

## References

1. **GOST 16504—81.** Ispytaniya i control kachestva produktsii. Osnovnye terminy i opredeleniya. (Testing and control of production quality. Base terms and definitions), Moscow, Publishing House of standards, 1991.
2. **Kline S.** Similitude and approximation theory, Berlin — Heidelberg, Springer, 1986, 229 p.
3. **Barenblatt G.** Scaling, self-similarity and intermediate asymptotic, Cambridge: Cambridge university press, 1996. 383 p.
4. **Moiseev A.** Modelirovaniye chimicheskoy stabilnosti metodom teorii podobiya (Similarity relations in chemical stability analysis), *Informacionnye tehnologii*, vol. 21, no. 9, 2015, pp. 666—669.
5. **Achnazarova S., Kafarov V.** Metody optimizatsii experimenta v chimicheskoy tehnologii (Experiments optimization methods in chemical technology), M., Vysshaya skola, 1985, 327 p.
6. **Moiseev A.,** Kriteriynaya model kvalifikatsionnykh ispytaniy na iznos (Criteria model of wear qualification tests), *Ingenernaya fizika*, 2015, no. 12, p. 30.
7. **Nikitin I., Kondratenko V., Baevskiy D.** Sravnitel'naya otsenka opredeleniya protivoznosnykh svoystv otechestvennykh reaktivnykh topliv na ustanovke BOCLE i pribore ПСТ — 2 (Comparative estimation of antiwear properties for domestic jet — fuel using BOCLE and ПСТ — 2 plants), *Trudy GOSNII himmotologii* (Proceedings of State institute of himmotology), Moscow, Pero ("Pen"), 2014, issue 56, p. 175.
8. **Reid R., Prausnitz J., Sherwood T.** The properties of gases and liquids, NY, McGraw-Hill, 1977, 592 p.
9. **Linnik Yu.** Method naimenshich kvadratov i osnovy matematiko-statisticheskoy obrabotki nabludeniy (Least square method and fundamentals of observations mathematical-statistical processing), M., publisher "Fizmatgiz", 1958, 336 p.
10. **Fizicheskiye velichiny: spravochnik** (Physical values: reference book), ed. by I. Grigor'ev, E. Meilichov, Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 p.

УДК 621.039.546

**Е. П. Доморацкий**, д-р техн. наук, проф., e-mail: Domorackiy.E@mfua.ru  
Московский финансово-юридический университет МФЮА,  
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва

## Алгоритм синтеза геометрических характеристик проекционных изображений трехмерных объектов

*Рассмотрен алгоритм синтеза геометрических характеристик одномерных и двумерных проекционных изображений выпуклых трехмерных объектов неправильной формы, аппроксимируемых эллипсоидом общего вида. Алгоритм содержит математические модели последовательности операций (процедур) получения проекционных изображений, их морфологического анализа (получения базовых геометрических признаков) и получения численных значений пространственных геометрических характеристик проекционных изображений.*

**Ключевые слова:** алгоритм, синтез, геометрические характеристики, объект, проекционное изображение, математическая модель, аппроксимация, эллипсоид, базовые признаки

### Введение

В настоящее время в различных областях науки, техники и практики широко применяются методы и средства определения геометрических характеристик разного рода объектов, основанных на различных физических принципах. К их числу относятся томографические, оптикоэлектронные, телевизионные, радиографические и другие методы. Все эти методы базируются на получении, обработке, анализе и синтезе различного рода одномерных и двумерных проекционных изображений объекта [1—3].

### Постановка задачи (цель работы)

Данная работа относится к области морфологической обработки изображений, и ее цель заключается в синтезе (разработке) математических моделей последовательности операций (процедур) получения и преобразования исходного (синтаксического)

проекционного изображения выпуклого трехмерного объекта неправильной формы в семантическое (смысловое) изображение путем выбора и определения его оптимальных базовых геометрических признаков и получения на этой основе прагматического изображения, т.е. численных значений геометрических характеристик размеров и формы одно- и двумерных проекционных изображений объекта [4, 5].

### Описание процедур алгоритма синтеза

Алгоритм синтеза включает следующие операции (этапы).

1. Выбор математической модели, аппроксимирующей выпуклый трехмерный объект неправильной формы, и геометрических характеристик его размеров и формы.

2. Определение и выбор оптимальных базовых геометрических признаков проекционных изображений.

3. Получение математической модели двумерного проекционного изображения на выбранную плоскость наблюдения (ракурс) и геометрических характеристик его размеров и формы.

4. Получение математических моделей зависимостей выбранных базовых признаков проекционного изображения от геометрических размеров и пространственной ориентировки (ракурсов) трехмерного объекта.

5. Определение геометрических характеристик размеров и формы проекционного изображения произвольного ракурса и получение зависимостей их численных значений от выбранных базовых геометрических признаков.

Рассмотрим операции данного алгоритма более подробно.

В данной работе в качестве математической модели, аппроксимирующей геометрические характеристики выпуклого трехмерного объекта неправильной формы (его трехмерное изображение — образ), выбран эллипсоид общего вида. При этом геометрические (габаритные) размеры трехмерного объекта определяются численными значениями взаимно ортогональных осей эллипсоида  $2A_1, 2A_2, 2A_3$ , а его средний диаметр ( $D$ ) и фактор формы ( $K$ ) определяются соответственно из следующих соотношений:

$$D = \sum_{i=1}^3 2A_i/3; K = \frac{\max\{A_1, A_2, A_3\}}{\min\{A_1, A_2, A_3\}}.$$

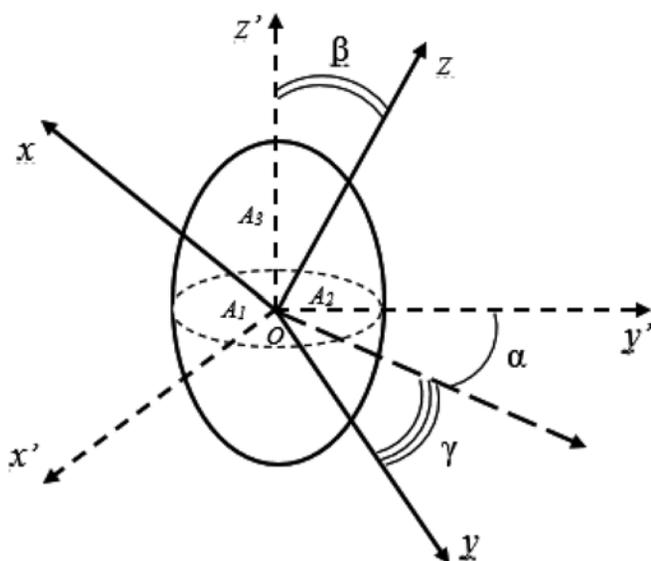


Рис. 1. Схема поворота системы координат относительно центра эллипсоида

Оптимальные базовые признаки проекционных изображений выберем на основе численного анализа их информативности методом максимальной энтропии [6, 7]. К ним относятся: длина одномерной проекции объекта на выбранное направление  $h_i$ ; максимальный  $l_{\max i}$  и минимальный  $l_{\min i}$  линейные габаритные размеры двумерной проекции; площадь двумерной проекции  $s_i$  ( $i$  — номер проекции). Число проекционных изображений и их ракурсы определяются исходя из требований к точности и достоверности определения пространственных геометрических характеристик (размеров и формы) трехмерного объекта (аппроксимируемого эллипсоидом общего вида) [4, 8].

Получим зависимости выбранных базовых признаков проекционных изображений от линейных размеров  $2A_1, 2A_2, 2A_3$  произвольно ориентированного в пространстве эллипсоида общего вида.

Каноническое уравнение эллипсоида общего вида в декартовой системе координат имеет вид

$$(x'^2/A_1^2) + (y'^2/A_2^2) + (z'^2/A_3^2) = 1, \quad (1)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  — полуоси эллипсоида;  $x', y', z'$  — исходная система координат эллипсоида.

Поворот эллипсоида в пространстве относительно его центра эквивалентен повороту системы координат относительно этого же центра и может быть представлен в виде трех последовательных поворотов вокруг осей координат (рис. 1). В этом случае матрица  $R_0$ , характеризующая поворот, может быть выражена произведением трех матриц, описывающих последовательные повороты вокруг осей  $z, y$  и  $z$  на соответствующие углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  [9]:

$$R_0 = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha),$$

где

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix};$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы  $R_0$  позволяют выразить координаты точки в повернутой системе координат  $Ox'y'z'$  через координаты точки в неповернутой системе  $(Ox'y'z')$ . Обратное преобразование определяется матрицей  $R$ :

$$R = R_0^{-1} = R_z(-\alpha)R_y(-\beta)R_z(-\gamma).$$

Учитывая, что функция  $f(x) = \cos(x)$  является четной, а функция  $f(x) = \sin(x)$  является нечетной, получим:

$$R_z(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_y(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix};$$

$$R_z(-\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица поворота

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Матрица  $R$  задает преобразование:

$$\begin{cases} x' = R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z; \\ y' = R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z; \\ z' = R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1) и группируя члены уравнения (1) относительно произведений переменных  $x, y, z$ , получаем уравнение эллипсоида в повернутой системе координат, аналогичное уравнению эллипсоида, повернутого в пространстве:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^3 (R_{i1}^2/A_i^2)x + \sum_{i=1}^3 (R_{i1}R_{i2}/A_i^2)y + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 (R_{i1}R_{i3}/A_i^2)z \right] + \left[ \sum_{i=1}^3 (R_{i2}R_{i2}/A_i^2)x + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 (R_{i2}^2/A_i^2)y + \sum_{i=1}^3 (R_{i2}R_{i3}/A_i^2)z \right] + \\ & \left[ \sum_{i=1}^3 (R_{i3}R_{i3}/A_i^2)x + \sum_{i=1}^3 (R_{i3}R_{i3}/A_i^2)y + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 (R_{i3}^2/A_i^2)z \right] = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Из формулы (3) получим уравнение касательной плоскости к эллипсоиду в произвольной точке  $(x_1, y_1, z_1)$  его поверхности и наложим условие перпендикулярности этой плоскости к плоскости  $xOy$ . В этом случае уравнение касательной плоскости не будет зависеть от координаты  $z$  и примет вид

$$ax + by = 1, \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} a = \sum_{i=1}^3 (R_{i1}^2/A_i^2)x_1 + \sum_{i=1}^3 (R_{i1}R_{i2}/A_i^2)y_1 + \\ + \sum_{i=1}^3 (R_{i1}R_{i3}/A_i^2)z_1; \\ b = \sum_{i=1}^3 (R_{i2}R_{i2}/A_i^2)x_1 + \sum_{i=1}^3 (R_{i2}^2/A_i^2)y_1 + \\ + \sum_{i=1}^3 (R_{i2}R_{i3}/A_i^2)z_1; \\ 0 = \sum_{i=1}^3 (R_{i3}R_{i3}/A_i^2)x_1 + \sum_{i=1}^3 (R_{i3}R_{i3}/A_i^2)y_1 + \\ + \sum_{i=1}^3 (R_{i3}^2/A_i^2)z_1. \end{cases} \quad (5)$$

Исключая из системы (5)  $z_1$  и учитывая, что выражение (4) должно выполняться в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ , подставляем уравнения для  $a$  и  $b$  в (4) и приводим его к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 A_i^2 R_{i2}^2 x_1^2 - 2 \sum_{i=1}^3 A_i^2 R_{i1} R_{i2} x_1 y_1 + \sum_{i=1}^3 A_i^2 R_{i1}^2 y_1^2 = \\ & = A_1^2 A_2^2 A_3^2 \sum_{i=1}^3 (R_{i3}^2/A_i^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как точка  $(x_1, y_1, z_1)$  была взята произвольно, уравнение (6) в совокупности с третьим уравнением системы (5) однозначно определяет набор точек на поверхности эллипсоида, в которых плоскости, касательные к эллипсоиду, являются перпендикулярными к координатной плоскости  $xOy$ . Соответствующий им набор точек  $(x_1, y_1, O)$  определяет контур проекции эллипсоида на координатную плоскость  $xOy$ , являющийся эллипсом вида (6). На рис. 2 показано проекционное изображение эллипсоида общего вида на координатную плоскость  $xOy$  и его базовые геометрические признаки.

Уравнение (6) для координатной плоскости  $xOy$  представим в виде

$$ax^2 - 2bxy + cy^2 = d, \quad (7)$$

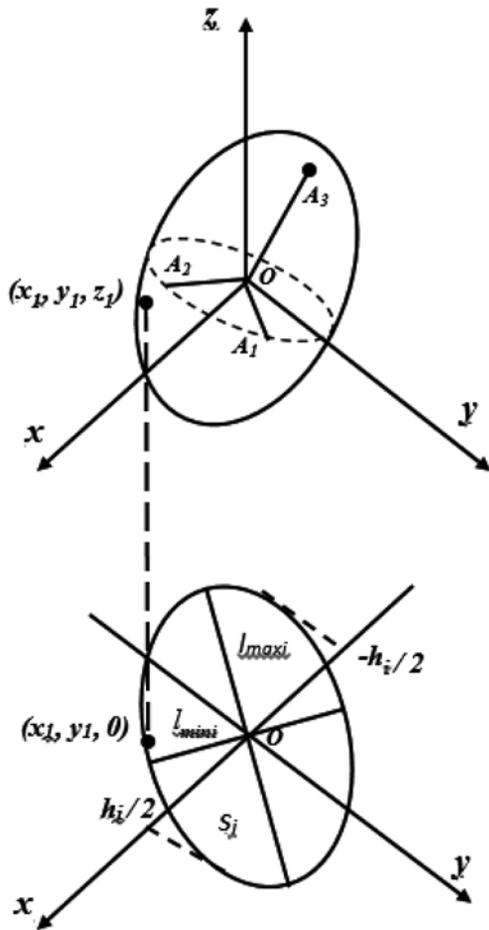


Рис. 2. Проекционное изображение эллипсоида общего вида на координатную плоскость  $xOy$

где

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{i=1}^3 A_i^2 R_{i2}^2, \\
 b &= \sum_{i=1}^3 A_i^2 R_{i1} R_{i2}, \\
 c &= \sum_{i=1}^3 A_i^2 R_{i1}^2, \\
 d &= A_1^2 A_2^2 A_3^2 \sum_{i=1}^3 (R_{i3}^2 / A_i^2).
 \end{aligned}$$

Выполняя процедуру, аналогичную описанной выше, т.е. проводя касательную прямую к эллипсу вида (7) в произвольной его точке и принимая во внимание условие перпендикулярности к оси координат  $x$ , получим выражение для одномерной проекции эллипсоида на эту ось:

$$h_i = 2\sqrt{c}.$$

Учитывая свойства инвариантности для эллипса вида (7), определим связь между коэффициентами

уравнения (7), осями  $l_{maxi}$  и  $l_{mini}$  и площадью  $s_i$  этого эллипса:

$$\begin{cases}
 s_i = \pi\sqrt{d}; \\
 l_{maxi} = 2\{(a+c) + [(a+c)^2 - 4d]^{1/2}\}/2\}^{1/2}; \\
 l_{mini} = 2\{(a+c) - [(a+c)^2 - 4d]^{1/2}\}/2\}^{1/2}.
 \end{cases} \quad (8)$$

Аналогично можно получить выражения вида (8) для проекции эллипсоида на координатные плоскости  $xOz$  и  $yOz$ . Исходя из этого определим искомые численные значения базовых признаков проекционных изображений эллипсоида (3) на координатные плоскости:

$$\begin{cases}
 h_i = 2\left[\sum_{j=1}^3 A_j^2 R_{ji}^2\right]^{1/2}; \\
 s_i = \pi A_1 A_2 A_3 \left[\sum_{j=1}^3 (R_{ji}^2 / A_j^2)\right]^{1/2}; \\
 l_{maxi} = \\
 = 2\left\{\left\{I_i + \left[I_i^2 - 4A_1^2 A_2^2 A_3^2 \sum_{j=1}^3 (R_{ij}^2 / A_j^2)\right]^{1/2}\right\}/2\right\}^{1/2}; \\
 l_{mini} = \\
 = 2\left\{\left\{I_i - \left[I_i^2 - 4A_1^2 A_2^2 A_3^2 \sum_{j=1}^3 (R_{ij}^2 / A_j^2)\right]^{1/2}\right\}/2\right\}^{1/2},
 \end{cases} \quad (9)$$

где  $I_i = \sum_{j=1}^3 A_j^2 (1 - R_{ji}^2)$ ;  $j, i$  — номера проекции и

текущей ориентировки (ракурса);  $h_i$  — длина одномерного проекционного изображения на выбранное направление (ракурс);  $s_i$  — площадь двумерного проекционного изображения;  $l_{maxi}$  — максимальный линейный размер двумерного проекционного изображения;  $l_{mini}$  — минимальный проекционный размер двумерного проекционного изображения.

Таким образом, выражения (9) определяют зависимость линейных (габаритных) размеров трехмерного объекта неправильной формы, аппроксимируемого эллипсоидом общего вида, с численными значениями оптимальных базовых признаков его проекционных изображений и их ракурсами (углами Эйлера).

Полученные базовые признаки используем для определения численных значений геометрических характеристик размеров и формы двумерного проекционного изображения (прагматического изображения) из соотношений

$$D' = 2(s_i/\pi)^{1/2} \text{ или } D' = \frac{l_{maxi} + l_{mini}}{1}; K' = l_{maxi}/l_{mini}$$

где  $D'$  и  $K'$  — соответственно средний проектируемый диаметр и коэффициент формы двумерного проекционного изображения.

### Заключение

Решена прямая задача морфологической обработки изображений трехмерного объекта неправильной формы, аппроксимируемого эллипсоидом общего вида. Полученные при этом математические модели могут быть использованы при разработке, оптимизации и исследовании операций (способов) получения, обработки, анализа и синтеза изображений объектов; при численной оценке качества изображений (по точности, достоверности и быстродействию); при разработке способов реконструкции размеров и формы трехмерных изображений объектов по проекциям; при геометрическом проекционном контроле двумерных и трехмерных объектов; при распознавании образов; в задачах управления и позиционирования робототехники; в задачах верификации программных систем и др.

### Список литературы

1. **Беляев С. П., Никифорова Н. К., Смирнов В. В.** Оптико-электронные методы изучения аэрозолей. М.: Энергоиздат, 1983. 385 с.
2. **Доморацкий Е. П.** Метод дистанционного контроля геометрических характеристик движущихся объектов по их дискретным импульсным изображениям // *Материалы II Международной научной конференции "Региональные проблемы дистанционного зондирования Земли"*. Красноярск: Сибирский гос. аэрокосмический университет, 2015. С. 143—146.
3. **Левин Г. Г., Вишняков Г. Н.** Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989. 224 с.
4. **Доморацкий Е. П., Байбикова Т. Н.** О качестве цифровых изображений объектов // *Вестник МФЮА*. М.: МФЮА, 2014. № 2. С. 206—214.
5. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1042 с.
6. **Методы** компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Соффера. 2 изд. М.: Физмазлит, 2003. 784 с.
7. **Доморацкий Е. П.** Методика оценки информативности геометрических характеристик проекционных изображений микрообъектов // *Качество. Инновации. Образование*. М.: Известия, 2014. № 2. С. 42—45.
8. **Доморацкий Е. П., Байбикова Т. Н.** О выборе ракурсов проекционных изображений при реконструктивном контроле размеров и формы трехмерных объектов // *Материалы II Международной научной конференции "Региональные проблемы дистанционного зондирования Земли"*. Красноярск: Сибирский гос. аэрокосмический университет, 2015. С. 139—142.
9. **Садовничий Ю. В., Федорчук В. В.** Аналитическая геометрия. Курс лекций с задачами. М.: Экзамен, 2010. 352 с.

**E. P. Domorackiy**, Professor, e-mail: Domorackiy.E@mfua.ru  
Moscow University of Finance and Law (MFUA),  
Financial University under the Government of the Russian Federation

## Synthesis Algorithm of the Geometrical Characteristics of the Projection Images of Three-Dimensional Objects

*The algorithm of synthesis of geometrical characteristics of one-dimensional and two-dimensional projection images of convex three-dimensional objects of irregular shape, which are approximated by a scalene ellipsoid (tri-axial ellipsoid of general form) is under consideration. The algorithm comprises the mathematical models of operation sequences (procedures) for receiving of projection images, for their morphological analysis (receiving their basic geometrical characteristics) and receiving the numerical values of spatial geometrical characteristics of projection images.*

**Keywords:** algorithm, synthesis, geometrical characteristics, object, projection image, mathematical model, approximation, ellipsoid, basic parameters

### References

1. **Beljaev S. P., Nikiforova N. K., Smirnov V. V.** *Optiko-elektronnye metody izucheniya ajerorozolej* [Opto-electronic methods for aerosols studying]. Moscow: Jenergoizdat, 1983. 385 p.
2. **Domorackiy E. P.** Metod distancionnogo kontrolja geometricheskix harakteristik dvizhushhihsja ob#ektov po ih diskretnym impul'snym izobrazhenijam [Method of remote control of geometrical characteristics of the moving objects with the usage of their discrete impulse images], *Materialy II Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Regional'nye problemy distancionnogo zondirovanija Zemli"*. Krasnojarsk: Sibirskij gos. ajerokosmicheskij universitet, 2015, pp. 143—146.
3. **Levin G. G., Vishnjakov G. N.** *Opticheskaja tomografija* [Optical tomography]. Moscow: Radio i svjaz'. 1089. 224 p.
4. **Domorackiy E. P., Baybikova T. N.** O kachestve cifrovix izobrazhenij ob#ektov [The quality of digital images of objects], *Vestnik MFJuA*. Moscow: MFJuA, 2014, no. 2, pp. 206—214.
5. **Gonsales R., Vuds R.** *Cifrovaja obrabotka izobrazhenij* [Digital image processing], Moscow: Tehnosfera, 2005. 1042 p.
6. **Metody komp'juternoj obrabotki izobrazhenij** [Methods of computer image processing]. Pod red. V. A. Sojfera. 2 izd. Moscow: Fizmazlit, 2003. 784 p.
7. **Domorackiy E. P.** Metodika ocenki informativnosti geometricheskix harakteristik proekcionnyx izobrazhenij mikroob#ektov [Methodology for assessment of informativeness of the geometrical characteristics of the projection images of micro-objects], *Kachestvo. Innovacii. Obrazovanie*. Moscow: Izdatel'stvo Izvestija, 2014, no. 2, pp. 42—45.
8. **Domorackiy E. P., Baybikova T. N.** O vybore rakurov proekcionnyx izobrazhenij pri rekonstruktivnom kontrole razmerov i formy trehmernyx ob#ektov [About choosing of foreshortenings of the projection images at the reconstructive control of the size and shape of three-dimensional objects], *Materialy II Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Regional'nye problemy distancionnogo zondirovanija Zemli"*. Krasnojarsk: Sibirskij gos. ajerokosmicheskij universitet, 2015, pp. 139—142.
9. **Sadovnichij Ju. V., Fedorchuk V. V.** *Analiticheskaja geometrija*. Kurs lekcij s zadachami [Analytical geometry. A course of lectures with tasks]. Moscow: Jekzamen. 2010. 352 p.