

УДК 519.872

В. Н. Тарасов, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: tarasov-vn@psuti.ru,
Л. В. Липилина, аспирант, e-mail: mila199113@gmail.com,
Н. Ф. Бахарева, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: nadin1956_04@inbox.ru,
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров

Приведено описание программы расчета характеристик систем массового обслуживания (СМО) G/G/1, которым соответствуют входные распределения с коэффициентами вариаций интервала между поступлениями требований и временами обслуживания, меньшими и большими 1, т.е. перекрывающими весь интервал (0, ∞). Для этого рассмотрены СМО M/M/1 с запаздыванием во времени, H₂/M/1 и H₂/H₂/1 с гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка. В качестве выходных характеристик использованы среднее время ожидания требований в очереди и дисперсия времени ожидания. Остальные характеристики рассматриваемых систем являются производными от среднего времени ожидания.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа

Введение

В статье представлено описание программы расчета задержки в системах массового обслуживания (СМО) для широкого диапазона изменения параметров трафика. Для этого рассмотрены СМО H₂/H₂/1, H₂/M/1 и M/M/1 с запаздыванием во времени. Здесь использованы следующие обозначения: H₂ — гиперэкспоненциальный закон распределения 2-го порядка, M — экспоненциальный закон распределения. Гиперэкспоненциальный закон распределения H₂ может быть использован для аппроксимации произвольных распределений в случае коэффициента вариации, большего 1. В связи с тем что распределение H₂ является трехпараметрическим, в программе реализован механизм аппроксимации произвольных законов распределений гиперэкспоненциальным распределением как на уровне двух первых моментов, так и на уровне трех первых моментов.

В том случае, когда коэффициент вариации случайной величины меньше 1, для аппроксимации закона распределения можно использовать экспоненциальный закон с запаздыванием во времени. Результаты авторов, полученные для системы M/M/1 с запаздыванием во времени, впервые опубликованы в работе [1]. Также следует отметить тот факт, что оригинальные результаты авторов по СМО H₂/H₂/1 и H₂/M/1 с учетом выявленных возможностей аппроксимации законов распределений как на уровне двух, так и на уровне трех первых моментов случайных величин гиперэкспоненциаль-

ным распределением позволяют их применять для исследования современного телетрафика, чувствительного к задержкам. Это возможно, если учитывать определение вариации задержки (джиттера) в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения, тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию [2]. В этом и заключается актуальность проводимых исследований в теории массового обслуживания.

Краткий обзор отечественных и зарубежных источников в области телетрафика позволяет сделать следующие выводы. В работах [3, 4] используются известные классические модели массового обслуживания M/M/1, M/G/1 и верхние границы для времени ожидания требований для системы G/G/1, или же в отсутствие теоретических результатов применяется имитационное моделирование. В зарубежной литературе, например [5], уже давно известны эвристические формулы для систем G/M/1 и G/G/1. В частном случае для системы H₂/M/1 в работе [5] приведено выражение для среднего времени ожидания:

$$\bar{W} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho} \left[\sqrt{(1-\theta)^2 + (r-1)} - (1-\theta) \right] \right\}, (1)$$

где μ — интенсивность обслуживания; промежуточные

параметры: $\theta = \frac{\rho(q-r)-(q-r^2)}{2\rho(r-1)}$, $q = \frac{\bar{\tau}_\lambda^3}{6(\bar{\tau}_\lambda)^3}$,

$r = \frac{\overline{\tau_\lambda^2}}{6(\overline{\tau_\lambda})^2}$, а $\overline{\tau_\lambda}$, $\overline{\tau_\lambda^2}$, $\overline{\tau_\lambda^3}$ — начальные моменты до

3-го порядка интервалов между поступлениями требований в систему; ρ — загрузка системы. Результаты, полученные из выражения (1) для этой системы, полностью совпадают с авторскими [7].

В предлагаемой программной системе использованы полученные авторами теоретические результаты на основе решения интегрального уравнения Линдли относительно функции распределения времени ожидания известным методом спектрального разложения [6].

Постановка задачи

Как известно из теории массового обслуживания (ТМО) [6], среднее время ожидания требований в очереди является составной частью задержки в сетях пакетной передачи данных. В классической СМО М/М/1 оно выражается равенством (здесь и далее используется классическое трехпозиционное обозначение Кендалла):

$$\overline{W} = \frac{\rho/\mu}{1-\rho}, \quad (2)$$

для системы М/Г/1 —

$$\overline{W} = \frac{\lambda \overline{X^2}/2}{1-\rho}. \quad (3)$$

Для системы Г/Г/1 это время равно

$$\overline{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2/\lambda^2}{2(1-\rho)/\lambda} - \frac{\overline{I^2}}{2\overline{I}}. \quad (4)$$

В представленных формулах использованы следующие обозначения: ρ — коэффициент загрузки системы ($0 < \rho = \lambda/\mu < 1$); λ — интенсивность входного потока; μ — интенсивность обслуживания; $\overline{X^2}$ — второй начальный момент времени обслуживания; D_λ , D_μ — соответственно дисперсии интервалов

поступления и времени обслуживания, $\overline{I}$ и $\overline{I^2}$ — среднее значение и второй начальный момент периода простоя соответственно. Второе слагаемое в правой части выражения (4) остается неизвестным, и вполне возможно, что оно может содержать моменты интервалов поступления и времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО Г/Г/1 (с произвольными законами поступления и обслуживания требований в системе) необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка. И наконец, выражения (2)—(4) убедительно демонстрируют зависимость основной характеристики СМО — среднего времени ожидания требований в очереди от вида входных распределений. Ра-

венства (2)—(4) также можно интерпретировать как эволюцию СМО.

Методы расчета характеристик рассматриваемых систем массового обслуживания

Рассмотрим сначала СМО $H_2/H_2/1$. В связи с тем, что система $H_2/H_2/1$ принадлежит классу систем Г/Г/1, ее точный анализ представляет собой актуальную задачу. При этом СМО с гиперэкспоненциальными входными распределениями, в отличие от систем с другими распределениями, позволяет получить решение задачи в аналитическом виде.

В СМО $H_2/H_2/1$ интервалы между соседними требованиями входного потока распределены по закону

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (5)$$

а время обслуживания — по закону

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (6)$$

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до 3-го порядка для распределения (5):

$$\begin{aligned} \overline{\tau_\lambda} &= \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}; \\ \overline{\tau_\lambda^2} &= \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}; \quad \overline{\tau_\lambda^3} = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для начальных моментов позволяют определить неизвестные параметры λ_1 , λ_2 , p распределения (5) методом моментов при аппроксимации произвольных распределений гиперэкспоненциальным распределением. Аналогично определяются неизвестные параметры μ_1 , μ_2 , q распределения (6).

Для системы $H_2/H_2/1$ в работе [8] приведено преобразование Лапласа для функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)}, \quad (8)$$

где $-s_1$ и $-s_2$ — отрицательные вещественные части корней кубического уравнения

$$s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0 = 0. \quad (9)$$

Коэффициенты этого уравнения: $c_0 = a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0(\mu_1 + \mu_2) + b_0(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c_1 = -a_1 b_1 - a_0(-b_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2))$, $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2$, а параметры: $a_0 = \lambda_1 \lambda_2$, $a_1 = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$, $b_0 = \mu_1 \mu_2$, $b_1 = q\mu_1 + (1-q)\mu_2$. Следовательно, все они однозначно выражаются через параметры распределений (5) и (6), которые, в свою очередь, определяются методом моментов решением систем уравнений типа (7).

Среднее время ожидания в очереди равно значению производной от функции преобразования Лапласа (8) со знаком минус в точке $s = 0$. Окон-

чительно среднее время ожидания в очереди для СМО $H_2/H_2/1$:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (10)$$

Выражение (8) на основе свойств преобразования Лапласа позволяет также определить моменты высших порядков для времени ожидания. Например, начальный момент 2-го порядка времени ожидания равен значению второй производной от преобразования (8) в точке $s = 0$. Он будет иметь вид

$$\bar{W}^2 = \frac{d^2 W^*(s)}{ds^2} = \frac{2}{\mu_1 \mu_2} - \frac{2}{s_1 s_2} - \frac{2(s_1 + s_2)}{\mu_1 \mu_2 s_1^2 s_2^2} [s_1 s_2 (\mu_1 + \mu_2) - \mu_1 \mu_2 (s_1 + s_2)]. \quad (11)$$

В свою очередь, начальный момент 2-го порядка позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения, тем самым получим возможность его определения через дисперсию. Этот факт является результатом, важным для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Основной объем вычислений в программе и алгоритме для СМО $H_2/H_2/1$ приходится на решение систем уравнений вида (7) методом Ньютона и на нахождение отрицательных вещественных частей корней кубического уравнения (9) методом Виета—Кардано.

Рассмотрим теперь систему типа $H_2/M/1$. В этом случае функция плотности $a(t)$ имеет вид (5), а $b(t) = \mu e^{-\mu t}$. Неизвестные параметры λ_1, λ_2, p распределения $a(t)$ определяются точно так же, как и в случае СМО $H_2/H_2/1$.

Ниже приведены полученные в работах [7, 9] результаты для времени ожидания в системе $H_2/M/1$. В этом случае преобразование Лапласа для функции плотности времени ожидания для системы, полученное решением интегрального уравнения Линдли методом спектрального разложения [6], имеет следующий вид:

$$W^*(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}, \quad (12)$$

где $-s_1 = -(\sqrt{c_2^2/4 + c_1} - c_2/2)$ — отрицательный корень квадратного уравнения

$$s^2 - c_2 s - c_1 = 0 \quad (13)$$

с коэффициентами: $c_1 = \mu[\lambda_1(1 - p) + \lambda_2 p] - \lambda_1 \lambda_2$, $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$. Величины p, λ_1, λ_2 являются параметрами гиперэкспоненциального закона рас-

пределения с функцией плотности $a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ для системы $H_2/M/1$.

Среднее время ожидания в очереди равно значению производной от функции преобразования Лапласа (12)

$$\frac{dW^*(s)}{ds} = \frac{s_1 \mu (s_1 + s) - s_1 (s + \mu) \mu}{\mu^2 (s + s_1)^2}$$

со знаком минус в точке $s = 0$:

$$\bar{W} = -\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{-s_1^2 \mu + \mu^2 s_1}{\mu^2 s_1^2} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно среднее время ожидания в очереди для СМО $H_2/M/1$:

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu. \quad (14)$$

Выражение (12) на основе свойств преобразования Лапласа позволяет также определить моменты высших порядков для времени ожидания. Например, начальный момент 2-го порядка времени ожидания равен значению второй производной от преобразования (12) в точке $s = 0$, и он будет иметь вид

$$\bar{W}^2 = \left. \frac{d^2 W^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{2s_1(\mu - s_1)}{\mu(s + s_1)^3} \Big|_{s=0} = \frac{2(\mu - s_1)}{\mu s_1^2}. \quad (15)$$

В свою очередь, начальный момент 2-го порядка позволяет определить дисперсию времени ожидания: $D_W = \bar{W}^2 - \bar{W}^2$.

Основной объем вычислений в программе для СМО $H_2/M/1$ приходится на решение системы уравнений типа (7) и на нахождение отрицательной вещественной части корня квадратного уравнения (13).

Перейдем теперь к анализу характеристик системы $M/M/1$ с запаздыванием во времени. Рассмотрим СМО, на вход которой поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены по закону

$$a(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \geq t_0; \\ 0, & 0 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (16)$$

Аналогично распределено и время обслуживания:

$$b(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(t-t_0)}, & t \geq t_0; \\ 0, & 0 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (17)$$

Функции плотности (16) и (17) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки на величину t_0 экспоненциальными распределениями с двумя параметрами (λ, t_0) и (μ, t_0) , причем $\lambda < \mu$. Таким образом, имеем СМО с запаздыванием во времени на величину $t_0 > 0$, которая впервые описана в работе [1].

В этой работе показано, что коэффициент вариации случайной величины, распределенной по закону (16) или (17), меньше 1. Заметим, что в отличие от классического экспоненциального закона распределения с одним параметром λ такой закон позволяет аппроксимировать произвольные распределения в случае коэффициента вариации, меньшего 1, на уровне двух первых моментов. В работе [1] получено преобразование Лапласа для функции плотности времени ожидания, который имеет вид

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{(1 - \lambda/\mu)(\mu + s)}{(s + \mu - \lambda)}. \quad (18)$$

Найдем первую производную от функции (18):

$$\begin{aligned} \frac{dW^*(s)}{ds} &= \\ &= \frac{(1 - \lambda/\mu)(s + \mu - \lambda) - (1 - \lambda/\mu)(\mu + s)}{(s + \mu - \lambda)^2} = \frac{-\lambda(1 - \lambda/\mu)}{(s + \mu - \lambda)^2}. \end{aligned}$$

Тогда значение первой производной со знаком минус при $s = 0$ будет равно

$$-\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{\lambda(1 - \lambda/\mu)}{(\mu - \lambda)^2} = \frac{\lambda/\mu}{(\mu - \lambda)}.$$

Отсюда среднее время ожидания в очереди будет иметь вид

$$\overline{W} = \frac{\lambda/\mu}{\mu - \lambda}. \quad (19)$$

Неизвестные параметры λ , μ , t_0 распределений (16) и (17) определяются из системы уравнений по методу моментов:

$$\begin{cases} \lambda^{-1} + t_0 = \overline{\tau}_\lambda; \\ (1 + \lambda t_0)^{-1} = c_\lambda; \\ \mu^{-1} + t_0 = \overline{\tau}_\mu; \\ (1 + \mu t_0)^{-1} = c_\mu, \end{cases}$$

где числовые характеристики в правых частях системы будут входными параметрами для определения неизвестных параметров λ , μ , t_0 . Здесь приняты следующие обозначения: $\overline{\tau}_\lambda$ — среднее значение интервалов между соседними требованиями входного потока; $\overline{\tau}_\mu$ — среднее время обслуживания требований в системе; c_λ и c_μ — коэффициенты вариаций интервала между соседними требованиями входного потока и времени обслуживания соответственно.

Алгоритмизация вышеприведенных методов расчета характеристик трех систем позволяет получить эти характеристики для широкого диапазона изменения их параметров. На рис. 1 приведена укрупненная схема алгоритма программы расчета.

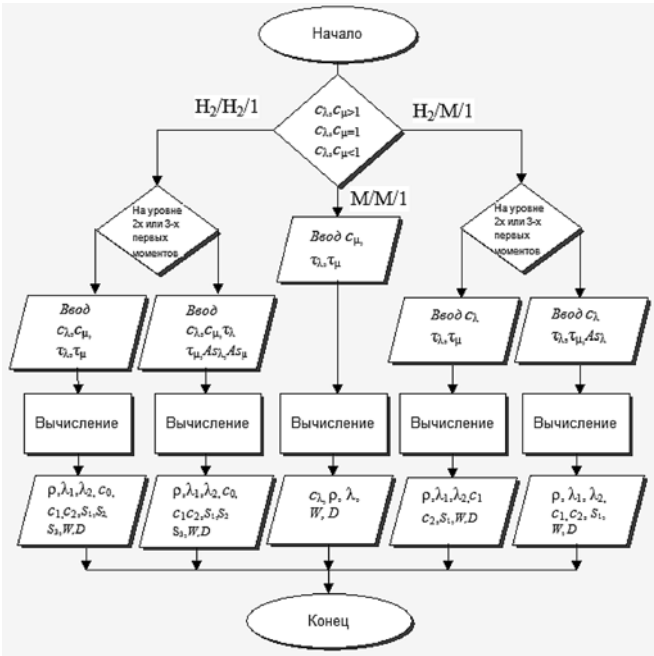


Рис. 1. Укрупненная схема алгоритма

Примеры автоматизированного расчета характеристик рассмотренных систем

Экранная форма расчета характеристик для системы $H_2/H_2/1$ как на уровне двух первых моментов, так и на уровне трех первых моментов, представлена на рис. 2.

Здесь приняты следующие обозначения входных параметров: $\overline{\tau}_\lambda$ — среднее значение интервала между соседними требованиями входного потока; $\overline{\tau}_\mu$ — среднее время обслуживания требований в системе; c_λ и c_μ — коэффициенты вариаций интервала между соседними требованиями входного потока и времени обслуживания соответственно; A_{s_λ} и A_{s_μ} — коэффициенты асимметрии интервала между соседними требованиями входного потока и времени обслуживания.

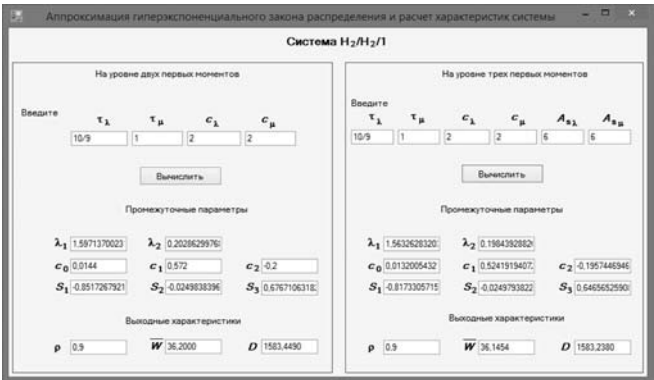


Рис. 2. Расчет характеристик для СМО $H_2/H_2/1$

Различие между значениями для среднего времени ожидания $\bar{W}$ при аппроксимации гиперэкспоненциального закона распределения на уровне двух и трех моментов в данном случае несущественно, но относительная погрешность при других входных данных, как показывают многочисленные расчеты, может достигать 10 % [8].

На рис. 3 приведена экранная форма для расчета характеристик системы $H_2/M/1$. Здесь приняты аналогичные обозначения для входных параметров, что и на рис. 2.

Различие между значениями среднего времени ожидания $\bar{W}$ для системы $H_2/M/1$ при аппроксимации гиперэкспоненциального закона распределения на уровне двух и трех моментов в этом примере также несущественно, но относительная погрешность при других входных данных может превышать 10 %, что уже немаловажно [7].

На рис. 4 приведена экранная форма для расчета характеристик системы $M/M/1$ с запаздыванием во времени.

Рис. 3. Расчет характеристик для СМО $H_2/M/1$

Рис. 4. Расчет характеристик для СМО $M/M/1$ с запаздыванием во времени

Заключение

В заключение можем сделать следующие выводы.

- ♦ В том случае, когда коэффициенты вариации интервалов поступления требований c_λ и времени обслуживания c_μ больше 1, можно использовать систему $H_2/H_2/1$. Закон распределения H_2 позволяет в силу своей специфики аппроксимировать распределения как на уровне двух, так и на уровне трех первых моментов. В этом случае разница в результатах аппроксимации гиперэкспоненциального распределения на уровне двух и трех моментов может получиться существенной. С точки зрения теории вероятностей, результат аппроксимации на уровне трех моментов точнее, так как три первых момента полнее характеризуют случайную величину — интервал между поступлениями или же интервал обслуживания.
- ♦ В случае коэффициента вариации интервалов поступления требований c_λ больше 1 и неопределенного значения коэффициента вариации времени обслуживания можно использовать систему $H_2/M/1$.
- ♦ Если коэффициенты вариации интервалов поступления требований c_λ и времени обслуживания c_μ меньше 1, можно использовать систему $M/M/1$ с запаздыванием во времени. Как следствие, имеем немарковскую модель массового обслуживания. Среднее время ожидания требования в очереди в такой системе меньше, чем в классической системе $M/M/1$ при одинаковом коэффициенте загрузки. Использование функций плотности (16) и (17) позволяет аппроксимировать исходные входные распределения на уровне двух первых моментов, в отличие от классической системы, что с точки зрения теории вероятностей точнее.
- ♦ Таким образом, применение трех предложенных систем позволяет исследовать современный телетрафик в случае широкого диапазона изменения его параметров. Проведенные расчеты по разработанной программе на уровне двух моментов распределений случайных величин хорошо согласуются с данными расчетов [10], а данные расчетов на уровне трех моментов несколько превосходят данные [10].
- ♦ Исходный код программы, написанной на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio, приведен в работе [11]. В программе реализованы численные методы решения систем нелинейных уравнений Ньютона и кубических уравнений Виета—Кардано. При полном тестировании программы использованы параллельные вычисления в Mathcad. Исполняемый файл занимает 61 кбайт.

Список литературы

1. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Блатов И. А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51–59.
2. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (дата обращения: 26.02.2015).
3. Крылов В. В., Самохвалова С. С. Теория телетрафика и ее приложения. Санкт Петербург: БХВ, 2005. 288 с.
4. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
5. Myskja A. An improved heuristic approximation for the G1/G1/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatrafic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. 1991. P. 683–688.
6. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
7. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Горелов Г. А. Математическая модель трафика с тяжеловостным распределением на основе системы массового обслуживания $H_2/M/1$ // Инфокоммуникационные технологии. 2014. Т. 12, № 3. С. 36–41.
8. Тарасов В. Н., Картасhevский И. В. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 3. С. 92–96.
9. Тарасов В. Н., Горелов Г. А., Ушаков Ю. А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. № 2. С. 40–44.
10. Кругликов В. К., Тарасов В. Н. Анализ и расчет сетей массового обслуживания методом двумерной диффузионной аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 74–83.
11. Тарасов В. Н., Липилина Л. В. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M/M/1$ с запаздыванием во времени. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016612657 от 03.03.2016.

V. N. Tarasov, Head of Chair, Professor, e-mail: tarasov-vn@psuti.ru,
N. F. Bahareva, Head of Chair Professor, L. V. Lipilina, Assistant,
Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara

Automation for Calculating Characteristics Queuing System for a Wide Range Changing Their Parameters

The article describes the characteristics of the queuing design software systems (QS) $G/G/1$, which correspond to the input distribution with a coefficient of variation of the interval between the receipt of the request and service Times lowest and highest 1, that is, cover the entire range $(0, \infty)$. To do this, we consider the QS $M/M/1$ with delay, $H_2/M/1$ and $H_2/H_2/1$ with Hyperexponential input distributions 2nd order. As the output characteristics used by the average waiting time in the queue and its variance. Other characteristics of the systems in question are derived from the average waiting time.

With the definition of a delay variation (jitter) in a telecommunications time-variation of its mean value, thus having the opportunity to determine the jitter through dispersion. This result is important for the analysis and description of traffic that is sensitive to delays. For receiving output characteristics the method of spectral expansion of the solution of an integral equation of Lindley is used. For the practical application of the results used the traditional method of moments.

It is known that distributed according to the law Hyperexponential H_2 random variable has a coefficient of variation greater than 1. In [1] it is shown that the coefficient of variation of a random variable distributed according to an exponential law with a time lag of less than 1.

Given the fact that the distribution of H_2 is a three-parameter in the software system has a mechanism of approximation, arbitrary laws Hyperexponential distributions at the level of the first two moments, and at the level of the first three moments.

Keywords: queuing systems, the average waiting time in the queue, the method of spectral decomposition, the integral equation Lindley, Laplace transform

References

1. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analis i raschet sistemy massovogo obslugivaniya s sapasdyvaniem (Analysis and Calculation of Queuing System with Delay), *Avtomatica i telemehana*, 2015, no. 11, pp. 51–59.
2. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>.
3. Krylov V. V., Samokhvalova S. S. *Teoriya teletrafika i ee prilozheniya*. Sankt Peterburg: BHV, 2005. 288 p.
4. Bocharov P. P., Pechinkin A. V. *Teoriya massovogo obslugivaniya*. Moscow: Isd-vo RUDN, 1995. 529 p.
5. Myskja A. An improved heuristic approximation for the G1/G1/1 queue with bursty arrivals, *Teletraffic and datatrafic in a Period of Change, ITC-13*. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
6. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obslugivaniya*. Per. s angl. Pod redakciey V. I. Neimana. Moscow: Mashinostroenie, 1979. — 432 p.
7. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Gorelov G. A. Matematicheskaya model trafika s tyazhelohvostnym raspredeleniem na osnove sistemy massovogo obslugivaniya $H_2/M/1$, *Ifokommunikazionnye tehnologii*, 2014. no. 3, pp. 36–41.
8. Tarasov V. N., Kartashevsky I. V. Opredelenie srednego vremeni ogidanya trebovaniy v upravlyemoy sisteme massovogo obslugivaniya $H_2/H_2/1$ [Determination of the average waiting time requirements in a controlled queuing system], *Sistemy upravleyiya i informacionnye tehnologii*. 2014, no. 3, pp. 92–96.
9. Tarasov V. N., Gorelov G. A., Ushakov Yu. A. Vosstanovlenie momentnykh harakteristik raspredeleniya intervalov mezdu paketami vkhodyashego trafika [Restoring torque characteristics of the distribution of intervals between packets of incoming traffic], *Infokommunikazionnye tehnologii*, 2014, no. 2, pp. 40–44.
10. Kruglikov V. K., Tarasov V. N. Analis i raschet setei massovogo obslugivaniya metodom dvumernoi diffuzionnoi approksimacii [Analysis and calculation of queuing networks by method of two-dimensional diffusion approximation], *Avtomatica i telemehana*, 1983, no. 8, pp. 74–83.
11. Tarasov V. N., Lipilina L. V. *Programmnyi complex rascheta harakteristik sistem massovogo obslugivaniya tipa $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ i $M/M/1$ s sapasduvaniem vo vremeni* [Program complex of calculation of characteristics of queuing systems like $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ and $M/M/1$ with delay in time]. Certificate on the state registration of the computer program no. 2016612657 from 03.03.2016.