolog2014_new.pdf (date of accessed 12.01.2018)