

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ MODELING AND OPTIMIZATION

УДК 621.675

И. Я. Львович¹, д-р техн. наук, проф., office@vivt.ru,
Я. Е. Львович², д-р техн. наук, проф., office@vivt.ru,
А. П. Преображенский², д-р техн. наук, проф., app@vivt.ru,
О. Н. Чопоров², д-р техн. наук, проф., choporov_oleg@mail.ru
¹Панъевропейский университет, Братислава
²Воронежский институт высоких технологий, Воронеж

Особенности методов вычислительной гидродинамики для моделирования турбулентности

Проводится аналитический обзор методов, применяемых для моделирования турбулентности на персональных компьютерах. Указаны вычислительные особенности рассматриваемых методов, которые могут использоваться в математическом обеспечении подсистем моделирования турбулентности в соответствующих САПР. Результаты исследований показывают, что вычислительная гидродинамика может занять доминирующее место, превзойдя по пространности экспериментальные и аналитические методы.

Ключевые слова: турбулентность, моделирование, математическое обеспечение САПР, вычислительная физика, уравнение, вихрь, интеграл, инженерное приложение, жидкость, метод

Введение

В настоящее время продолжает развиваться интеграция САПР (computer-aided design, CAD) с системами моделирования (Computer-aided engineering, CAE), позволяющими проводить тестирование создаваемого объекта непосредственно во время проектирования. Кроме того, средства, которые дают возможность ставить вычислительные эксперименты, достаточно давно используются в науке, когда натурные эксперименты слишком дороги, невозможны или их необходимо повторить большое число раз в одинаковых условиях.

Несмотря на то что большинство технических процессов описывается известными физическими законами, часто практически невозможно заранее представить, как поведет себя некий объект в тех или иных условиях. Данное обстоятельство обусловлено лишь чрезвычайной сложностью современных систем. Вычислительная физика представляет собой третий способ проведения научных и технических исследований в дополнение к эксперименту и теории. При этом компьютер играет роль прибора, который дает новые возможности для изучения свойств различных физических моделей. Развитие компьютерной техники и численных методов вычислительной физики позволяет не только работать с все более сложными моделями, но и применять различные способы визуализации полученного результата.

Целью работы является проведение обзора методов, используемых для моделирования турбулентности на персональных компьютерах. При разработке САПР подсистема моделирования турбулентности может динамически подключаться в виде отдельного модуля.

Большинство физических явлений описываются дифференциальными уравнениями в частных производных (Partial Differential Equations, PDE). Как известно, аналитические решения для PDE могут быть получены лишь в простейших модельных случаях, которые на данный момент представляют больше научный интерес, чем технический. В практических задачах применяются численные и приближенные методы решения. Вычислительные эксперименты можно условно разделить на три категории. К первой относятся эксперименты, предназначенные для моделирования сложных устройств, с тем чтобы оценить большое число вариантов, прежде чем создавать оптимальную модель с применением дорогостоящей технологии. Вторая группа вычислительных экспериментов направлена на получение информации в тех ситуациях, когда имеется большой разрыв между возможностями теории и эксперимента. Лабораторные эксперименты сталкиваются со всей сложностью природы: условия могут с трудом поддаваться контролю, измерения не всегда можно легко осуществить, и,

как следствие, результаты зачастую трудно интерпретировать однозначно.

К третьей группе относятся теоретические эксперименты, которые дают ценные рекомендации для развития теории.

Вычислительная гидродинамика

Одним из самых крупных разделов вычислительной физики является вычислительная гидродинамика (Computational Fluid Dynamics, CFD). В нее входят методы численного моделирования для описания движения жидких сред, что позволяет существенно ускорить разработку различных технических устройств. Кроме технических приложений вычислительная гидродинамика широко применяется и в других областях, таких как моделирование атмосферных условий, динамики огня, биохимических процессов и т.д.

Развитие методов численного моделирования течений началось в 50-х годах прошлого столетия с появлением вычислительной гидроаэродинамики. С середины 70-х до 80-х годов из-за недостатка компьютерных мощностей вычислительная гидродинамика в большей степени использовалась в научных целях для моделирования относительно простых и элементарных случаев течения. Именно в это время закладывались ее математический и физический фундаменты.

С наступлением 90-х годов и по настоящее время развитие вычислительной техники позволило широко применять методы численного моделирования. Вычислительная гидродинамика существенно расширила свой математический и физический аппарат, усовершенствовались модели турбулентности, горения, излучения, акустики, двухфазных течений, методы дискретизации и численного решения дифференциальных уравнений и т.д.

С развитием компьютерной техники и совершенствованием методов вычисления и анализа данных вычислительная гидродинамика может занять доминирующее место, превзойдя по распространенности экспериментальные и аналитические методы. К достоинствам численного моделирования течений в инженерной практике можно отнести: сокращение времени разработки технических устройств, моделирование процессов и течений, для которых недоступно проведение эксперимента, детальная картина процессов, снижение стоимости разработки. Вместе с тем, вычислительная гидродинамика имеет такие недостатки, как конечная точность расчета, которая в некоторых случаях способна перечеркнуть преимущества численного моделирования.

Особый интерес представляет моделирование турбулентных течений, в первую очередь из-за того, что такие течения наиболее распространены. Кроме того, до сих пор не существует полной теории, которая бы описывала подобные течения. Исследование экспериментальными методами также за-

труднено. Поэтому моделирование турбулентных течений занимает главенствующую роль в практических расчетах и теоретических исследованиях.

Турбулентность

Течения жидкостей и газов, наблюдаемых в природных условиях и технических устройствах, делятся на два принципиально различающихся типа: ламинарные (спокойные, плавные, регулярные) и турбулентные (хаотические, неупорядоченные во времени и в пространстве).

Ламинарные течения являются скорее исключением, чем правилом. Их отличают малые размеры и большая вязкость среды. Типичными примерами ламинарных течений служат обтекание сферы низкоскоростным потоком и течение смазочного масла в подшипнике.

Большинство движений жидкостей, газов и плазмы, встречающихся в технике, являются турбулентными. Течение воды в реках и каналах, течение нефти и природного газа в трубопроводах, течения в проточных трубах турбомашин и газовых трактах ракетных двигателей являются турбулентными. Турбулентность оказывает влияние на процессы горения, смешения и переноса частиц дисперсионной примеси. Среди течений с геофизическими масштабами следует отметить течение воздуха в атмосферном пограничном слое, струйные течения в верхней атмосфере, течения воды ниже поверхности океана. Облака в атмосфере, облака межзвездного газа, газовые туманности также находятся в состоянии турбулентного движения.

Состояние течения можно охарактеризовать некоторым числом, называемым числом Рейнольдса, определяемым по следующей формуле:

$$Re = \frac{l_0 u_0}{\nu_0}, \quad (1)$$

где l_0 — характерная длина; u_0 — характерная скорость; ν_0 — коэффициент кинематической вязкости среды. Число Рейнольдса характеризует соотношение между инерционными и вязкостными силами. Если это соотношение мало, т.е. инерциальные силы сравнимы с вязкостными, течение имеет упорядоченную структуру, представляя собой ламинарное течение.

Если соотношение велико, т.е. инерциальные силы преобладают над вязкостными, течение является нестабильным и возмущения разрушают упорядоченную структуру, приводя к турбулентной структуре течения. Критическое значение числа Рейнольдса зависит от конкретного вида течения. Для потока воды в трубе числа Рейнольдса выше 4000, скорее всего, соответствуют турбулентным потокам, в то время как число Рейнольдса ниже 2100 указывает на его ламинарность. Область $2100 < Re < 4000$ называется *переходной зоной*. Процесс образования турбулентности в переходной

зоне описывается фрактальной геометрией и теорией перколяции [1]. В частности, теория перколяции на основе метода статистических испытаний моделирует распространение турбулентного режима по объему жидкости и позволяет в среднем оценить время перехода в турбулентный режим, а также структуру течения в больших масштабах. Процесс возникновения турбулентности в течении, изначально являющемся безвихревым, обусловлен вязкостью.

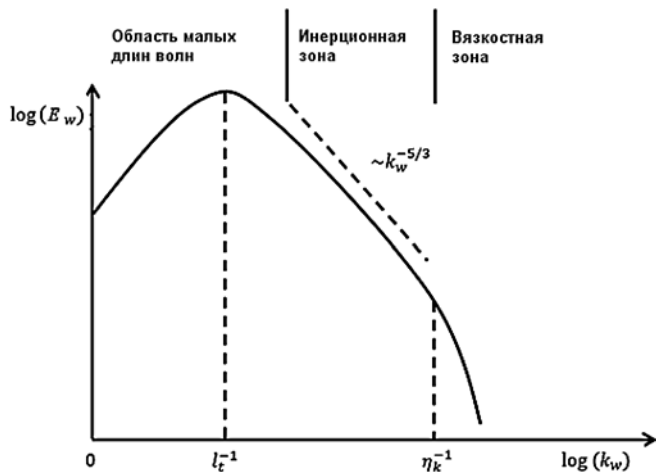
Из теоремы Кельвина следует, что нулевая завихренность сохраняется в процессе движения идеальной жидкости. Присутствие твердых границ порождает завихренность. Завихренность увеличивается вследствие механизма растяжения вихревых нитей, и в этой области течения, как правило, становится турбулентным.

С теоретической точки зрения турбулентные течения представляют собой пример нелинейной открытой системы с большим числом степеней свободы. В реальных турбулентных потоках спектр изменения волновых чисел (диапазон изменения масштабов турбулентного движения) достигает нескольких порядков.

Турбулентное течение можно представить как множество вращающихся в разные стороны и в разных плоскостях вихрей. Большие вихри переходят в маленькие вихри, размеры которых немного превышают длину молекулярного пробега, рассеивают энергию и теплоту посредством молекулярной вязкости. Этот процесс был математически описан Колмогоровым и назван *энергетическим каскадом*. Возможен и обратный процесс образования крупных вихрей из малых вихрей, получивший название *обратный распад*. Определяя длину волны λ обратно пропорционально размеру вихря l как

$$\lambda = \frac{2\pi}{l}, \quad (2)$$

можно представить спектр кинетической энергии как функцию от длины волны (см. рисунок).



Спектр турбулентной кинетической энергии E_w в зависимости от волнового числа k_w

Спектр турбулентности кинетической энергии имеет три характерные зоны:

- область малых длин волн, содержащих крупные вихри, несущие большую часть кинетической энергии;
- инерционная зона, где под воздействием инерционных сил крупные вихри распадаются на более мелкие;
- область больших волн, образующих диссипативную (вязкостную) зону, где мельчайшие вихри диссипируют в теплоту под действием сил трения.

В итоге турбулентное течение характеризуется такими свойствами: случайные параметры относительно времени и пространства; нестационарные параметры; трехмерность; диссипативные параметры; вихревые особенности.

Поэтому описать турбулентности можно с помощью вероятностных законов, используя функцию плотности вероятности. Однако в рамках данной работы рассматриваются только осредненные параметры (скорость, давление, плотность и т.д.) течения.

Проблема описания турбулентности

Уравнения Навье—Стокса, описывающие движение множества турбулентных течений вязкой ньютоновской жидкости с достаточно большой точностью, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} &= \\ = F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 V_1; \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} &= \\ = F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \nabla^2 V_2; \\ \frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= \\ = F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 V_3; \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

или кратко, в векторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V &= F - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta V; \\ \nabla \cdot V &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где t — время; ρ — плотность; p — давление; V — скорость; ν — коэффициент кинематической вязкости; F — векторное поле массовых сил.

В анализе решений данных уравнений заключается суть одной из открытых проблем, за решение которых Математический институт Клэя назначил

Основные существующие модели турбулентности и стратегии моделирования

Модель турбулентности	Особенности моделей
I. DNS	Учет всех структур, присущих турбулентным течениям; сверхвысокие требования к компьютерным ресурсам
II. LES	Учет крупных структур, присущих турбулентным течениям, высокие требования к компьютерным ресурсам
III. RANS	
<i>Первого порядка</i>	
Алгебраические уравнения	Эмпирическая информация, простота калибрования; привязка к определенным видам течений
С одним дифференциальным уравнением	Полуэмпирическая информация; простота калибрования; учет ряда эффектов, присущих турбулентным течениям
С двумя дифференциальными уравнениями	Не требуют эмпирических оценок для каждого течения; изотропная турбулентная вязкость/диффузия
Нелинейные уравнения	Анизотропная турбулентная вязкость/диффузия; учет многих эффектов, строгая привязка к калибровочным коэффициентам при нелинейных членах
EARSM/EASFM	Анизотропная турбулентная вязкость/диффузия; учет многих эффектов турбулентности; нахождение коэффициентов при нелинейных членах из упрощенного алгебраического уравнения, получаемого из моделей второго порядка
<i>Второго порядка</i>	
RSM/RSFM	Учет многих эффектов; сложны; требуют решения 7/3 дополнительных нелинейных дифференциальных уравнений для компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скалярного переноса
<i>Примечание.</i> Порядком модели в данном случае называют порядок соответствующего дифференциального уравнения	

премию в 1 млн долларов США. Необходимо доказать или опровергнуть существование глобального гладкого решения задачи Коши для трехмерных уравнений Навье—Стокса. Нахождение общего аналитического решения системы Навье—Стокса для пространственного или плоского потока осложняется тем, что оно нелинейное и в значительной степени зависит от начальных и граничных условий. Нелинейность системы обусловлена наличием конвективной составляющей в левой части уравнений (3) [2].

До сих пор решения этих уравнений найдены лишь для некоторых частных случаев. В настоящее время существует несколько ситуаций (обусловленных простой геометрией), которые решены в аналитическом виде. В остальных случаях используется численное моделирование.

При описании реальных течений в разных технических устройствах приемлемую точность в численном решении можно получить лишь для такой расчетной сетки, в которой ячейки будут меньше, чем самый мелкий вихрь. Это определяет очень большие затраты по расчетному времени на современных компьютерах. В связи с этим создавались разные модели турбулентности, которые упрощают расчеты по реальным потокам.

Модели турбулентности

На настоящий момент есть большое число моделей турбулентности, но ни одна среди существующих моделей не будет универсальной по всем классам инженерных задач. Существуют определенные отличия трех основных методов описания турбулентности: DNS, LES и RANS, разрешенных по времени [3].

DNS и LES позволяют получить информацию о нестационарных эффектах турбулентного течения, RANS оперирует осредненными величинами. Для моделирования нестационарных явлений в RANS используется методика URANS [4].

Процесс выбора оптимальных моделей турбулентности определяется типом течения, специфическим классом задачи, необходимой точностью решения, доступными вычислительными ресурсами и т.п. В табл. 1 приведены основные недостатки и преимущества моделей и подходов для исследования турбулентных течений.

Проведение прямого численного моделирования (DNS)

Прямое численное моделирование (DNS) исходит из решения полных нестационарных уравнений Навье—Стокса и уравнения неразрывности, при этом нет необходимости в дополнительном моделировании и идет учет по всем эффектам, присущим течению. В DNS все физические и химические масштабы длины и времени должны быть разрешены на численной сетке и во временных шагах.

Трудности DNS заключаются в ограниченности компьютерных ресурсов. Число требуемых сеточных узлов и временных шагов существенно превосходят современные вычислительные мощности. Размер ячейки η_k должен удовлетворять колмогоровскому масштабу длины

$$\eta_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad (5)$$

а временной шаг — колмогоровском масштабу времени:

$$\tau_k = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

В указанных формулах ε — скорость диссипации.

Таблица 2

Время расчета турбулентного течения в канале с DNS при различных числах Рейнольдса

Re	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^8$
200 Mflop/s	68 дней	444 дня	610 лет	∞	∞
1 Tflop/s	13 дней	88 дней	122 года	∞	∞

В табл. 2 представлена показывающая зависимость времени расчета от числа Рейнольдса для канала [5].

Очевидно, что DNS позволяет получать результаты при современном развитии вычислительной техники только при малых числах Рейнольдса. Кроме этого, существует проблема постановки граничных условий. Для описания случайного характера турбулентного течения необходимо адекватное задание нестационарных входных и выходных условий. С практической точки зрения статистика, полученная с DNS, может быть использована для тестирования и калибровки моделей, базирующихся на осредненных уравнениях Навье—Стокса.

Проведение моделирования крупных вихрей (LES)

Когда моделируют крупные вихри, то они напрямую разрешаются на численной сетке и по времени, а моделируют мельчайшие вихри в подсеточном масштабе. В наибольших вихрях есть максимум рейнольдсовых напряжений, и его необходимо рассчитать. В мелких же вихрях есть небольшие рейнольдсовые напряжения, также мелкомасштабные турбулентности близки к изотропным и имеют характеристики, близкие к универсальным, они легче поддаются моделированию. Подсеточные модели, используемые в LES, обычно имеют значительную диффузию и диссипацию, что дает возможность преодолевать вычислительные проблемы, которые касаются представления весьма мелких вихрей на выбранных сетках, и стабилизировать численные расчеты. Основное отличие LES от DNS заключается в концепции процедуры фильтрования для LES, т.е. разделения мелкомасштабных и крупных структур. Математически разделение величины $\bar{\phi}$ и мелких структур ϕ' через обобщенный фильтр [6] записывается как

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} + \phi'; \\ \bar{\phi}(x, t) &= \iiint \phi(x - x^*, t) G(x^*) d^3x^*, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь x^* — переменная интегрирования.

Фильтрующая функция G нормализуется как

$$\iiint G(x - \varepsilon, \Delta) d^3\varepsilon = 1, \quad (8)$$

здесь $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ — ширина фильтра.

Выбор функции для фильтра — один из центральных пунктов в моделировании крупных вихрей [6].

Ниже приведены некоторые из широко используемых фильтров.

Осредненный по объему коробочный фильтр:

$$G(x - \varepsilon; \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3}, & |x_i - \varepsilon_i| < \frac{\Delta x_i}{2}; \\ 0, & |x_i - \varepsilon_i| > \frac{\Delta x_i}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

Фильтр Гаусса:

$$G(x - \varepsilon; \Delta) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{3/2} \exp \left(-6 \frac{|x_i - \varepsilon_i|^2}{\Delta^2} \right). \quad (10)$$

Сокращенный фильтр Фурье:

$$G(x - \varepsilon; \Delta) = \frac{1}{\Delta^3} \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(x_i - \varepsilon_i)/\Delta}{(x_i - \varepsilon_i)/\Delta}. \quad (11)$$

Существует множество других фильтров, однако все фильтры вводят масштаб Δ , который представляет наименьший масштаб турбулентности, допустимый фильтром.

Отфильтрованные уравнения Навье—Стокса и уравнение неразрывности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (12)$$

где подсеточные напряжения τ_{ij}^{SGS} вычисляются по следующей формуле:

$$\tau_{ij}^{SGS} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (13)$$

Здесь $\bar{\mu}$ — средний коэффициент вязкости среды, \bar{p} — среднее давление.

Член $\bar{u}_i \bar{u}_j$ является новым неизвестным, который показывает влияние мельчайших структур, индекс j показывает дополнительное разбиение сетки. Сокращение SGS (Sub Grid Stress — напряжения подсеточного масштаба) подчеркивает, что τ_{ij}^{SGS} играет схожую роль в отфильтрованных уравнениях, как и тензор рейнольдсовых напряжений в RANS. Иногда τ_{ij}^{SGS} называют тензором напряжений мельчайших структур.

Модель Смагоринского

Большинство моделей подсеточного масштаба основываются на предположении о вихревой вязкости. Влияние мельчайших структур на крупные структуры учитывается прибавлением вязкости μ_t :

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t. \quad (14)$$

Для неизвестного подсеточного тензора напряжений τ_{ij}^{SGS} используется следующее модельное уравнение:

$$\tau_{ij}^{SGS} - \frac{1}{3} \tau_{ij}^{SGS} \delta_{ij} \approx \tau_{ij}^{mod} \delta_{ij} = 2\mu_t \bar{S}_{ij}. \quad (15)$$

Здесь δ_{ij} — оператор Кронекера, τ_{ij}^{mod} — подсеточный тензор напряжений, используемый в данной модели, \bar{S}_{ij} — тензор скоростей деформации.

Тензор скоростей деформации выражается через крупные структуры как

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (16)$$

Существует множество моделей для определения турбулентной вязкости μ_t . Первая модель для подсеточных напряжений была предложена Смагоринским. По аналогии с моделью Прандтля турбулентная вязкость моделируется как

$$\mu_t = l^2 |\bar{S}_{ij}|, \quad (17)$$

где $|\bar{S}_{ij}| = \sqrt{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}$, а l представляет собой масштаб турбулентности. Для определения масштаба турбулентности используют ширину фильтра с коэффициентом пропорциональности C_S :

$$l = C_S \Delta. \quad (18)$$

Коэффициент пропорциональности C_S носит название *константы Смагоринского*. Так же, как и в модели Парндтля, коэффициент пропорциональности C_S можно скалибровать. Диапазон выбора C_S для различных течений колеблется от 0,1 до 0,24. Обычно выбирается $C_S = 0,1$.

Модель Смагоринского отличается простотой и хорошей сходимостью вследствие ее диссипативности. Однако имеются и значительные недостатки, например сложность правильного выбора константы C_S . Так как модель базируется на статистическом анализе, невозможно наблюдать нестационарные эффекты между разрешенными крупными структурами и подсеточными масштабами, как, например, при кратковременных переходах турбулентной кинетической энергии от мелких структур к крупным (*back-scattering*). Другой недостаток заключается в том, что модель Смагоринского не делает различий между турбулентными и ламинарными градиентами, поэтому в переходных зонах незначительные возмущения демпфируются и не наблюдается перехода от ламинарного к турбулентному течению. Обойти данные недостатки позволяет модель, использующая динамическую процедуру, предложенную Германо.

В модели Германо коэффициент пропорциональности C_S рассчитывается с помощью динамической процедуры. Идея динамической процедуры базируется на предположении о схожем характере малых вихрей крупных структур и вихрей подсеточного масштаба. Таким образом, появляется возможность оценить коэффициент пропорциональности (по названию модели — *константа Германо*) из разрешенных крупных структур. Динамическая процедура не зависит от используемой модели для подсеточных структур. Для осуществления данной процедуры используют два фильтра: обычный и тестовый. При тестовой фильтрации отделяется часть крупных структур, которые рассматриваются как новые отфильтрованные мельчайшие структуры, из которых можно найти значения обычных отфильтрованных мельчайших структур τ_{ij}^{SGS} . Таким образом, в области между обычным фильтром Δ и тестовым фильтром $\hat{\Delta}$ находится необходимая информация для явного нахождения мельчайших структур и их сравнения с модельными.

Уравнение импульсов при тестовом фильтровании имеет вид

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_i \hat{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial T_{ij}^{SGS}}{\partial x_j}, \quad (19)$$

где подсеточные напряжения T_{ij}^{SGS} вычисляются по следующей формуле:

$$T_{ij}^{SGS} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}, \quad (20)$$

ρ — плотность жидкости.

Нормальные мельчайшие структуры из уравнений (13) и (20) для тестового фильтра можно записать как

$$\widehat{\overline{\tau_{ij}^{SGS}}} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}. \quad (21)$$

Из двух последних соотношений можно записать:

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\overline{\tau_{ij}^{SGS}}} = \widehat{u_i} \widehat{u_j} - \widehat{\overline{u_i u_j}}. \quad (22)$$

Для разрешения мелких структур для обоих фильтров используется модель Смагоринского:

$$\tau_{ij}^{SGS} - \frac{1}{3} \tau_{ij}^{SGS} \delta_{ij} = -2C\Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}; \quad (23)$$

$$\tau_{ij}^{SGS} - \frac{1}{3} \tau_{ij}^{SGS} \delta_{ij} = -2C\hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij}. \quad (24)$$

В обоих уравнениях (23) и (24) константа Смагоринского C_S заменена на константу Германо C . Подставляя (23) и (24) в (22), можно найти кон-

танту Германо, а через величины тестового фильтра получить осредненную величину:

$$L_{ij} = -2C\hat{\Delta}^2 \left[\frac{\hat{\Delta}^2}{2} |\hat{S}| \hat{S}_{ij} \right] = -2CM_{ij}.$$

Здесь M_{ij} — вспомогательный тензор. Отсюда

$$C = \frac{L_{ij}M_{ij}}{2M_{ij}^2}.$$

Значение константы Германо может сильно колебаться в пространстве и во времени, что может привести к отрицательной вязкости. Это означает перенос энергии от подсеточных масштабов к крупным структурам. Такие процессы происходят в реальности, однако это ведет к вычислительной нестабильности. Чтобы обойти этот недостаток, можно пренебречь отрицательными значениями константы Германо и применять осреднение. После осреднения демпфируются высокочастотные гармоники, т.е. на $(n + 1) - m$ временном шаге

$$C_{\text{filtered}}^{(n+1)} = (1 - \varepsilon)C^n + \varepsilon C^{(n+1)},$$

где ε — коэффициент нижней релаксации.

Так как LES включает моделирование мельчайших вихрей, характерные размеры ячеек могут быть намного больше, чем колмогоровский масштаб длины, а временные шаги можно выбрать более крупные, чем они возможны в DNS. С учетом бурного развития техники области использования LES значительно возросли. Есть мнение, что LES постепенно вытеснит RANS. Указанную точку зрения можно считать весьма спорной. До настоящего времени в LES не решили проблему пристеночных течений. Понятно, что около стенок вихри будут малыми и анизотропными, и сеточные временные шаги, необходимые для LES, падают для величин, характерных для DNS. Существующие решения, такие как анизотропные фильтры и описанные выше динамические процедуры, пока не дают удовлетворительных результатов. Одним из решений данной проблемы является комбинирование LES и RANS. Главная идея таких гибридных моделей состоит в том, что в пристеночной зоне используется RANS, а во внешней области — LES, что позволяет значительно увеличить скорость вычислений. В настоящее время существуют две стратегии соединения LES и RANS: так называемое изолированное (зональное) LES и присоединенное DES. При зональном методе используются две отдельные численные сетки — одна для LES и вторая для RANS. Такое моделирование носит название "двухслойное моделирование TLM" (Two-Layer Model) и было впервые предложено Балларасом и Беночи [9]. В DES используется одна сетка и осуществляется только

переход от LES к RANS в пристеночной зоне. Более подробно о DES изложено в работе Спаларта [10]. Однако в гибридных моделях до сих пор остаются не полностью решенными проблемы, например, смешивание зон, т.е. передача информации между зонами. Несмотря на существующие проблемы, моделирование крупных вихрей является перспективным направлением в исследовании турбулентных течений в настоящее время.

Моделирование на базе осредненных уравнений Стокса (RANS)

Этот метод базируется на решении осредненных уравнений Навье—Стокса или уравнений Рейнольдса.

При этом мгновенные значения гидродинамических параметров представляют как сумму осредненной величины $\bar{\phi}$ и ее пульсационной составляющей ϕ' :

$$\phi(x_j, t) = \bar{\phi}(x_j, t) + \phi'(x_j, t). \quad (25)$$

В интегральной форме осреднение по времени можно записать как

$$\phi(\chi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi(x_j, t) dt. \quad (26)$$

Применяя данное осреднение, названное *осреднением по Рейнольдсу*, можно получить определенные уравнения по сохранению масс, импульсов и скаляров (энергия, температура, массовая доля) [11]. Для несжимаемой жидкости это записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\phi' u_i' u_j'} \right) + g_i; \quad (28)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho D \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} - \overline{\phi' u_j'} \right) + \bar{S}, \quad (29)$$

где $\overline{u_i' u_j'}$ — компоненты тензора рейнольдсовых напряжений; $\overline{\phi' u_j'}$ — составляющие потока скаляра.

Составляющие тензорных рейнольдсовых напряжений являются дополнительными шестью неизвестными в уравнении для скаляра. В результате указанная выше система уравнений будет незамкнутой.

При расчете двухфазных течений методом Эйлера—Лагранжа дополнительно к уравнениям (27)—(29) решаются аналогичные уравнения для частиц. Полученные решения суммируются. При методе Эйлера—Лагранжа учет частиц происходит

добавлением источниковых членов в уравнения (28)—(29), и решение происходит итерациями между двумя фазами.

Предположение Буссинеска

Модели турбулентности, используемые в инженерных приложениях в настоящее время, основаны на концепции вязкости и турбулентности диффузии. В 1877 г. Буссинеск [12] выдвинул предположение, что рейнولدсовы напряжения могли быть связаны со скоростью средней деформации через турбулентную вязкость. Для тензора рейнولدсовых напряжений это дает:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (30)$$

где k — удельная кинетическая энергия турбулентности.

Данное уравнение не определяет модель турбулентности, а лишь характеризует, какая структура подобной модели. При этом основной задачей является задание функции турбулентной вязкости ν_t . В отличие от коэффициента молекулярной вязкости ν , коэффициент ν_t определяется состоянием турбулентного течения и не связан со свойствами жидкости. Значение ν_t может значительно изменяться от точки к точке в пространстве в зависимости от характера течения. Предположение Буссинеска относят к моделям первого уровня.

Данное предположение не выполняется даже во многих простых течениях, например в течении в трубе, вращающейся вокруг своей оси, не говоря уже о более сложных течениях. Вместе с тем, во многих случаях, особенно при анализе течений, в которых основное влияние оказывает лишь одна из компонент тензора рейнولدсовых напряжений τ_{xy} , недостаток гипотезы Буссинеска не приводит к заметным погрешностям.

Алгебраические модели

В алгебраических моделях турбулентности (модели нулевого порядка) связь между тензорами рейнولدсовых напряжений и характеристиками среднего движения задается алгебраическими соотношениями. В теории Прандтля принимается, что местное изменение средней скорости потока определяется первой производной от средней скорости по поперечной координате:

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \quad (31)$$

где x — координата, совпадающая с направлением потока, y — поперечная координата. Соображения размерности приводят к введению линейного масштаба l (масштаба турбулентности или пути перемешивания), который определяется с помощью дополнительных гипотез или данных измерений.

Формула Прандтля оставляет некоторые возможности для учета интегральных свойств потока и его предыстории благодаря неопределенности пути смещения. В модели Прандтля движение частиц жидкости в турбулентном потоке полагается подобным движению молекул (масштаб турбулентности соответствует длине свободного пробега молекул, а пульсационная скорость — их тепловой скорости). Турбулентная вязкость связывается со средней скоростью посредством масштаба длины (пути смещения), на котором жидкие частицы сохраняют средние значения количества движения. Несмотря на то что концепция вихря играет существенную роль в построении полуэмпирических моделей турбулентности и, в частности, в модели Прандтля, она является абстрактной, поскольку преследует одну цель — схематично изобразить турбулентное течение.

Заключение

В настоящий момент сформировано большое число разных моделей для проведения расчетов турбулентных течений. Они различаются сложностью решения и точностью описания течения.

Был проведен обзор основных моделей турбулентности и выявлены их слабые и сильные стороны. Полученные результаты могут быть полезны при выборе модели турбулентности для конкретной задачи в подсистемах моделирования.

Список литературы

1. **Зеленый Л. М., Милованов А. В.** Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физических наук. 2004. Т. 174, № 8. С. 809—852.
2. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, 676 с.
3. **Вихреразрешающее** моделирование как один из методов описания турбулентных течений. URL: <http://www.inm.ras.ru/laboratory/direct2.htm>
4. **Yun A.** Development and Analysis of Advanced Explicit Algebraic Turbulence and Scalar Flux Models for Complex Engineering Configurations. Doctor thesis. Darmstadt. 2005. 103 p.
5. **Menter F. R.** Methoden, Moeglichkeiten und Grenzen numerischer Stroemungsberechnungen. Numet. Erlangen. 2002. 114 p.
6. **Wachter E. M.** Anwendung der Instationären Flamelet Methode auf Diffusions Flammen im Post-Processing-Modus. VDI Verlag. 2005. 195 p.
7. **Smagorinsky J.** General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment // Monthly Weather Review. 1963. Vol. 91, N. 3. P. 99—165.
8. **Piomelli U.** Large-Eddy Simulation: Achievements and Challenges // Progress in Aerospace Sciences. 1999. Vol. 35. P. 335—362.
9. **Balaras E., Benocci C., Piomelli U.** Two-Layer Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations // AIAA Journal. 1996. Vol. 34, N. 6. P. 1111—1119.
10. **Spalart P. R.** Detached-eddy simulation // Annual Review Fluid Mechanic. 2009. Vol. 41. P. 181—202.
11. **Wilcox D. C.** Turbulence modeling for CFD. California, 1994. 460 p.
12. **Boussinesq J.** Theorie de l' Ecoulemen Tourbillant. Mem // Presents par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr. 1977. Vol. 23. P. 46—50.
13. **Волков К. Н., Емельянов В. Н.** Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008, 370 с.

I. Ya. Lvovich¹, Professor, office@vivt.ru, Ya. E. Lvovich², Professor, office@vivt.ru,
A. P. Preobrazhensky², Professor, app@vivt.ru, O. N. Choporov², Professor, choporov_oleg@mail.ru
¹Paneuropean university, Bratislava
²Voronezh institute of high technologies, Voronezh

The Features of the Methods of Computational Fluid Dynamics for Turbulence Modeling

In the paper an analytical review of methods for turbulence modeling on personal computers is carried out. Turbulent flow can be represented as a multiple rotating in different directions and in different planes of vortices. The computational features of the methods that can be used in mathematical software subsystems for the simulation of turbulence in the relevant CAD are provided. The results that computational fluid dynamics can take a dominant place, surpassing the prevalence of experimental and analytical methods are shown. These differences in the three main methods of description of turbulence are discussed. It was provided that, the development of computer technology and numerical methods of computational physics, allows to work not only with increasingly complex models, but also to apply different ways of visualizing the obtained result. The obtained results can be helpful when selecting a turbulence model for a specific task in the simulation subsystems.

Keywords: turbulence, modeling, software, CAD, computational physics, equation, vortex, integral engineering application, liquid, method

References

1. Zeleny L. M., Milovanov A. V. Fraktalnaya topologiya i stran-naya kinetika: ot teorii perkolyacii k problemam kosmicheskoy elektrodinamiki, *Uspehi fizicheskikh nauk*, 2004, vol. 174, no. 8, pp. 809–852.
2. Loycyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*, Moscow—Leningrad, Gostehizdat, 1950. 676 s.
3. Vihreerazreshayuschee modelirovanie kak odin iz metodov opisaniiya turbulentnykh techeniy, URL: <http://www.inm.ras.ru/laboratory/direct2.htm>
4. Yun A. *Development and Analysis of Advanced Explicit Algebraic Turbulence and Scalar Flux Models for Complex Engineering Configurations*. Doctor thesis. Darmstadt. 2005, 103 p.
5. Menter F. R. *Methoden, Moeglichkeiten und Grezen numerischer Stromungsberechnungen*. Numet. Erlangen, 2002, 114 p.
6. Wachter E. M. *Andwendung der Instationären Flamelet Methode auf Diffusions Flammen im Post-Processing-Modus*. VDI Verlag. 2005, 195 p.
7. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment, *Monthly Weather Review*, 1963, vol. 91, no. 3, pp. 99–165.
8. Piomelli U. Large-Eddy Simulation: Achievements and Challenges, *Progress in Aerospace Sciences*, 1999, vol. 35, pp. 335–362.
9. Balaras E., Benocci C., Piomelli U. Two-Layer Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations, *AIAA Journal*, 1996, vol. 34, no. 6, pp. 1111–1119.
10. Spalart P. R. Detached-eddy simulation, *Annual Review Fluid Mechanics*, 2009, vol. 41, pp. 181–202.
11. Wilcox D. C. *Turbulence modeling for CFD*. California, 1994, 460 p.
12. Boussinesq J. *Theorie de l' Ecoulemen Tourbillant*. Mem, *Presentes par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, 1977, vol. 23, pp. 46–50.
13. Volkov K. N., Emelyanov V. N. *Modelirovaniye krupnykh vihrey v raschetah turbulentnykh techeniy*, Moscow, Fizmatlit. 2008. 370 p.

УДК 519.87

Е. М. Бронштейн, д-р физ.-мат. наук, проф., e-mail: bro-efim@yandex.ru,
А. А. Давлетбаев, аспирант, e-mail: Arvid_NF@mail.ru,
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Задача маршрутизации с учетом зависимости стоимости транспортировки от погодных условий

Рассмотрена задача построения маршрута, по которому можно доставить однородный груз от пункта производства множеству потребителей транспортным средством ограниченной вместимости с минимальными затратами. Стоимость транспортировки груза между пунктами зависит от времени. Построены квадратичная и линейная целочисленные модели. Проведены вычислительный эксперимент решения задач различной размерности в среде IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.6.1 и сравнительный анализ эффективности моделей.

Ключевые слова: маршрутизация, нестационарность, линейное целочисленное программирование, метод ветвей и отсечений

Введение

Рассматривается следующая задача. Транспортное средство (ТС) должно доставить однородный

груз из пункта производства потребителям. Процесс погрузки и разгрузки является трудоемким, поэтому в каждом пункте потребления ТС разгру-