

А. С. Филиппова, д-р техн. наук, проф., e-mail: annamuh@mail.ru,
 Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
Э. И. Дяминава, канд. техн. наук, доц., e-mail: xasel@mail.ru,
Ю. И. Валиахметова, канд. техн. наук, доц., e-mail: julikas@inbox.ru,
 Уфимский государственный авиационный технический университет

Метод ограниченной декомпозиции для решения комплексной задачи геометрического покрытия и раскроя

Рассматривается NP-трудная комплексная задача геометрического покрытия и раскроя. Эффективность ее решения оценивается двумя критериями: коэффициентом покрытия и коэффициентом раскроя. Предлагается метод ограниченной декомпозиции области покрытия, использующий матричное представление исходных данных. Проведен вычислительный эксперимент, направленный на исследование эффективности предложенного метода и ранее разработанного гибридного эволюционного алгоритма.

Ключевые слова: геометрическое покрытие, раскрой, многосвязный ортогональный полигон, метод матричной декомпозиции, метод ограниченной декомпозиции

Введение

Постановка и математическая модель рассматриваемой в статье комплексной задачи геометрического покрытия и раскроя (ГПР) разработана в рамках уфимской научной школы [1] по исследованию задач раскроя-упаковки. Сама проблема представляет собой синтез двух хорошо известных оптимизационных подзадач: задачи раскроя и задачи геометрического покрытия. Ранее на практике решение этих подзадач осуществлялось по отдельности и не рассматривалось в комплексе. Однако решение комплексной задачи ГПР является целесообразным с точки зрения ресурсосбережения, как показано в работах [2, 3]. Комплексная задача ГПР заключается в нахождении размеров покрывающих прямоугольных элементов, плана покрытия заданной многоугольной области, плана раскроя покрывающих элементов из прямоугольных листов или рулонного материала заданных размеров. При этом требуется максимизировать размеры покрывающих элементов и минимизировать расход раскраиваемого ресурса.

Каждая подзадача относится к классу NP-трудных проблем раскроя-упаковки [4]. Начало широкого научного исследования задач раскроя положила в 1951 г. книга Л. В. Канторовича и В. А. Залгаллера [5]. Различают одномерные (линейные), двумерные (прямоугольные), трехмерные задачи [6, 7]. Цель задач раскроя-упаковки разместить предметы известных размеров в заданном ресурсе: если ресурс задан в виде стержней, корзин, листов, контейнеров и т. п., то минимизировать их число; если ресурс в виде полубесконечной полосы, полубесконечного контейнера, то минимизировать занятую площадь/объем.

В настоящее время под задачами раскроя-упаковки понимается широкий класс проблем, допускающих различное прикладное толкование, например, задача составления расписания многопроцессорных систем, задача выбора ассортимента предметов, задача планировки помещений, задача обеспечения ритмичности производственного процесса, задача распределения памяти вычислительной машины и др. [6, 7]. В свою очередь математические модели каждой из них имеют общую структуру и могут быть различным образом конкретизированы. Для решения подобных задач применяются общие подходы: точные методы, простые эвристики и метаэвристики [7]. Ввиду неполиномиальной сложности точных алгоритмов решения этих задач авторами многих работ уделяется значительное внимание приближенным методам. Аналитический обзор, посвященный задачам раскроя-упаковки и методам их решения, приведен в работах [6, 7]. Современное состояние методов и алгоритмов их решения приведено в обзоре, выполненном под руководством Э. А. Мухачевой, которым дополнено третье переиздание книги Л. В. Канторовича и В. А. Залгаллера [8]. Вопросам исследования проблем раскроя-упаковки посвящаются ежегодные международные конференции в рамках научной группы ESICUP (Euro Special Interest Group on Cutting and Packing) [9].

Задачи геометрического покрытия исследуются последние десятилетия. Постановки имеют большое разнообразие, которое диктует практическая направленность [2, 10–14]. Как правило, целью решения этих задач является минимизация числа покрывающих предметов (элементов). Например, в работах [10, 14] рассмотрены случаи покрытия многоугольной области минимальным числом кругов заданного радиуса. Встречаются задачи, цель кото-

рых — максимизация покрытой области [11]. Основное отличие постановок задач раскроя-упаковки и геометрического покрытия заключается в ограничениях: в задачах геометрического покрытия необходимо размещать элементы без "просветов" между ними, а в некоторых случаях [10—12, 14] разрешается пересечение покрывающих элементов между собой и сторонами покрываемой области; в задачах раскроя-упаковки подобное перекрытие не допускается. Несмотря на различия, задачи раскроя и покрытия имеют близкую структуру математических моделей, поэтому для решения часто используют схожие методы и подходы.

В настоящее время для практического решения задач раскроя-упаковки и геометрического покрытия популярны высокоэффективные метаэвристические алгоритмы, в том числе и на основе эволюционных стратегий [12, 15, 16]. В данной статье предлагается метод решения комплексной задачи ГПР на основе эволюционной стратегии. Схема предлагаемого метода решения комплексной задачи предполагает использование ранее разработанных авторами алгоритмов решения подзадачи прямоугольного раскроя [16]. Кроме того, возможно использование других алгоритмов решения задачи прямоугольного раскроя, в том числе точных, например, в случае небольшой (до 100 предметов) размерности подзадачи раскроя [17], или однопроходных эвристических, позволяющих получать рациональные решения за полиномиальное время [18].

Для решения подобных NP-трудных задач актуальной является разработка новых подходов с использованием быстрых эвристических и метаэвристических алгоритмов. В данной статье для решения комплексной задачи ГПР предлагается метод ограниченной декомпозиции, основанный на модификации метода матричной декомпозиции, ранее разработанного для задачи размещения ортогональных объектов на полигонах с препятствиями [19].

Постановка комплексной задачи ГПР

Введем следующие понятия и определения.

Назовем *ортогональным полигоном* односвязную область, ограниченную многоугольником, возможно невыпуклым, ребра которого либо вертикальны, либо горизонтальны.

Многосвязным ортогональным полигоном (МОП) будем называть ортогональный полигон, содержащий односвязные запретные области, являющиеся ортогональными полигонами.

Прямоугольный ресурс в задачах раскроя-упаковки и геометрического покрытия — это листы (контейнеры) прямоугольной формы заданных размеров либо полубесконечная полоса (рулон) заданной ширины.

Под *деловыми отходами* будем понимать прямоугольный ресурс нестандартных размеров. Как правило, на практике часто возникает потребность

в использовании деловых отходов в целях ресурсосбережения. Деловые отходы могут быть получены при решении задач раскроя-упаковки (и/или геометрического покрытия) как неиспользованные фрагменты прямоугольного ресурса.

В статье рассматривается двухкритериальная проблема, встречающаяся, например, в строительной индустрии при покрытии пола строительным материалом (линолеумом, древесноволокнистыми плитами и др.). Впервые ее постановка приведена в работе [2]. В связи с NP-трудностью проблемы, сложностью представления и обработки исходной информации при использовании фигурных объектов авторами сделано допущение, практикуемое, например, при решении задачи фигурного раскроя [7, 8].

В случае неортогональных границ покрываемой геометрической области (рис. 1, а) она аппроксимируется вертикальными и горизонтальными линиями покрытия (рис. 1, б). Каждое препятствие, имеющее непрямоугольную форму, произвольным образом разбивается на прямоугольники, и далее под препятствиями будем понимать прямоугольные области. Таким образом, для решения задачи область покрытия задается в виде МОП (рис. 1, в).

Кроме размеров МОП задаются размеры прямоугольного ресурса. Необходимо найти план покрытия МОП покрывающими элементами и план раскроя прямоугольного ресурса на эти элементы, при этом максимизировать размеры покрывающих элементов и минимизировать расход (площадь или количество) раскраиваемого ресурса. Эта проблема формализуется математической моделью задачи с двумя целевыми функциями.

Для описания области покрытия МОП введем прямоугольную систему координат: оси Ox и Oy совпадают соответственно с нижней и левой боковой сторонами огибающего МОП прямоугольника (рис. 2, а), W, L — ширина и длина огибающего МОП прямоугольника. Тогда положение каждого прямоугольного запретного участка B_v задается координатами (χ_v, η_v) его нижнего левого угла и размерами $\omega_v, \lambda_v, v = \overline{1, \mu}$, где μ — число запретных участков.

Математическая модель комплексной задачи геометрического покрытия и раскроя. Дано: МОП, подлежащий покрытию, заданный совокупностью $P = \langle W, L, (\chi_v, \eta_v), (\omega_v, \lambda_v), v = \overline{1, \mu} \rangle$. Кроме того,

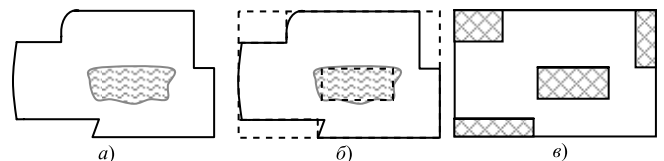


Рис. 1. Пример аппроксимации фигурной области с помощью МОП: а — исходная область; б — аппроксимация области вертикальными и горизонтальными линиями; в — МОП

имеется неограниченное множество прямоугольных листов длины Θ и ширины h (для задач с ресурсом в виде листов), либо ширина h рулонного ресурса, подлежащего раскрою на прямоугольные элементы (рис. 2, б). Также задана информация о деловых отходах в виде множества $K = (k_1, k_2, \dots, k_\tau)$ прямоугольных элементов с размерами $l_j^+ \times w_j^+, j = \overline{1, \tau}$.

Требуется: найти план покрытия МОП P (рис. 3), план раскроя прямоугольного ресурса (рис. 4) на покрывающие прямоугольные элементы и минимизировать значения функций, характеризующих эффективность решения подзадач геометрического покрытия и раскроя:

$$\min F_{cov}(T) = \sum_{i=1}^m (l_i + w_i);$$

$$\min F_{cut}(T) =$$

$$= \begin{cases} N^{PI}, & \text{если материал — прямоугольные листы;} \\ L^{PI} = \max_{i=1..m} (x'_i + l_i), & \text{если материал —} \\ & \text{полубесконечная полоса,} \end{cases}$$

где $T = \{m, w, l, w = (w_1, w_2, \dots, w_m), l = (l_1, l_2, \dots, l_m)\}$ — множество из m прямоугольных элементов с размерами $w_i \times l_i, i = \overline{1, m}$, образующих покрытие МОП и подлежащих раскрою из ресурса и деловых отходов; l_i, w_i — длина и ширина покрывающего прямоугольного элемента $t_i \in T$, входящего в покрытие МОП, $T = Q \cup K^+, Q$ — множество покрывающих МОП прямоугольных элементов, раскроенных из стандартного ресурса; K^+ — множество покрывающих МОП прямоугольных элементов, раскроенных из деловых отходов; N^{PI} — число использованных прямоугольных листов (в случае листового ресурса в задаче раскроя); L^{PI} — длина занятой части полубесконечной полосы (в случае рулонного ресурса в задаче раскроя); x'_i, y'_i — координаты левого нижнего угла прямоугольника с номером i в плане раскроя прямоугольного ресурса.

Для формализации задачи введем дополнительно переменные $z_{ij}^x, z_{ij}^y, \tilde{z}_{iv}^x$ и \tilde{z}_{iv}^y , такие что:

- $z_{ij}^x = 1$ ($z_{ij}^y = 1$), если проекция прямоугольного элемента i на ось Ox (Oy) находится левее (ниже) проекции прямоугольного элемента j на ось Ox (Oy), иначе $z_{ij}^x = 0$ ($z_{ij}^y = 0$);
- $\tilde{z}_{iv}^x = 1$ ($\tilde{z}_{iv}^y = 1$), если проекция прямоугольного элемента i на ось Ox (Oy) находится левее (ниже) проекции запретной области v на ось Ox (Oy), иначе $\tilde{z}_{iv}^x = 0$ ($\tilde{z}_{iv}^y = 0$).

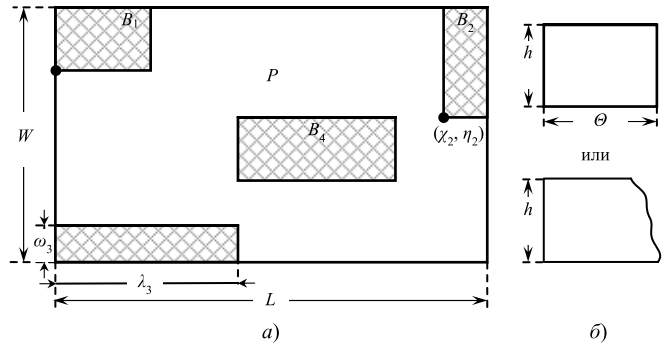


Рис. 2. Иллюстрация постановки комплексной задачи: а — МОП P с запретными областями B_i ; б — размеры ресурса (листы/полубесконечный рулон)

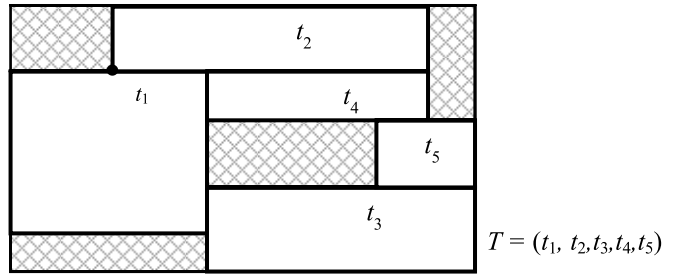


Рис. 3. План покрытия МОП P множеством покрывающих прямоугольников T

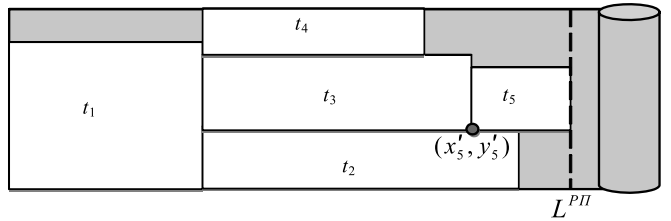


Рис. 4. План раскроя рулона на покрывающие элементы T . Длина занятой части полосы $L^{PI} = \max_{i=1, \dots, m} (x'_i + l_i) = x'_5 + l_5$

Необходимо найти:

1. Множество T прямоугольных элементов, покрывающих МОП P , и соответствующий план покрытия, т. е. для каждого $t_i \in T$ требуется отыскать набор значений $\langle x_i, y_i, l_i, w_i \rangle$, где x_i, y_i — координаты левого нижнего угла элемента в системе координат МОП P , l_i и w_i — соответственно длина и ширина прямоугольного элемента, таких что:

$$l_i \leq h, w_i \leq \Theta, i = \overline{1, m}; \quad (1)$$

$$x_i + l_i \leq L, y_i + w_i \leq W, i = \overline{1, m}; \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \quad (3)$$

$$z_{ij}^x + z_{ji}^x + z_{ij}^y + z_{ji}^y \geq 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, i \neq j; \quad (4)$$

$$y_j \geq y_i + w_i - W(1 - z_{ij}^y), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}; \quad (5)$$

$$x_j \geq x_i + l_i - L(1 - z_{ij}^x), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}; \quad (6)$$

$$\tilde{z}_{iv}^x + \tilde{z}_{vi}^x + \tilde{z}_{iv}^y + \tilde{z}_{vi}^y \geq 1, i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}; \quad (7)$$

$$\eta_v \geq y_i + w_i - W(1 - \tilde{z}_{iv}^y), i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}; \quad (8)$$

$$\chi_v \geq x_i + l_i - L(1 - \tilde{z}_{iv}^x), i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i l_i = S_{\text{МОП}}. \quad (10)$$

Условия (1) накладывают ограничения на размеры покрывающих МОП прямоугольных элементов: они не должны превышать размеры прямоугольного ресурса. Условия (2), (3) задают допустимое положение прямоугольного элемента в области МОП: они не должны выходить за границы МОП. Условия (4)–(6) обеспечивают неперекрывание прямоугольных элементов между собой, (7)–(9) — неперекрывание прямоугольных элементов с запретными областями. Условие (10) описывает необходимость полного геометрического покрытия полезной площади МОП прямоугольными элементами (без "просветов").

2. План раскроя ортогонального ресурса на прямоугольные элементы множества T такой, что выполняются следующие условия:

$$x'_i \geq 0, y'_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \quad (11)$$

$$x'_i + l_i \leq \Theta, y'_i + w_i \leq h, i = \overline{1, m}; \quad (12)$$

$$z'_{ij} + z'_{ji} + z'_{ij} + z'_{ji} \geq 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, i \neq j; \quad (13)$$

$$y'_j \geq y'_i + w_i - W(1 - z'_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}; \quad (14)$$

$$x'_j \geq x'_i + l_i - L(1 - z'_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Условия (11)–(12) обеспечивают допустимое размещение прямоугольных элементов внутри ортогонального ресурса, условия (13)–(15) — неперекрывание прямоугольных элементов между собой.

Целевые функции $\min F_{\text{cov}}(T)$ и $\min F_{\text{cut}}(T)$ позволяют сравнивать качество различных решений одной и той же задачи, однако не позволяют объективно сравнивать эффективность решений различных задач, поскольку их значения зависят от исходных данных, например, от размеров ресурса и МОП.

Поэтому качество полученных решений оценивается также с помощью двух относительных показателей:

- для задачи геометрического покрытия рассчитывается коэффициент покрытия

$$k_{\text{cov}} = \frac{S_{\text{МОП}} P_{\text{resource}}}{P_T S_{\text{resource}}},$$

где $S_{\text{МОП}}$ и S_{resource} — площади МОП и ресурса соответственно; P_T и P_{resource} — суммарные периметры покрывающих элементов и ресурса соответственно [20];

- для задачи ортогонального раскроя определяется коэффициент раскроя

$$k_{\text{cut}} = \frac{\sum_{i=1}^m w_i l_i}{S_{\text{resource}}}.$$

Коэффициент геометрического покрытия равен 1, если стыки покрывающих элементов находятся лишь на границах МОП и не проходят по внутренней площади МОП. В противном случае $k_{\text{cov}} < 1$.

При безотходном решении задачи, т. е. когда отсутствуют потери материала, коэффициент раскроя равен 1. В противном случае $k_{\text{cut}} < 1$.

Коэффициенты раскроя и покрытия являются противоречивыми поскольку максимизация размеров покрывающих элементов влечет за собой снижение коэффициента раскроя (увеличение отходов). И, наоборот, при мелких размерах раскраиваемых элементов увеличивается коэффициент раскроя, но уменьшается коэффициент покрытия.

Методы решения комплексной задачи ГПР

Для решения комплексной задачи геометрического покрытия и раскроя [2, 20, 21] предложены гибридные эволюционные алгоритмы. Они основаны на трехэтапном подходе последовательного решения подзадач:

- 1) декомпозиция МОП на минимальное число прямоугольных областей;
- 2) определение плана покрытия МОП и размеров прямоугольных покрывающих элементов;
- 3) определение плана раскроя ресурса на покрывающие элементы.

В работах [20, 21] приведены примеры решения комплексной задачи ГПР в судостроении. В качестве процедуры решения подзадачи декомпозиции МОП на минимальное число прямоугольных областей был применен известный метод матричной декомпозиции. Он разработан ранее Э. И. Хасановой (Дяминовой) [19] для задачи размещения прямоугольных объектов на ортогональном полигоне с запретными участками.

Однако возникает вопрос об эффективности трехэтапного подхода, поскольку параметры ресурса при декомпозиции МОП на прямоугольные области покрытия не учитываются. Для повышения эффективности решения предлагается объединить этапы декомпозиции МОП на прямоугольные области и определения плана покрытия, т. е. проводить декомпозицию МОП на минимальное число прямоугольных областей, размеры которых не превышают размеров ресурса. Для этого предлагается модифи-

цировать метод матричной декомпозиции, добавив в него дополнительное ограничение на размеры прямоугольных областей.

Таким образом, предлагается новый **метод ограниченной декомпозиции области покрытия** для поиска рационального решения комплексной задачи ГПР, основанный на подходе в два этапа: первый — решение подзадачи декомпозиции МОП на прямоугольные области, размеры которых не превышают размеры ресурса, и второй — раскрой ресурса на покрывающие элементы, размеры которых равны размерам ограниченных прямоугольных областей. Таким образом, прямоугольные области, полученные в ходе декомпозиции МОП, составляют множество покрывающих элементов мощности m . Рассмотрим каждый этап подробнее.

Подзадача декомпозиции исходного МОП на прямоугольные области ограниченного размера. Задан МОП, подлежащий геометрическому покрытию:

$$P = \langle W, L, (\chi_v, \eta_v), (\omega_v, \lambda_v), v = \overline{1, \mu} \rangle.$$

Требуется найти множество $\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m\}$ прямоугольных областей $\Pi_i = \langle (x_i, y_i), (w_i, l_i) \rangle$ минимальной мощности, где x_i, y_i — координаты нижнего левого угла i -й области; w_i и l_i — ее ширина и длина соответственно; m — искомая мощность множества Π , удовлетворяющее следующим условиям:

- допустимость положения прямоугольной области в МОП;
- неперекрывание прямоугольных областей между собой;
- неперекрывание прямоугольных областей с запретными участками;
- полное геометрическое покрытие полезной площади МОП прямоугольными областями;
- $w_i \leq h, l_i \leq \Theta, i = \overline{1, m}$ — дополнительное ограничение, при выполнении которого любой прямоугольный элемент из множества покрывающих элементов может быть целиком вырезан из ресурса.

Процедура матричной декомпозиции МОП на прямоугольные области ограниченных размеров основана на модификации метода матричной декомпозиции [19]. Отличие заключается в дополнительной проверке размеров получаемых прямоугольных областей и, в случае необходимости, — дополнительного разделения их на максимальное возможное по размерам (Шаг 1).

Шаг 1. Представление МОП в матричном виде.

Шаг 1.1. Через горизонтальные грани запретных участков проведем сквозные линии. В результате МОП оказывается разделен на G прямоугольников с длинами L' и ширинами $d_\gamma, \gamma = \overline{1, G}$. Если для какого-то из прямоугольни-

ков выполняется неравенство $d_\gamma > h$, делим его сквозной горизонтальной линией на два прямоугольника с ширинами h и $(d_\gamma - h)$. Горизонтальное разбиение МОП продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие: $d_\gamma \leq h, \gamma = \overline{1, G}$.

Шаг 1.2. Через вертикальные грани запретных областей также проведем сквозные линии. В результате МОП оказывается разделен на U прямоугольников с длинами $q_\varphi, \varphi = \overline{1, U}$, и ширинами W' . Если в качестве ортогонального ресурса выступает полубесконечная полоса, то ограничений на длину областей не будет. В противном случае, по аналогии с горизонтальным разбиением, вертикальное деление МОП продолжается до тех пор, пока не выполнится условие: $q_\varphi \leq \Theta, \varphi = \overline{1, U}$.

В результате МОП оказывается покрытым раскройной сетью, каждая ячейка которой либо не содержит запретных областей (пустая), либо является запретной областью или частью запретной области. При этом размеры ячеек не превышают размеров ресурса.

Шаг 1.3. Сопоставим каждой ячейке (γ, σ) число 0, если она свободна, и 1, если она является запретной областью. Тогда исходный МОП может быть описан булевой матрицей (рис. 5).

Шаг 2. Выбор исходной ячейки и объединение.

Шаг 2.1. В качестве исходной ячейки выбираем левую нижнюю еще не рассмотренную ячейку МОП. Если она является запретной областью, движемся вверх по столбцу, пока не найдем пустую ячейку, ее принимаем за исходную.

Шаг 2.2. Объединение пустых ячеек, начиная с исходной, вертикальным, горизонтальным или диагональным способом. Способы чередуются случайным образом для каждой исходной ячейки. Объединение ячеек продолжается до тех пор, пока не выполнится хотя бы одно из условий:

- достигнута верхняя граница МОП;
- на пути объединения имеется запретная область;
- ширина бокса достигла h ;
- длина бокса достигла Θ (если ресурс поставляется в листах).

Переход на Шаг 2.1.

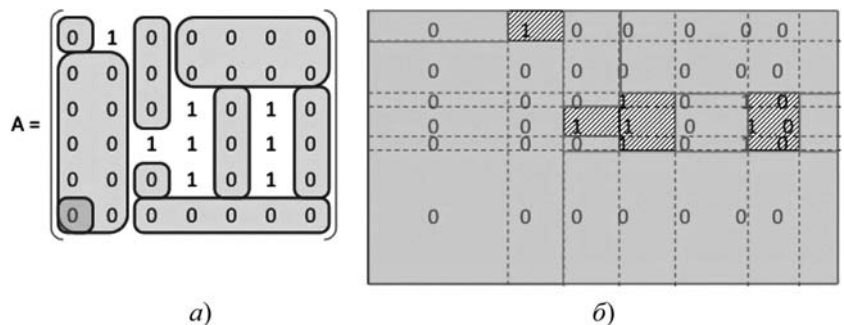


Рис. 5. Иллюстрация процедуры декомпозиции МОП:
 а — матричное представление МОП; б — графическое

Шаг 3. "Уровневое" выделение пустых прямоугольных областей.

Когда достигнута верхняя граница МОП, через правую границу области наибольшей длины проводится условный сквозной рез, выделение следующей прямоугольной области покрытия продолжается справа от реза. К образовавшимся при этом вторичным МОП рекурсивно применяется процедура матричной декомпозиции МОП (возвращаемся к шагу 2). Работа алгоритма продолжается до тех пор, пока не останется пустых ячеек. Если ширина всех выделенных прямоугольных областей равна h , а длина Θ , то подзадачу можно считать решенной: каждая прямоугольная область может быть без остатка покрыта листом прямоугольного ресурса. Если ресурс — полубесконечная полоса и ширина прямоугольной области равна h , то материал для покрытия каждой области получается одним вертикальным разрезом рулонного ресурса.

Благодаря модификации метода матричной декомпозиции МОП на прямоугольные области ограниченных размеров получаем план покрытия исходного МОП покрывающими элементами, размеры которых не превышают размеров ресурса.

Подзадача раскроя ортогонального ресурса. На этапе раскроя ресурса можно применить любой наиболее подходящий для конкретной прикладной ситуации алгоритм. Например, в работе [21] описан алгоритм решения задачи, где на этапе раскроя применяется послойный алгоритм с оценками.

Таким образом, основные шаги **метода ограниченной декомпозиции области покрытия** для решения комплексной задачи ГПР следующие:

1. **Решение подзадачи декомпозиции МОП.** Входные данные: размеры МОП P и ресурса. Примене-

ние процедуры матричной декомпозиции МОП на прямоугольные области ограниченных размеров. Выходные данные: план покрытия МОП, размеры покрывающих элементов, значение коэффициента покрытия.

2. **Решение подзадачи раскроя.** Входные данные: размер ресурса и размеры покрывающих элементов. Применение алгоритма прямоугольного раскроя. Выходные данные: план раскроя, значение коэффициента раскроя.

В случае, если полученные значения коэффициентов покрытия и раскроя не удовлетворяют, можно реализовать многократное повторение основных этапов метода и выбора лучшего варианта. Это целесообразно в связи со случайным процессом шага 2.2 процедуры матричной декомпозиции.

Вычислительный эксперимент

Проведем сравнение эффективности метода ограниченной декомпозиции области покрытия и гибридного эволюционного алгоритма [20] на основе двухэтапного и трехэтапного подходов к решению соответственно.

Эксперимент 1: решение практической комплексной задачи ГПР. Для сравнения эффективности подходов была рассмотрена реальная задача судостроительной индустрии [21]. На палубах B и C судна снабжения некоторого проекта имеется два помещения, для которых известны размеры [21]. Необходимо покрыть пол помещений морской фанерой одного из четырех размерных типов: тип a ($1,22 \times 2,44$ м); тип b ($1,25 \times 2,5$ м); тип c ($0,915 \times 1,83$ м); тип d ($1,22 \times 2,135$ м). Помещения аппроксимированы МОП с описывающими область прямоугольниками с размерами для палубы B $17,35 \times 11,33$ м и для палубы C — $15,5 \times 14$ м, наборами запретных областей с известными размерами и координатами. Далее были применены методы на основе двухэтапного и трехэтапного подходов к решению задачи. Результаты представлены в виде диаграмм на рис. 6, 7.

Для обоих помещений и каждого типа ресурса эксперимент показал, что двухэтапный подход (метод ограниченной декомпозиции области покрытия) позволяет получить решения, лучшие по коэффициенту покрытия (на 8...30 %), т. е. выделяются более крупные покрывающие элементы. Трехэтапный подход позволяет получить решения, лучшие по коэффициенту раскроя (на 0,5...23 %), т. е. более эффективен с точки зрения экономии ресурса. Таким образом, выбор наиболее приемлемого метода решения задачи покрытия в каждом конкретном случае зависит от приоритетов заказчика.

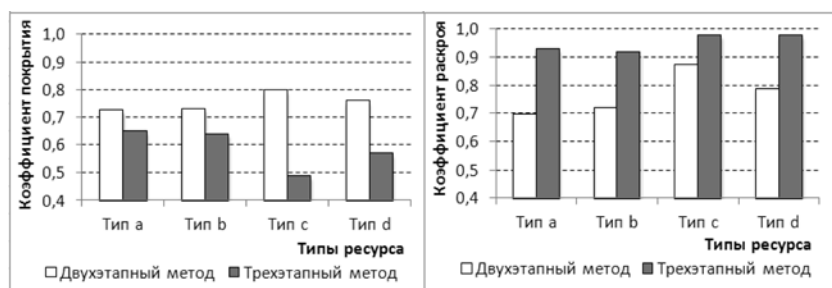


Рис. 6. Результаты решения задачи покрытия области МОП палубы B

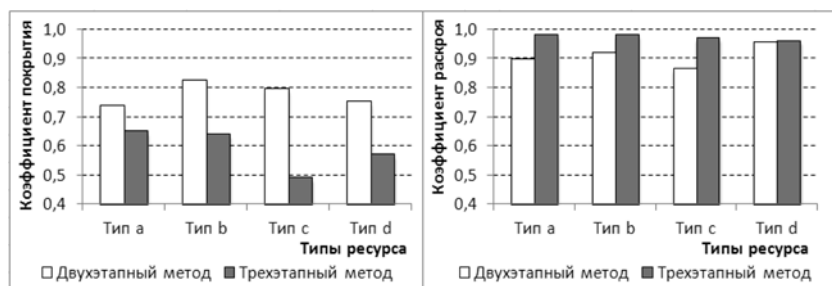


Рис. 7. Результаты решения задачи покрытия области МОП палубы C

Эксперимент 2: решение безотходной комплексной задачи ГПР. В данном эксперименте сравнивалась эффективность решения безотходных задач ГПР. Под безотходной задачей ГПР будем понимать задачу, коэффициенты раскроя и покрытия оптимального решения которой равны 1. Подобные задачи часто используются для тестирования алгоритмов решения NP-трудных задач [22]. Преимуществом такого рода задач является то, что для них априори известны оптимальные покрытие и раскрой.

Было сгенерировано 10 примеров безотходных задач, оптимальный план покрытия МОП которых состоит из 10 покрывающих элементов. Размеры этих элементов одинаковы и совпадают с размерами ресурса 1220×2440 . Примеры различаются формой и размерами МОП. Таким образом, оптимальная декомпозиция МОП на прямоугольные области в данных примерах одновременно является и оптимальным планом покрытия.

Каждая из сгенерированных задач была решена с помощью методов на основе двух- и трехэтапного подходов, полученные коэффициенты покрытия и раскроя в каждом случае фиксировались (рис. 8 а, б).

Как видно из диаграммы на рис. 8, а, оба подхода позволяют получать высокие значения коэффициента раскроя: в 8 из 10 примеров было получено оптимальное решение. Средний коэффициент раскроя для двухэтапного метода составил 96,8 %, для трехэтапного — 98,4 %. Причиной этому может быть, во-первых, малая размерность примеров, во-вторых, однотипность формы ресурса.

При решении же задачи геометрического покрытия полученные результаты не оптимальны ни в одном из тестовых примеров. Это означает, что выделяемые в процессе решения прямоугольные области покрытия имеют размеры меньше эталонных. При этом двухэтапный алгоритм в 9 из 10 слу-

чаев показал себя существенно лучше трехэтапного (на 4...29 %). Средний коэффициент покрытия для двухэтапного метода составил 81,6 %, для трехэтапного — 68,6 %.

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент показал хорошую эффективность исследуемых подходов, а предпочтительный выбор метода решения в каждом конкретном практическом случае зависит от приоритетов заказчика.

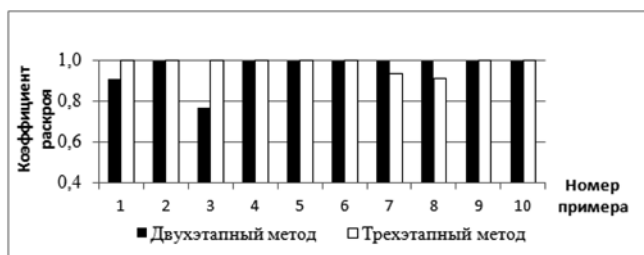
Заключение

В целом, можно заключить, что предложенный метод ограниченной декомпозиции области покрытия на основе двухэтапного подхода целесообразно применять, когда важно получить высокий показатель коэффициента покрытия, в то время как метод на базе трехэтапного подхода дает результаты, лучшие по коэффициенту раскроя, т. е. более эффективен с точки зрения экономии ресурса. При этом для предложенного в статье метода ограниченной декомпозиции области покрытия возможны пути повышения эффективности за счет увеличения качества и числа вариантов объединения пустых ячеек в прямоугольные области покрытия. Для этого целесообразно использовать оценки частичных решений, например, на основе и аналогии подетальных норм расхода материала [8], которые были разработаны Л. В. Канторовичем и В. А. Залгаллером для задачи раскроя.

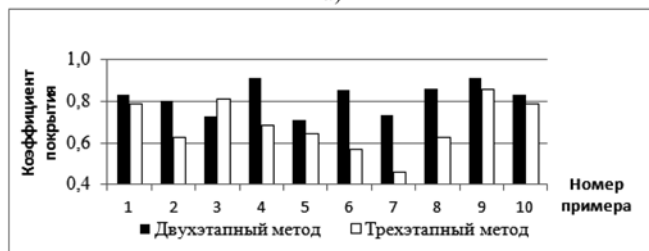
Таким образом, предложенный в статье метод ограниченной декомпозиции является эффективным инструментом решения NP-трудной комплексной задачи ГПР и имеет потенциал для дальнейшего усовершенствования.

Список литературы

1. Valiakhmetova Yu. I., Filippova A. S., Karamova L. M. Ufa scientific group by E. A. Mukhacheva: applied operational research problems // Вестник УГАТУ. Научный журнал. Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2013. Т. 17, № 6 (59). С. 83–87.
2. Телицкий С. В., Филиппова А. С. Комплексный подход к решению задачи покрытия области заголовками неопределенных размеров // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2012. Т. 2, № 145. С. 61–67.
3. Телицкий С. В., Валиахметова Ю. И., Хасанова Э. И. Гибридный алгоритм на основе последовательного уточнения оценок для задач максимального ортогонального покрытия // Вестник Башкирского университета. 2012. Т. 17, № 1 (I). С. 421–425.
4. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San-Francisco: Freeman, 1979. [Русский перевод: Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудноразрешимые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.]
5. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л.: Лениздат, 1951. 198 с.
6. Мухачева Э. А., Мухачева А. С., Валеева А. Ф., Картак В. М. Методы локального поиска в задачах ортогонального раскроя и упаковки: аналитический обзор и перспективы развития // Информационные технологии. 2004. № 5. Приложение. С. 2–17.
7. Filippova A. S., Valiakhmetova J. I. Optimal use of resources: cutting-packing problems // Advances in Economics and Optimization: Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich. NY: Nova Science Publishers, 2014. P. 35–48.



а)



б)

Рис 8. Эксперимент 2: решение безотходных примеров:
а — коэффициент раскроя; б — коэффициент покрытия

8. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. СПб.: Невский Диалект, 2012. 304 с.

9. URL: <http://paginas.fe.up.pt/~esicup/tiki-index.php> (дата обращения: 30.09.15).

10. Филиппова А. С., Кузнецов В. Ю. Узадачи о минимальном покрытии ортогональных многоугольников с запретными участками // Информационные технологии. 2008. №9. С. 60–65.

11. Zak E. A counterpart of one-dimensional stock cutting: skiving stock problem // Proceedings of the sixteenth triennial conference of the International Federation of Operational Research Societies. 2002. P. 121.

12. Забелин С. Л., Жеголко К. В., Фроловский В. Д. Разработка и исследование генетического алгоритма для автоматизации проектных процедур оптимизации геометрического покрытия // Вестник Тамбовского государственного технического университета. Тамбов: изд-во ТГТУ, 2015. Т. 21, № 2. С. 257–265.

13. Кривуля А. В., Злотник М. В., Романова Т. Е. Средства математического моделирования в задачах прямоугольного покрытия произвольных многоугольных областей // Радиоэлектроника и информатика, 2007. №4. С. 34–40.

14. Стоян Ю. Г., Пацук В. Н. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // Доп. НАН України. 2006. № 3. С. 74–77.

15. Bortfeldt A. A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces // European Journal of Operational Research. 2006. Vol. 172 (3). P. 814–837.

16. Мухачева А. С., Чиглинец А. В., Смагин М. А., Мухачева Э. А. Задачи двумерной упаковки: развитие генетических

алгоритмов на базе смешанных процедур локального поиска оптимального решения // Информационные технологии. 2001. № 9. Приложение. 24 с.

17. Kenmochi M., Imamichi T, Nonobe K., Yagiura M., Nagamochi H. Extract algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 198 (1). P. 73–83.

18. Lesh N., Mitzenmacher M. Bubble Search: A simple heuristic for improving priority-based greedy algorithms // Information Processing Letters. 2006. Vol. 97 (4). P. 161–169.

19. Мухачева Э. А., Валихметова Ю. И., Телицкий С. В., Хасанова Э. И. Проектирование размещения ортогональных объектов на полигонах с препятствиями // Информационные технологии. 2010. № 10. С. 16–22.

20. Филиппова А. С., Телицкий С. В., Поречный С. С. Оптимизация комплексного процесса геометрического покрытия и раскроя // Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2013. 175 p.

21. Телицкий С. В., Валихметова Ю. И., Хасанова Э. И. Гибридный алгоритм на основе последовательного уточнения оценок для задач максимального ортогонального покрытия // Вестник Башкирского университета. 2012. Т. 17, № 1 (I). С. 421–425.

22. Мухачева Э. А., Филиппова А. С., Чиглинец А. В. Задача прямоугольной упаковки в полубесконечную полосу: численный эксперимент с безотходными задачами E. Норрег на базе алгоритмов блочной структуры // Информационные технологии. 2005. № 7. С. 23–32.

A. S. Filippova, Professor. e-mail: annamuh@mail.ru,
 Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla,
 E. I. Dyaminiva, Assistant Professor, e-mail: xasel@mail.ru,
 Yu. I. Valiahmetova, Assistant Professor, e-mail: julिकास@inbox.ru,
 Ufa State Aviation Technical University

The Limited Decomposition Method for Solving a Complex Problem of Geometric Coverage and Cutting

There is considered some NP-hard complex problem of geometric coverage and cutting. The solutions for it are as follows: a plan of covering the given polygonal domain with rectangular items of maximal size; a plan of cutting maximal number of sheets into covering items. Cutting and covering coefficients are the two criteria to evaluate its efficiency. The method of limited decomposition of the coverage area is offered, it uses matrix representation of the initial data and is based on the two-stage process, namely: solving a subproblem of decomposing of the polygonal domain into rectangular ones, the sizes of which do not exceed the sheet size; solving a corresponding subproblem of rectangular sheet cutting. The computing experiment aimed at researching and comparing of the given method efficiency and that of the hybrid evolutionary algorithm, developed earlier, has been carried out. Test problem solving has shown that both methods give high cutting coefficient but the suggested method of limited decomposing brings better cutting coefficient in 90 % of cases.

Keywords: geometric coverage, cutting, multivariable orthogonal polygon, matrix decomposition method, limited decomposition method

References

1. Valiahmetova Yu. I., Filippova A. S., Karamova L. M. Ufa scientific group by E. A. Mukhacheva: applied operational research problems, *Vestnik UGATU. Nauchnyy zhurnal*, 2013, vol. 17, no. 6 (59), pp. 83–87.

2. Telitskij S. V., Filippova A. S. Kompleksnyj podhod k resheniju zadachi pokrytija oblasti zagototsvkami neopredelennyh razmerov (Comprehensive approach to solving the problem of covering an area with items of indeterminate sizes), *Nauchno-tehnicheskije vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikacii. Upravlenie*, 2012, vol. 2, no. 145, pp. 61–67.

3. Telitskij S. V., Valiahmetov'a Yu. I., Hasanova E. I. Gibrindnyj algoritm na osnove posledovatel'nogo utochnenija ocenok dlja zadach maksimal'nogo ortogonal'nogo pokrytija (The hybrid algorithm on the basis of sequential value correction for solving problems of

maximal orthogonal covering), *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 2012, vol. 17, no. 1 (I), pp. 421–425.

4. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness / San-Francisco: Freeman, 1979. [Russian translation: Gjeri, M. *Vychislitel'nye mashiny i trudnorazreshimye zadachi*. Moscow: Mir, 1982. 416 p.].

5. Kantorovich L. V., Zalgaller V. A. *Raschet racional'nogo raskroja promyshlennyh materialov* (Industrial materials rational cutting calculation). L.: Lenizdat, 1951. 198 p.

6. Muhacheva E. A., Muhacheva A. S., Valeeva A. F., Kartak V. M. Metody lokal'nogo poiska v zadachah ortogonal'nogo raskroja i upakovki: analiticheskij obzor i perspektivy razvitiya (The local search methods in orthogonal cutting-packing problems: analytical survey and development prospects), *Informacionnye tehnologii*, 2004, no. 5, Prilozhenie, pp. 2–17.

7. **Filippova A. S., Valiakmetova J. I.** *Optimal use of resources: cutting-packing problems*. Advances in Economics and Optimization: Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich. — NY: Nova Science Publishers, 2014, pp. 35–48.
8. **Kantorovich L. V., Zalgaller V. A.** *Racional'nyj raskroj promyshlennykh materialov* (Industrial materials rational cutting). SPb.: Nevskij Dialekt, 2012. 304 p.
9. **URL:** <http://paginas.fe.up.pt/~esicup/tiki-index.php> (access date: 30.09.15).
10. **Filippova A. S., Kuznetsov V. Yu.** Zadachi o minimal'nom pokrytii ortogonal'nykh mnogougol'nikov s zapretnymi uchastkami (Problems concerning minimal covering of orthogonal polygons containing prohibited zones), *Informacionnye tehnologii*, 2008, no. 9, pp. 60–65.
11. **Zak E.** A counterpart of one-dimensional stock cutting: skiving stock problem, *Proceedings of the sixteenth triennial conference of the International Federation of Operational Research Societies*, 2002, p. 121.
12. **Zavelin S. L., Zhegolko K. V., Frolovskij V. D.** Razrabotka i issledovanie geneticheskogo algoritma dlja avtomatizacii proektnykh procedur optimizacii geometricheskogo pokrytija (Development and research of a genetic algorithm for automation of geometrical covering optimization procedures), *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 257–265.
13. **Krivulja A. V., Zlotnik M. V., Romanova T. E.** Sredstva matematicheskogo modelirovaniya v zadachah prjamougol'nogo pokrytija proizvol'nykh mnogougol'nykh oblastei (Mathematical modelling means in problems of rectangular covering of random polygon areas), *Radioelektronika i informatika*, 2007, no. 4, pp. 34–40.
14. **Stojan Yu. G., Patsuk V. N.** Pokrytie mnogougol'noi oblasti minimal'nym kolichestvom odinakovykh krugov zadannogo radiusa (Polygon area covering with a minimal number of similar circles of given radius), *Dop. NAN Ukraini*, 2006, no. 3, pp. 74–77.
15. **Bortfeldt A.** A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces. *European Journal of Operational Research*, 2006, vol. 172 (3), pp. 814–837.
16. **Muhacheva A. S., Chiglintsev A. V., Smagin M. A., Muhacheva E. A.** Zadachi dvumernoj upakovki: razvitie geneticheskikh algoritmov na baze smeshannykh procedur lokal'nogo poiska optimal'nogo reshenija (Two-dimensional packing problems: genetic algorithms development based on mixed procedures of optimal solving local search), *Informacionnye tehnologii*, 2001, no. 9, Prilozhenie, 28 p.
17. **Kenmochi M., Imamichi T., Nonobe K., Yagiura M., Nagamochi H.** Extract algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations, *European Journal of Operational Research*, 2009, vol. 198 (1), pp. 73–83.
18. **Lesh N., Mitzenmacher M.** Bubble Search: A simple heuristic for improving priority-based greedy algorithms, *Information Processing Letters*, 2006, vol. 97 (4), pp. 161–169.
19. **Muhacheva E. A., Valiahmetova Yu. I., Telitskij S. V., Hasanova E. I.** Proektirovanie razmeshhenija ortogonal'nykh ob'ektov na poligonah s prepjatsvijami (Designing of orthogonal objects location on polygons with some obstacles), *Informacionnye tehnologii*, 2010, no. 10, pp. 16–22.
20. **Filippova A. S., Telitskij S. V., Porechnyj S. S.** *Optimizacija kompleksnogo processa geometricheskogo pokrytija i raskroja* (Optimization of the geometrical cutting-packing complex process) / Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2013. 175 p.
21. **Telitskij S. V., Valiahmetova Yu. I., Hasanova E. I.** Gibridnyj algoritm na osnove posledovatel'nogo utochnenija ocenok dlja zadach maksimal'nogo ortogonal'nogo pokrytija, *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 2012, vol. 17, no. 1 (I), pp. 421–425.
22. **Muhacheva E. A., Filippova A. S., Chiglintsev A. V.** Zadacha prjamougol'noj upakovki v polubeskonechnuju polosku: chislennyj jeksperiment s bezothodnymi zadachami E. Hopper na baze algoritmov blochnoj struktury (The problem of rectangular packing into a semi-endless strip: numerical experiment with the wasteless problems), *Informacionnye tehnologii*, 2005, no. 7, pp. 23–32.

УДК 519.857

В. И. Струченков, д-р техн. наук, проф., e-mail: str1942@mail.ru

Московский государственный университет

информационных технологий, радиотехники и электроники (МИРЭА)

Динамическое программирование с использованием множеств Парето в задачах планирования реализации возобновляемых ресурсов

Настоящая статья является продолжением статьи, опубликованной в № 2 за 2016¹. В ней рассматривается задача составления оптимального поэтапного плана использования возобновляемого однородного ресурса в течение заданного времени. В данной статье предложен эффективный алгоритм динамического программирования с использованием множеств Парето.

Ключевые слова: ресурс, целевая функция, множество состояний, динамическое программирование, множества Парето

Введение

В статье [1] рассмотрены две математические модели задачи планирования реализации возобновляемого ресурса. В рамках этих моделей применительно к использованию метода динамиче-

¹ Струченков В. И. Динамическое программирование в задачах планирования реализации частично возобновляемых ресурсов // Информационные технологии. 2016. № 2.

ского программирования получены рекуррентные соотношения, позволяющие строить оптимальный план без анализа пошаговых вариантов. В вычислительном плане это во много раз эффективнее, чем классический алгоритм динамического программирования, так как практически поиск решения сводится к вычислению трех величин на каждом шаге процесса по простым формулам. Однако эти модели не претендуют на универсальность, так