I. Ya. Lvovich[1], Professor, office@vivt.ru, **Ya. E. Lvovich**[2], Professor, office@vivt.ru,
A. P. Preobrazhensky[2], Professor, app@vivt.ru, **O. N. Choporov**[2], Professor, choporov_oleg@mail.ru
[1]Paneuropean university, Bratislava
[2]Voronezh institute of high technologies, Voronezh

The Features of the Methods of Computational Fluid Dynamics for Turbulence Modeling

In the paper an analytical review of methods for turbulence modeling on personal computers is carried out. Turbulent flow can be represented as a multiple rotating in different directions and in different planes of vortices. The computational features of the methods that can be used in mathematical software subsystems for the simulation of turbulence in the relevant CAD are provided. The results that computational fluid dynamics can take a dominant place, surpassing the prevalence of experimental and analytical methods are shown. These differences in the three main methods of description of turbulence are discissed. It was provided that, the development of computer technology and numerical methods of computational physics, allows to work not only with increasingly complex models, but also to apply different ways of visualizing the obtained result. The obtained results can be helpful when selecting a turbulence model for a specific task in the simulation subsystems.

Keywords: *turbulence, modeling, software, CAD, computational physics, equation, vortex, integral engineering application, liquid, method*

References

1. **Zelenuy L. M., Milovanov A. V.** Fraktalnaya topologiya i strannaya kinetika: ot teorii perkolyacii k problemam kosmicheskoy elektrodinamiki, *Uspehi fizicheskih nauk*, 2004, vol. 174, no. 8, pp. 809—852.
2. **Loycyanskiy L. G.** *Mehanika zhidkosti i gaza*, Moscow—Leningrad, Gostehizdat, 1950. 676 s.
3. **Vihrerazreshayuschee** *modelirovanie kak odin iz metodov opisaniya turbulentnyh techeniy*, URL: http://www.inm.ras.ru/laboratory/direct2.htm
4. **Yun A.** *Development and Analysis of Advanced Explicit Algebraic Turbulence and Scalar Flux Models for Complex Engineering Configurations.* Doctor thesis. Darmstadt. 2005, 103 p.
5. **Menter F. R.** *Methoden, Moeglichkeiten und Grezen numerischer Stroemungsberechnungen.* Numet. Erlangen, 2002, 114 p.
6. **Wachter E. M.** *Andwendung der Instationären Flamelet Methode auf Diffusions Flammen im Post-Processing-Modus.* VDI Verlag. 2005, 195 p.
7. **Smagorinsky J.** General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment, *Monthly Weather Review*, 1963, vol. 91, no. 3, pp. 99—165.
8. **Piomelli U.** Large-Eddy Simulation: Achievements and Challenges, *Progress in Aerospace Sciences*, 1999, vol. 35, pp. 335—362.
9. **Balaras E., Benocci C., Piomelli U.** Two-Layer Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations, *AIAA Journal*, 1996, vol. 34, no. 6, pp. 1111—1119.
10. **Spalart P. R.** Detached-eddy simulation, *Annual Review Fluid Mechanic*, 2009, vol. 41, pp. 181—202.
11. **Wilcox D. C.** *Turbulence modeling for CFD.* California, 1994, 460 p.
12. **Boussinesq J.** Theorie de l' Ecoulemen Tourbillant. Mem, *Presents par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, 1977, vol. 23, pp. 46—50.
13. **Volkov K. N., Emelyanov V. N.** *Modelirovaniye krupnyh vihrey v raschetah turbulentnyh techeniy*, Moscow, Fizmatlit. 2008. 370 p.

УДК 519.87

Е. М. Бронштейн, д-р физ.-мат. наук, проф., e-mail: bro-efim@yandex.ru,
А. А. Давлетбаев, аспирант, e-mail: Arvid_NF@mail.ru,
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Задача маршрутизации с учетом зависимости стоимости транспортировки от погодных условий

Рассмотрена задача построения маршрута, по которому можно доставить однородный груз от пункта производства множеству потребителей транспортным средством ограниченной вместимости с минимальными затратами. Стоимость транспортировки груза между пунктами зависит от времени. Построены квадратичная и линейная целочисленные модели. Проведены вычислительный эксперимент решения задач различной размерности в среде IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.6.1 и сравнительный анализ эффективности моделей.

Ключевые слова: *маршрутизация, нестационарность, линейное целочисленное программирование, метод ветвей и отсечений*

Введение

Рассматривается следующая задача. Транспортное средство (ТС) должно доставить однородный груз из пункта производства потребителям. Процесс погрузки и разгрузки является трудоемким, поэтому в каждом пункте потребления ТС разгружается один раз. Состояние дорог изменяется каждый день, поэтому стоимость проезда между пунктами зависит от времени. Задана соответствующая величина расхода бензина для каждого дня. ТС должно ежедневно возвращаться на базу по окончании перевозок, если они в этот день выполнялись. Вводится ограничение на расстояние, которое может проехать ТС в течение одного дня. Требуется сформировать график перевозок с минимальной суммарной стоимостью.

Впервые оптимизационная задача транспортной логистики (VRP — Vehicle Routing Problem) была сформулирована в работе [1]. За время более чем полвека сформулировано множество подобных задач, в постановке которых учитываются различные ограничения, возникающие на практике. Классификация таких задач приведена, например, в [2]. На сайте [3] аккумулируется информация об этой области исследований. Применяется множество методов решения, как точных, так и эвристических.

Задача, сформулированная в данной статье, опирается на ряд задач транспортной логистики, ранее описанных в работах [4—9]. Нестационарность в данной работе понимается так же, как при постановке нестационарной задачи коммивояжера [10, 11].

В [12] рассматривалась задача, в которой ТС должно было осуществить выезд (и, соответственно, въезд) с базы только один раз, при этом ограничивалось число переездов.

При реализации некоторых из алгоритмов в тех или иных пакетах прикладных программ может понадобиться переход от логических переменных b к их числовым значениям $[b]$. Опишем подобное приведение с использованием линейных неравенств. Заметим, что для пакета CPLEX, который мы использовали, подобного преобразования не требуется.

Пусть $X \subset [-a, a]$ — переменная, принимающая конечное множество значений.

Введем булевы переменные $(x)_+$, $(x)_-$, $(x)_0$: $X \to \{0, 1\}$ — индикаторы неотрицательности, неположительности и нулевого значения (если X такие значения принимает).

Предложение 1. *Булеву переменную* $(x)_+$ *можно задать системой линейных неравенств* $(x)_+ \leqslant 1 + x/a$, $(x)_+ \geqslant (x + 0{,}5m)/(a + 0{,}5m)$, *где* $m = \min\{|x|: x \in X, x \neq 0\}$.

Действительно, при $x \geqslant 0$ неравенства принимают вид $(x)_+ \leqslant 1 + p$, $(x)_+ \geqslant r$, где $p > 0$, $r \in (0, 1]$, т.е. $(x)_+ = 1$. При $x < 0$ неравенства принимают вид $(x)_+ < 1$, $(x)_+ \geqslant r$, где $r < 0$, т.е. $(x)_+ = 0$.

Для $(x)_-$ аналогичное представление можно получить из того, что $(x)_- = (-x)_+$. Наконец, $(x)_0 = (x)_+ + (x)_- - 1$•.

В частности, если переменная X целочисленная, то можно принять $m = 1$. Далее мы не будем явно выписывать подобные преобразования.

Математические модели

Математические модели, построенные в данной работе, ориентированы на применение специализированных пакетов прикладных программ, в частности, использован оптимизационный пакет CPLEX. В связи с этим важно, чтобы число ограничений задачи росло полиноминально с ростом размерности. В [13] такие модели названы компактными.

Обозначения:

N — число пунктов потребления, пронумерованных числами 1, ..., N (база имеет номер 0);

a_i, $i = 1, ..., N$, — потребность в грузе в i-м пункте потребления;

S — вместимость ТС;

P — число дней доставки (предусмотрено, что в некоторые дни доставка может не проводиться);

$b^p \geqslant 1$, $p = 1, ..., P$, — коэффициент расхода бензина в p-й день в зависимости от погодных условий, нормальным погодным условиям соответствует $b^p = 1$;

r_{ij}^p, $i, j = 0, ..., N$, $p = 1, ..., P$, — расстояние (км) между i-м и j-м пунктами в p-й день, оно может изменяться в связи с ремонтными работами и т.д.;

G — максимальное расстояние, которое ТС может проехать при нормальных погодных условиях за один день (км); полагаем, что в зависимости от погодных условий допустимое расстояние уменьшается в b^p раз.

Квадратичная модель. В качестве неизвестных примем булевы переменные:

x_{ij} $(i, j = 0, ..., N)$, равные 1 тогда и только тогда, когда ТС переезжает из i-го пункта в j-й;

y_i^p $(i = 0, ..., N, p = 1, ..., P)$, равные 1 тогда и только тогда, когда ТС посещает i-й пункт в p-й день; считаем, что $y_0^p = 1$ при всех p (если в p-й день груз не доставляется, то $y_i^p = 1$ только при $i = 0$).

Ограничения:

$$\sum_{p=1}^{P} y_i^p = 1 \ (i = 1, ..., N); \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ij} = 1 \ (i = 1, ..., N); \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{N} x_{ij} = 1 \ (j = 1, ..., N); \quad (3)$$

$$x_{jj} = 0 \ (j = 1, ..., N). \quad (4)$$

Условие (1) означает, что каждый пункт потребления посещается в некоторый день (единственный), условие (2) — что в каждый пункт потребления ТС въезжает, условие (3) — что из каждого пункта потребления ТС выезжает. Смысл условия (4) очевиден.

$$x_{ij} \leqslant 2 - \sum_{p=1}^{P} [y_i^p \neq y_j^p]\ i, j = 1, ..., N. \quad (5)$$

Условие (5) означает, что если есть переезд из i-го пункта в j-й, то эти пункты посещаются в один день. Действительно, в силу (1) каждому пункту соответствует единственное значение p — номер дня. Тем самым, если эти пункты посещаются в один день, то $\sum_{p=1}^{P} [y_i^p \neq y_j^p] = 0$; если в разные, то $\sum_{p=1}^{P} [y_i^p \neq y_j^p] = 2$. Отсюда, если пункты посещаются в разные дни, то $x_{ij} = 0$, и наоборот.

По условию (1) все пункты потребления разбиваются на непересекающиеся подмножества, соответствующие отдельным дням.

Рассмотрим граф, который порождается переездами в какой-либо день. Из условий (2), (3) следует, что каждая связная компонента графа является либо простой цепью, либо простым циклом, за исключением 0-го пункта, который может входить в несколько цепей или циклов.

По условиям (2), (3), (5) простой цепью связная компонента быть не может. Действительно, в этом случае начальный или конечный пункт цепи (пусть начальный) ненулевой, для определенности j-й. По условию (2) $x_{ij} = 1$ для некоторого $i = 0, ..., N$. Противоречие.

Таким образом, связные компоненты являются либо простыми циклами, не содержащими 0-й пункт, либо объединением простых циклов, содержащих 0-й пункт.

Пусть целые числа l_j удовлетворяют условиям

$$1 \leqslant l_j \leqslant N\ (j = 0, ..., N); \quad (6)$$

$$l_0 = 0; \quad (7)$$

$$l_j \leqslant l_i + x_{ij} + (1 - x_{ij})N\ (i = 0, ..., N, j = 1, ..., N); \quad (8)$$

$$l_j \geqslant l_i + x_{ij} - (1 - x_{ij})N\ (i = 0, ..., N, j = 1, ..., N). \quad (9)$$

Из условий (8), (9) при $x_{ij} = 1$ получаем $l_j = l_i + 1$, при $x_{ij} = 0$ какое-либо дополнительное ограничение на l_j не возникает.

Предложение 2. *В построенном графе нет циклов, не содержащих 0.*

Доказательство. Пусть связная компонента рассматриваемого графа есть цикл, не содержащий 0, для определенности, x_i, x_j, x_k.

Тогда получаем:

$l_j = l_i + 1$,

$l_k = l_j + 1 = l_i + 2$,

$l_i = l_k + 1 = l_i + 3$ — противоречие •.

Тем самым граф имеет единственную связную компоненту, которая является объединением нескольких циклов с общим нулевым пунктом. Отсюда с учетом (7) значения l_j определяются однозначно, причем эти значения — номера пунктов от нулевого в порядке прохождения цикла.

Для обеспечения единственности цикла используем условие

$$x_{0i} + x_{0j} + y_i^p + y_j^p \leqslant 3$$
$$(i, j = 1, ..., N, p = 1, ..., P, i \neq j). \quad (10)$$

При выполнении условия (10), если ТС выезжает в какие-нибудь различные пункты из нулевого, то это происходит в разные дни.

Ограничение на вместимость

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^p a_i \leqslant S,\ p = 1, ..., P; \quad (11)$$

ограничение на пройденный путь в течение дня

$$\sum_{j=1}^{N-1} x_{0j} y_j^p r_{ij}^p + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} x_{ij} y_i^p r_{ij}^p \leqslant G/b^p,\ p = 1, ..., P. \quad (12)$$

Целевая функция квадратичной модели имеет вид

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} x_{ij} y_i^p b^p r_{ij}^p \to \min. \quad (13)$$

Линейная модель. В качестве неизвестных примем булевы переменные z_{ij}^p ($i, j = 0, ..., N, p = 1, ..., P$), равные 1 тогда и только тогда, когда ТС переезжает из i-го пункта в j-й в p-й день.

Ограничения:

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=0}^{N} z_{ij}^p = 1,\ i = 1, ..., N; \quad (14)$$

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=0}^{N} z_{ij}^p = 1,\ j = 1, ..., N \quad (15)$$

(каждый пункт, кроме 0, посещается однократно);

$$\sum_{i=0}^{N} z_{ij}^p = \sum_{e=0}^{N} z_{je}^p,\ j = 0, ..., N,\ p = 1, ..., P \quad (16)$$

(выезд из пункта и въезд в него осуществляются в один и тот же день);

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} z_{ij}^p a_i \leqslant S,\ p = 1, ..., P \quad (17)$$

(недопустимость переполнения ТС каждый день);

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} z_{ij}^p r_{ij}^p \leqslant G/b^p,\ p = 1, ..., P \quad (18)$$

(ограничение на расстояние, проезжаемое за один день);

$$1 \leqslant l_j \leqslant N\ (j = 0, ..., N); \quad (19)$$

$$l_0 = 0; \quad (20)$$

$$l_j \leqslant l_i + \sum_{p=1}^{P} z_{ij}^p + \left(1 - \sum_{p=1}^{P} z_{ij}^p\right)N,$$
$$i = 0, ..., N, j = 1, ..., N; \quad (21)$$

$$l_j \geqslant l_i + \sum_{p=1}^{P} z_{ij}^p - \left(1 - \sum_{p=1}^{P} z_{ij}^p\right)N,$$
$$i = 0, ..., N, j = 1, ..., N; \quad (22)$$

$$l_j \leqslant \sum_{i=0}^{N} \sum_{e=1}^{N} z_{ie}^P + (1 - z_{j0}^p)N,$$
$$j = 1, ..., N, p = 1, ..., P; \quad (23)$$

$$l_j \geqslant \sum_{i=0}^{N} \sum_{e=1}^{N} z_{ie}^P - (1 - z_{j0}^p)N,$$
$$j = 1, ..., N, p = 1, ..., P. \quad (24)$$

Условия (21), (22) аналогичны условиям (8), (9), а условия (23), (24) не допускают наличия более чем одного цикла, включающего в себя базу (нулевой пункт), в течение одного дня.

Целевая функция линейной модели имеет вид

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} z_{ij}^p b^p r_{ij}^p \to \min. \quad (25)$$

Вычислительный эксперимент

Вычисления проводились в пакете IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.6.1, установленном на компьютере с процессором Intel Core (тактовая частота 2,4 ГГц, ОЗУ 4 Гбайт).

Задача решалась двумя методами, реализованными в пакете:

— динамического поиска,

— ветвей и отсечений.

Первый метод — это "ноу-хау" фирмы IBM, никакие подробности не разглашаются. Применяемый в пакете метод ветвей и отсечений основан на непрерывных релаксациях.

В процессе вычислений исключались заведомо нулевые величины r_{ii}^p (i = 1, ..., N, p = 1, ..., P); x_{ii} (i = 0, ..., N); z_{ii}^p (i = 1, ..., N, p = 1, ..., P).

Веса a_i (i = 2, ..., N) генерировались случайным образом (в программе Pascal ABC с помощью функции *random*) целыми из отрезка [1; 20], отражающие состояние погоды, коэффициенты, b^p (p = 1, ..., P) — из отрезка [1; 2].

Генерация расстояний происходила следующим образом:

1) случайно генерировались координаты точек плоскости таким образом, чтобы расстояние между ними не превышало 100 км;

2) расстояние между полученными точками увеличивалось на 100 км, таким образом расстояние варьировалось в пределах [100, 200] км;

3) генерировались изменения полученного расстояния в какие-либо дни: если для заданных дня, пунктов въезда и выезда функция *random*(6) возвращала число 5, на этот и все последующие дни для текущего переезда задавалось изменение расстояния не более чем на 50 км (также с помощью функции *random*) и в итоге окончательный диапазон расстояний составлял [50, 250] км. Например, если расстояние между пунктами i и j с 1-го по (s − 1)-й день 150 км, а с s-го дня начались ремонтные работы, то с s-го по P-й день расстояние составит 200 км (придется ехать в обход).

Вместимость S аналогично [14] принималась равной $2\max\{|a_i|\}$. Число дней принималось равным числу пунктов, т.е. $P = N + 1$.

Для каждого числа пунктов (N) генерировалось 10 примеров. Результаты эксперимента отражены в табл. 1 (квадратичная модель) и табл. 2 (линейная модель), в ячейках приведены последовательно среднее число итераций, среднее число ветвей в дереве решений и среднее время выполнения (в секундах).

Таблица 1

Квадратичная модель

N	Динамический метод	Метод ветвей и отсечений
4	$4,4 \cdot 10^4/1,6 \cdot 10^3/27,34$	$4,5 \cdot 10^4/1,6 \cdot 10^3/27,61$
5	$6,2 \cdot 10^5/2,4 \cdot 10^4/741,61$	$6,2 \cdot 10^5/2,4 \cdot 10^4/724,41$

Таблица 2

Линейная модель

N	Динамический метод	Метод ветвей и отсечений
4	$2,7 \cdot 10^2/11/0,28$	$3,8 \cdot 10^2/29/0,37$
5	$2,8 \cdot 10^3/461/0,57$	$4,2 \cdot 10^3/826/0,70$
6	$9,4 \cdot 10^3/1,3 \cdot 10^3/1,12$	$1,3 \cdot 10^4/2,2 \cdot 10^3/1,33$
7	$7,7 \cdot 10^4/8,7 \cdot 10^3/5,09$	$1,0 \cdot 10^5/1,4 \cdot 10^4/4,46$
8	$3,0 \cdot 10^5/3,4 \cdot 10^4/23,29$	$4,5 \cdot 10^5/6,4 \cdot 10^4/20,95$
9	$1,5 \cdot 10^6/1,5 \cdot 10^5/115,11$	$2,8 \cdot 10^6/3,6 \cdot 10^5/137,63$
10	$5,2 \cdot 10^6/4,5 \cdot 10^5/550,89$	$9,0 \cdot 10^6/1,0 \cdot 10^6/627,75$

Для решения задачи при большем числе пунктов ресурсов ПК не хватило. Квадратичная модель оказалась очень ресурсно-затратной.

Линейная модель оказалась эффективнее квадратичной. Из таблицы видно, что по времени решения при $N < 9$ существенной разницы между двумя методами не наблюдается, а при $N = 9$, 10 более эффективен динамический метод. Для задач размерностей 4, 5 значения целевых функций, полученные при использовании обеих моделей, естественно, совпали.

Заключение

При сравнении квадратичной и линейной моделей эффективнее по времени решения и размерности решаемых задач оказалась линейная модель. При этом по числу переменных квадратичная модель (число переменных порядка $N^2 + NP$, ограничений порядка N^2P) существенно экономнее линейной модели (число переменных порядка N^2P, ограничений порядка $N\max\{N, P\}$). Динамический метод оказался более эффективным, нежели метод ветвей и границ. Дальнейший прогресс связан с совершенствованием как моделей, так и программных средств. В частности, как отметила K. Archetti (Брешиа, Италия) в докладе на 3-м совещании Европейской рабочей группы VeRoLog (Осло, 2014 г) [15], CPLEX 11 (2007) работает почти в 30 000 раз быстрее, чем CPLEX 1 (1991).

Список литературы

1. **Dantzig G. B.** The Truck Dispatching Problem / Dantzig G. B., Ramser R. H. // Management Science. 1959. N. 6. P. 80—91.
2. **Бронштейн Е. М., Заико Т. А.** Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 133—147.
3. **URL**: http://neo.lcc.uma.es/vrp/
4. **Ralphs T. K.** On the Capacitated Vehicle Routing Problem // Math. Program., Ser. B. 2003. Vol. 94. P. 343—359.
5. **Laporte G., Nobert Y., Taillefer S.** Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems // Transportation Science. 1988. Vol. 22. P. 161—172.
6. **Crevier B., Cordeau J.-F., Laporte G.** The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes // European Journal of Operational Research. 2007. Vol. 176. P. 756—773.
7. **Malandraky C., Daskin M. S.** Time Dependent Vehicle Routing Problems: Formulations, Properties and Heuristic Algorithms Malandraky // Transportation Science. 1992. Vol. 26. P. 185—200.
8. **Ichoua S., Gendreau M., Potvin J.-Y.** Vehicle Dispatching With Time-Dependent Travel Times // European Journal of Operational Research. 2003. Vol. 144. P. 379—396.
9. **Stegers E.** A Solution Method for Vehicle Routing Problems with Time-Dependent Travel Times. Delft: Delft University of Technology, 2009.
10. **Picard J.-C., Queyranne M.** The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // Operations Research. 1978. Vol. 26. N. 1. P. 86—110.
11. **Gouveia L., Vob S.** A classification of formulations for the (time-dependent) traveling salesman problem // European Journal of Operational Research. 1995. Vol. 83. P. 69—82.
12. **Бронштейн Е. М., Давлетбаев А. А.** Нестационарная задача построения маршрута транспортного средства // Проблемы управления. 2014. № 3. С. 23—28.
13. **Furtadoa M. R., Munaria P., Morabito R.** Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation. URL: www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.h.
14. **Бронштейн Е. М., Гиндуллин Р. В.** Точные решения некоторых оптимизационных задач транспортной логистики // Матем. моделирование. 2013. Т. 25, № 11. С. 121—127.
15. **URL**: http://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74

E. M. Bronstein, Sc. D., Professor, e-mail: bro-efim@yandex.ru,
A. A. Davletbaev, Postgraduate Student, e-mail: Arvid_NF@mail.ru,
Ufa State Aviation Technical University

Vehicle Routing Problem with Transport Cost Depending on Weather

The problem of constructing a cyclic route with minimal transport cost for delivering a homogeneous cargo from a production point to consumers by limited capacity vehicle is considered. The cost of transportation between points depends on time. The corresponding integer linear and quadratic models are constructed. Computer experiments solving problems of different dimensions and comparative analysis efficiency of models were carried out in environment IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.6.1.

Keywords: *routing, nonstationarity, linear integer programming, branchs and cuts method*

References

1. **Dantzig G. B., Ramser R. H.** The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 1959, no. 6, pp. 80—91.
2. **Bronshtein E. M., Zaiko T. A.** Deterministic optimization problems of transportation logistics, *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 10, pp. 2132—2144.
3. **URL**: http://neo.lcc.uma.es/vrp/
4. **Ralphs T. K., Kopman L., Pulleyblank W. R., Trotter L. E. Jr.** On the Capacitated Vehicle Routing Problem, *Math. Program., Ser. B.*, 2003, vol. 94, pp. 343—359.
5. **Laporte G., Nobert Y., Taillefer S.** Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems, *Transportation Science*, 1988, vol. 22, pp. 161—172.
6. **Crevier B., Cordeau J.-F., Laporte G.** The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes, *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 176, pp. 756—773.
7. **Malandraky C., Daskin M. S.** Time Dependent Vehicle Routing Problems: Formulations, Properties and Heuristic Algorithms, *Transportation Science*, 1992, vol. 26, pp. 185—200.
8. **Ichoua S., Gendreau M., Potvin J.-Y.** Vehicle Dispatching With Time-Dependent Travel Times, *European Journal of Operational Research*, 2003, vol. 144, pp. 379—396.
9. **Stegers E. A.** *Solution Method for Vehicle Routing Problems with Time-Dependent Travel Times.* Delft: Delft University of Technology, 2009, vol. 83.
10. **Picard J.-C., Queyranne M.** The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling, *Operations Research*, 1978, vol. 26, no 1, pp. 86—110.
11. **Gouveia L., Vob S.** A classification of formulations for the (time-dependent) traveling salesman problem, *European Journal of Operational Research*, 1995, vol. 83, pp. 69—82.
12. **Bronshtein E. M., Davletbaev A. A.** Nestacionarnaja zadacha postroenija marshruta transportnogo sredstva, *Problemy upravlenija*, 2014, no. 3, pp. 23—28. (Non-stationary problem of creation of a route of the vehicle // Problems of management 2014, no. 3, pp. 23—28.)
13. **Furtadoa M., Munaria P., Morabito R.** *Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation.* URL: www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.h
14. **Bronshtein E. M., Gindullin R. V.** Tochnye resheniya nekotoryh optimizacionnyh zadach transportnoy logistiki. Exact solutions of some optimization problems of transport logistics, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 332—336.
15. **URL**: http://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74