

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ MODELING AND OPTIMIZATION

УДК 004.9

С. П. Ковалев, вед. науч. сотр., e-mail: kovalyov@nm.ru,
ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН,
М. Ю. Шаймарданов, студент, e-mail: mikhail.shaym@gmail.com,
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Метод учета технологических ограничений при оптимизации топологии изделий машиностроения

Поставлена и решена задача разработки алгоритма топологической оптимизации с учетом технологических ограничений. Алгоритм позволяет автоматически получить оптимальные решения, учитывающие технологические направления роста, в цикле проектирования изделий машиностроения. Алгоритм получен путем дополнения классического SIMP-метода топологической оптимизации ограничениями типа направлений роста.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, SIMP-метод, технологические ограничения, метод направлений роста, проектирование, машиностроение, алгоритм, вычислительный эксперимент

Введение

В последнее время активно исследуют возможность топологической оптимизации для построения оптимальной формы изделий. *Топологическая оптимизация* (англ. *topology optimization*) — метод оптимизации формы конструкции, с помощью которого получается рациональное распределение материала в деталях изделия в зависимости от заданных нагрузок, граничных условий и ограничений на массу и/или объем.

Топологическая оптимизация основывается на конечно-элементной модели проектной области. Каждый элемент модели характеризуется некоторой переменной — относительной плотностью элемента, которая определяет количество материала в этом элементе. Относительная плотность находится в диапазоне от 0 до 1.

В некоторых программных пакетах САПР возможность топологической оптимизации реализована как встроенная стандартная функция [1–3]. Однако применение такого рода оптимизации на практике — при разработке реальных деталей — все еще ограничено, поскольку существующие в настоящее время методы и алгоритмы топологической оптимизации зачастую приводят к формированию нетехнологичной формы модели — в детали появляются полости и ячеистые структуры. Детали с такими элементами достаточно сложны, и их невозможно либо дорого изготовить. Кроме того, сам процесс ин-

терпретации результатов топологической оптимизации оказывается сложным. Следовательно, существует потребность в разработке таких алгоритмов топологической оптимизации, которые бы учитывали технологические ограничения при синтезе оптимальной формы деталей.

В настоящей работе предложен модифицированный алгоритм топологической оптимизации, способный обеспечить учет технологических ограничений и при этом не приводящий к расходимости алгоритма или значительному росту требуемых вычислительных ресурсов. Для задания технологических ограничений используют понятие *направление роста* (англ. *growth direction*) — такое направление, вдоль которого плотность материала может убывать либо оставаться постоянной [4]. Предложенный алгоритм позволяет генерировать оптимальную форму изделия с учетом от одного до четырех и более направлений роста [5]. Изделия такой формы эффективны в изготовлении посредством широко распространенных технологий производства — литья, резания, штамповки.

В литературе выделяют три основных группы технологических ограничений:

- ограничения при производстве деталей литьем/резанием, штамповкой, ковкой, механической обработкой [4, 5];
- ограничения при производстве деталей с использованием аддитивных технологий (3D-печать) [6];
- ограничения сборочного производства [7].

В рамках работы рассматриваем только первую группу ограничений, поскольку технологии производства деталей типа литья/резания в настоящее время доминируют в машиностроении. Для простоты описания предложенного алгоритма рассматриваем топологическую оптимизацию плоских деталей постоянной фиксированной толщины. Таким образом, оптимизация проводится только в двух измерениях. Результаты работы непосредственно обобщаются на трехмерный случай [8].

Существуют следующие методы моделирования топологии детали с учетом ограничений производства при литье/резании:

- задание ограничений в виде минимального размера конечного элемента и применение геометрической симметрии проектной области с использованием метода движущихся асимптот и вейвлетов (при производстве деталей резанием) [9];
- задание ограничений в виде допустимых направления вытягивания или угла отливки (при производстве деталей литьем) [10];
- использование ограничений по "направлениям роста" (при производстве деталей литьем/резанием, штамповкой, ковкой, механической обработкой) [4, 5].

Первые два метода [9, 10] предполагают ограничения только для указанных технологий производства. Ограничения по направлениям роста применимы для более широкого спектра технологий, поэтому именно они выбраны в качестве основных для представленной в работе модификации алгоритма топологической оптимизации.

Постановка задачи топологической оптимизации

В качестве целевой функции метода топологической оптимизации выступает *податливость* (англ. *compliance*) конструкции — способность конструкции сопротивляться деформации при внешнем воздействии. Основной характеристикой податливости является коэффициент жесткости, равный силе, которую необходимо приложить для единичного перемещения конструкции в точке приложения силы.

Проектной областью (англ. *design domain*) называем такую часть конструкции, топологию которой необходимо оптимизировать.

Классическим методом решения задачи топологической оптимизации является *SIMP-метод* (англ. *Solid Isotropic Material with Penalisation* — метод твердого изотропного материала со штрафованием) [11]. Этот метод предполагает, что модуль упругости материала нелинейно зависит от значения его относительной плотности.

Без штрафования относительная жесткость E_e/E_0 линейно зависит от плотности материала,

$E_e = \rho_e E_0$, где E_e — модуль Юнга для конечного элемента; E_0 — модуль Юнга материала изделия; $0 \leq \rho_e \leq 1$ — плотность. Для штрафования промежуточных плотностей представляем модуль Юнга материала элемента в виде

$$E_e(\rho_e) = E_{\min} + \rho_e^p (E_0 - E_{\min}),$$

где p — степень штрафования, как правило, равная 3; $E_{\min} = 10^{-9}$ — модуль Юнга для пустот, который вводится в целях предотвращения случаев, когда матрица жесткости становится вырожденной.

Использование степени $p > 1$ позволяет налагать штраф на элементы, в которых появляются промежуточные плотности материала в процессе оптимизации. Таким образом, в результате применения SIMP-метода отсекаются промежуточные плотности и получается бинарное решение — элементы конструкции принимают значения относительной плотности, равные либо единице, либо нулю.

На рис. 1 приведен пример решения задачи оптимизации топологии детали [5], проектная область которой имеет форму параллелепипеда. Налагаемое ограничение на перемещение — неподвижная заделка по всей левой границе. Сила, приложенная в центральной точке правой границы, направлена вниз. Необходимо сократить объем детали в 2 раза (относительное значение целевого объема равно 0,5).

Математическую задачу топологической оптимизации без учета технологических ограничений [1, 2] рассматриваем в следующей постановке:

$$\min_{\rho \in D_\rho} c(\rho) = \sum_{e=1}^E E_e(\rho_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e; \quad (1)$$

$$D_\rho = \begin{cases} V_T = V_0 f; \\ 0 \leq \rho_e \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

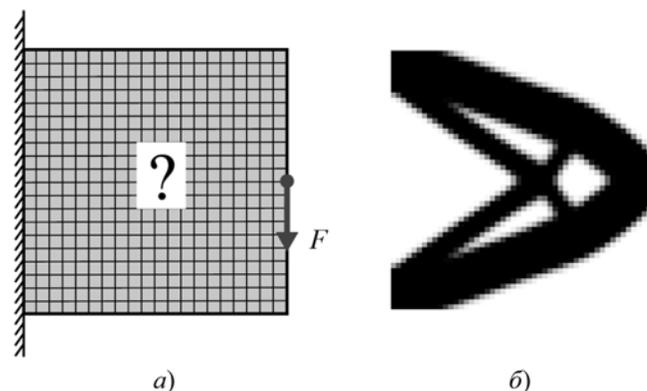


Рис. 1. Решение задачи и результат применения SIMP-метода топологической оптимизации [5]:

a — сечение проектной области с заданными нагрузкой и граничным условием; *б* — результат оптимизации после применения SIMP-метода

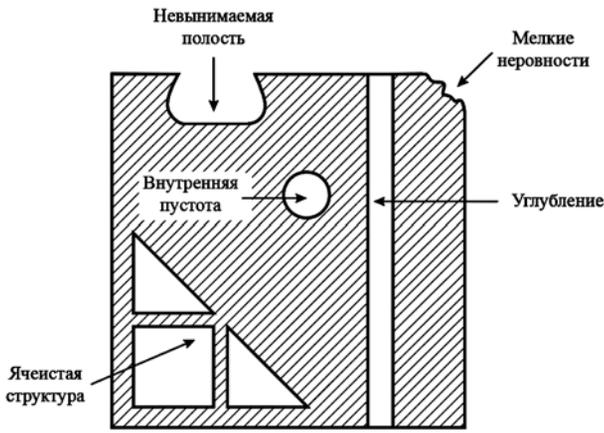


Рис. 2. Особенности топологической оптимизации, подлежащие устранению

Здесь $c(\rho)$ — целевая функция (податливость конструкции); ρ — вектор проектных переменных (т.е. относительных плотностей конечных элементов); E — общее число конечных элементов проектной области; ρ_e — относительная плотность e -го элемента; \mathbf{u}_e — вектор перемещения e -го элемента; \mathbf{k}_e — матрица жесткости этого элемента; V_0, V_T — исходный и целевой объемы проектной области соответственно; f — относительное значение целевого объема; D_p — ограничение задачи.

При заданных нагрузках, граничных условиях (рис. 1, а) и $f = 0,5$ конструкция балки в результате топологической оптимизации SIMP-методом принимает ячеистый вид (рис. 1, б). В более общих случаях появляются особенности конструкции, резко снижающие технологичность изготовления детали. Эти особенности относят [4] к следующим пяти типам (рис. 2).

- **Ячеистая структура конструкции.** Детали с ячеистой структурой очень сложно выполнить с приемлемыми затратами при использовании исключительно классических технологий производства.
- **Углубления в детали.** Если эти углубления являются необязательными, от них нужно отказываться.

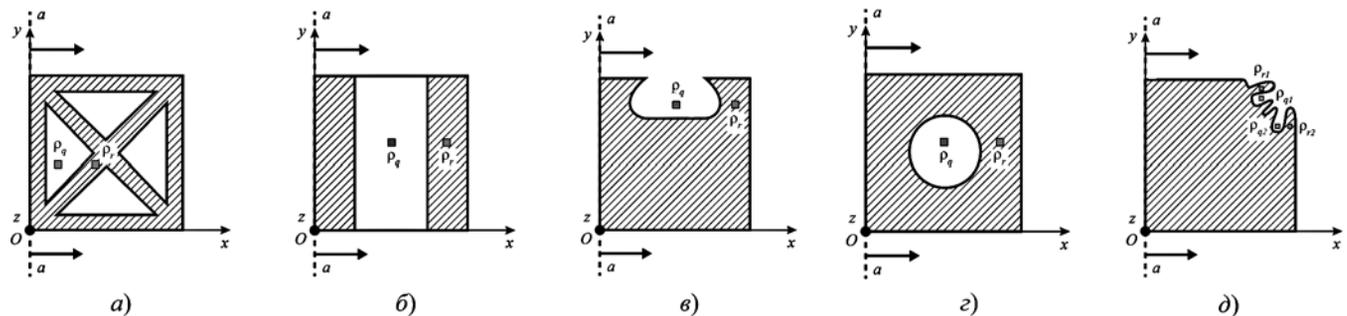


Рис. 3. Нарушение ограничений по направлениям роста $\rho_q \geq \rho_r$ для деталей с нетехнологичной формой:

а — ячеистая структура; б — углубление; в — внешняя полость; г — внутренняя пустота; д — мелкие неровности

- **Невынимаемые полости.** Для повышения технологичности деталь не должна иметь полости по типу показанной на рис. 2.
- **Внутренние пустоты.** Такие пустоты нужно ликвидировать, поскольку их реализация при производстве деталей механообработкой невозможна.
- **Мелкие неровности.** Точное воспроизведение мелких неровностей всегда сложно и дорого. Их необходимо сглаживать.

Метод учета ограничений производственных технологий

В предлагаемом нами методе ограничения по направлениям роста выступают в качестве дополнительных в SIMP-методе топологической оптимизации. Основная идея заключается в том, что чем ближе элемент геометрической модели располагается к границе раздела роста (англ. *growth surface*), тем выше должна быть плотность этого элемента. *Граница раздела роста* [4] — поверхность, которую выбирает проектировщик в соответствии с геометрическими характеристиками проектируемой детали. В качестве такой поверхности можно принять одну или несколько границ детали либо одну или несколько поверхностей, проходящих через деталь, например плоскость симметрии.

Пусть ρ_q — относительная плотность q -го элемента и этот элемент расположен ближе к границе раздела роста, чем r -й элемент. Ограничение по направлению роста в этом случае имеет вид неравенства $\rho_q \geq \rho_r$. На рис. 3 представлены рассмотренные ранее типы нетехнологичных форм деталей. В качестве границы раздела роста выступает плоскость yOz (след плоскости показан штриховой линией). Направления роста показаны жирными стрелками, начало которых находится на границе раздела роста.

Случай 1 (рис. 4, а). Ограничения по одному направлению роста

Если направление роста параллельно одной из сторон области проектирования (рис. 4, а), то

ограничение по этому направлению представляем в виде

$$\rho_{1,m} \leq \rho_{2,m} \leq \dots \leq \rho_{N,m}, \quad m \in [1 : M], \quad (3)$$

где $\rho_{1,m}, \rho_{2,m}, \dots, \rho_{N,m}$ — относительные плотности элементов вдоль направления роста; N — число элементов вдоль этого направления; m, M — индексы и число элементов в направлении, перпендикулярном направлению роста, соответственно.

С учетом ограничения по одному направлению роста задачу топологической оптимизации (1), (2) формулируем в виде

$$\min_{\rho \in D_\rho} c(\rho) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E_{i,j}(\rho_{i,j}) \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}, \quad (4)$$

$$D_\rho = \begin{cases} V_T = V_0 f, \\ 0 \leq \rho_{1,m} \leq \rho_{2,m} \leq \dots \leq \rho_{N,m} \leq 1, \\ m \in [1 : M]. \end{cases} \quad (5)$$

Предлагаем решить задачу (4), (5) с помощью итерационного метода *критерия оптимальности* [11], схема которого имеет вид

$$\rho_{i,j}^0 = f;$$

$$\rho_{i,j}^{k+1} = \begin{cases} \max(0, (1 - \mu)\rho_{i,j}^k), \\ \text{если } \rho_{i,j}^k B_{i,j}^n \leq \max(0, (1 - \mu)\rho_{i,j}^k); \\ \min(1, (1 + \mu)\rho_{i,j}^k), \\ \text{если } \rho_{i,j}^k B_{i,j}^n \leq \min(1, (1 + \mu)\rho_{i,j}^k); \\ \rho_{i,j}^k B_{i,j}^n \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$i \in [1 : N], j \in [1 : M].$$

Здесь k — номер итерации; переменная η — коэффициент затухания (принимаяем $\eta = 0,5$); $\mu = 0,2$ — положительный предел перемещения конечного элемента, т.е. максимальное значение,

на которое может сдвинуться элемент при заданной нагрузке; $B_{i,j}$ определяем по формуле

$$B_{i,j} = \frac{\frac{\partial c(\rho)}{\partial \rho_{i,j}}}{\lambda \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_{i,j}}}, \quad (6)$$

где λ — множитель Лагранжа, который находим с помощью метода половинного деления [12]. Частные производные в выражении (6) определяем по формулам

$$\frac{\partial c(\rho)}{\partial \rho_{i,j}} = -p \rho_{i,j}^{p-1} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j};$$

$$\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_{i,j}} = 1.$$

В качестве условия окончания итераций используем условие

$$\max |c(\rho^{k+1}) - c(\rho^k)| \leq \varepsilon_c,$$

где ε_c — требуемая точность решения по c ; k — номер итерации.

Случай 2 (рис. 4, б). Ограничения по двум направлениям роста

Ограничения по двум противоположным направлениям имеют вид

$$\rho_{1,j} \leq \rho_{2,j} \leq \dots \leq \rho_{\frac{N}{2},j};$$

$$\rho_{N,j} \leq \rho_{N-1,j} \leq \dots \leq \rho_{\frac{N}{2}+1,j};$$

$$j \in [1 : M]. \quad (7)$$

Здесь в качестве границы раздела роста принимаем плоскость $a-a$ (параллельна плоскости yOz). Конструкция "выращивается" от границы раздела вдоль двух противоположных направлений роста.

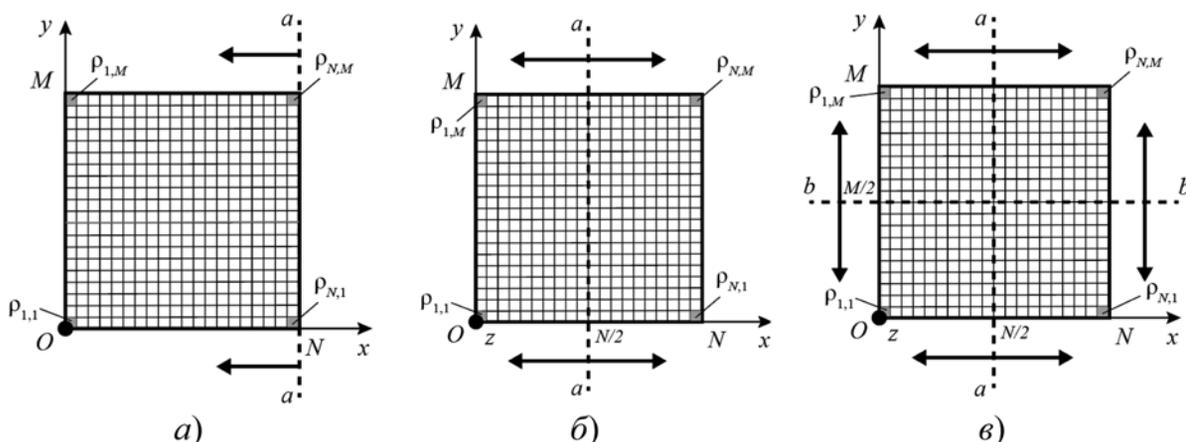


Рис. 4. Направления роста для прямоугольной области проектирования:

$a-a, b-b$ — следы границ раздела роста: a — одно направление роста; b — два направления роста; $в$ — четыре направления роста

Ограничения по двум направлениям хорошо подходят для получения деталей, которые производят только с помощью литья без применения литейных стержней.

Случай 3 (рис. 4, в). Ограничения по четырем направлениям роста

В более общем случае требуются ограничения по четырем направлениям роста. Для этого добавляем к (7) аналогичные неравенства по вертикальным направлениям (вводим горизонтальную границу раздела роста $b-b$, параллельную плоскости xOz):

$$\begin{aligned} \rho_{i,1} &\leq \rho_{i,2} \leq \dots \leq \rho_{i,\frac{M}{2}}; \\ \rho_{i,M} &\leq \rho_{i,M-1} \leq \dots \leq \rho_{i,\frac{M}{2}+1}; \\ i &\in [1 : N]. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичным путем (с соответствующей модификацией индексов элементов) могут быть сформулированы ограничения по произвольным направлениям роста [5].

Программная реализация и вычислительный эксперимент

В качестве программной среды для экспериментальной реализации разработанного алгоритма была выбрана система MATLAB. Нами предложена M-SIMP модификация программы, разработанной О. Sigmund [13, 14]. В классический алгоритм внедрены рассмотренные выше ограничения по четырем направлениям роста. Существует возможность изменять программу путем варьирования параметров SIMP-метода, ограничений конструкции и нагрузок. По ходу процесса топологической оптимизации в промежутках между итерациями классического SIMP-метода выполняем модификацию значений плотностей конечных элементов модели.

В вычислительном эксперименте мы решали задачу оптимизации топологии плоской детали. Проектная область детали имеет форму квадрата, налагаемое ограничение на перемещение — неподвижная заделка по левой границе, сила $F = 2000$ Н направлена вниз и приложена в центральной точке правой границы (см. рис. 1, а). Точность по податливости $\varepsilon_c = 0,01$.

На рис. 5 показаны промежуточные результаты работы программы M-SIMP-метода топологической оптимизации. Алгоритм сошелся на 58-й итерации (рис. 6). На рис. 6 представлен результат топологической оптимизации конструкции с учетом технологических ограничений.

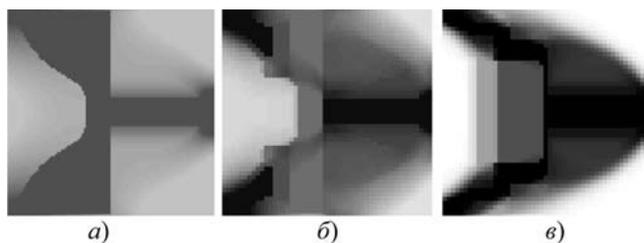


Рис. 5. Процесс оптимизации с учетом технологических ограничений:
а — итерация 1; б — итерация 2; в — итерация 5



Рис. 6. Результат топологической оптимизации, полученный с помощью программы M-SIMP

Заключение

Предложенный метод учета ограничения по нескольким направлениям роста позволяет в процессе топологической оптимизации получать оптимальную и в то же время технологичную форму изделия. В большинстве случаев достаточно применить ограничения по четырем направлениям роста (7), (8), чтобы сформированная деталь отличалась высокой технологичностью для традиционных процессов литья или резания.

С помощью разработанной программы M-SIMP можно достаточно эффективно проводить топологическую оптимизацию деталей проектирования, имеющих форму плоского параллелепипеда. При этом удалось сохранить сходимость процесса топологической оптимизации в целом и не допустить значительного роста потребности в ресурсах памяти и процессорного времени. Несложно распространить разработанный метод топологической оптимизации для учета рассмотренных ограничений при проектировании неплоских деталей. С этой целью можно использовать идею *областей видимости* [8].

В развитие данной тематики исследований авторы планируют разработать алгоритм топологической оптимизации с учетом технологических ограничений для сборных сварных конструкций.

Список литературы

1. Olason A., Tidman D. Methodology for Topology and Shape Optimization in the Design Process // Chalmers Publication Library. 2010. 66 p.
2. Blattman W. R. Generating CAD Parametric Features Based on Topology Optimization Results // All Theses and Dissertations. 2008. Paper 1371.
3. Johnsen S. Structural Topology Optimization. Basic Theory, Methods and Applications // Master Thesis. Norwegian University of Science and Technology. 2013.
4. Lu J. N., Chen Y. H. Manufacturable mechanical part design with constrained topology optimization // Journal of Engineering Manufacture. 2012. Vol. 226 (10). P. 1727–1735.
5. Ковалев С. П., Шаймарданов М. Ю. Учет технологических ограничений при топологической оптимизации в цикле проектирования изделий машиностроения // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2016) // Труды 16-й международной конференции. М.: ООО "Аналитик", 2016. С. 399–402.
6. Brackett D., Ashcroft I., Harue R. Topology optimization for additive manufacturing. Loughborough University Institutional Repository. 2011.
7. Cui A., Zhang S., Xu L., Liu H. Topology Optimization and Robust Analysis of Welling Spot Layout for a Heavy-Duty Truck Cab Based on Element Strain Energy Density // Advanced Material Research. 2014. Vols. 887–888. P. 1284–1289.
8. Chen Y., Lu J., Wei Y. Topology optimization for manufacturability based on the visibility map // Computer-Aided Design and Applications. 2016. Vol. 13. P. 86–94.
9. Zuo K. T., Chen L. P., Zhang Y. Q., Yang J. Z. Manufacturing- and machining-based topology optimization // Int. J. Advd. Mfg. Technol. 2006. Vol. 27. P. 531–536.
10. Niclas S. Topology optimization of structures with manufacturing and unilateral contact constraints by minimizing an adjustable compliance–volume product // Struct Multidisc Optim. 2010. Vol. 42. P. 341–350.
11. Bendsoe M. P., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods and applications. Springer-Verlag. 2003. 370 p.
12. Burden R. L., Faires J. D. The Bisection Method // Numerical Analysis. 2010. P. 48–56.
13. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab // Struct Multidisc Optim. 2001. Vol. 21. P. 120–127.
14. Andreassen E., Clausen A., Sigmund O., Lazarov B. S. Efficient topology optimization in Matlab using 88 lines of code // Struct Multidisc Optim. 2011. Vol. 43. P. 1–16.

S. P. Kovalyov, Leading Researcher, e-mail: kovalyov@nm.ru

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

M. Yu. Shaymardanov, Student, e-mail: mikhail.shaym@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University

Methods of Applying Manufacturing Constraints in Topology Optimization

In this paper, we formulated and solved the problem of development of topology optimization algorithm, which can be used to get optimization solutions automatically, taking into account the manufacturing constraints kind of growth directions in the cycle of engineering products design. The algorithm is obtained by the modification of the classic SIMP-method of topology optimization. We have modified the Matlab program that visualizes the optimization process in order to apply "four growth directions" constraints.

Keywords: topology optimization, SIMP-method, manufacturing constraints, growth direction method, design, engineering, algorithm, computational experiment

References

1. Olason A., Tidman D. Methodology for Topology and Shape Optimization in the Design Process, *Master Thesis. Chalmers Publication Library*, 2010. 66 p.
2. Blattman W. R. Generating CAD Parametric Features Based on Topology Optimization Results, *All Theses and Dissertations*, 2008. Paper 1371.
3. Johnsen S. Structural Topology Optimization. Basic Theory, Methods and Applications, *Master Thesis. Norwegian University of Science and Technology*, 2013.
4. Lu J. N., Chen Y. H. Manufacturable mechanical part design with constrained topology optimization, *Journal of Engineering Manufacture*, 2012, vol. 226 (10), pp. 1727–1735.
5. Kovalyov S. P., Shaymardanov M. Yu. Uchet tekhnologicheskikh ograniчений pri topologicheskoy optimizatsii v tsikle proektirovaniya izdeliy mashinostroeniya (Manufacturing constraints in topology optimization in the design cycle of engineering products), *Computer-Aided Design, Computer-Aided Manufacturing and Product Data Management (CAD/CAM/PDM-2016). Proceedings of the 16th international conference, Moscow, ООО "Analitic". 2016, pp. 399–402 (in Russian).*
6. Brackett D., Ashcroft I., Harue R. Topology optimization for additive manufacturing. *Loughborough University Institutional Repository*. 2011.
7. Cui A., Zhang S., Xu L., Liu H. Topology Optimization and Robust Analysis of Welling Spot Layout for a Heavy-Duty Truck Cab Based on Element Strain Energy Density, *Advanced Material Research*, 2014, vols. 887–888, p. 1284–1289.
8. Chen Y., Lu J., Wei Y. Topology optimization for manufacturability based on the visibility map, *Computer-Aided Design and Applications*, 2016, vol. 13, pp. 86–94.
9. Zuo K. T., Chen L. P., Zhang Y. Q., Yang J. Z. Manufacturing- and machining-based topology optimization, *Int. J. Advd. Mfg Technol*, 2006, vol. 27, pp. 531–536.
10. Niclas S. Topology optimization of structures with manufacturing and unilateral contact constraints by minimizing an adjustable compliance–volume product, *Struct Multidisc Optim*, 2010, vol. 42, pp. 341–350.
11. Bendsoe M. P., Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods and applications*, Springer-Verlag. 2003. 370 p.
12. Burden R. L., Faires J. D. 2.1 *The Bisection Method*, *Numerical Analysis (9th edition)*. 2010, pp. 48–56.
13. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab, *Struct Multidisc Optim*, 2001, vol. 21, pp. 120–127.
14. Andreassen E., Clausen A., Sigmund O., Lazarov B. S. Efficient topology optimization in Matlab using 88 lines of code, *Struct Multidisc Optim*, 2011, vol. 43, pp. 1–16.