References

1. **Grebenyuk E. A.** Metody analiza nestacionarnyh vremennyh ryadov s neyavnymi izmeneniyami svojstv, *Avtomatika i telemekhanika*, 2005, no. 12, pp. 3—29.
2. **Orlov Yu. N., Shagov D. O.** *Indikativnye statistiki dlya nestacionarnyh vremennyh ryadov*, Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, 2011, no. 53, 20 p.
3. **Fogler H. R.** A pattern recognition model for forecasting, *Management science*, 1974, no. 8, pp. 1178—1189.
4. **Alfares U. K., Nazeeruddin M.** Electric load forecasting: literature survey and classification of methods, *International Journal of Systems Science*, 2002, vol. 33, pp. 23—34.
5. **NCEP/DOE** AMOP II Reanalysis [Elektronnyj resurs], URL: http:// www.cdc.noaa.gov/cdc/data.ncep.reanalysis2.html.
6. **Matveev M. G., Mihajlov V. V., Semenov M. E., Sirota E. A.** Model' analiza dinamiki vektornogo meteorologicheskogo processa *Vestnik VGU, seriya "Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii"*, 2013, no. 1, pp. 89—94.
7. **Matveev M. G., Sirota E. A.** Pazpabotka i issledovanie statistidheskih modclej nestacionapnogo mnogomepnogo vpemennogo pyada atmosfepnyh tempepatup v usloviyah neodnopodnosti, *Informacionnye tekhnologii*, 2014, no. 12, pp. 20—24.
8. **Lukashin Yu. P.** Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennyh ryadov, Moscow, Finansy i statistika, 2003, 415 p.
9. **Tishchenko A. K., Pliss I. P.** Segmentaciya mnogomernyh nestacionarnyh vrcmennyh ryadov s pomoshch'yu metoda nechetkoj klasterizacii, *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tekhnologij*, 2012, vol. 4, no. 4 (58). P. 22—25.
10. **Buhovec A. G.** *Posledovatel'noe primenenie algoritmov mnogornernoj klassifikacii, Mnogomernyj analiz sociologicheskih dannyh (metodicheskie ukazaniya, algoritmy i opisaniya programm)*, 1981, Moskow, ISI AN SSSR, pp. 24—73.

УДК 519.857

В. И. Струченков, д-р техн. наук, проф., e-mail: str1942@mail.ru,
Московский государственный университет информационных технологий,
радиотехники и электроники (МИРЭА)

Динамическое программирование в задачах планирования реализации частично возобновляемых ресурсов

Рассматривается задача составления оптимального поэтапного плана использования частично возобновляемого однородного ресурса в течение заданного времени. Анализируются различные модели целевой функции как разности дохода от использования ресурса или его части и сопутствующих затрат. Для простых моделей на основе анализа решения задачи с помощью метода динамического программирования получены расчетные формулы, что позволяет избежать перебора вариантов пошаговых решений.

Ключевые слова: *ресурс, целевая функция, множество состояний, динамическое программирование, оптимальный путь*

Введение

Для классической задачи оптимального распределения заданного количества некоторого однородного ресурса [1] известны метод динамического программирования [2] и его новые реализации, усовершенствованные за счет использования множеств Парето [3] и комбинации динамического программирования с методом ветвей и границ [4]. При этом заданное начальное количество ресурса на каждом этапе могло только уменьшаться.

Однако динамическое программирование можно применить и в задачах распределения частично возобновляемых ресурсов. Например, промысловая рыба, морские животные и вообще "население" лесов, морей, озер и рек являются частично возобновляемыми природными ресурсами. Возникает задача оптимального использования таких ресурсов, т. е. планирования их добычи на ряд лет вперед, с тем чтобы обеспечить максимальную прибыль за все время планирования и сохранить минимально необходимый объем ресурса. Если в начале планируемого периода объем ресурса несущественно превышает заданный минимум, то решение задачи может показаться тривиальным: ежегодно брать у природы только прирост ресурса и не более того. Однако это решение не очевидно, если учесть, что при сохранении неприкосновенности ресурса через несколько лет можно взять больше, чем при ежегодном изъятии прироста.

Кроме возобновляемых природных ресурсов возможны и другие процессы, в которых ресурс не только расходуется, но и частично возобновляется.

Цель настоящей статьи состоит в анализе некоторых моделей подобной задачи и алгоритмов ее решения по методу динамического программирования.

Постановка задачи

Задача состоит в следующем: в начальный момент времени имеется заданное количество частично возобновляемого ресурса b_1.

Заданный период планирования T (например, $T = 10$ лет) разбивается на этапы, например годы или месяцы. Для определенности примем годы и будем считать, что планирование начинается с года номер один. Тогда период планирования, номер последнего года и число лет — это одно и то же число T.

При реализации x единиц ресурса в течение года доход равен $d(x)$, а сопутствующие затраты в течение года есть функция $c(x, b)$ от количества реализуемого ресурса x и количества ресурса на начало года b. Ресурс частично возобновляемый, и при наличии на начало произвольного года t ($t = 1, 2, ..., T$) b_t единиц ресурса и реализации в течение этого года x_t его единиц на начало следующего года будет $b_{t+1} = p(b_t - x_t)$ единиц ресурса. Коэффициент p считается известным. В начале последнего года T при рассмотрении вариантов реализации ресурса в этот год считается, что оставшееся на $(T + 1)$-й год количество ресурса уже не имеет значения. Поэтому в начале последнего года T задача принятия решения существенно упрощается.

Требуется построить такой план реализации ресурса, чтобы в течение T лет суммарный количественный показатель качества плана (целевая функция) принял максимальное значение. При этом могут использоваться различные целевые функции, например, суммарная прибыль, экономическая эффективность и др.

Если целевая функция — это суммарная прибыль, то задача сводится к следующему формальному представлению.

Найти вектор $\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_T)$, при котором достигает максимума

$$\sum_{t=1}^{T} (d(x_t) - c(x_t, b_t)) \text{ и } 0 \leqslant x_t \leqslant b_t;\ b_{t+1} = p(b_t - x_t).$$

Для решения конкретной задачи применительно к построению оптимального плана вылова форели в [5] предлагается классическая схема динамического программирования. Ключевое для метода динамического программирования понятие "состояние системы" формализуется как количество имеющегося ресурса. Соответственно "траектория" (или "путь") — это последовательность состоянии, т. е. значений имеющегося ресурса в начале каждого года. В начале года t множество состояний — это множество возможных значений ресурса b_t. Процесс рассматривается от "конца к началу", т. е. начиная с множества состояний b_T в начале последнего года. Заметим, что число состояний b_T в начале последнего года T, т. е. $b_T = b_1 p^{T-1} + 1$, может быть велико при реальных b_1, p и T, поэтому усовершенствования классической схемы динамического программирования актуальны с точки зрения объема вычислений.

Далее, ***для каждого состояния*** b_T, т. е. для всех возможных значений b_T (от 0 до $b_1 p^{T-1}$), определяется "оптимальный путь до конца", т. е. оптимальное количество ресурса, реализуемого в последний год (x_T^*), и вычисляется соответствующее ему значение целевой функции $f_T(b_T)$:

$$f_T(b_T) = \max_{x_T} \{d(x_T) - c(x_T, b_T)\},$$

где $0 \leqslant x_T \leqslant b_T$.

Далее рассматриваются два последних года и ***для каждого состояния*** b_{T-1} перебором всех возможных переходов в состояния b_T в начале последнего года определяется x_{T-1}^* и соответствующее ему значение целевой функции $f_{T-1}(b_{T-1})$:

$$f_{T-1}(b_{T-1}) = \\ = \max_{x_{T-1}} \{d(x_{T-1}) - c(x_{T-1}, b_{T-1}) + f_T(b_T)\},$$

где $0 \leqslant x_{T-1} \leqslant b_{T-1}$.

И так до тех пор, пока не будет найден x_i^* при заданном b_1. Значения x_t^*, при которых достигается максимум, запоминаются. Другими словами, рекомендуется двигаться по сетке состояний в обратном направлении в предположении, что в начале очередного года возможно любое количество ресурса от нуля до максимального, получаемого при полном отсутствии реализации ресурса.

Далее, зная x_1^*, вычисляем соответствующее ему $b_2^* = p(b_1 - x_1^*)$. Ему соответствует x_2^* и т. д. до восстановления оптимальной траектории, т. е. построения плана реализации ресурса. Заметим, что в данной задаче промежуточные значения $b_{t+1} = p(b_t - x_t)$ при целых значениях исходного количества ресурса b_1 и последующих назначаемых x_t не обязаны быть целыми при не целом p.

По поводу выбора порядка рассмотрения этапов в [5] утверждается: "В большинстве приложений динамическое программирование получает оптимальное решение путем движения в обратном направлении — от конца задачи к началу". Не располагая данными обо всех приложениях динамического программирования, мы не будем опровергать это утверждение, однако отметим, что именно в данной задаче при ее численном решении удобно и более эффективно двигаться от начала к концу, а аналитические выкладки, наоборот, удобнее выполнять при рассмотрении задачи в обратном направлении, т. е. от последнего этапа к первому.

Конкретный вид функций $d(x)$ — доход и $c(x, b)$ — затраты в [5] не приводится. Приводятся только $b_1 = 10\,000$, $p = 1{,}2$ и $T = 10$.

Далее будем рассматривать задачу в общем виде.

Для начала отметим, что для простых моделей можно, используя принцип оптимальности Р. Беллмана [1, 2], получать последовательно, начиная с $t = T$ аналитические выражения оптимального количества реализуемого ресурса x_t^* как функции b_t, не прибегая к численным методам и не разбивая сетку варьирования вообще. Рассмотрим две такие модели, различающиеся функциями дохода $d(x)$ и затрат $c(x, b)$.

Первая модель: $d(x) = ax$, где a — доход от реализации единицы ресурса. Вид функции дохода вполне естественен. Для затрат $c(x, b)$ можно предположить, что они возрастают с ростом x и убывают при заданном x с ростом b — количества имеющегося ресурса. Действительно, например, применительно к разведению форели выловить 100 форелей легче, если их много, скажем 10 000, чем, если их всего 100.

Для первой модели примем $c(x, b) = (k/b)x$, где k — заданное число. Прибыль при реализации x единиц ресурса из имеющихся b единиц составит

$ax - (k/b)x$. Здесь k/b — затраты при реализации единицы ресурса из имеющихся b единиц. Соответственно k — затраты при полной реализации ресурса. Выражение $ax - (k/b)x$ только условно можно назвать прибылью при наличии затрат, не зависящих от количества реализуемого ресурса. Теоретически наличие в целевой функции постоянного слагаемого несущественно, так как оно не влияет на точку экстремума, т. е. на искомое решение. Мы не будем учитывать наличие постоянной составляющей затрат на реализацию ресурса. Однако формальный оптимум может соответствовать решению, при котором в каком-нибудь году $ax - (k/b)x$ меньше постоянной составляющей годовых затрат на реализацию ресурса, поэтому годовая прибыль отрицательна, хотя суммарно за все годы прибыль максимальна. Если отрицательная годовая прибыль недопустима, то на каждом этапе появляется ограничение на минимальное количество реализации ресурса. Это ограничение несколько усложняет алгоритм поиска. Для простоты изложения вначале допустим возможность реализации любого количества имеющегося ресурса, т. е. будем рассматривать только переменную часть целевой функции. В дальнейшем внесем необходимые уточнения.

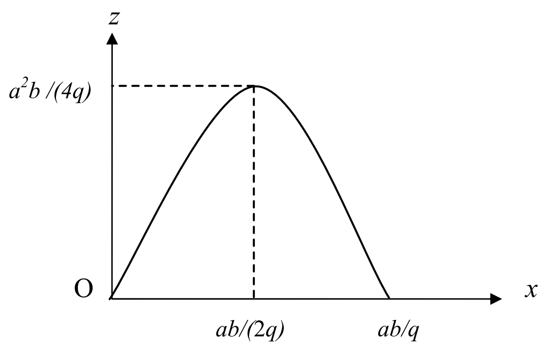
Рассмотрим последний год T и решим вопрос, сколько нужно реализовать ресурса из имеющихся b_T единиц, чтобы получить максимальную прибыль. Ответ очевиден: если $a > k/b_T$, нужно реализовать ресурс полностью ($x_T^* = b_T$), иначе — не использовать его вообще ($x_T^* = 0$). Мы нашли x_T^* — количество реализуемого ресурса в год T как функцию b_T ($x_T^* = 0$ или $x_T^* = b_T$).

Переходим к предпоследнему шагу $T - 1$. Суммарная прибыль за два последних года линейно зависит от x_{T-1}, так как $b_T = p(b_{T-1} - x_{T-1})$. Линейная функция достигает экстремальных значений на концах рассматриваемого интервала $0 \leqslant x_{T-1} \leqslant b_{T-1}$. Нужно взять $x_{T-1} = 0$, так как в этом случае $b_T > b_{T-1}$ и суммарная прибыль за два года больше, если вообще имеет смысл реализация ресурса. Рассуждая аналогично применительно ко всем годам, для линейной модели приходим к выводу: оптимальный план состоит в том, чтобы вообще не расходовать ресурс до последнего года и только в последний год реализовать его полностью, если $a > k/(b_1 p^{T-1})$, или не заниматься реализацией ресурса вообще в противном случае, который не реален.

Если потребность в реализации ресурса не позволяет накапливать его до последнего года, то следует ограничиться минимально необходимой его реализацией.

Может показаться, что этот же вывод о сохранении ресурса до последнего года справедлив не только для линейной, но и для любой монотонно возрастающей целевой функции. Однако это не так, как будет ясно из дальнейшего изложения.

Вторая модель. В первой модели затраты на полную реализацию ресурса (k) не зависят от его количества. Если оставить ту же функцию дохода $d(x)$ и рассмотреть новую функцию затрат вида $c(x, b) = (q/b)x^2$, то для переменной части прибыли z получается функция $z(x, b) = ax - (q/b)x^2$ (см. рисунок), где a и $q > 0$ заданы. В этом случае a — это по-прежнему доход при реализации единицы ресурса, а q — затраты на реализацию единицы ресурса в случае его полной реализации. Другими словами, a/q — отношение дохода к затратам при полной реализации ресурса. Очевидно неравенство $a > q$. Если в $c(x, b)$ есть линейный член, то его можно объединить с $d(x)$.



Зависимость прибыли $z(x)$ от количества реализуемого ресурса x

График зависимости $z(x)$ показывает, что при $a/(2q) < 1$ точка максимума $x_{\max} = ab/(2q) < b$ и нет смысла рассматривать все $x > x_{\max}$, так как при $x = x_{\max}$ больше прибыли и остается больше ресурса, чем при $x > x_{\max}$. Если же $a/(2q) \geqslant 1$, то нужно принять $x_{\max} = b$, так как $0 \leqslant x \leqslant b$.

Рассмотрим последний год T и решим вопрос, сколько (x_T^*) нужно реализовать ресурса из имеющихся b_T единиц, чтобы получить максимальную прибыль? Максимум прибыли $ax_T - (q/b_T)x_T^2$ достигается в точке $x_T^* = ab_T/(2q)$.

Поскольку должно выполняться условие $0 \leqslant x \leqslant b$, то при $a/(2q) > 1$ следует принять $x_T^* = b_T$. Таким образом, $x_T^* = \gamma_T b_T$, где $\gamma_T = \min\,(1, a/(2q))$.

Это означает, что если при полной реализации ресурса доход вдвое и более превышает затраты, то нужно реализовать весь ресурс, иначе — его $a/(2q)$ часть.

Нецелесообразность полной реализации ресурса в последнем году, т. е. неравенство $a/(2q) < 1$, представляется нереальной. Однако мы будем рассматривать общий случай.

Получили результат: ***за последний год оптимальный размер реализации ресурса линейно зависит от его количества в начале года.*** Коэффициент пропорциональности $\gamma_T = a/(2q)$ при $a/(2q) < 1$ и $\gamma_T = 1$ в противном случае. Прибыль z_t за любой ***один*** год t при $x_t^* = \gamma_t b_t$ равна

$$z_t^* = a\gamma_t b_t - q/b_t(\gamma_t b_t)^2 = \gamma_t(a - \gamma_t q)b_t = \lambda_t b_t, \quad (1)$$

где $\lambda_t = \gamma_t(a - \gamma_t q)$.

Другими словами, ***годовая*** прибыль линейно зависит от имеющегося ресурса b_t при линейной зависимости количества реализации от b_t. На этом основаны все дальнейшие построения.

Для последнего года все определено: при любом b_T надо реализовать $\gamma_T b_T$ единиц ресурса и получить прибыль $\lambda_T b_T$.

За год T прибыль $z_T = a^2 b_T/(4q)$ при $\gamma_T = a/(2q)$ и $z_T = (a - q)b_T$ при $\gamma_T = 1$.

Будем обозначать годовую прибыль за год с номером r через z_r, а суммарную прибыль за все оставшиеся годы, начиная с r-го, через Z_r.

Переходим к предпоследнему году $T - 1$. Найдем x^*_{T-1}, для которого максимальна суммарная прибыль за два последних года. В терминах динамического программирования это означает: из состояния b_{T-1} найдем такой переход в новое состояние b_T, чтобы суммарная прибыль Z_{T-1} за последние два года (этапа) была максимальна. Используя формулу (1) применительно к году T, получаем для прибыли за два последних года формулу

$$Z_{T-1} = ax_{T-1} - (q/b_{T-1})x^2_{T-1} + \\ + \gamma_T(a - \gamma_T q)(b_{T-1} - x_{T-1})p,$$

так как $b_T = (b_{T-1} - x_{T-1})p$. Z_{T-1}, как функция x_{T-1}, максимальна при $x^*_{T-1} = (a(1 - p\gamma_T) + qp\gamma^2_T) \times \times b_{T-1}/(2q)$. В силу $x_{T-1} \leqslant b_{T-1}$ имеем

$$x^*_{T-1} = \gamma_{T-1}b_{T-1},$$

где $\gamma_{T-1} = \min(1, (a(1 - p\gamma_T) + qp\gamma^2_T)/(2q))$.

При $\gamma_T = a/(2q) \leqslant 1$ имеем

$$(a(1 - p\gamma_T) + qp\gamma^2_T)/(2q) = a/(2q) - a^2p/(8q^2) < \gamma_T \leqslant 1.$$

При $a/(2q) > 1$

$$\gamma_T = 1,\ x^*_{T-1} = (a(1 - p) + qp)/(2q)b_{T-1}; \\ \gamma_{T-1} = a(1 - p)/(2q) + p/2.$$

Так как $p > 1$, то и в этом случае $\gamma_{T-1} < \gamma_T = 1$. Действительно, предположим противное, т. е. $a(1 - p)/(2q) + p/2 > 1$. Это неравенство равносильно неравенству $(p - 1)a/q < (p - 2)$, которое не может выполняться при $p > 1$ и $a/(2q) > 1$.

Поэтому можно записать $\gamma_{T-1} = (a(1 - p\gamma_T) + + qp\gamma^2_T)/(2q)$, опуская операцию взятия минимума. Полученное неравенство $\gamma_{T-1} < 1$ означает нецелесообразность полной реализации ресурса в предпоследнем году, что вполне естественно. Отсюда следует и нецелесообразность полной реализации ресурса и в любой предшествующий год, так как, допуская полную реализацию в следующем за ним году, получаем лучшее решение.

Интересно отметить, что γ_{T-1} может оказаться отрицательным. Это означает, что $x^*_{T-1} = 0$ и реализация ресурса в $(T - 1)$-м году нецелесообразна вообще.

При $a/(2q) < 1$ $\gamma_{T-1} = a/(2q)(1 - a/(2q)p/2)$. И $\gamma_{T-1} < 0$ при $2/p < a/(2q) < 1$.

Если это неравенство не выполнено, то $0<\gamma_{T-1}<1$ и целесообразна реализация ресурса при любом его количестве. Например, при $p = 2$ и $a/(2q) = 0{,}8$ получаем $\gamma_{T-1} = 0{,}16$.

При $a/(2q) \geqslant 1$ $\gamma_T = 1$ и $\gamma_{T-1} = a(1 - p)/(2q) + p/2$. Условие $\gamma_{T-1} < 0$ выполнено при $a/(2q) \geqslant p/(2p - 2)$. Это условие может быть выполнено как при $p/(2p - 2) > 1$, так и при $p/(2p - 2) < 1$. Так, при $p = 1{,}2$ должно быть $a/(2q) \geqslant 3$, а при $p = 2{,}2$ получаем $a/(2q) \geqslant 11/12$, т. е. любое $a/(2q) \geqslant 1$. При $a/(2q) \geqslant 1$ прибыль за один год — это монотонно возрастающая функция использованного ресурса и даже в этом случае при соответствующих значениях $a/(2q)$ и p в предпоследний год целесообразна реализация значительной части ресурса независимо от его количества. Например, при $p = 1{,}2$ и $a/(2q) = 1{,}5$ эта часть, т. е. γ_{T-1}, составляет 30 %.

Далее, прибыль за один $(T - 1)$-й год равна $\lambda_{T-1}b_{T-1}$, где $\lambda_{T-1} = \gamma_{T-1}(a - \gamma_{T-1}q)$, что следует из формулы (1) для произвольного года при подстановке $\gamma_{T-1}b_{T-1}$ вместо $\gamma_t b_t$.

Итак, мы получили, что и оптимальное годовое количество реализации ресурса и прибыль за каждый год при оптимальном плане реализации в расчете на максимум прибыли за два оставшихся года линейно зависят от количества ресурса в начале каждого года.

Используя принцип математической индукции, докажем, что эта ***линейная*** зависимость оптимального годового количества реализации и годовой прибыли от количества ресурса в начале года сохраняется для любого числа лет при максимизации суммарной прибыли за все оставшиеся годы.

Итак, пусть это утверждение верно для лет с номерами s, $s + 1$, $s + 2$, ..., T. Нам нужно доказать, что это утверждение верно и для всех оставшихся лет, если начинать рассмотрение с $(s - 1)$-го года. Тогда будет доказано, что это утверждение верно для любого года, так как для последнего (да и предпоследнего года) это утверждение уже доказано.

Наше предположение означает следующее:

$$Z_s = \lambda_s b_s + \lambda_{s+1}b_{s+1} + ... + \lambda_T b_T \\ \text{и } x^*_r = \gamma_r b_r \text{ для всех } s \leqslant r \leqslant T.$$

Тогда суммарная прибыль за все оставшиеся годы, начиная с $(s - 1)$-го, составит:

$$Z_{s-1} = ax_{s-1} - (q/b_{s-1})x^2_{s-1} + \\ + \lambda_s b_s + \lambda_{s+1}b_{s+1} + ... + \lambda_T b_T.$$

Поскольку для любого b_r при $r > s - 1$ $b_{r+1} = = p(b_r - x_r) = p(1 - \gamma_r)b_r$, то

$$Z_{s-1} = ax_{s-1} - (q/b_{s-1})x^2_{s-1} + b_s\{\lambda_s + \lambda_{s+1}p(1 - \gamma_s) + \\ + \lambda_{s+2}p^2(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1}) + ... \\ ... + \lambda_T p^{T-s}(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1})...(1 - \gamma_{T-1})\}.$$

Обозначив выражение в фигурных скобках через D:

$$D_{s-1} = \lambda_s + \lambda_{s+1}p(1 - \gamma_s) + \\ + \lambda_{s+2}p^2(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1}) + ... + \\ + \lambda_T p^{T-s}(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1})...(1 - \gamma_{T-1}), \quad (2)$$

получим

$$Z_{s-1} = ax_{s-1} - (q/b_{s-1})x_{s-1}^2 + p(b_{s-1} - x_{s-1})D_{s-1}.$$

Максимум Z_{s-1} достигается при $x_{s-1}^* = (a - pD_{s-1})b_{s-1}/(2q)$. Или $x_{s-1}^* = \gamma_{s-1}b_{s-1}$, где

$$\gamma_{s-1} = (a - pD_{s-1})/(2q). \quad (3)$$

Как установлено выше, $\gamma_s - 1 < 1$, так как $\gamma_{s-1} = 1$ означает полную реализацию ресурса, что не является оптимальным решением во все годы, кроме последнего.

В соответствии с формулой (1) $z_{s-1} = \lambda_{s-1}b_{s-1} = \gamma_{s-1}(a - \gamma_{s-1}q)b_{s-1}$.

Получили, что и x_{s-1}^* и z_{s-1} также линейно зависят от b_{s-1}, что и требовалось доказать.

Из формулы (2) следует рекуррентное соотношение

$$D_{s-1} = \lambda_s + D_s p(1 - \gamma_s);\ s = T,\ T-1,\ ...,\ 2. \quad (4)$$

В итоге получаем следующий алгоритм для построения оптимального плана реализации ресурса.

1. Вычисляем $\gamma_T = \min(1, a/(2q))$ и $\lambda_T = \gamma_T(a - \gamma_T q)$. Полагаем $D_T = 0$.

2. Последовательно применяя формулы (4), (3), (1), вычисляем D_{T-1}, γ_{T-1}, λ_{T-1}.

3. Аналогично вычисляем все D_r, γ_r и λ_r для всех $1 \leqslant r < T - 1$, начиная с $r = T - 2$. На каждом шаге запоминаем γ_r, λ_r и последнее из вычисленных D_r.

4. Обратным разворотом, используя заданное b_1 и вычисленные γ_r и λ_r, последовательно находим все x_i^*, b_{i+1}^* и z_i^* ($i = 1, 2, ..., T$).

Естественно, при получении нецелых значений для x_i^* их следует округлять до целых значений. Суммарную прибыль получим, суммируя z_i^*.

Определяемая по формуле (3) величина γ_{s-1} на некотором шаге может стать меньше нуля. Если это произойдет, она заменяется нулем. Это означает, что в соответствующий и все предшествующие годы нет реализации ресурса.

Возвращаясь к вопросу о влиянии постоянной составляющей ежегодных затрат, отметим следующую корректировку алгоритма.

1. При обратном развороте после вычисления на очередном этапе с номером r величин b_r и $z_r = \lambda_r b_r$, соответствующих оптимальному плану, вычитаем из z_r постоянную составляющую годовых затрат.

2. Если полученная разность (годовая прибыль) положительна, переходим к следующему этапу. В противном случае можно увеличить реализацию, т. е. увеличить γ_{r-1} и соответственно прибыль до требуемого размера. Однако при такой корректировке оптимальной траектории возможно досрочное исчерпание ресурса, что, как уже отмечалось, не соответствует оптимуму. Поэтому представляется предпочтительным при возникновении подобной ситуации с недопустимо малой прибылью уменьшить реализацию ресурса в предшествующие годы, рассматривая их последовательно, или вообще отказаться от реализации ресурса в r-м году, т. е. принять $\gamma_{r-1} = 0$ и тем самым перейти в состояние следующего этапа с ресурсом b_r' ($b_r' > b_r$).

3. После корректировки состояния b_r процесс в обратном направлении продолжается с вычисленными ранее величинами γ_i и λ_i ($i = t, t + 1, ..., T$). Эти величины для оптимальной траектории не зависят от количества ресурса на данном шаге, они зависят только от номера шага.

В данной модели легко учесть рост цен (величины a, q год от года умножаются на соответствующие коэффициенты) и желание получить прибыль поскорее, так как прибыль сегодня не эквивалентна такой же прибыли через несколько лет.

В итоге рассмотрения простых моделей целевой функции можно констатировать, что в данной задаче метод динамического программирования можно использовать не как метод пошагового поиска оптимальной траектории с анализом всех промежуточных состояний, но как метод анализа задачи и построения алгоритма, который сводится к последовательному вычислению оптимальных пошаговых решений по готовым формулам.

Для более сложных моделей трудно рассчитывать на получение расчетных формул по аналогии с приведенными выше. Приходится использовать другую реализацию метода динамического программирования. Например:

1. Начиная с первого года, имея b_1 единиц ресурса, рассматриваем все возможные количества его реализации $0 \leqslant x_1 \leqslant b_1$. Для каждого из них вычисляем и запоминаем ответствующие значения целевой функции и множество состояний с $b_2 = (b_1 - x_1)p$. Переходы с недопустимо малой прибылью отбраковываются.

Тем самым завершается формирование множества состояний после первого года (этапа).

2. Аналогично формируем состояния каждого из последующих этапов, вычисляя суммарные значения целевой функции и оставшиеся количества ресурса. Во избежание полного перебора при достижении одного состояния разными путями в соответствии с принципом оптимальности Р. Беллмана [1, 2] оставляем только путь, по которому это состояние достигается с бо́льшим значением целевой функции, и запоминаем соответствующее ему состояние предыдущего этапа (связь).

3. Завершив последний этап, имеем оптимальное значение целевой функции и обратным разворотом по цепочке связей, начиная с оптимального конечного состояния (b_{T+1}), восстанавливаем оптимальную последовательность состояний и соответствующие величины реализации ресурса на каждом этапе, т. е. в каждом году.

Неприятная особенность такого алгоритма состоит в необходимости округлений получаемых количеств оставшегося ресурса до целых значений.

При наличии дополнительных требований, например, не оставлять ресурса меньше заданного числа или не рассматривать реализацию ресурса меньше заданной величины легко скорректировать построение множества состояний на каждом этапе.

Заключение

Для практического использования рассмотренных моделей и алгоритмов необходимо исследование реальных процессов и получение соответствующих реальных данных из практики. Однако возможность применения динамического программирования для составления оптимальных планов реализации частично возобновляемых ресурсов сомнений не вызывает.

В данной задаче возможно существенное сокращение объема вычислений при использовании более совершенной реализации классического алгоритма динамического программирования за счет использования множеств Парето [3, 4].

Список литературы

1. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
2. **Беллман Р., Дрейфус С.** Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.
3. **Струченков В. И.** Устаревшие стереотипы и новые алгоритмы решения прикладных задач дискретной оптимизации // Информационные технологии. 2012. № 5.
4. **Struchenkov V. I.** Combined Algorithms of Optimal Resource Allocation // Applied Mathematics. Scientific Research. 2012. Vol. 3, N. 1.
5. **Косоруков О. А., Мищенко А. В.** Исследование операций: Учеб. для вузов. М.: Экзамен, 2003. 270 с.

V. I. Struchenkov, Professor, e-mail: str1942@mail.ru
Moscow State University of Radio Engineering, Electronics and Automation, Moscow, Russia

Dynamic Programming for Planning of the Partially Renewable Resources Implementation

Under study is the problem of optimal planning of the partially renewable resources implementation, such as the commercial breeding of fish, animals and so on.

The aim of this article is to study the opportunity of the optimal plan calculation using dynamic programming.

The predetermined scheduling period is divided into a number of stages, such as months or years. At each stage, the key concept of dynamic programming "system status" is formalized as the amount of available resources.

Two models of the objective function are considered. The first model is linear, and the second model is quadratic. On the basis of the dynamic programming method built computational algorithms that do not require busting options step by step. Instead of these classical algorithms of dynamical programming the recurrence formulas for optimal plan calculation are received.

Keywords: *resource, the objective function, the set of states, dynamic programming, the optimal path*

References

1. **Bellman R.** *Dinamicheskoe programmirovanie* (Dynamic Programming), Moscow, Foreign Literature, 1960. 234 p. (in Russian).
2. **Bellman R., Drejfus S.** *Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovanija* (Applied Problems of Dynamic Programming), Moscow, Science, 1965, 458 p. (in Russian).
3. **Struchenkov V. I.** Ustarevshie stereotipy i novye algoritmy reshenija prikladnyh zadach diskretnoi optimizacii, *Informacionnye tehnologii*, 2012, no. 5, pp. 20—29 (in Russian).
4. **Struchenkov V. I.** Combined Algorithms of Optimal Resource Allocation. *Applied Mathematics. Scientific Research*, 2012, vol. 3, no. 1.
5. **Kosorukov O. A., Mishenko A. V.** *Issledovanie operacij: Uchebnik dlja studentov vuzov.* Moscow: Exam, 2003, 270 p. (in Russian).

УДК 004.62

Н. М. Новикова, д-р техн. наук, проф., e-mail: nov.nelly@gmail.com,
А. В. Борискин, аспирант, email: boriskinpost@gmail.com,
Воронежский государственный университет

Математическая модель поиска влиятельных объектов социальной сети на основе априорной информации

Для определенного подмножества объектов социальной сети (на примере Vkontakte) некоторые объекты обладают повышенным влиянием на другие объекты. Рассматривается задача поиска остальных влиятельных объектов на основе данной информации. Предложен алгоритм решения, приведены иллюстрации работы разработанного программного обеспечения.

Ключевые слова: *виртуальные социальные сети, интеллектуальный анализ данных, нечеткие графы, методы оптимизации*