

L. R. Chernyakhovskaya, Dr. of Tech. Sci., Prof., lrchern@yandex.ru,
A. F. Galiullina, Graduate Student, e-mail: GAF1205@yandex.ru,
I. I. Sabitov, Graduate Student, e-mail: iskra1990@gmail.com,
Ufa State Aviation Technical University (USATU), Ufa

Efficiency Evaluation of Public Services Provision Using Fuzzy Inference System

To determine the efficiency of public services provision system fuzzy inference system application based on fuzzy set theory is considered in this article. The public services provision system is considered as a queuing system. To determine the efficiency of public services provision system to citizens three of the most important indicators or parameters of queuing system are used. These parameters are service time, service quality and service cost. The model of queuing system efficiency evaluation is developed in the software package MATLAB/Simulink. This model uses a fuzzy inference system and when system efficiency is low model allows to evaluate the control action effect in a feedback on the queuing system efficiency by reducing service time and resources cost for the service.

Keywords: public services provision system, queuing system, queuing system efficiency, fuzzy inference system

References

1. **Sovetov B. Ya., Yakovlev S. A.** *Modelirovanie system* [System modeling]: ucheb. dlya vuzov. Moscow: Vysh. shkola, 2009. 344 p. (in Russian).
2. **Hinchin A. Ya.** *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obslugivaniya* [Works on the mathematical theory of mass service]. Moscow: Editorial URSS, 2009. 240 p. (in Russian).
3. **Chernyakhovskaya L. R.** *Modelirovanie i analiz kharakteristik dinamicheskikh processov v usloviakh neopredelennosti s primeneniem teorii massovogo obslugivaniya* [Modeling and analysis of dynamic processes characteristics under uncertainty using the mass service theory]: ucheb. posobie. Ufa: UGATU, 2014. 159 p. (in Russian).
4. **GOST R ISO 9000—2008.** *The quality management system. Basic provisions and dictionary.* National standard of the Russian Federation. Moscow: Standardinform, 2009. 35 p. (in Russian).
5. **Galiullina A. F.** Imitacionnoe modelirovanie delovyyh processov kak system massovogo obslugivaniya [Simulation modeling of business processes as queuing systems], *Aktualnye problem nauki i tekhniki: Proceedings of the 9th Russian winter school-seminar of young scientists and post-graduate students.* Ufa: UGATU, 2014, vol. 1, pp. 226—230. (in Russian).
6. **Galiullina A. F.** Ocenka effektivnosti upravleniya proizvodstvennym processom s primeneniem imitacionnogo modelirovaniya na osnove system massovogo obslugivaniya [Effectiveness evaluation of production process control using simulation modeling based on queuing systems], *Vestnik UGATU.* Ufa: UGATU, 2015, vol. 19, no. 1 (67), pp. 115—122 (in Russian).
7. **Galiullina A. F.** Analiticheskoe modelirovanie delovyyh processov kak system massovogo obslugivaniya dlya ocenki ikh pokazateley effektivnosti [Analytical modeling of business processes as queuing systems for assessment of their efficiency indicators], *Nauka vchera, segodnya, zavtra* [Science yesterday, today, tomorrow]: Sb. st. po materialam XX megdunar. nauch.-prakt. konf., Novosibirsk: SibAK, 2015, no. 1 (18), pp. 11—15. (in Russian).
8. **Galiullina A. F.** Modelirovanie processa predostavleniya gosudarstvennykh uslug [Modeling of the public services providing process], *Nauchnoe obozrenie*, 2015, no. 22, pp. 253—263. (In Russian).
9. **Leonenkov A. V.** Nechetkoe modelirovanie v srede Matlab i fuzzyTECH [Fuzzy modeling in Matlab and fuzzyTECH]. Saint-Petersburg: BHV — Petersburg, 2003. 736 p. (in Russian).

УДК 519.61

Ю. А. Зак, д-р техн. наук, Докт.-Инг. Deutschland, науч. консультант, e-mail: yuriy_zack@hotmail.com,
г. Аахен, Германия

Алгоритмы решения транспортной задачи в условиях нечетких данных о стоимости поставки грузов

Рассматривается математическая модель транспортной задачи линейного программирования в условиях, когда удельные транспортные расходы представлены нечеткими множествами, а объемы поставок грузов — суть действительные числа. На основе предложенных методов сравнения и определения эффективности Fuzzy-множеств общего вида разработаны нечеткие аналоги метода потенциалов. Для Fuzzy-множеств с функцией принадлежности треугольного и трапециевидного вида приведены простые формулы и подробные алгоритмы расчета, которые проиллюстрированы числовым примером.

Ключевые слова: транспортная задача, базовые допустимые решения, метод потенциалов, Fuzzy-множества, сравнение и определение эффективности нечетких множеств

Введение

Транспортная задача в традиционной постановке формулируется следующим образом [1—4]. Одно-

родный груз, находящийся на складах n поставщиков в объемах $A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n$, необходимо доставить m потребителям в объемах $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_m$. Известны транспортные расходы c_{ij} , связанные

с перевозкой единицы продукта из пункта $\bar{A}_i$ в пункт $\bar{B}_j$. Рассматриваются случаи, когда

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^m B_j.$$

Необходимо найти значение переменных $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, чтобы удовлетворить спрос всех потребителей, обеспечив минимальную суммарную стоимость всех перевозок.

Математическая модель задачи может быть представлена в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $c_{ij} \geq 0$ — некоторые заданные детерминированные действительные числа, в условиях следующей системы ограничений:

- суммарное количество продукта, направляемого i -м поставщиком всем потребителям (во все пункты назначения), должно быть равно запасу продукта в данном пункте

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = A_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2)$$

- суммарное количество груза, доставляемого в каждый пункт назначения из всех пунктов отправления, должно быть равно его потребности

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = B_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Переменные задачи — это объемы перевозок $x_{ij} \geq 0$ — суть неотрицательные числа.

Данная формулировка транспортной задачи получила в литературе название замкнутой транспортной модели. Когда суммарный объем предложений (грузов, имеющихся в пунктах отправления) не равен общему объему спроса потребителей, транспортная задача называется *несбалансированной (открытой)*. Для открытой модели представляют интерес два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^n A_i > \sum_{j=1}^m B_j; \quad (4)$$

б) суммарные потребности в поставке продукта превышают суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^n A_i < \sum_{j=1}^m B_j. \quad (5)$$

Функция цели задачи в этих обоих случаях остается неизменной. Меняется только вид системы ограничений. Открытая модель решается приведением к закрытой модели [1–4] введением фиктивного поставщика $\bar{A}_{n+1}$, запасы которого равны

$A_{n+1} = \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{j=1}^m B_j$, или фиктивного потребителя $\bar{B}_{m+1}$, потребность в поставках для которого

$$B_{m+1} = \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{i=1}^n A_i.$$

При этом стоимость перевозки единицы груза как до фиктивного потребителя, так и от фиктивного поставщика полагаются равными нулю. После этих преобразований задача принимает вид закрытой модели и решается теми же алгоритмами и методами.

Решение транспортной задачи может быть получено алгоритмами симплекс-метода линейного программирования [1]. Однако ввиду практической важности этой задачи и специфики ее ограничений были разработаны более простые методы решения, позволяющие эффективно решать транспортные задачи большой размерности при существенно меньшем объеме вычислений. Одним из достаточно распространенных методов решения таких задач является метод потенциалов (см., например, [1, 3, 4]).

Однако во многих практических приложениях транспортные расходы c_{ij} , определяющие стоимость перевозки единицы груза, являются случайными величинами или могут быть представлены некоторыми нечеткими множествами. Это связано с колебанием цен на бензин и дизельное топливо, с временем года и суток, погодными условиями, типом и техническим состоянием транспортных средств и состоянием дорог, квалификацией обслуживающего персонала и многими другими причинами. В этих условиях является целесообразным суммарную стоимость перевозки грузов рассматривать и представлять в виде некоторой функции распределения или *Fuzzy*-множества, и транспортную задачу рассматривать как задачу поиска наиболее эффективной (с точки зрения минимальных затрат) функции распределения или *Fuzzy*-множества определенного вида. Для решения этой задачи могут использоваться методы *Fuzzy*-регрессионного анализа (см., например, [9–13]).

В данной работе предлагается математическая модель задачи в условиях, когда удельные транспортные расходы c_{ij} представлены нечеткими множествами, а объемы грузов на складах поставщиков $B_j, j = 1, \dots, m$, и потребности потребителей $A_i, i = 1, \dots, n$, — суть действительные числа. На основе предложенных методов сравнения эффективности и определения перспективности *Fuzzy*-множеств разработаны нечеткие аналоги метода потенциалов для *Fuzzy*-множеств с функцией принадлежности общего вида, которые детально проиллюстрированы для нечетких множеств с функцией принадлежности треугольного вида на числовом примере.

Представление суммарных затрат, связанных с доставкой грузов, в виде функции распределения

или нечеткого множества позволит более объективно оценить возможные риски, связанные с принятием решений, и обосновано принять соответствующий план поставок.

1. Постановка и математическая модель задачи

Рассматривается задача определения значения вектора действительных переменных в $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, при условиях системы ограничений (2), (3), обеспечивающих наиболее эффективное значение (в смысле минимального значения) *Fuzzy*-множества целевой функции

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{C}_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $\bar{C}_{ij} \geq 0$ — нечеткие множества.

В качестве *Fuzzy*-множеств можно рассматривать компактные множества с функциями принадлежности самого общего вида $0 \leq \mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{ij}) \leq 1$. В частности, можно рассматривать функции принадлежности, представленные двумя функциями $\mu_{L(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$ и $\mu_{R(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$ или тремя функциями $\mu_{L(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$, $\mu_{G(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$ и $\mu_{R(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$. Функция $\mu_{L(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$ — монотонно неубывающая на отрезке $[0, 1]$, функция $\mu_{R(\bar{C})}(\bar{C}_{ij})$ — монотонно невозрастающая на отрезке $[0, 1]$, а функция $\mu_{G(\bar{C})}(\bar{C}_{ij}) = \text{const} = 1$. Пример таких функций представлен на рис. 1.

Так как значение целевой функции в допустимых (базисных опорных) и оптимальном решениях также будет представлено нечетким множеством, рассмотрим методы сравнения и определения пред-

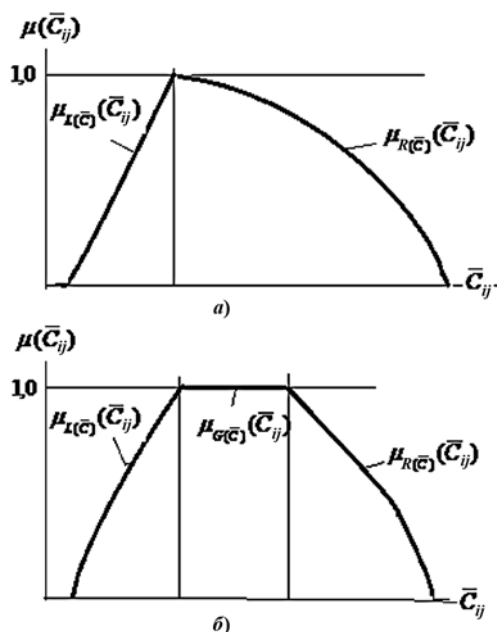


Рис. 1

почтений *Fuzzy*-множеств. Алгоритмы сравнения, определения абсолютных и относительных предпочтений и ранжирования *Fuzzy*-множеств были рассмотрены во многих публикациях отечественной и зарубежной литературы (см., например [7, 8]), а также в статьях и монографии автора для функций принадлежности специального вида [5, 6].

Ниже приведены алгоритмы сравнения и определения предпочтений нечетких множеств $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ с функциями принадлежности $\mu_{\bar{C}}(\bar{C}_1)$ и $\mu_{\bar{C}}(\bar{C}_2)$ описанного выше самого общего вида, которые использованы в алгоритмах решения сформулированной задачи. Обозначим $\bar{C}_1 <_{\text{Re}} \bar{C}_2$ факт, что *Fuzzy*-множество $\bar{C}_1$ является более предпочтительным (в смысле наименьшего значения), чем *Fuzzy*-множество $\bar{C}_2$. Предложенные ниже критерии и алгоритмы сравнения позволяют на основе вычисления некоторого детерминированного эквивалента нечеткого множества определить правила относительного предпочтения.

2. Алгоритмы сравнения и определения предпочтений нечетких множеств

Метод, основанный на анализе сечений нечетких множеств. Этот метод, который достаточно подробно описан во многих статьях и монографиях, проиллюстрирован рис. 2 и заключается в следующем.

Рассматриваются значения некоторого числа сечений нечетких множеств $(\bar{C}, \mu_{\bar{C}}(C)) - \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_p$. Пусть $C_0^1, C_1^1, \dots, C_p^1, \dots, C_p^1$ и $C_0^2, C_1^2, \dots, C_p^2, \dots, C_p^2$ — соответственно координаты левых и правых крайних точек координаты абсцисс всех этих сечений. Вычислим значения координат средних точек соответствующих сечений

$$L_p = 0,5 \cdot (C_p^1 + C_p^2). \quad (7)$$

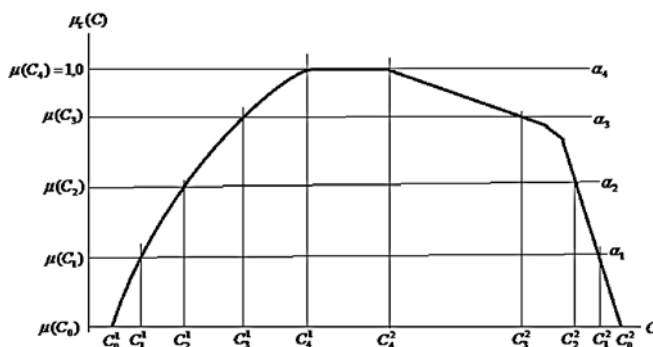


Рис. 2

Определив значения весовых коэффициентов из условий

$$0 \leq w_p \leq 1, p = 0, 1, \dots, P; \sum_{p=0}^P w_p = 1, \quad (8)$$

вычислим некоторое средневзвешенное детерминированное значение эффективности данного Fuzzy-множества:

$$S(\bar{C}) = \sum_{p=0}^P w_p L_p. \quad (9)$$

На основании вычисленных для двух Fuzzy-множеств $(\bar{C}_1, \mu_{\bar{C}}(C_1))$ и $(\bar{C}_2, \mu_{\bar{C}}(C_2))$ значений $S(\bar{C}_1)$ и $S(\bar{C}_2)$ можно заключить

$$(\bar{C}_1, \mu_{\bar{C}}(C_1)) <_{\text{Re}} (\bar{C}_2, \mu_{\bar{C}}(C_2)), \quad \text{если } S(\bar{C}_1) \leq S(\bar{C}_2). \quad (10)$$

Отметим, что выбор числа и уровня сечений, а также значений весовых коэффициентов связан с предпочтениями экспертов и лица, принимающего решение, степенью допускаемого риска. Поэтому определение эффективности Fuzzy-множеств этим методом является в некоторой степени субъективным. Альтернативным методом сравнения и определения предпочтений является также метод взвешенной точки, который учитывает все α -срезы функций принадлежности [9, 10] и может также быть использован в приведенных ниже алгоритмах.

Определение предпочтений сравнением координаты абсцисс центра тяжести нечетких множеств. Следует отметить, что выбор числа сечений (значения P) уровня сечений (значений $\mu_{\bar{C}}(C_p)$, $p = 0, 1, \dots, P$), значений весовых коэффициентов w_p является субъективным и определяется лицом, принимающим решение. Более объективным методом определения относительных предпочтений нечетких множеств является алгоритм, основанный на сравнении абсцисс их центров тяжести, которые вычисляют по формуле

$$G(\bar{C}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C \mu_{\bar{C}}(C) dC}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\bar{C}}(C) dC}. \quad (11)$$

Следовательно,

$$(\bar{C}_1, \mu_{\bar{C}}(C_1)) \leq_{\text{Re}} (\bar{C}_2, \mu_{\bar{C}}(C_2)), \quad \text{если } G(\bar{C}_1) \leq G(\bar{C}_2). \quad (12)$$

Сравнение нечетких множеств трапециевидного и треугольного вида. Рассмотрим нечеткие множества трапециевидного и треугольного видов

$\bar{C} = (a(\bar{C}), m_1(\bar{C}), m_2(\bar{C}), b(\bar{C}))$ и $\bar{C} = (a(\bar{C}), m(\bar{C}), b(\bar{C}))$ (см. рис. 2).

Наиболее объективным методом определения предпочтений нечетких множеств в смысле $(\bar{C}_1, \mu_{\bar{C}}(C_1)) \leq_{\text{Re}} (\bar{C}_2, \mu_{\bar{C}}(C_2))$ является проверка выполнения системы неравенств:

- для функций принадлежности трапециевидного вида

$$\begin{aligned} (m_1(C_1) - a(C_1)) &\leq (m_1(C_2) - a(C_2)), \\ m_1(C_1) &\leq m_1(C_2), m_2(C_1) \leq m_2(C_2), \\ (m_2(C_1) + b(C_1)) &\leq (m_2(C_2) + b(C_2)); \end{aligned} \quad (13)$$

- для функций принадлежности треугольного вида

$$\begin{aligned} (m(C_1) - a(C_1)) &\leq (m(C_2) - a(C_2)), m(C_1) \leq m(C_2), \\ (m(C_1) + b(C_1)) &\leq (m(C_2) + b(C_2)), \end{aligned} \quad (14)$$

и хотя бы одно из этих неравенств выполняется как строгое неравенство.

Значения $S(\bar{C})$ и $G(\bar{C})$ для частных случаев функций принадлежности нечетких множеств трапециевидного и треугольного видов (рис. 3) вычисляются по формулам (9), (11), а значения L_p определяются соответственно выражениями

$$L_p = 0,5\{(m_1(\bar{C}) - a(\bar{C})(1 - \alpha_p)) + (m_2(\bar{C}) + b(\bar{C})(1 - \alpha_p)) + (m_1(\bar{C}) + m_2(\bar{C}))\}; \quad (15)$$

$$L_p = 0,5\{(m(\bar{C}) - a(\bar{C})(1 - \alpha_p)) + (m(\bar{C}) + b(\bar{C})(1 - \alpha_p))\}. \quad (16)$$

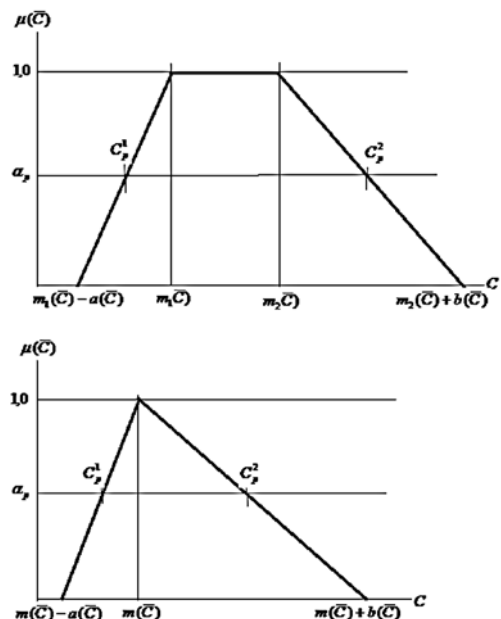


Рис. 3

Аналоги значения $G(\bar{C})$ в этом случае определяются по следующим явным формулам:

- для функций принадлежности треугольного вида

$$G(\bar{C}) = \frac{1}{3} [(m(\bar{C}) - a(\bar{C})) + m(\bar{C}) + (b(\bar{C}) + m(\bar{C}))]; \quad (17)$$

- для функций принадлежности трапециевидного вида может рассматриваться показатель

$$G_1(\bar{C}) = \frac{1}{3} [(m_1(\bar{C}) - a(\bar{C})) + m_1(\bar{C}) + (b(\bar{C}) + m_1(\bar{C}))] + \frac{1}{2} (m_1(\bar{C}) + m_2(\bar{C})). \quad (18)$$

3. Алгоритмы получения базового опорного решения

Как и для любой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является также ее опорным планом. Опорные и оптимальные планы решения задачи сводятся в таблицу, в каждой клетке которой определен объем поставок из пункта $\bar{A}_i$ в пункт $\bar{B}_j$, т.е. значение переменной x_{ij} .

Решение транспортной задачи состоит из двух этапов. 1-й этап предусматривает нахождение ее какого-либо опорного плана. Определение опорного плана может быть выполнено одним из следующих трех методов [1, 3]:

- метод северо-западного угла;
- метод минимального элемента;
- метод аппроксимации Фогеля.

Рассмотрим первые два из этих методов.

Алгоритм получения опорного решения методом северо-западного угла ничем не отличается от применяемого алгоритма в случае детерминированных данных коэффициентов целевой функции (6).

Получение опорного решения методом минимального элемента предусматривает выполнение следующих процедур:

- расчет детерминированного эквивалента для каждого нечеткого множества коэффициента целевой функции $\bar{C}_{ij}$ в виде $S(\bar{C}_{ij})$ по формулам (7)–(9), для функций принадлежности трапециевидного и треугольного вида проверкой системы неравенств (13), (14) либо вычисления значения L_p по явным формулам (15), (16), либо в виде значения центра тяжести соответствующего *Fuzzy*-множества по формуле (17), (18);
- так как вычисленные оценки являются детерминированными величинами, упорядочим их в соответствии с выражениями (10) или (12) по возрастанию вычисленных значений, после чего все шаги получения опорного решения ничем не отличаются от последовательности вычислений в случае детерминированных значений c_{ij} .

Пусть $\bar{x}_{ij} \geq 0$ — детерминированные значения объемов перевозок, полученные в некотором до-

пустимом базовом решении. *Fuzzy*-множество, определяющее значение целевой функции полученного базисного решения, определяется по формуле

$$\begin{aligned} & \mu_{\bar{F}(\bar{Z})}(\bar{F}(\bar{Z}_p)) = \\ & = \max_{\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \dots, \bar{x}_{ij}, \dots, \bar{x}_{nm} \in \bar{Q}(\bar{Z}_p)} \min \{ \mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{11}), \mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{12}), \dots, \\ & \mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{ij}), \dots, \mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{nm}) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} & \bar{Q}(\bar{Z}_p) = \\ & = \left\{ (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \dots, \bar{x}_{ij}, \dots, \bar{x}_{nm}) \mid \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{C}_{ij} \bar{x}_{ij} = \bar{Z}_p; \right. \\ & \left. \bar{x}_{ij} > 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \right\}; \end{aligned} \quad (20)$$

$\bar{Z}_p \in [\bar{Z}^{\min}, \bar{Z}^{\max}]$ — диапазон возможных детерминированных значений суммарных затрат, связанных с перевозкой грузов.

Для функций принадлежности удельных затрат доставки грузов трапециевидного или треугольного вида выражение $\mu_{\bar{F}(\bar{Z})}(\bar{F}(\bar{Z}))$ вычисляется по явным формулам

$$\begin{aligned} & \mu_{\bar{F}(\bar{Z})}(\bar{F}(\bar{Z})) \rightarrow (\bar{A}, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{B}) \\ & \text{или } \mu_{\bar{F}(\bar{Z})}(\bar{F}(\bar{Z})) \rightarrow (\bar{A}, \bar{M}, \bar{B}), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} & \bar{A} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a(\bar{C}_{ij}) \bar{x}_{ij} \mid \bar{x}_{ij} > 0, \right. \\ & \left. i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \right\}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \bar{B} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b(\bar{C}_{ij}) \bar{x}_{ij} \mid \bar{x}_{ij} > 0, \right. \\ & \left. i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \right\}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \bar{M}_k = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_k(\bar{C}_{ij}) \bar{x}_{ij} \mid \bar{x}_{ij} > 0, \right. \\ & \left. i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \right\}, k = 1, 2; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \bar{M} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(\bar{C}_{ij}) \bar{x}_{ij} \mid \bar{x}_{ij} > 0, \right. \\ & \left. i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

4. Улучшение опорного плана методом потенциалов

Построенный план перевозок является допустимым, но не является оптимальным. Для нахождения оптимального плана перевозок необходимо последовательно, пока это возможно, улучшать опорный план путем отыскания на каждом шаге выгодных циклов переноса грузов. Цикл позволяет перераспределить занятые клетки так, чтобы получить новый план перевозок с меньшими суммарными затратами. На каждом шаге (цикле) алгоритма в условиях детерминированных значений стоимостей перевозок c_{ij} заменяют одну свободную переменную на базисную, т. е. заполняют одну клетку и взамен этого освобождают одну из других базисных клеток. Ниже рассматривается реализация этих процедур в условиях нечетких данных о стоимости перевозок, заданными *Fuzzy*-множествами $\bar{C}_{ij}$ с функциями принадлежности $0 \leq \mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{ij}) \leq 1$.

Расчет потенциалов

$$\mu_{\bar{U}}(\bar{U}_i^r) = \max_{(\bar{C}_{ij}, \bar{V}_j) \in \tilde{H}_1(\bar{U}_i^r)} \{\mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{ij}), \mu_{\bar{V}}(\bar{V}_j^l)\}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(\bar{U}_i^r) = \\ = \{C_{ij}^t, t=1, \dots, T; \bar{V}_j^l, l=1, \dots, L \mid \bar{U}_i^r = \bar{C}_{ij}^t - \bar{V}_j^l\}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mu_{\bar{V}}(\bar{V}_j^l) = \max_{(\bar{C}_{ij}, \bar{U}_i) \in \tilde{H}_2(\bar{V}_j^l)} \{\mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{ij}), \mu_{\bar{U}}(\bar{U}_i^r)\}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2(\bar{V}_j^l) = \{C_{ij}^t, t=1, \dots, T; \bar{U}_i^r, r=1, \dots, R \mid \bar{V}_j^l = \\ = \bar{C}_{ij}^t - \bar{U}_i^r\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\bar{U}_i^r \in [\bar{U}_i^{\min}, \bar{U}_i^{\max}]$, $\bar{V}_j^l \in [\bar{V}_j^{\min}, \bar{V}_j^{\max}]$ — соответственно диапазоны возможных детерминированных значений соответствующих потенциалов строк и столбцов.

Значения свободных (соответствующих значениям $x_{ij} = 0$) клеток таблицы вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{W}}(\bar{W}_{ij}^k) = \\ = \max_{(\bar{C}_{ij}, \bar{U}_i, \bar{V}_j) \in \tilde{\Omega}(\bar{W}_{ij}^k)} \{\mu_{\bar{C}}(\bar{C}_{ij}), \mu_{\bar{U}}(\bar{U}_i^r), \mu_{\bar{V}}(\bar{V}_j^l) \mid x_{ij} = \\ = 0\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\bar{W}_{ij}^k) = \{C_{ij}^t, t=1, \dots, T; \bar{U}_i^r, r=1, \dots, R, \\ \bar{V}_j^l, l=1, \dots, L \mid \bar{W}_{ij}^k = \bar{C}_{ij}^t - \bar{U}_i^r - \bar{V}_j^l\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\bar{W}_{ij}^k \in [\bar{W}_{ij}^{\min}, \bar{W}_{ij}^{\max}]$ — диапазоны возможных детерминированных значений соответствующих потенциалов свободных клеток таблицы.

В случае функций принадлежности трапециевидного и треугольного видов

$$\begin{aligned} \bar{C} = (a(\bar{C}), m_1(\bar{C}), m_2(\bar{C}), b(\bar{C})) \\ \text{и } \bar{C} = (a(\bar{C}), m(\bar{C}), b(\bar{C})) \end{aligned}$$

вычисления потенциалов строк и столбцов и оценок свободных клеток выполняют по формулам

$$\begin{aligned} \bar{U}_i = (a(\bar{C}_{ij}) + b(\bar{V}_j), m_1(\bar{C}) - m_1(\bar{V}_j), m_2(\bar{C}) - \\ - m_1(\bar{V}_j), b(\bar{C}) + a(\bar{V}_j)), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{U}_i = (a(\bar{C}_{ij}) + b(\bar{V}_j), m(\bar{C}) - m(\bar{V}_j), b(\bar{C}) + a(\bar{V}_j)); \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ij} = (a(\bar{C}_{ij}) + a(\bar{U}_i) + b(\bar{V}_j), m_1(\bar{C}) - \\ - m_1(\bar{U}_i) - m_1(\bar{V}_j), m_2(\bar{C}) - m_1(\bar{U}_i) - \\ - m_1(\bar{V}_j), b(\bar{C}) + a(\bar{U}_i) + a(\bar{V}_j)), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ij} = (a(\bar{C}_{ij}) + a(\bar{U}_i) + b(\bar{V}_j), m(\bar{C}) - m(\bar{U}_i) - \\ - m(\bar{V}_j), -m_1(\bar{V}_j), b(\bar{C}) + a(\bar{U}_i) + a(\bar{V}_j)). \end{aligned} \quad (35)$$

На основе вычисленных по приведенным выше формулам (7)–(9) функций принадлежности оценок свободных клеток таблицы (а в случае трапециевидных или треугольных функций принадлежности по формулам (13), (14)) вычисляют детерминированные оценки эффективности нечетких множеств $S(\bar{C}_{ij})$, либо координаты оси абсцисс их центров тяжести $G(\bar{C}_{ij})$ в соответствии с выражением (11) (или (17), (18)). На основе вычисленных детерминированных оценок дальнейшие шаги преобразования и улучшения опорного плана выполняются как и в методе потенциалов в условиях детерминированных данных об удельных стоимостях перевозок.

Отметим, что в приближенных методах решения задачи значения потенциалов и оценок свободных клеток можно определять по более простым формулам на основе детерминированных оценок эффективности *Fuzzy*-множеств:

$$\begin{aligned} \bar{U}_i = S(\bar{C}_{ij}) - S(\bar{V}_j), \bar{V}_j = S(\bar{C}_{ij}) - S(\bar{U}_i), \\ \bar{W}_{ij} = S(\bar{C}_{ij}) - S(\bar{U}_i) - S(\bar{V}_j) \end{aligned} \quad (36)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{U}_i = G(\bar{C}_{ij}) - G(\bar{V}_j), \bar{V}_j = G(\bar{C}_{ij}) - G(\bar{U}_i), \\ \bar{W}_{ij} = G(\bar{C}_{ij}) - G(\bar{U}_i) - G(\bar{V}_j). \end{aligned} \quad (37)$$

5. Иллюстративный пример

Требуемые объемы поставок потребителям и запасы товаров поставщиков заданы соответственно в последней строке и последнем столбце табл. 1. Стоимости перевозки единицы объема грузов заданы *Fuzzy*-числами с функциями принадлежности треугольного вида $\mu_X(A) = (a, m, b)$ и представлены в клетках табл. 1. Необходимо найти наиболее эффективный план перевозок, обеспечивающий наи-

лучшее значение *Fuzzy*-множества, определяющего суммарные затраты на выполнение плана перевозок.

Сравнение и определение предпочтений *Fuzzy*-множеств выполняется либо координатой абсцисс центра тяжести, либо методом сечений на уровнях $\lambda_0\{\mu_X(A)\} = 0$, $\lambda_1\{\mu_X(A)\} = 0,25$, $\lambda_2\{\mu_X(A)\} = 0,5$, $\lambda_3\{\mu_X(A)\} = 0,8$, $\lambda_4\{\mu_X(A)\} = 1,0$, а соответствующие весовые коэффициенты при расчете детерминированного показателя эффективности *Fuzzy*-множеств заданы вектором $W = (0,05; 0,1; 0,15; 0,3; 0,4)$.

Таблица 1

Исходные данные задачи

	1	2	3	4	A_i
1	(1, 4, 2)	(2, 3, 1)	(2, 6, 3)	(1, 2, 3)	10
2	(2, 5, 1)	(1, 6, 3)	(1, 7, 2)	(1, 4, 3)	15
3	(2, 4, 3)	(2, 3, 3)	(1, 5, 2)	(1, 6, 2)	12
B_j	15	8	6	8	37

Таблица 2

Получение опорного решения методом северо-западного угла (детерминированные оценки стоимости получены методом сечений)

	1	2	3	4	A_i
1	4,13 10	2,87	6,13	2,23	10
2	4,87 5	6,11 8	7,13 2	4,26	15
3	4,13	3,13	5,13 4	6,13 8	12
B_j	15	8	6	8	37

Таблица 3

Получение опорного решения методом выбора минимального элемента (детерминированные оценки стоимости получены методом сечений)

	1	2	3	4	A_i
1	4,13	2,87 2	6,13	2,23 8	10
2	4,87 9	6,11	7,13 6	4,26	15
3	4,13 6	3,13 6	5,13	6,13	12
B_j	15	8	6	8	37

Таблица 4

Получение опорного решения методом выбора минимального элемента (детерминированные оценки стоимости как центр тяжести соответствующих подмножеств)

	1	2	3	4	A_i
1	4,333	2,667 8	6,333	2,667 2	10
2	4,667 3	6,667	7,333 6	4,667 6	15
3	4,333 12	3,333	5,333	6,333	12
B_j	15	8	6	8	37

Fuzzy-множество значения целевой функции опорного плана (табл. 2)

$$10*(1, 4, 2) + 5*(2, 5, 1) + 8*(1, 6, 3) + 2*(1, 7, 2) + 4*(1, 5, 2) + 8*(1, 6, 2) = (42, 195, 77),$$

т. е. $a = 42$; $m = 195$; $b = 77$.

$$F_0^0 = (m(\bar{C}) - a(\bar{C}), m(\bar{C}), m(\bar{C}) + b(\bar{C})) = (153, 195, 272),$$

$$C(F_0^0) = 0,05 \cdot \frac{1}{2} \cdot [(195 - 42 \cdot (1,0 - 0)) + (195 + 77 \cdot (1,0 - 0))] + 0,1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [(195 - 42 \cdot (1,0 - 0,25)) + (195 + 77 \cdot (1,0 - 0,25))] + 0,15 \cdot \frac{1}{2} \cdot [(195 - 42 \cdot (1,0 - 0,5)) + (195 + 77 \cdot (1,0 - 0,5))] + 0,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [(195 - 42 \cdot (1,0 - 0,8)) + (195 + 77 \cdot (1,0 - 0,8))] + 0,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [(195 - 42 \cdot (1,0 - 1,0)) + (195 + 77 \cdot (1,0 - 1,0))] = 199,49.$$

$$G(F_0^0) = \frac{1}{3} \cdot (153 + 195 + 272) = 206,67.$$

Значения параметров F_0^0 показаны на рис. 3. Аналогичным образом вычислены параметры *Fuzzy*-множеств F_0^1 , F_0^2 и F_0^3 .

Fuzzy-множество значения целевой функции опорного плана (табл. 3):

$$2*(2, 3, 1) + 8*(1, 2, 3) + 9*(2, 5, 1) + 6*(1, 7, 2) + 6*(2, 4, 3) + 6*(2, 3, 3) = (60, 151, 83).$$

$$F_0^1 = (91, 151, 234);$$

$$C(F_0^1) = 153,985; G(F_0^1) = 158,67.$$

Так как $91 < 153$, $151 < 195$, $234 < 272$, то $F_0^1 <_{RE} F_0^0$. *Fuzzy*-множество значения целевой функции опорного плана (табл. 4):

$$8*(2, 3, 1) + 2*(1, 2, 3) + 3*(2, 5, 1) + 6*(1, 7, 2) + 6*(1, 4, 3) + 12*(2, 4, 3) = (60, 157, 101);$$

$$F_0^2 = (97, 157, 258); C(F_0^2) = 162,32; G(F_0^2) = 170,67.$$

Так как $97 < 153$, $157 < 195$, $258 < 272$, то $F_0^2 <_{RE} F_0^0$.

Как и по условиям $C(F_0^1) < C(F_0^2)$, так и при сравнении *Fuzzy*-множеств по критерию координаты абсцисс центра тяжести установлено, что $F_0^1 <_{RE} F_0^2$. Рассмотрим наилучший из допустимых опорных планов, представленный в табл. 3. Рассчитаем значения потенциалов и оценок свободных клеток табл. 3 и результаты расчетов представим в табл. 5.

$$u_1 = 0, v_2 = c_{12} - u_1 = 2,87, v_4 = c_{14} - u_1 = 2,26, \\ u_3 = c_{32} - v_2 = 0,26, \\ v_1 = c_{31} - u_3 = 3,87, u_2 = c_{23} - v_3 = 1,0, \\ v_3 = c_{23} - u_2 = 6,13.$$

Таблица 5

Допустимое базовое решение задачи

	1	2	3	4	u_i
1	0,26	2,87 2	0	2,26 8	0
2	4,87 9	2,24	6,66 6	1,0	1,0
3	4,13 6	3,13 6	-1,26	3,64	0,26
v_j	3,87	2,87	6,13	2,26	

Таблица 6

Наиболее эффективный план перевозок

	1	2	3	4	A_i
1		2		8	10
2	15				15
3		6	6		12
B_j	15	8	6	8	

$$\tilde{c}_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4,13 - 0 - 3,87 = 0,26,$$

$$\tilde{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6,13 - 0 - 6,13 = 0,$$

$$\tilde{c}_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 6,11 - 1,0 - 2,87 = 2,24,$$

$$\tilde{c}_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 4,26 - 1,0 - 2,26 = 1,0,$$

$$\tilde{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 5,13 - 0,26 - 6,13 = -1,26,$$

$$\tilde{c}_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 6,13 - 0,26 - 2,2 = 3,64.$$

Так как значение элемента $\tilde{c}_{33} = -1,26$, т. е. отрицательно, то оптимальное решение задачи не получено. Строим цикл, включающий следующие клетки таблицы $(3,3)_+ \rightarrow (3,1)_- \rightarrow (2,1)_+ \rightarrow (2,3)_- \rightarrow (3,3)_+$. Минимальный элемент величины поставок клеток этого цикла равен $\lambda = \min x_{ij}$, и достигается в клетке $x_{31} = 6$. Выводим эту клетку из базисного решения, выполняем перемещение минимальной величины поставки по циклу, и пересчитываем таблицу. Полученное новое базисное решение, которое является наиболее эффективным решением данной задачи, приведено в табл. 6.

$$2*(2, 3, 1) + 8*(1, 2, 3) + 15*(2, 5, 1) + 6*(2, 3, 3) + 6*(1, 5, 2) = (60, 145, 71).$$

$$F_0^3 = (85, 145, 216); C(F_0^3) = 139,392; G(F_0^3) = 148,667.$$

Так как $85 < 91$, $145 < 151$, $216 < 234$, то $F_0^4 <_{RE} F_0^1$ и, следовательно, является самым эффективным из всех рассмотренных выше планов перевозок.

Заключение

Во многих практических приложениях в связи с колебанием цен на бензин и дизельное топливо, погодными условиями, типом и состоянием дорог

и видом используемых транспортных средств, квалификацией менеджмента и обслуживающего персонала и многими другими причинами транспортные расходы c_{ij} , определяющие стоимость перевозки единицы груза, меняются в процессе реализации плана перевозок и могут быть представлены некоторыми нечеткими множествами. Суммарную стоимость перевозки грузов в этих условиях предлагается рассматривать и представлять в виде некоторого нечеткого множества, и транспортную задачу решать как задачу поиска наиболее эффективного (с точки зрения минимальных затрат) Fuzzy-множества определенного вида.

На основе предложенных методов сравнения и определения эффективности Fuzzy-множеств общего вида разработаны нечеткие аналоги метода потенциалов. Для Fuzzy-множеств с функцией принадлежности треугольного и трапециевидного вида приведены простые формулы и подробные алгоритмы расчета, которые проиллюстрированы на числовом примере.

Представление суммарных затрат, связанных с реализацией наиболее эффективного плана перевозок, в виде нечеткого множества позволит более объективно оценить возможные риски, связанные с принятием решений, и обосновано принять полученный в результате анализа план поставок

Список литературы

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного вида. М.: Физматгиз, Наука, 1993. 384 с.
2. Канторович Л. В. О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37, № 3. С. 227—229.
3. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. М.: Физматлит, 2005. 128 с.
4. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966. 600 с.
5. Зак Ю. А. Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных. Fuzzy-технологии. М.: URSS, Либроком, 2013. 352 с.
6. Зак Ю. А. Критерии и методы сравнения нечетких множеств // Системные исследования и информационные технологии. 2013. № 3. С. 58—68.
7. Rommelfanger H.-J. Entscheiden bei Unschärfe. Fuzzy Decision. Support-Systeme. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1994. 314 p.
8. Duboi D., Prade H. M. Fuzzy sets and systems: theory and applications. New York — London — Toronto: Academic Press, 1980. 393 p.
9. Chang Y.-H. O. Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 119. P. 225—246.
10. Poleshuk O. M., Komarov E. G. New defuzzification method based on weighted intervals // Proceedings of the 27th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'2008.
11. Poleshchuk O., Komarov E. A Fuzzy Nonlinear Regression Model for Interval Type-2 Fuzzy Sets // International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering. 2014. Vol. 8, N. 6. P. 833—837.
12. Tanaka H., Uejima S., Asai K. Linear regression analysis with fuzzy model // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1982. Vol. 12, N. 6. P. 903—907.
13. Зак Ю. А. Fuzzy-регрессионные модели прогнозирования затрат времени и стоимости грузовых автомобильных перевозок // Логистика сегодня. 2015. № 3. С. 162—172.

Algorithms for Solving the Transport Problem in Fuzzy Data on the Cost of Delivery of Goods

We consider a mathematical model of the transportation problem of linear programming in an environment where the specific transport costs are represented by fuzzy sets, and volume of cargo shipments — are real numbers. On the basis of the proposed methods of comparison and benchmarking fuzzy-sets general type developed fuzzy analogues of potential method. For Fuzzy-sets with the membership function of the triangular and trapezoidal species we present simple formulas and detailed calculation algorithms, which are illustrated in the numerical example.

Keywords: transportation problem, the basic feasible solutions, the potential method, Fuzzy-set comparison and determine the effectiveness of fuzzy sets

References

1. Golshtein E. G., Yudin D. B. *Zadachi linejnogo programmirovaniya transportnogo vida*, Moscow, Fismatgiz, Nauka, 1993, 384 p. (in Russian).
2. Kantorovitch L. V. O peremeschenii mass. *Doklady AN SSSR*, 1942, vol. 37. P. 227—229. (in Russian).
3. Lungu K. N. *Linejnoje programmirovaniye. Rukovodstvo k resheniju zadach*. Moscow: Fismatlit, 2005. 128 p. (in Russian).
4. Danzing Dzh. *Linejnoje programmirovaniye, jego primeneniya i obobscheniya*, Moscow: Progress, 1966, 600 p. (in Russian).
5. Zack Yu. A. *Prinyatiye reshenij v usloviyach razmitich i nechetkich dannich. Fuzzy-technologii*, Moscow, Librokom, 2013, 352 p.
6. Zack Yu. A. *Kriterii i metodi sravneniya nechetkich mnozhestv, Sistemniye issledovaniya i informazionniye tehnologii*, Kiev, 2013, no. 3. pp. 58—68.
7. Rommelfanger H.-J. *Entscheiden bei Unschurfe. Fuzzy Decision. Support-Systeme*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994, 314 p.
8. Duboi D., Prade H. M. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, New York — London — Toronto, 1980, 393 p.
9. Chang Y.-H. O. Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, vol. 119, pp. 225—246.
10. Poleshuk O. M., Komarov E. G. New defuzzification method based on weighted intervals, *Proceedings of the 27th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'2008*.
11. Poleshchuk O., Komarov E. A Fuzzy Nonlinear Regression Model for Interval Type-2 Fuzzy Sets, *International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering*, 2014, vol. 8, no. 6, pp. 833—837.
12. Tanaka H., Uejima S., Asai K. Linear regression analysis with fuzzy model, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1982, vol. 12, no. 6, pp. 903—907.
13. Zack Yu. A. Fuzzy-regressionniye modeli prognosirovaniya zatrat vremeni i stoimosti grusovich avtomobilnich perevosok, *Logistika segodnya*, 2015, no. 3, pp. 162—172.

УДК 004.91

С. В. Бутаков, канд. техн. наук, доц., e-mail: sergey.butakov@computer.org,

С. В. Мурзинцев, аспирант, e-mail: o.100@yandex.ru,

А. А. Цхай, д-р техн. наук, проф., e-mail: taa1956@mail.ru,

Алтайская академия экономики и права, Барнаул

Использование горизонтально масштабируемой инфраструктуры при поиске заимствований в тексте

Рассмотрена проблема быстрого сравнения текстовых документов. В прикладных задачах акцент сделан на поиск плагиата и на фильтрацию текстов в системах защиты от утечек информации. Краткий обзор решений, основанных на традиционных СУБД, показал их ограничения с точки зрения масштабируемости системы. В качестве альтернативы предложено использовать нереляционные СУБД с возможностью распределения поискового индекса между узлами системы. Для решения задач текстового поиска в работе предложен вариант представления отпечатков текстов в виде "ключ — значение", выполнена программная реализация данной модели и проведены эксперименты, подтвердившие приемлемость модели с точки зрения реализации на горизонтально масштабируемой платформе.

Ключевые слова: фильтрация текста, сравнение текстов, большие данные, обнаружение плагиата, системы предотвращения потери данных

Введение

Задача поиска совпадающих или близких к совпадению фрагментов текстов изучается на протяжении нескольких последних десятилетий. В боль-

шом потоке появившихся исследований можно выделить два основных направления. В работах первого направления совпадение или близость к совпадению фрагментов текстов понимается как совпадение или близость смыслов фрагментов [1, 2].