

В. Н. Тарасов, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru,
Н. Ф. Бахарева, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: nadin1956_04@inbox.ru,
Л. В. Липилина, аспирант, e-mail: mila199113@gmail.com,

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Анализ немарковских сетей массового обслуживания на основе уравнений баланса потоков

Предложены модели математического мультиплексирования и демультимплексирования потоков, а также выражения для определения числовых характеристик распределения интервалов выходного потока из системы массового обслуживания (СМО). Совместно они позволяют записать уравнения равновесия относительно средних значений и дисперсий распределений интервалов времени между соседними требованиями в сетях массового обслуживания при произвольных законах поступления и обслуживания. В качестве узлов сети рассматриваются СМО $M/M/1$ с запаздыванием во времени, $M_2/M_2/1$ и $M_2/M/1$.

При общих допущениях о вероятностных распределениях времени между соседними требованиями в входных потоках и времени обслуживания в узлах предложенный подход позволяет определить средние значения и дисперсии интервалов времени между требованиями всех потоков сети массового обслуживания, а также все основные показатели функционирования таких сетей. Такой подход также можно расширить при необходимости и для моментов 3-го порядка. С точки зрения теории вероятностей так будет точнее, чем расчет на уровне двух моментов распределений.

В условиях неполной информации о законах распределений потоков предложенный подход к анализу производительности немарковских сетей массового обслуживания является на данный момент приемлемым.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, системы массового обслуживания $M/M/1$, $M_2/M_2/1$, $M_2/M/1$, агрегирование и разрежение потоков

Введение

В настоящее время не существует аналитических методов для точного определения характеристик сетей массового обслуживания, включающих в качестве узлов системы массового обслуживания (СМО) $G/G/1$ или $G/G/m$, и, как следствие, это отражается на степени адекватности стохастических сетевых моделей реальным компьютерным и телекоммуникационным сетям и на качестве принимаемых проектных решений. Рассмотрим открытую сетевую модель с матрицей вероятностей передач $P = \{p_{ij}\}$, ($i, j = 1, \dots, n$), где p_{ij} — вероятность того, что требование, покидающее узел S_i , поступит в узел S_j . В телекоммуникационных сетях аналогом этой матрицы будет "матрица тяготений узлов", состоящая в основном из 0 и 1. Далее рассмотрим полную структуру отдельного узла с номером i сетевой модели (рис. 1) [1].

Решением системы уравнений равновесия потоков относительно интенсивностей λ_i на входе и выходе каждого узла сети в установившемся режиме определяем средние значения интервалов времен между соседними требованиями $\bar{\tau}_i = \lambda_i^{-1}$ для каждого потока в сети:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^n p_{ji} \lambda_j, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

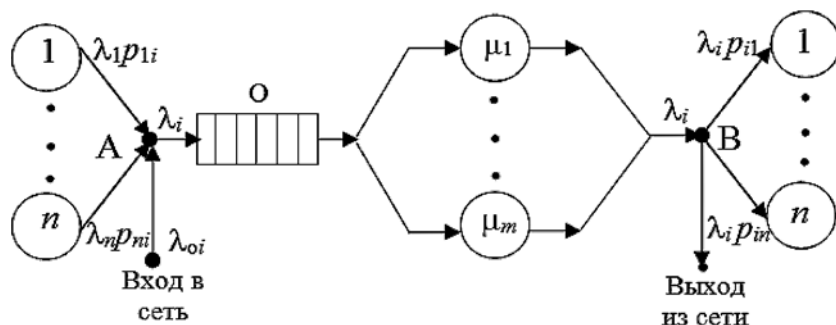


Рис. 1. Структура i -й СМО сети (А — точка композиции потоков, В — точка декомпозиции потоков)

где λ_{0i} — интенсивность потока извне в i -й узел (рис. 1). Система (1) — это уравнения баланса потоков на уровне первого момента распределения интервалов поступления требований в сеть массового обслуживания, позволяющие декомпозировать сеть на отдельные узлы. Уравнений (1) достаточно для декомпозиции марковской сети, но недостаточно для немарковской сети.

Постановка задачи

Для повышения точности расчетов сетей массового обслуживания требуются уравнения баланса (равновесия) потоков на уровне моментов высшего порядка распределения интервалов поступления требований. Это связано с непуассоновским характером потоков, циркулирующих в сети массового обслуживания. Вывод уравнений баланса сопряжен со многими проблемами. Рассмотрим некоторые из них.

На рис. 1 точка А — точка композиции (агрегирования) потоков, точка В — точка декомпозиции (вероятностного разрежения) агрегированного потока. Из рис. 1 и уравнений (1) следует, что на входе i -го узла агрегируются (мультиплексируются) (знак Σ в уравнениях (1)) разреженные исходящие потоки $(p_j \lambda_j)$ от других узлов. Таким образом, для вывода уравнений баланса на уровне моментов высшего порядка нужны будут: 1) математические модели мультиплексирования и вероятностного разрежения потоков на уровне необходимого числа моментов случайного интервала между требованиями; 2) математическая модель исходящего потока на уровне необходимого числа моментов интервалов между требованиями входящего потока, а также времени обслуживания в узле. Эти модели будут отправной точкой для вывода уравнений баланса потоков относительно моментов распределения интервалов для их последующего восстановления.

Решение задачи

Узел сети массового обслуживания представляет собой в общем случае многоканальную (с равным доступом) систему G/G/m с бесконечной очередью. Мы же ограничимся случаем одноканальной системы G/G/1 и рассмотрим отдельно следующие случаи: 1) коэффициенты вариаций интервала между поступлениями требований и времени обслуживания в узлах сети меньше 1 ($c_\lambda < 1$, $c_\mu < 1$); 2) коэффициенты вариаций интервала между поступлениями требований и времени обслуживания больше 1 ($c_\lambda \geq 1$, $c_\mu \geq 1$); 3) смешанный случай, когда один из коэффициентов вариаций больше 1, другой меньше 1.

В первом случае в качестве модели узла будем рассматривать систему M⁻/M⁻/1 с запаздыванием во времени [2]. В системе с запаздыванием M⁻/M⁻/1 на вход поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены по закону

$$a(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \geq t_0; \\ 0, & 0 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогично распределено и время обслуживания:

$$b(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(t-t_0)}, & t \geq t_0; \\ 0, & 0 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (3)$$

Эта система впервые подробно описана в работе [2], где для нее представлено решение по среднему времени ожидания в очереди. Распределения (2) и (3), содержащие два параметра, позволяют аппроксимировать законы распределения на уровне двух первых моментов в случае $c_\lambda < 1$, $c_\mu < 1$.

Во втором случае в качестве модели узла будем рассматривать систему H₂/H₂/1 [3], которая описывается гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка с функциями плотностей

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}; \quad (4)$$

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (5)$$

Функции (4) и (5) содержат три неизвестных параметра и позволяют аппроксимировать законы распределения на уровне трех первых моментов в случае $c_\lambda \geq 1$, $c_\mu \geq 1$. Подробно система H₂/H₂/1 описана в работе [3], где для нее также представлено решение по среднему времени ожидания в очереди.

Система H₂/M/1 описывается гиперэкспоненциальным входным распределением 2-го порядка с функцией плотности (4) и функцией плотности времени обслуживания (3).

Расчеты характеристик систем M⁻/M⁻/1, H₂/H₂/1 и H₂/M/1 автоматизированы [4], и программа их расчета описана в работе [5]. Система M/H₂/1 относится к классу систем M/G/1 и легко может быть рассчитана с помощью формулы Полячека—Хинчина. Таким образом, автоматический расчет узловых характеристик сетей математически и программно обеспечен.

Третий случай можно рассматривать как комбинацию рассмотренных двух первых случаев. Для каждого узла сети задаем числовые характеристики случайного времени обслуживания: $(\bar{\tau}_{\mu i}, \tau_{\mu i}^2, \tau_{\mu i}^3)$ — два или три первых начальных момента времени обслуживания в зависимости

от рассмотренных выше случаев. Для внешнего потока задаем совокупность таких же моментов $(\bar{\tau}_{0i}, \tau_{0i}^2, \tau_{0i}^3)$ времени между соседними требованиями потока, входящего в узел S_i . Зная характеристики внешнего потока, решаем задачу восстановления двух или трех первых начальных моментов интервалов между требованиями во всех потоках такой сетевой модели в зависимости от рассматриваемого случая.

При выводе уравнений равновесия для определения дисперсий интервалов в потоках на основе доказанных утверждений [6], в работе получены следующие результаты.

Агрегирование (мультиплексирование) двух потоков

Функция распределения интервала времени τ_Σ результирующего потока при мультиплексировании двух потоков с интенсивностями λ_1 и λ_2 определяется интегральным соотношением

$$F_{\tau_\Sigma}(t) = 1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \{ [1 - F_{\tau_1}(t)] \int_t^\infty [1 - F_{\tau_2}(u)] du + [1 - F_{\tau_2}(t)] \int_t^\infty [1 - F_{\tau_1}(u)] du \}. \quad (6)$$

Тогда начальные моменты интервала времени τ_R в результирующем потоке событий при агрегировании двух независимых потоков с интенсивностями $\lambda_1 = \bar{\tau}_1^{-1}$ и $\lambda_2 = \bar{\tau}_2^{-1}$ с функциями распределения вероятностей (ФРВ) $F_{\tau_1}(t)$ и $F_{\tau_2}(t)$ могут быть определены следующим образом [6]:

$$\bar{\tau}_R = 1/\lambda_\Sigma; \quad (7)$$

$$\bar{\tau}_R^2 = 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_\Sigma} \int_0^\infty g_1(t) g_2(t) dt; \quad (8)$$

$$\bar{\tau}_R^3 = 6 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_\Sigma} \int_0^\infty t g_1(t) g_2(t) dt, \quad (9)$$

где функции $g_j(t) = \int_t^\infty [1 - F_{\tau_j}(u)] du$, а значение $\lambda_\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2$.

Здесь случайная величина τ_R не является суммой величин τ_1 и τ_2 , т. е. здесь не имеет место композиция законов распределений. Вместе с тем результирующий поток в этом случае не будет рекуррентным, кроме случая пуассоновских составляющих.

Из выражений (8) и (9) следует, что моменты интервалов между событиями результирующего потока, начиная со второго, нельзя выразить в элементарных функциях через моменты состав-

ляющих потока, кроме случая пуассоновских составляющих. Поэтому для практического применения выражения (6) исходные неизвестные ФРВ $F_{\tau_j}(t)$ интервалов аппроксимируем функцией смешенного экспоненциального распределения в случае, когда коэффициенты вариаций составляющих $c_{\lambda_j} \leq 1$ ($j = 1, 2$) [6]:

$$F_j(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_{j1}; \\ 1 - \exp\{-(t - \tau_{j1})/\tau_{j2}\}, & t \geq \tau_{j1}. \end{cases} \quad (10)$$

В случае $c_{\lambda_j} > 1$ исходные функции распределений аппроксимируем гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка:

$$F_j^*(t) = 1 - p_j \exp(-t/\tau_{j1}^*) - (1 - p_j) \exp(-t/\tau_{j2}^*). \quad (11)$$

В смешанном случае одну функцию аппроксимируем соотношением (10), а другую — (11). Тогда задача определения начальных моментов случайного интервала между событиями в результирующем потоке по выражениям (8) и (9) сводится к вычислению табличных интегралов.

Замечание. Если же вместо функций (10) и (11) рассматривать более общие законы распределений типа Вейбулла или гамма, задача определения начальных моментов усложняется в связи с появлением специальных функций в интегралах.

Задавая исходные агрегируемые потоки на уровне начальных моментов интервалов между событиями в потоках, неизвестные параметры ФРВ (10) и (11) находим известным методом моментов. При аппроксимации потоков на уровне двух первых моментов получим следующие значения неизвестных параметров (10) и (11) (1-й и 3-й случаи):

$$\begin{aligned} \tau_{j1} &= \bar{\tau}_j - \sqrt{\tau_j^2 - \bar{\tau}_j^2}; \quad \tau_{j1} = \sqrt{\tau_j^2 - \bar{\tau}_j^2}; \quad \tau_{j1}^* = \bar{\tau}_j / (2p_j); \\ \tau_{j2}^* &= \bar{\tau}_j / [2(1 - p_j)]; \quad p_j = 1/2 \pm \sqrt{1 - 2\bar{\tau}_j^2 / \tau_j^2}; \\ &(j = 1, 2). \end{aligned}$$

Аппроксимация потоков на уровне трех моментов потребует уже решения системы трех уравнений. Запишем уравнения для определения начальных моментов распределения (11):

$$\begin{aligned} p_j \tau_{j1}^* + (1 - p_j) \tau_{j2}^* &= \bar{\tau}_j; \\ 2p_j (\tau_{j1}^*)^2 + 2(1 - p_j) (\tau_{j2}^*)^2 &= \bar{\tau}_j^2; \\ 6p_j (\tau_{j1}^*)^3 + 6(1 - p_j) (\tau_{j2}^*)^3 &= \bar{\tau}_j^3, \end{aligned} \quad (12)$$

решив которые, найдем искомые параметры распределения (11). Как видно из системы (12), в этом случае задача определения параметров распреде-

ления (11) усложняется, но и решение этой задачи автоматизировано и описано в работах [4, 5].

Замечание. Для существования решения системы (12) необходимо и достаточно выполнение условия [7]: $\overline{\tau_j^3 \tau_j} \geq 1,5 \overline{\tau_j^2}$. Следовательно, при аппроксимации произвольных законов распределения гиперэкспоненциальным законом необходимо придерживаться данного ограничения.

Разрежение (демультиплексирование) потоков

При вероятностном разрежении произвольно-го рекуррентного потока со средним значением $\bar{\tau}$ и дисперсией D_τ времени между событиями (точка B на рис. 2), в которой требования с вероятностью $p \neq 0$ уходят из потока (просеянный поток 2), среднее значение и дисперсия времени между соседними событиями в разреженном потоке 2 равны [6]:

$$\bar{\tau}_p = \bar{\tau}/p; \quad (13)$$

$$D_{\tau_p} = D_\tau/p + \bar{\tau}^2 q/p^2, \quad (14)$$

где $q = 1 - p$.

Выражения (13) и (14) получены следующим образом. Представим поток событий с параметрами $(\bar{\tau}, D_\tau)$, где $\bar{\tau}, D_\tau$ — среднее значение и дисперсия времени между соседними событиями, как последовательность случайных точек $\{t_i\}$ на оси времени $0t$. Случайные интервалы времени между ними обозначим соответственно $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$. При разрежении потока 1 случайный интервал времени τ_p в потоке 2 равен: τ_1 — с вероятностью p ; $(\tau_1 + \tau_2)$ — с вероятностью pq ; $(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$ — с вероятностью pq^2 и т. д. Запишем выражение для величины τ_p следующим образом:

$$\tau_p = \begin{cases} \tau_1 & \text{с вероятностью } p; \\ (\tau_1 + \tau_2) & \text{с вероятностью } pq; \\ (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) & \text{с вероятностью } pq^2; \\ \dots & \dots \\ (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_i) & \text{с вероятностью } pq^{i-1}; \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (15)$$

Определим математическое ожидание величины τ_p с учетом того факта, что поток рекуррентный, т. е. $M(\tau_i) = M(\tau)$, $M(\tau_i^2) = M(\tau^2)$:

$$\begin{aligned} M(\tau_p) &= M(\tau) p \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} = p M(\tau) (q + q^2 + q^3 + \dots)'_q = \\ &= p M(\tau) \left(\frac{q}{1-q} \right)'_q = p M(\tau) \frac{1}{(1-q)^2} = M(\tau)/p. \end{aligned}$$

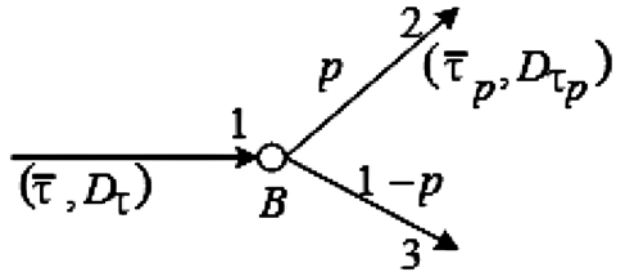


Рис. 2. Демультиплексирование потока (p — преобразование потока)

Для определения дисперсии D_{τ_p} вычислим второй начальный момент $M(\tau_p^2)$:

$$\begin{aligned} M(\tau_p^2) &= p \sum_{k=1}^{\infty} [k M(\tau^2) + (k^2 - k)(M(\tau))^2] q^{k-1} = \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} [k D_\tau + k^2 (M(\tau))^2] q^{k-1} = \\ &= p D_\tau \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} + p (M(\tau))^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \\ &= D_\tau/p + (1+q)(M(\tau))^2/p^2. \end{aligned}$$

Из полученных равенств для $M(\tau^2)$ и $M(\tau_p)$ следует справедливость выражений (13) и (14). Таким образом, можно определить при необходимости и третий начальный момент интервала в разреженном потоке, хотя это потребует больших усилий по сравнению с вычислением второго начального момента.

Теперь, после того как определены математические операции мультиплексирования и демультиплексирования потоков, по аналогии с уравнениями равновесия потоков на уровне их средних значений (1) можем записать уравнения равновесия относительно их дисперсий. Для этого повторно заметим, что на входе в i -й узел в общем случае агрегируются (мультиплексируются) разреженные (демультиплексированные) выходные потоки Π_{ij} от узлов j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$). Дисперсии времен между событиями этих потоков, полученные по формуле (14), равны

$$D_{\Pi_{ji}} = \frac{1}{p_{ji}} \left(D_{\text{вых } j} + \frac{1-p_{ji}}{p_{ji} \lambda_j^2} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Тогда уравнения равновесия потоков на уровне дисперсий времен между событиями на входе и выходе i -го узла сетевой модели можно записать в виде уравнений

$$\begin{aligned} D_{\text{вх } i} &= \\ &= D(\Pi_{0i} * (\Pi_{1\text{вых},i} * \dots * (\Pi_{n-1\text{вых},i} * \Pi_{n\text{вых},i}))). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем, выражение $D(\Pi_{j-1, \text{вых}, i} * \Pi_{j, \text{вых}, i})$ означает операцию вычисления дисперсии попарно мультиплексируемых по формулам (7)—(8) выходных потоков от $(j-1)$ -го $(\Pi_{j-1, i})$ и j -го (Π_{ji}) узлов, поступающих на вход i -го узла. В выражении (17) дисперсию интервала между событиями в потоке Π_{0i} , поступающего на вход i -го узла от внешнего источника, обозначим D_{0i} .

Определение характеристик выходного потока

Числовые характеристики выходного потока из СМО могут быть определены по следующим выражениям [6, 12]:

$$\bar{\tau}_{\text{вых}} = \bar{\tau}_{\mu} + p'_0 \bar{\tau}'_{\lambda}; \quad (18)$$

$$D_{\text{вых}} = D_{\mu} + p'_0 D'_{\lambda} + p'_0(1 - p'_0)(\bar{\tau}'_{\lambda})^2, \quad (19)$$

где p'_0 — вероятность того, что обслуженное требование оставляет СМО пустой $\bar{\tau}'_{\lambda}$ и D'_{λ} — среднее значение и дисперсия остаточного времени τ'_{λ} , в течение которого СМО ожидает поступления непосредственно следующего требования, т. е. времени простоя СМО. Вывод выражений (18) и (19) основан на следующих фактах. Рассмотрим моменты времени t_1 ухода очередного требования из СМО и t_2 — ухода непосредственно следующего требования. Случайная величина $\Delta = t_2 - t_1$ существенно зависит от состояния СМО в момент ухода очередного требования. Если в момент времени t_1 СМО окажется занятой, то величина Δ будет равна времени обслуживания τ_{μ} непосредственно следующего требования. Если же в момент времени t_1 СМО окажется пустой, то величина Δ будет равна сумме времени обслуживания τ_{μ} и остаточного времени τ'_{λ} . Тогда можем записать следующие выражения для случайной величины Δ и ее квадрата Δ^2 по аналогии с законом распределения вероятностей:

$$\Delta = \begin{cases} \tau_{\mu} & \text{с вероятностью } 1 - p'_0; \\ (\tau_{\mu} + \tau'_{\lambda}) & \text{с вероятностью } p'_0; \end{cases} \quad (20)$$

$$\Delta^2 = \begin{cases} \tau_{\mu}^2 & \text{с вероятностью } 1 - p'_0; \\ (\tau_{\mu} + \tau'_{\lambda})^2 & \text{с вероятностью } p'_0. \end{cases}$$

Отсюда, переходя к математическому ожиданию и дисперсии величины Δ и учитывая, что $M(\tau_{\text{вых}}) = M(\Delta)$ и $D_{\text{вых}} = M(\Delta^2) - [M(\Delta)]^2$, после преобразований получим формулы (18) и (19).

Заметим, что при необходимости числовые характеристики выходного потока также можно определить включительно до третьего момента.

Для рассмотренных выше СМО $M^-/M^-/1$, $H_2/H_2/1$ и $H_2/M/1$ при выводе решения для сред-

него времени ожидания на основе метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли автоматически определяется константа K — вероятность того, что поступающее в систему требование застаёт ее свободной [2, 3]. Поэтому для таких узлов сети массового обслуживания в качестве вероятности p'_0 в выражениях (18)—(20) можно будет использовать соответствующее значение константы K , и расчет характеристик выходного потока упростится.

Таким образом, все основные проблемы для приближенной декомпозиции сети массового обслуживания на отдельные узлы разрешены, и для этого можно использовать приведенные выше расчетные выражения. Система (17) совместно с (16) и представляют собой уравнения равновесия потоков в сети МО на уровне дисперсий интервалов времени для их восстановления. Решение уравнений (1) и (17) совместно с выражениями для дисперсий выходных потоков (19) является основой метода баланса потоков, позволяющего декомпозировать сети МО на уровне двух первых моментов распределений вероятностей, т. е. определить средние значения и дисперсии интервалов времени между требованиями в потоках, циркулирующих в сети в условиях стационарного режима.

Решение уравнений равновесия

Уравнения (1), (17) совместно с (16) и (19) образуют уравнения равновесия относительно средних значений и дисперсий распределений интервалов времени между соседними требованиями в потоках сети. Это вынужденный подход к анализу потоков на уровне двух первых моментов распределений интервалов путем аппроксимации произвольных законов распределений в условиях неполной информации о них. Другого подхода к анализу немарковских сетей массового обслуживания, к сожалению, в настоящее время не существует.

В стационарном случае система уравнений (1) имеет единственное решение, так как ее определитель не равен нулю, и, как отмечено в работе [1], эта система представляет одну из форм закона сохранения.

Система (17) совместно с (16) решается методом итераций. На каждой итерации дисперсия $D_{j, \text{вых}}$ времени между соседними заявками в выходном из j -й СМО потоке определяется методом двумерной диффузионной аппроксимации СМО, тем самым уточняются значения дисперсий $D_{i, \text{вх}}$ входных потоков [12]. В программе процесс уточнения дисперсий завершается по достижении 1 % относительной погрешности. При решении мно-

гих задач из области сетевых технологий, а именно: при определении загрузки каналов или других ресурсов сети, а также при определении задержек "источник—адресат" в сетях связи, в матрице вероятностей передач $P = \{p_{ij}\}(i, j = 1, \dots, n)$ элементы p_{ij} принимают значения в основном 0 и 1. В связи с этим уравнения (1) и (17) в таком случае упрощаются.

Приведенные выше формулы по агрегированию и вероятностному разрежению потоков в работе [6] проверены с помощью имитационного моделирования по специально разработанным программам агрегирования и разрежения потоков. Для этого проводили серии из пяти испытаний, в каждом из которых генерировали по 10 000 интервалов. Интервалы генерировали по экспоненциальному, равномерному, нормальному, Вейбулла, гамма и другим законам распределений времени между требованиями. Результаты имитационного моделирования полностью подтверждают справедливость утверждений. Относительная погрешность моделирования при этом не превышает 5 %.

Пример расчета

В подтверждение приведенных выше расчетных формул проведен расчет сетевой модели из трех узлов. Исходные данные приведены на рис. 3, а результаты расчетов — на рис. 4.

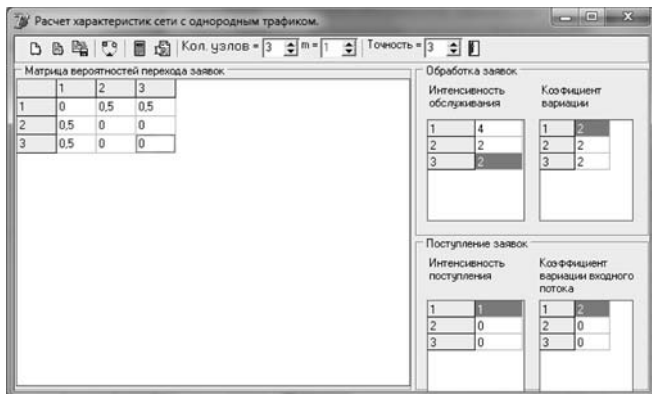


Рис. 3. Исходные данные к расчетному примеру

Узловые характеристики:

Характеристики/Узлы	1	2	3
Интенсивность потока	2,0	1,0	1,0
Загрузка	0,500	0,500	0,500
Ср. время ожидания	0,920	1,560	1,560
Ср. число заявок	2,339	2,060	2,060

Сетевые характеристики:

Ср. время ожидания	Ср. задержка (время отклика)	Ср. длина очереди
4,958	6,458	4,958

Время расчета: 0,265с

Рис. 4. Результаты расчетов трехузловой модели

Заключение

Совместно предложенные модели математического мультиплексирования и демультиплексирования потоков, а также выражения для определения числовых характеристик выходного потока позволяют записать уравнения равновесия относительно средних значений и дисперсий распределений интервалов времени между соседними требованиями в сетях массового обслуживания при произвольных законах поступления и обслуживания.

При общих допущениях о вероятностных распределениях времени между соседними требованиями в входных потоках и времени обслуживания в узлах предложенный подход позволяет определить средние значения и дисперсии распределения интервалов времени между требованиями всех потоков сети массового обслуживания, а также все основные показатели функционирования таких сетей. Такой подход можно расширить при необходимости и для моментов 3-го порядка, что с точки зрения теории вероятностей точнее, чем расчет на уровне двух моментов распределений.

В условиях неполной информации о законах распределений потоков предложенный подход к анализу производительности немарковских сетей массового обслуживания является на данный момент приемлемым.

Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Блатов И. А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51—59.
3. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16—26.
4. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Липилина Л. В. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. № 12. С. 952—957.
5. Тарасов В. Н., Липилина Л. В. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M/M/1$ с запаздыванием во времени. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016612657 от 03.03.2016.
6. Бахарева Н. Ф., Тарасов В. Н. Аппроксимативные методы и модели массового обслуживания. Исследование компьютерных сетей. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2011. 327 с.
7. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods // Operation Research. 1982. No. 1. P. 125—147.
8. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Горелов Г. А., Малахов С. В. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // Информационные технологии. 2014. № 9. С. 54—59.

9. **Тарасов В. Н., Каргашевский И. В.** Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 3. С. 92–96.

10. **Myaskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change*, ITC-13. Elsevier Science Publishers. 1991. P. 683–688.

11. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Липилина Л. В.** Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и

результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. № 2. С. 121–126.

12. **Кругликов В. К., Тарасов В. Н.** Анализ и расчет сетей массового обслуживания методом двумерной диффузионной аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 74–83.

13. **URL:** <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).

V. N. Tarasov, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: veniamin_tarasov@mal.ru,
N. F. Bakhareva, D. Sc., Professor, Head of Chair, e-mail: nadin1956_04@inbox.ru,
L. V. Lipilina, Postgraduate Student, e-mail: mila199113@gmail.com,
Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russia

Analysis of Non-Markov Queuing Networks on the Basis of the Equations Balance of Flows

The article proposes models of mathematical multiplexing and demultiplexing of flows, as well as expressions for determining the numerical characteristics of the distribution of the outflow intervals from the queuing system (QS). Together, they allow us to write the equilibrium equations for the mean and variance of the distribution of time intervals between consecutive requirements in queuing networks with arbitrary laws receipts and services. On the place of nodes of a queuing network are considered QS M/M/1 with delay in time, $H_2/H_2/1$ and $H_2/M/1$. Under general assumptions about the probability distribution of time intervals between requirements in the input flows and the time of service in the nodes, the proposed approach makes it possible to determine the average values and variances of time intervals between the requirements of all queuing network flows, as well as all the main indicators of the functioning of such networks. Such an approach can also be extended, if necessary, for third-order moments, which from the point of view of probability theory is more accurate than the calculation at the level of two moments of the distributions. Such an approach can also be extended, if necessary, for third-order moments. From the point of view of probability theory, this will be more accurate than calculating at the level of two moments of distribution. Under incomplete information on the laws of flows distributions, the proposed approach to analyzing the performance of non-Markov queuing networks is currently acceptable.

Keywords: queuing networks, queuing systems $M^{\sim}/M^{\sim}/1$ with delay in time, $H_2/H_2/1$ and $H_2/M/1$, aggregation and rarefaction of flows

References

1. **Kleinrock L.** *Teoriya massovogo obsluzhivaniya*, Moscow, Mashinostroenie, 1979, 432 p. (in Russian).

2. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A.** *Analiz i raschet sistemy massovogo obsluzhivaniya s sapasdyvaniem* (Analysis and Calculation of Queuing System with Delay), *Avtomatica i Telemekhanika*, 2015, no. 11, pp. 51–59 (in Russian).

3. **Tarasov V. N.** *Issledovanie sistem massovogo obsluzhivaniya s gipereksponentsial'nymi vhodnymi raspredeleniyami* (Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions), *Problemy Peredachi Informacii*, 2016, no. 1, pp. 16–26 (in Russian).

4. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Lipilina L. V.** *Avtomatizatsiya rascheta harakteristik sistem massovogo obsluzhivaniya dlya shirokogo diapazona izmeneniya ih parametrov* (Automation for calculating characteristics queuing system for a wide range changing their parameters), *Informatsionnye Tehnologii*, 2016, no. 12, pp. 952–957 (in Russian).

5. **Tarasov V. N., Lipilina L. V.** *Programmnyi complex rascheta harakteristik sistem massovogo obsluzhivaniya tipa $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ i $M/M/1$ s sapasdyvaniem vo vremeni* (Program complex of calculation of characteristics of queuing systems like $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ and $M/M/1$ with delay in time), Certificate on the state registration of the computer program no. 2016612657 from 03.03.2016 (in Russian).

6. **Bakhareva N. F., Tarasov V. N.** *Approksimativnye metody i modeli massovogo obsluzhivaniya* *Issledovanie komp'yuternykh setej* (Approximative methods and queuing models Investigation of computer networks), Samara, Publishing house of SNC RAN, 2011, 327 p. (in Russian).

7. **Whitt W.** Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods, *Operation Research*, 1982, no. 1, pp. 125–147.

8. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Gorelov G. A., Malahov S. V.** *Analiz vkhodyashchego trafika na urovne trekh momentov raspredeleniy vremennykh intervalov* (Analyzing the Incoming Traffic at the Three Moments Distribution of Time Intervals), *Informatsionnye Tehnologii*, 2014, no. 9, pp. 54–59 (in Russian).

9. **Tarasov V. N., Kartashevsky I. V.** *Opreделение srednego vremeni ogidaniya trebovaniy v upravlyemoy sisteme massovogo obsluzhivaniya $H_2/H_2/1$* (Determination of the average waiting time requirements in a controlled queuing system), *Sistemy Upravleyiya i Informatsionnye Tehnologii*, 2014, no. 3, pp. 92–96 (in Russian).

10. **Myaskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals, *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change*, ITC-13, Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.

11. **Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Lipilina L. V.** *Matematicheskaya model' teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezul'taty vychislitel'nykh ehksperimentov* (Mathematical Model of Teletraffic on the Based G/M/1 System and Results of Computational Experiment), *Informatsionnye Tehnologii*, 2016, no. 2, pp. 121–126 (in Russian).

12. **Kruglikov V. K., Tarasov V. N.** *Analiz i raschet setei massovogo obsluzhivaniya metodom dvumernoi diffuzionnoi approksimacii* (Analysis and calculation of queuing networks by method of two-dimensional diffusion approximation), *Avtomatica i Telemekhanika*, 1983, no. 8, pp. 74–83 (in Russian).

13. **Available** at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (date of access: 26.02.2016).