УДК 519.6

Н. Н. Светушков, канд. техн. наук, доц., e-mail: svt.n.n@mail.ru,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Упрощенная математическая модель расчета температурных полей при детонационном горении

Исследуются возможности расчета тепловых нагрузок на стенки камеры сгорания при детонационном горении, что актуально при разработке промышленных детонационных двигателей, в том числе и при спиновом детонационном горении. Для расчета была предложена упрощенная математическая модель, основанная на параболических уравнениях в частных производных, отражающая основные особенности распространения детонационной волны в камере сгорания. Подробно представлен вывод этого уравнения и указаны основные допущения, использованные при его получении. Для решения полученного уравнения и проведения численных расчетов использовался новый подход — метод струн, основанный на интегральном представлении уравнения теплопроводности. Показаны преимущества предлагаемого подхода и отмечено, что его использование позволяет избежать "нефизичных" осцилляций в численном решении в случае больших градиентов температур. В целях проведения расчетов была модифицирована разработанная ранее программная среда, позволяющая создавать двумерные модели камер сгорания с учетом их конфигурации и задавать начальные и граничные условия. Представленные результаты показали, что путем варьирования свободных параметров модели можно изменять форму шлейфа и характер температурного поля в окрестности детонационной волны в целях более полного соответствия с экспериментальными результатами. Делается вывод об эффективности данного подхода с точки зрения минимизации вычислительных затрат и проведения серии вычислительных экспериментов для оптимизации конструкции камеры сгорания. Разработанный программный код может быть полезен для технических специалистов, рассчитывающих тепловые нагрузки в детонационных камерах сгорания.

Ключевые слова: *тепловая нагрузка, детонационная волна, законы сохранения, уравнение теплопроводности, математическое моделирование, программное обеспечение*

Введение

В последнее время значительно вырос практический интерес к детонационному горению в газовых смесях. Поскольку давление и температура продуктов сгорания при детонационном сжигании в несколько раз выше по сравнению с обычным (медленным) сжиганием (например, при сжигании стехиометрической водородно-воздушной смеси температура и давление увеличиваются примерно в два раза), возникает естественное предложение по созданию двигателей с повышенной удельной мощностью.

Процесс детонации — это распространение со сверхзвуковой скоростью зоны быстрой экзотермической химической реакции, следующей за фронтом ударной волны. Ударная волна выполняет функцию инициирования реакции окисления, сжимая и нагревая детонирующее вещество (газообразную смесь горючего с окислителем). Фронт ударной волны и зона реакции образуют в комплексе детонационную волну, а выделяющаяся при этом энергия поддерживает ударную волну, обеспечивая самораспространение процесса. Скорость движения детонационной волны может составлять от 2000 до 3000 м/с.

В 1957—1959 годах на основе экспериментальных исследований была открыта мелкомасштабная ячеистая структура детонационного фронта, вызванная неустойчивостью процесса горения. Как выяснилось, размеры ячейки пропорциональны периоду индукции смеси и являются характеристикой ее состава. Знание размеров ячейки очень важно с практической точки зрения, так как позволяет определить критический диаметр, при котором детонационная волна распространяться не будет.

Несмотря на то что детонационному горению посвящено большое число работ (например [1]), остаются открытыми вопросы о температуре во фронте волны и в зоне химических реакций, поведении волны в зависимости от размеров и геометрии каналов камеры сгорания (диафрагм и препятствий), а также влиянии на детонацию турбулентности и завихренности потока.

Кратковременность процесса детонационного превращения ($\sim 10^{-7}$ с) и высокие температуры в зоне реакции (порядка нескольких тысяч градусов) делают приемлемыми для определения температуры только оптические методы с высоким временным разрешением, основанные на регистрации излучения детонационного фронта. В литературе имеется описание немногочисленных опытов, в которых путем спектроскопического анализа вспышки от детонационного заряда удалось непосредственно определить температуры в детонационной волне. Однако с этим методом связаны определенные трудности, сущность которых заключается в том, что источником наиболее интенсивного излучения, наблюдаемого в момент детонации, являются не продукты реакции, а присоединенная ударная волна. Поэтому некоторые авторы считают невозможным прямое определение температуры детонации спектроскопическими методами. В связи с этим проводится большое число экспериментальных исследований (рис. 1, см. третью сторону обложки) и, кроме того, важное место занимают методы математического моделирования [2, 3].

Основной проблемой при проектировании новых двигателей, использующих принцип детонационного горения, является повышенная теплоотдача от продуктов сгорания на стенки камеры из-за более высоких температур в детонационной волне и увеличения коэффициента теплоотдачи в результате срыва пограничного слоя. Очевидно, что тепловые нагрузки на стенки камеры сгорания зависят от многих факторов, таких как температура и размеры фронта детонационной волны, скорость ее перемещения, направление газовых потоков и распределение температурного поля в продуктах горения после прохождения волны.

Учитывая, что при детонационном горении в значительной степени возрастают давление и температура в области фронта волны, которая с большой скоростью перемещается вдоль конструкционно выделенной области, возникает задача адекватного моделирования нестационарного течения и высокоинтенсивных тепловых нагрузок на стенки камеры сгорания. В конечном итоге данная задача сводится к численному решению уравнений в частных производных. Уравнения течения газа основаны на законах сохранения массы, импульса и законе сохранения энергии, которые описываются довольно громоздкими уравнениями в частных производных. Кроме этого, при моделировании надо иметь возможность изменять геометрические размеры и желательно форму камеры сгорания и сопла.

Полное решение общей системы уравнений в частных производных для реагирующих течений хотя и возможно, но с вычислительной точки зрения приводит к большим временным затратам и часто связано с необходимостью привлечения суперкомпьютеров. Обычно в этих случаях применяют известные пакеты, такие как ANSYS, однако даже их использование не гарантирует получения приемлемой инженерной точности при численном исследовании экстремальных течений. Дополнительной проблемой при моделировании такого рода течений является проблема устойчивости численного решения при больших градиентах температур и давлений, а также адаптация алгоритмов для учета мелкомасштабных вихревых течений [1], что возможно лишь на мелких расчетных сетках.

Параболические уравнения, к которым относятся уравнения теплопроводности, достаточно хорошо изучены и избавлены от этих недостатков. Они хорошо решаются известными пакетами и на обычных персональных компьютерах, позволяют использовать крупные сеточные разбиения (особенно если использовать интегральное представление), а также для них более просто оценить точность получаемых результатов. В силу приведенных причин и в силу того, что для задачи проектирования камеры сгорания определяющими являются лишь тепловые нагрузки, возникла задача упрощения полной системы уравнений и сведения их к уравнениям параболического типа. Такой подход позволяет найти решение с приемлемой инженерной точностью и без больших вычислительных затрат.

Упрощенные параболические уравнения для описания поля температур при детонационном горении

Для вывода уравнений, описывающих передачу теплоты при детонационном горении, будем использовать классические уравнения течения и законы сохранения энергии. Первое предположение, которое можно сделать в целях упрощения вида этих уравнений, заключается в том, что вместо реагирующей смеси можно рассмотреть движущийся в потоке с заданной скоростью и имеющий определенную форму источник теплоты. Это тем более обосновано, так как точный механизм окисления топлива при детонации изучен не в полной мере [1]. В этом случае для анализа тепловой нагрузки на стенки камеры сгорания необходимо лишь задать геометрию и плотность мощности движущегося источника исходя из химической зависимости, определяющей количество энергии, выделяющейся во фронте детонационного горения. Это упрощение позволяет исключить химические реакции и в дальнейшем рассматривать лишь движение газовой смеси и распространение в ней теплоты, приводящей к пространственному изменению температуры вокруг фронта волны. В силу того, что при детонационном горении интерес в основном представляет энергетическая составляющая процесса переноса, рассмотрим закон сохранения энергии [2], записанный в виде уравнений в частных производных (здесь мы пренебрегли работой массовых и поверхностных сил):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} E v_x + \frac{\partial}{\partial y} E v_y + \frac{\partial}{\partial z} E v_z = $$
$$= q - \frac{\partial}{\partial x} W_x - \frac{\partial}{\partial y} W_y - \frac{\partial}{\partial z} W_z, \qquad (1)$$

где E — полная энергия единицы объема, состоящая из внутренней энергии и энергии движения и потенциальной энергии взаимодействия; v_x, v_y, v_z — скорости течения газа; $q = q(x, y, z, t)$ — плотность мощности тепловых источников (скорость тепловыделения внешних источников, отнесенная к единице объема); W_x, W_y, W_z — тепловые потоки за счет теплопроводности. Если рассмотреть несжимаемую жидкость и применить закон Фурье для тепловых потоков, то согласно [2] получаем:

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}e\rho v_x + \frac{\partial}{\partial y}e\rho v_y + \frac{\partial}{\partial z}e\rho v_z = \\ = \frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial T}{\partial z} + q, \qquad (2)$$

где ρ — плотность (постоянная); e — средняя кинетическая энергия, которая в случае идеального газа имеет вид $e = c_vT$; c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме (постоянная); T — температура; $k_{x,\,y,\,z}$ — коэффициенты теплопроводности по осям.

Уравнение (2) содержит в качестве неизвестных функций скорости движения газа в каждой точке по осям (массовые потоки). Поэтому возникает задача каким-либо образом связать потоки массы с градиентом температур. Для этого проведем следующие рассуждения: заметим, что если на движущуюся точечную массу подействовать постоянной силой в течение продолжительного времени, то при любом направлении начальной скорости с течением времени вектор скорости, а значит, и вектор ее импульса, будет стремиться к направлению действия силы (особенно быстро, если величина этой силы имеет большое абсолютное значение). Поэтому при больших силах или временных отрезках, можно приблизительно записать:

$$MV \approx \alpha F, \qquad (3)$$

где функция $\alpha = \alpha(V, F)$ зависит от скорости V и силы F. Исходя из этого соотношения был сделан вывод, что для упрощенного описания течения газов можно предположить, что и массовый поток в каждой точке можно аппроксимировать направлением действия силы — градиентом давления. Таким образом, полагая, что проекции массовых потоков по осям связаны соотношениями

$$\rho v_x = -D_x\frac{\partial p}{\partial x};\\ \rho v_y = -D_y\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad (4)\\ \rho v_z = -D_z\frac{\partial p}{\partial z},$$

где p — давление, а $D_{x,\,y,\,z}$ — неизвестные параметры, определяющие связь массовых потоков с градиентом давления.

В соотношениях (4), которые аналогичны закону Фурье для тепловых потоков, варьирование параметров D_x, D_y, D_z позволяет корректировать взаимные направления вектора градиента давления и вектора массового потока. Если эти параметры равны между собой, то направление градиента давления и вектора массового потока совпадают. В противном случае направления этих векторов различны. Как следствие, появляется возможность более "тонкой настройки" уравнений переноса, особенно если каким-либо образом определить зависимость коэффициентов D от времени или от пространственных координат.

Для простоты будем считать, что мы имеем смесь, близкую к идеальному газу, и тогда для определения давления можно использовать известную зависимость — уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho RT. \qquad (5)$$

Дифференцируя (5) по пространственным переменным и учитывая условие несжимаемости, которое в данном случае означает, что плотность не зависит от пространственных переменных, получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho R\frac{\partial T}{\partial x};\\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho R\frac{\partial T}{\partial y}; \qquad (6)\\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho R\frac{\partial T}{\partial z}.$$

С учетом (4) получаем:

$$\rho v_x = -\rho RD_x\frac{\partial T}{\partial x};\\ \rho v_y = -\rho RD_y\frac{\partial T}{\partial y}; \qquad (7)\\ \rho v_z = -\rho RD_z\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Подставляя полученные выражения в (2), приходим к следующему уравнению в частных производных:

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}c_vT\rho RD_x\frac{\partial}{\partial x}T + \\ + \frac{\partial}{\partial y}c_vT\rho RD_y\frac{\partial}{\partial y}T + \frac{\partial}{\partial z}c_vT\rho RD_z\frac{\partial}{\partial z}T + \\ + \frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial T}{\partial z} + q \qquad (8)$$

или

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}K_x\frac{\partial}{\partial x}T + \frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial}{\partial y}T + \frac{\partial}{\partial z}K_z\frac{\partial}{\partial z}T + q, \qquad (9)$$

где

$$K_x = c_v\rho RD_xT + k_x;\\ K_y = c_v\rho RD_yT + k_y; \qquad (10)\\ K_z = c_v\rho RD_zT + k_z.$$

Таким образом, учитывая сделанные выше допущения, нам удалось избежать решения сложных уравнений движения и получить обычное с формальной точки зрения уравнение теплопроводности для среды, теплофизические параметры которой меняются в зависимости от температуры. Для его решения удобно использовать "метод струн", разработанный ранее для такого рода уравнений [4] и позволяющий свести (7) к системе интегральных уравнений, которые решаются итерационным способом. Заметим, что итерационный подход, кроме преимуществ по точности расчетов, позволяет также естественным образом учитывать зависимость коэффициентов теплопроводности от температуры.

Уравнения (8) содержат свободные параметры (9), которые могут быть подобраны таким образом, чтобы на тестовых примерах вычисленное распределение температур наиболее точно соответствовало температурам, полученным из экспериментов.

Результаты численного моделирования

Целью проведенных численных расчетов являлись как подтверждение правильности предлагаемого подхода, так и адаптация разработанного ранее программного обеспечения [4, 5] на случай, когда теплофизические характеристики изделия, а также граничные условия зависят от температуры. Обе задачи были успешно выполнены.

В разработанной программной среде (была подана заявка на регистрацию авторских прав) была создана модель линейного обезразмеренного сопла с соотношением длины канала к его ширине как 10 к 1 (сечение канала постоянно). В силу того, что для решения уравнений (8) используются интегральные уравнения [6], было решено выбрать тестовую сеточную область с небольшим числом точек (10×100), что позволило не только не ухудшить получаемые результаты, но и выполнить расчеты на персональном компьютере. Движение фронта детонационной волны описывалось специальными средствами программной среды как движущийся источник теплоты постоянной мощности, имеющий конфигурацию в виде гребня плоской волны (рис. 2).

Программная среда позволяет задавать различные граничные условия, в том числе и с учетом излучения, но для данных расчетов были выбраны адиабатические условия в целях качественной проверки картины расчетного течения.

В силу того, что предлагаемая модель содержит свободные параметры, были проведены серии расчетов для определения влияния этих параметров на характер получаемых температурных полей и анализ возможностей по их адаптации для лучшего соответствия с экспериментальной картиной течения.

Рис. 2. Модельная область, расчетная сетка и фронт детонационной волны в виде движущегося источника теплоты (показаны его положения в различные моменты времени с постоянным шагом)

Результаты выполненных расчетов представлены на рис. 3—5 (см. третью сторону обложки). Течения I, II и III отличаются друг от друга различными обобщенными коэффициентами теплопроводности. В силу того, что вычисления проводились в безразмерном виде, на характере течения не так сказываются абсолютные их значения, как соотношения между собой. В течении I (рис. 3) коэффициенты теплопроводности в продольном и поперечном направлении совпадали ($K_x = K_y$).

В течении II (рис. 4) обобщенная теплопроводность в поперечном направлении была больше, чем обобщенная теплопроводность в продольном направлении в 10 раз. Это привело к тому, что повысилась общая температура за головной частью "шлейфа", а его длина уменьшилась.

В течении III была смоделирована обратная ситуация — теплопроводность по оси X (продольное направление) была в 10 раз больше теплопроводности в поперечном направлении (ось Y).

Характер течения, показанный на рис. 5, говорит о том, что в этом случае более выражена зона предварительного разогрева перед ударной волной, а также значительно увеличиваются размеры высокотемпературного "шлейфа".

Расчеты, показанные на рис. 3—5, выполнялись при одной и той же плотности распределения тепловых источников, и, как отмечалось ранее, менялись лишь обобщенные коэффициенты теплопроводности.

Как видно из полученных скрин-шотов, картина течения качественно весьма хорошо описывает реальные процессы детонационного горения. Варьирование свободных параметров позволяет изменить форму шлейфа за детонационной волной, а также размеры зоны предварительного разогрева перед волной (которая хорошо видна на рис. 5).

Заключение

Численная верификация разработанного подхода, основанного на упрощенном математическом описании процесса распространения детонационной волны в газовой смеси с помощью параболических уравнений теплопроводности, подтвердило правильность исходных предположений. Применяемые расчетные алгоритмы, основанные на интегральном представлении процессов теплопередачи [5], показали быструю сходимость и устойчивое поведение в условиях больших градиентов температур. Использование крупномасштабного сеточного разбиения позволяет значительно сократить вычислительное время, что для проведенных расчетов составило несколько минут, и, таким образом, данный подход позволяет проводить серии расчетов и варьировать геометрию и размеры камеры сгорания в широком диапазоне.

Однако открытым остается вопрос о подборе эффективных коэффициентов теплопроводности для получения адекватных численных результатов. В качестве первого критерия можно попытаться выбирать эти параметры из условия согласования расчетных данных с картиной истечения газовых потоков на срезе экспериментального двигателя (см. рис. 1). Полученные расчетные данные (рис. 3—5), демонстрируют, что геометрия высокотемпературной области существенным образом зависит от величины этих параметров и, таким образом, качественное визуальное (или с помощью тепловизора) совпадение геометрии высокотемпературного ядра на срезе сопла с расчетными данными может быть одним из критериев правильности расчетов.

Для полного расчета тепловых нагрузок на стенки камеры сгорания на основе предложенной модели необходимо задать геометрию, размеры и теплофизические характеристики материала стенок камеры сгорания, условия ее охлаждения (температуру охлаждающей жидкости), частоту импульсов, удельную теплоту сгорания топлива и количество смеси.

Созданное программное обеспечение и разработанный алгоритм численного решения может быть рекомендован конструкторам технических отделов, занимающихся детонационным горением, в том числе и спиновым, для расчета тепловых нагрузок на стенки камеры сгорания, включая камеры с переменным сечением.

Автор выражает благодарность В. С. Зарубину, профессору кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, Р. И. Нигматулину, заведующему кафедрой волновой и газовой динамики мехмата МГУ, академику РАН за полезные обсуждения и ценные замечания.

Статья была подготовлена при поддержке гранта РФФИ № 14-38-50538 мол нр.

Список литературы

1. **Импульсные** детонационные двигатели / Под ред. С. М. Фролова. М.: Торус Пресс, 2006, 592 с.
2. **Зарубин В. С.** Математическое моделирование в технике, 2-е изд. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 497 с.
3. **Patankar S.** Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 199 p.
4. **Светушков Н. Н.** Метод геометрических интегралов при моделировании процессов теплопередачи в задачах с фазовыми превращениями // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19, № 5. С. 182—186.
5. **Светушков Н. Н.** Программный комплекс по расчету нестационарных тепловых полей в сложных двумерных объектах методом геометрических интегралов. Свидетельство о государственной регистрации программ № 2013615984 от 25 июня 2013 года.
6. **Светушков Н. Н.** Метод струн в задачах многомерной нестационарной теплопроводности // Информационные технологии. 2014. № 12. С. 14—19.

N. N. Svetushkov, Associate Professor, e-mail: svt.n.n@mail.ru,
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Simplified Mathematical Model for Temperature Fields Calculation in Detonation Combustion

This paper investigates the possibility to calculate the heat load on the combustion chamber wall in detonation combustion, which is important in the development of industrial detonation engines, including those with spin detonation combustion. For the calculation was proposed simplified mathematical model based on the parabolic partial differential equations, which reflects the main features of the propagation of detonation in the combustion chamber. The article details the derivation of this equation is presented and shows the main assumptions used in its preparation. To solve the resulting equations and numerical calculations by the authors used a new approach — a method of strings based on the integral representation of the heat equation. The article shows the advantages of the proposed approach and noted that its use avoids the "nonphysical" oscillations in the numerical solution in case of large temperature gradients. For the purpose of calculation was modified previously developed software environment that allows you to create two-dimensional model of the combustion chambers, in accordance with their configuration, and set the initial and boundary conditions. These results have shown that by varying the free parameters of the model, you can change the shape of the plume and the nature of the temperature field in the vicinity of the detonation wave to better compliance with the experimental results. The article concludes that the effectiveness of this approach in terms of minimizing the computational cost and a series of numerical experiments to optimize the combustion chamber design. The developed code can be useful for technicians who expect thermal loads in detonation combustion chambers.

Keywords: *thermal load, the detonation wave, the conservation laws, the heat equation, mathematical modeling software*

References

1. **Impul'snye** *detonacionnye dvigateli.* Pod red. S. M. Frolova. Moscow: Torus Press, 2006, 592 s.
2. **Zarubin V. S.** *Matematicheskoe modelirovanie v tehnike*, 2-e izdanie. Moscow: MGTU im. N. Je. Baumana, 2003. 497 p.
3. **Patankar S.** *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 199 pp.
4. **Svetushkov N. N.** Metod geometricheskih integralov pri modelirovanii processov teploperedachi v zadachah s fazovymi prevrashhenijami, *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta*, 2012, vol. 19, no. 5, pp. 182—186.
5. **Svetushkov N. N.** Programmnyj kompleks po raschetu nestacionarnyh teplovyh polej v slozhnyh dvumernyh ob#ektah metodom geometricheskih integralov. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programm № 2013615984 ot 25 ijunja 2013 goda.
6. **Svetushkov N. N.** Metod strun v zadachah mnogomernoj nestacionarnoj teploprovodnosti, *Informacionnye tehnologii*, 2014, no. 12, pp. 14—19.