

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ

INTELLIGENT SYSTEMS AND TECHNOLOGIES

УДК 519.1, 519.6

В. П. Кулагин, д-р техн. наук, профессор, руководитель научно-исследовательской лаборатории космических исследований, технологий и процессов, e-mail: vkulagin@hse.ru,

Московский институт электроники и математики

Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики",

В. Н. Дубинин, д-р техн. наук, доц., e-mail: duvini@mail.ru,

Пензенский государственный университет

Структурный анализ сетей Петри

Предложен новый формализм — структуры сетей Петри (СП-структуры), предназначенный для исследования моделей сложных систем. Структурами, или решетками, называются частично упорядоченные множества, в которых для любых двух элементов существует точная нижняя и точная верхняя грани. В данной работе используется термин "структура". Введены операции преобразования сетей Петри (СП), предназначенные для анализа и синтеза новых СП-структур. Показано, что использование введенных операций позволяет разложить любую СП на множество линейных либо линейно-циклических фрагментов (ЛФ), которые одновременно будут относиться как к классу автоматных сетей Петри, так и к классу синхронизационных сетей Петри. Представленные операции позволяют анализировать лишь структурные свойства СП, в то время как существует ряд работ, в которых приводится анализ поведенческих свойств СП.

Описаны свойства СП-структур, введено квазиметрическое пространство структур СП. На пространстве СП-структур задано множество функций оценки, на основе которого введена система шкал, позволяющая проводить количественную оценку свойств СП-структур. Отличительной особенностью данного формализма является эффективное сочетание свойств аппарата СП с возможностями теории структур.

Практическое применение предложенных методов анализа и синтеза СП демонстрируется на классическом примере двух выталкивателей, предназначенных для транспортировки деталей. Показаны процедуры синтеза альтернативных вариантов СП-моделей системы выталкивателей, показаны их достоинства и недостатки, а также дана количественная оценка структур моделей с отображением в выбранных системах координат.

Ключевые слова: параллельные и распределенные вычисления и системы, моделирование, сложные системы, сети Петри, теория структур, системы координат

Введение

Среди большого числа понятий, которые возникли и исследуются в информатике и вычислительной технике, одним из наиболее общих является понятие сложной дискретной динамической системы. Примерами современных сложных дискретных систем могут служить компьютеры и вычислительные сети, специализированные процессоры различной структуры, программы и операционные системы, системы сбора и обработки данных, системы автоматического управления объектами и процессами, сенсорные сети, широкий спектр параллельных структур с недетерминированным поведением и др.

Изучение свойств дискретных систем и развитие методов их конструирования проводятся с помощью различных математических моделей и методов в зависимости от класса систем, степени детализации их структуры, а также от характера исследуемых проблем. Чтобы успешно решать задачи анализа и синтеза все более сложных систем, необхо-

димы дальнейшее развитие и совершенствование математических методов их исследования.

В последние годы наблюдается растущий интерес к использованию аппарата сетей Петри (СП) [1—6] для решения задач, связанных с исследованием сложных систем. Можно отметить, что современные подходы, используемые при анализе и синтезе структур сложных систем, основаны на методах декомпозиции, координации и агрегации, структурном подходе, подходе, основанном на теории сложности, и др. Однако противоречия между сложностью создаваемых современных систем и традиционными подходами к их проектированию определяют на сегодня одну из основных задач теории систем — разработка методологии и создание систем автоматизированного проектирования, решающих основные задачи синтеза. Данная проблема включает в себя разработку методов и алгоритмов, помогающих вести направленный поиск оптимальных характеристик системы, а также позволяющих контролировать изменение этих характеристик в процессе проектирования. Указанные потребности

привели к возникновению и интенсивному развитию системного подхода к проектированию сложных систем, в концепцию которого органически вписывается структурный подход, приобретающий еще большее значение на современном этапе.

В соответствии со структурным подходом выделяются следующие этапы:

- 1) выработка ряда гипотез, касающихся структур подсистем, из которых будет состоять проектируемая система;
- 2) формирование из данных подсистем законченных структур-кандидатов;
- 3) проведение анализа каждой структуры в целях определения характеристик, что позволяет сократить число структур-кандидатов и в конечном итоге выбрать окончательную структуру.

Механизм построения альтернативных вариантов на основе обобщенной модели позволяет проектировщику получить все множество возможных структур, из которых выбираются оптимальные. Однако *NP*-сложность задач получения множества альтернативных вариантов не позволяет широко использовать данный подход на практике. Кроме того, поиск наилучшего варианта структуры сопряжен с необходимостью количественной оценки каждой структуры-кандидата, а это, в свою очередь, требует наличия соответствующих математических теорий и методов.

Другим важным вопросом, требующим решения при проектировании сложных систем, является представление имеющихся данных и параллельных процессов в виде специальных формальных объектов, удобных для проведения над ними вычислительных и имитационных экспериментов. С большой долей достоверности можно отметить, что большинство современных дискретных динамических систем характеризуются такими свойствами, как параллелизм, недетерминированность, многоуровневость представления, сочетание синхронных и асинхронных процессов, однородность и др. Поэтому выбор формализованного языка, в наибольшей степени учитывающего особенности современных систем, является основной задачей начального этапа проектирования.

Преимущества СП при описании указанных сложных систем очевидны и широко описаны в литературе. Недостатком данного аппарата является отсутствие инструментария для количественной оценки моделей, выраженных в терминах СП. Вместе с тем, теория структур и теория сложности [7–9] предоставляют алгоритмы и методы, позволяющие строить оценочные шкалы для получения количественных характеристик элементов дискретного пространства.

В данной работе предлагается объединить теорию структур [8] и теорию СП в рамках *теории структур СП*. Данное сочетание позволяет в одном формализме объединить выразительную способность аппарата СП при описании распределенных систем, его возможности при исследовании структурных и

динамических свойств СП-моделей с возможностями теории структур. С практической точки зрения аппарат структур СП позволяет построить механизм количественной оценки моделей сложных систем и этим предоставить в распоряжение проектировщика инструментарий для сравнительной оценки синтезируемых СП-моделей.

Следует отметить, что современная алгебра изучает операции и отношения на множествах. Непустое множество с определенными на нем операциями и отношениями принято называть *алгебраической системой*. Простейшим примером такой системы является частично упорядоченное множество. Частично упорядоченное множество L , в котором для любых двух элементов a и b существует точная нижняя и точная верхняя грани, называется *структурой*, или *решеткой*. В данной работе используется термин "структура" в соответствии с терминологией, введенной в работе [8].

В представленной работе анализ касается статической структуры СП, в то время как, например, в работах [1, 2, 10] анализ связан с определением поведенческих свойств СП (таких как живость, безопасность, ограниченность, консервативность, повторяемость и т.д.) с использованием алгебраических средств, не предполагающих вычисление множества достижимых маркировок, но базирующихся на анализе уравнений состояния, матрицы инцидентности и т.д.

Основные определения

В сети Петри $N = (P, T, I, O, \mu_0)$ [1, 2], где P — множество позиций, T — множество переходов, $I: P \times T \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ и $O: T \times P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ — матрицы инцидентности, μ_0 — начальная разметка, обозначим через $pre(t)$ и $post(t)$ множества входных и выходных позиций перехода t , а через $pre(p)$ и $post(p)$ — множества входных и выходных переходов позиции p . СП, в которой $P = \{p', p''\}$, $T = \{t\}$, $p' \in pre(t)$ и $p'' \in post(t)$, назовем *элементарной сетью*.

СП, состоящую из множества элементарных сетей, будем называть *примитивной системой* N_{PR} .

Для проведения анализа и синтеза сетевых моделей необходимы средства, позволяющие преобразовывать СП-модели. С этой целью рассмотрим операции разделения и объединения вершин СП.

Определение 1. Объединением переходов t_i и t_j , т. е. $(t_i + t_j)$, является переход t_{ij} , для которого справедливо:

$$pre(t_{ij}) = pre(t_i) \cup pre(t_j); post(t_{ij}) = post(t_i) \cup post(t_j).$$

Определение 2. Объединением позиций p_i и p_j , т. е. $(p_i + p_j)$, является позиция p_{ij} , для которой справедливо:

$$\begin{aligned} pre(p_{ij}) &= pre(p_i) \cup pre(p_j); \\ post(p_{ij}) &= post(p_i) \cup post(p_j); \\ \mu(p_{ij}) &= \max(\mu(p_i), \mu(p_j)). \end{aligned}$$

Делению подвергаются вершины, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$|pre(t)| + |post(t)| > 2 \text{ и } |pre(p)| > 1 \text{ или } |post(p)| > 1.$$

Будем считать, что при определении вершин, которые должны подвергаться делению, *вес дуг не учитывается*. Рассмотрим следующие варианты операций деления позиций и переходов, которые будут использоваться при анализе СП-моделей.

Определение 3 (деление головной позиции). Если для позиции p_j выполняются условия: $pre(p_j) = \emptyset$ и $post(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\}$, то позиция p_j делится на n позиций ($p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jk}, \dots, p_{jn}$), для которых справедливо:

$$pre(p_{jk}) = \emptyset, post(p_{jk}) = \{t_{ik}\}, \mu(p_{jk}) = \mu(p_j), \text{ где } 1 \leq k \leq n.$$

Определение 4 (деление хвостовой позиции). Если для позиции p_j выполняются условия: $pre(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\}$ и $post(p_j) = \emptyset$, то позиция p_j делится на n позиций ($p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jk}, \dots, p_{jn}$), для которых справедливо:

$$pre(p_{jk}) = \{t_{ik}\}, post(p_{jk}) = \emptyset, \mu(p_{jk}) = \mu(p_j), \text{ где } 1 \leq k \leq n.$$

Определение 5 (деление позиции с одинаковым числом входных и выходных переходов). Если для позиции p_j выполняются условия: $pre(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\}$ и $post(p_j) = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}\}$, то данная позиция делится на n позиций ($p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jn}$), для которых справедливо:

$$pre(p_{jk}) = \{t_{1k}\}, post(p_{jk}) = \{t_{2k}\}, \text{ где } 1 \leq k \leq n.$$

Определение 6. Если для позиции p_j выполняются условия:

$$pre(p_j) = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1m}\}, post(p_j) = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}\} \text{ и}$$

а) $n > m$, то позиция p_j делится на позиции p'_j и p''_j , для которых справедливо:

$$pre(p'_j) = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1m}\}, post(p'_j) = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2m}\},$$

$$\mu(p'_j) = \mu(p_j),$$

$$pre(p''_j) = \emptyset, post(p''_j) = \{t_{2(m+1)}, \dots, t_{2n}\},$$

$$\mu(p''_j) = \mu(p_j);$$

б) $n < m$, то позиция p_j делится на позиции p'_j и p''_j , для которых справедливо:

$$pre(p'_j) = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}\}, post(p'_j) = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}\},$$

$$\mu(p'_j) = \mu(p_j),$$

$$pre(p''_j) = \{t_{1(n+1)}, \dots, t_{1m}\}, post(p''_j) = \emptyset,$$

$$\mu(p''_j) = \mu(p_j).$$

Можно показать, что используя введенные операции, любую СП можно разложить на множество линейных либо линейно-циклических фрагментов (ЛФ), которые одновременно будут относиться как к классу *автоматных сетей* (каждый переход сети имеет ровно одну входную и ровно одну выходную позиции), так и к классу *синхронизационных сетей* (каждая позиция имеет ровно один входной и

ровно один выходной переходы) [1]. Сети Петри, которые одновременно относятся к классу автоматных и к классу синхронизационных сетей, будем называть *автоматно-синхронизационными* сетями.

При вводе основных понятий и определений структур СП будем использовать терминологию работы [8], в которой даются основы теории структур. Обозначим через $L_m = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ множество СП, которое может быть получено путем объединения вершин СП, состоящей из m элементарных сетей.

Определение 7. Под "частично упорядоченным множеством" СП будем понимать систему $X = (L_m, \Theta)$, в которой на множестве L_m определено бинарное отношение $\Theta = "\geq"$ (больше или равно), удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Для всех $N \in L_m : \Theta(N, N)$ (рефлексивность).
2. Если $\Theta(N_i, N_j)$ и $\Theta(N_j, N_k)$, то $N_i = N_j$ (антисимметричность).
3. Если $\Theta(N_i, N_j)$ и $\Theta(N_j, N_k)$, то $\Theta(N_i, N_k)$ (транзитивность).

Будем говорить, что СП N_i и N_j *структурно изоморфны* ($N_i = N_j$), если $P_i = P_j, T_i = T_j, I_i = I_j$ и $O_i = O_j$.

Рассмотрим физическую сущность отношения " $\geq$ " для множества СП. Каждому элементу N_i множества L_m поставим в соответствие некоторое число k_i , которое определяется числом вершин СП N_j . Число вершин СП N_i будем обозначать как $|N_i|$ ($k_i = |N_i|$). Тогда СП $N_i \geq N_j$, если $|N_i| \geq |N_j|$. Очевидно, что если $N_i = N_j$, то $|N_i| = |N_j|$, однако обратное несправедливо.

Учитывая принятые условия получения элементов множества L_m , свойства определения 7 можно представить в следующем виде:

1. Для всех $N \in L_m : |N| \geq |N|$ (рефлексивность).
2. Если $|N_i| \geq |N_j|$ и $|N_j| \geq |N_k|$, то $N_i = N_j$ (антисимметричность).
3. Если $|N_i| \geq |N_j|$ и $|N_j| \geq |N_k|$, то $|N_i| \geq |N_k|$ (транзитивность).

Определение 8. Выражение "СП N_i покрывает СП N_j " означает, что $N_i > N_j$ и что $N_i > N_k > N_j$ не выполняется ни для какого N_k .

Операции объединения и разделения влияют на величину $|N_i|$ путем изменения числа вершин в СП N . Отсюда следует:

Утверждение 1. СП N_i покрывает СП N_j тогда и только тогда, когда $|N_i| - |N_j| = 1$. То есть N_j может быть получена из N_i в результате выполнения только одной операции объединения.

Проверим, удовлетворяет ли наша "интерпретация" отношения " $\geq$ " свойствам определения 7.

1. Если число вершин в СП N обозначить через k , т.е. $k = |N|$, то очевидно, что $k \geq k$. Следовательно, рефлексивность соблюдается.

2. Рассмотрим СП N_i и СП N_j , причем N_i получена из N в результате объединения двух позиций, а N_j получена из N путем объединения двух переходов. Следовательно, можно составить следующие соотношения:

$$|N_i| = |N| - 1, |N_j| = |N| - 1, |N_i| = |N_j|.$$

Отсюда $N_i \geq N_j$ и $N_j \geq N_i$, но $N_i \neq N_j$ по условиям построения СП N_i и N_j . Следовательно, свойство антисимметричности не выполняется.

3. Доказательство выполнения свойства транзитивности очевидно.

Математические системы, обладающие отношением, для которого выполняются только свойства 1 и 3 определения 7, а свойство 2 не выполняется, называются *квазиупорядоченными* [8].

Используя определение 7 и утверждение 1, можно построить графическое представление любой системы X . Для этого каждому элементу множества L_m поставим в соответствие вершину графа α_i . При этом вершины графа расположим таким образом, чтобы вершина, соответствующая СП N_i , располагалась выше вершины, соответствующей СП N_j , если $N_i > N_j$. Вершины α_i и α_j соединим направленной дугой от α_i к α_j , если N_i покрывает N_j . Фигуру, полученную таким образом, назовем *диаграммой*.

Наименьшим элементом некоторого квазиупорядоченного подмножества СП $L' \subset L_m$ будем называть такой элемент $N_o \in L'$, что $N_o \leq N_i$ для всех $N_i \in L'$. Наибольшим элементом подмножества L' будем называть такой элемент $N_l \in L'$, что $N_l \geq N_i$ для всех $N_i \in L'$.

Утверждение 2. Минимальным элементом некоторого квазиупорядоченного подмножества СП $L' \subset L_m$ является такой элемент $N_{\min} \in L'$, что ни для какого $N_i \in L'$ не имеет места $N_{\min} \geq N_i$.

Аналогично максимальным элементом подмножества L' является такой элемент $N_{\max}$, что ни для какого $N_i \in L'$ не имеет места $N_{\max} \leq N_i$.

Под верхней гранью k -го уровня подмножества L' квазиупорядоченного множества СП L_m будем понимать подмножество СП $L_{ki} \subset L_m$ такое, что $|N_i| = k$ для всех $N_i \in L_{ki}$ и $k > |N_j|$ для всех $N_j \in L'$. Наименьшая верхняя грань есть верхняя грань с минимальным уровнем. Под нижней гранью l -го уровня подмножества L' будем понимать подмножество СП $L_{lo} \subset L_m$ такое, что $|N_i| = l$ для всех $N_i \in L_{lo}$ и $l < |N_j|$ для всех $N_j \in L'$. Наибольшая нижняя грань есть нижняя грань с максимальным уровнем.

Определение 9. Структура СП есть квазиупорядоченное подмножество СП $L' \subseteq L_m$, любой элемент которого, удовлетворяющий условию $N_l > N_i > N_o$, имеет наименьшую верхнюю грань и наибольшую нижнюю грань.

Если $L' = L_m$, то структура называется *полной*.

Приведем следующую теорему.

Теорема 1. Полная структура СП обладает только одним наибольшим и только одним наименьшим элементами.

Из данной теоремы следует, что: $|N| = m + n = m + 2m = 3m$, где m — число переходов, а n — число позиций в примитивной системе; $|N_{\min}| = 1 + 1 = 2$.

В дальнейшем число элементарных сетей, которое включает максимальный элемент полной структуры, будем называть *рангом структуры*.

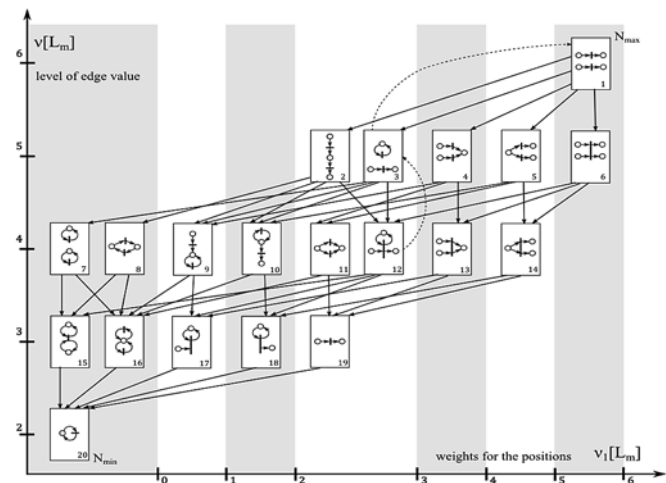


Рис. 1. Диаграмма структуры СП ранга 2:
 $v[L_m] = |N|$ (уровень грани); $v_1[L_m] = S_1 \Sigma p_i + S_2 \Sigma p_j$ (веса позиций), где Σp_i — число головных позиций; Σp_j — число хвостовых позиций; S_1, S_2 — веса головных и хвостовых позиций соответственно ($S_1 = 1, S_2 = 2$)

Рассмотрим пример. Пусть дана СП, обозначенная на рис. 1 под номером 12 (N_{12}). Построим для данной СП все возможные нижние и верхние грани. Для этого при построении элементов, принадлежащих нижним граням, будем выполнять операцию объединения, а при построении элементов, принадлежащих верхним граням, — операцию разделения. Одно из возможных преобразований N_{12} в $N_{\max}$ (перемещение к верхним граням) показано пунктирной линией. Очевидно, что элемент, имеющий значение $k = 2$ ($|N_{20}| = 2$), является минимальным ($N_{20} = N_{\min}$), а элемент, имеющий $k = 6$ ($|N_1| = 6$), — максимальным ($N_1 = N_{\max}$). Следовательно, структура, изображенная на рис. 1, является полной. Наименьшей нижней гранью для N_1 является грань 5-го уровня, которая включает СП с N_2 по N_6 . Все данные СП могут быть получены из СП $N_{\max}$ путем выполнения одной операции объединения.

Наибольшей нижней гранью для элемента $N_{\min}$ является грань 3-го уровня, которая включает СП с N_{15} по N_{19} . Из рис. 1 видно, что ранг построенной структуры равен 2. Как подмножество, в данную структуру входит структура с рангом 1 (элементы N_{19} и N_{20}). Элементы данной структуры характеризуются тем, что они имеют наименьшую верхнюю грань либо наибольшую нижнюю грань. Такую структуру будем называть *вырожденной*.

Пространство структур сетей Петри

Ранее мы выделили множество СП L_m и отношение частичного порядка " $\geq$ ". Дополнительно введем множество Q других отношений эквивалентности. Тогда пространством структур СП назовем тройку:

$$L = \langle L_m, F, Q \rangle,$$

где F — отношение частичного порядка " $\geq$ ".

Любое из отношений эквивалентности $q \in Q$ может служить для разбиения множества L_m на смежные классы и построения некоторой шкалы путем сопоставления данных классов. Соответствие Θ , однозначное в одну сторону и удовлетворяющее условию: если $x \geq y$, то $\Theta(x) \geq \Theta(y)$, называется *изотонным*, или сохраняющим порядок [8]. Две шкалы Z и Z' будем называть *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное отображение $f: Z \rightarrow Z'$, при котором из $z_i < z_j$, где $(z_i, z_j) \in Z$, следует $z'_i < z'_j$, где $(z'_i, z'_j) \in Z'$ (причем $z'_i = f(z_i)$, $z'_j = f(z_j)$) и обратно. Другими словами, эквивалентность шкал означает существование взаимно однозначного и изотонного отображения одной шкалы на другую.

На семействе смежных классов $L_m = \{L_i\}$ могут быть заданы различные функции оценки $v[L_i]$, определенные на L_m . Пусть N' , N'' и N''' — СП, принадлежащие подмножеству L_i . Оценка является *изотонной* тогда и только тогда, когда из условия $N' < N''$ следует, что $v[N'] \leq v[N'']$; *положительной* — тогда и только тогда, когда из $N' < N''$ следует, что $v[N'] < v[N'']$; *ограниченной сверху* — тогда и только тогда, когда существует конечное положительное число k_q и для всех цепей $N' < N'' < \dots < N^{(n)}$ имеет место неравенство:

$$v[N^{(n)}] - v[N'] \leq k_q.$$

Структура с изотонной оценкой $v[L_i]$ называется квазиметрической, а с положительной $v[L_i]$ — метрической [8].

Расстоянием Гливенко от $L \in L_m$ до $L' \in L_m$ произвольной квазиметрической (или метрической) структуры является функция

$$\delta(N, N') = v[N] - v[N']. \quad (1)$$

Квазиметрическое пространство (или пространство Гливенко) есть пространство, в котором может быть определена функция $\delta(N, N')$ со следующими свойствами:

- (1) $\delta(N, N) = 0$;
- (2) $\delta(N, N') > 0$ при $N' \neq N$;
- (3) $\delta(N, N') = \delta(N', N)$;
- (4) $\delta(N, N') + \delta(N', N'') \geq \delta(N, N'')$.

Очевидно, что оценка $v[L]$ является одинаковой для всех элементов $N_i \in L$, так как данная оценка является критерием для построения семейства смежных классов. Если функции оценки $v[L]$ поставить в соответствие число вершин в сетях Петри, принадлежащих некоторой структуре, и рассмотреть семейство $L_m = \{L_i\}$, то нетрудно заметить, что свойства (1)–(4) выполняются. Таким образом, пространство структур СП, разбитое на семейство смежных классов $L_m = \{L_i\}$, является пространством Гливенко.

Вернемся к диаграмме структуры СП, представленной на рис. 1. Здесь оценка $v[N] = |N|$ для всех $N \in L_m$ (при $m = 2$) разбивает множество L_m на

пять классов эквивалентности. Каждый класс объединяет множество СП с одинаковым числом вершин. Класс эквивалентности на рис. 1 отображается величиной уровня грани. Внутри каждого класса построена еще одна шкала $v_1[L_i]$, которая оценивает сумму весов головных и хвостовых позиций каждой СП $N \in L_i$, например, в соответствии со следующим выражением:

$$v_1[N] = S_1 \Sigma \bar{p}_i + S_2 \Sigma \bar{p}_j, \quad (2)$$

где $\Sigma \bar{p}_i$ — число головных позиций, $\Sigma \bar{p}_j$ — число хвостовых позиций; S_1, S_2 — веса головных и хвостовых позиций соответственно.

Видно, что оценка $v_1[L_i]$ также разбивает каждый класс эквивалентности на подклассы. Например, класс $L_3 = \{N_{15}, N_{16}, N_{17}, N_{18}, N_{19}\}$ разбит на подклассы: $L_{31} = \{N_{15}, N_{16}\}$, $L_{32} = \{N_{17}\}$, $L_{33} = \{N_{18}\}$, $L_{34} = \{N_{19}\}$.

Зададимся вопросом, можно ли считать пространство $L = \langle L_m, F, Q \rangle$ квазиметрическим, если на нем введена функция $\delta(L, L') = v_1[L] - v_1[L']$?

Если L, L' и L'' — классы эквивалентности, которые строятся в соответствии с отношением $q = v_1[L_m]$, то легко увидеть выполнимость свойств (1)–(4). Следовательно, пространство L_m , на котором введена функция $v_1[L_m]$, также является квазиметрическим.

Рассмотрим следующий вопрос: существуют ли инварианты при перемещении по шкале $v_1[L_m]$? На рис. 1 шкала $v_1[L_m]$ построена из предположения, что $S_1 = 1, S_2 = 2$. Для поиска инвариантов введем следующие веса для позиций и операций объединения вершин СП:

- если p — головная позиция, то $S(p) = S_1 = 1$;
- если p — хвостовая позиция, то $S(p) = S_2 = 2$;
- если p — внутренняя позиция, то $S(p) = S_3 = 0$;
- вес операции объединения λ позиций p_i и p_j определяется как:

$S(\lambda) = S(p_i)$ (или $S(p_j)$) — если объединяются только головные или только хвостовые позиции;

$S(\lambda) = S(p_i) + S(p_j)$ — если объединяются разные позиции.

Рассмотрим выражение:

$$S(N) = S_1 \bar{n} + S_2 \bar{n} + \sum_{i=1}^w S(\lambda_i), \quad (3)$$

где $\bar{n}$ — число головных позиций, $\bar{n}$ — число хвостовых позиций в СП; w — число операций объединения, с помощью которых построена анализируемая СП; $S(N)$ — вес СП N .

Для всех СП $N_i \in L_m$, изображенных на рис. 1, вес СП, найденный в соответствии с выражением (3), является величиной постоянной и равен утроенному рангу структуры СП $3r$. Следовательно, величина $S(N)$ также является инвариантом.

На практике часто встречаются задачи, при решении которых необходимо определить, какие СП могут быть построены из ограниченного, наперед

заданного числа элементарных сетей. Попробуем ответить на данный вопрос.

Из свойств операции разделения переходов вытекает, что число элементов минимальной примитивной системы, которое получается в результате разделения переходов СП-структуры N , определяется по правилу:

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^{m'} \max(\text{pre}(ti), \text{post}(ti)), \quad (4)$$

где m' — число переходов в СП N ; $\tilde{m}$ — число переходов в минимальной примитивной системе N_{PR} .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы СП N принадлежала множеству L_m , достаточно, чтобы размерность примитивной системы, построенной для N , не превышала ранга СП-структуры L_m .

Алгоритмы оценки интерпретирующих СП имеют экспоненциальную зависимость от числа вершин СП. Поэтому при анализе СП актуальным становится вопрос сокращения числа вершин.

Сокращение числа вершин СП (*редукция*) должно проводиться таким образом, чтобы язык, порождаемый измененной СП, являлся изоморфным языку исходной СП. Поэтому задача сокращения вершин СП в нашем случае ставится следующим образом.

Определить множество преобразований $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- применение любого G_i сохраняет изоморфизм языков СП N и N' ;
- для любой СП N существует конечная (возможно пустая) последовательность преобразований такая, что к результирующей сети никакое преобразование из G неприменимо.

Обозначим через G^* множество конечных последовательностей элементов из G . Если $\alpha = G_i G_j \dots G_k$, то $N \xrightarrow{\alpha} N'$ означает, что сеть N' является результатом применения к сети N последовательности преобразований α . Сеть назовем несократимой, если к ней никакое $G_i \in G$ неприменимо.

Опишем некоторые преобразования G_i , входящие в множество G .

Преобразование G_1 (удаление эквивалентного перехода).

Если в СП имеется несколько эквивалентных переходов, то может быть оставлен только один из них.

Преобразование G_2 (удаление перехода-петли).

Если в СП имеется два перехода $t1$ и $t2$ такие, что: $\text{pre}(t2) = \text{post}(t2)$, $\text{pre}(t2) \subseteq \text{pre}(t1)$ (или $\text{post}(t2) \subseteq \text{post}(t1)$), то переход $t2$ может быть удален.

Преобразование G_3 (удаление позиции-петли).

Если в СП имеется позиция p , для которой $\text{pre}(p) = \text{post}(p)$, то она может быть удалена.

Преобразование G_4 (удаление эквивалентных позиций).

Если в СП имеется несколько эквивалентных позиций, то может быть оставлена только одна из них.

Рассмотренные преобразования обладают свойствами конечности и однозначности.

Конечность. Множество преобразований G действует конечно, если для любой СП N найдется последовательность $\alpha \in G^*$ (возможно пустая) такая, что к СП N' , полученной из N ($N \xrightarrow{\alpha} N'$), никакое преобразование из G неприменимо.

Однозначность. Множество преобразований G действует однозначно, если несократимые сети N' и N'' , полученные в результате применения к СП N двух различных последовательностей α и β , оказываются структурно изоморфными.

Свойство однозначности позволяет нам не заботиться о порядке применения преобразований G_i .

Пример: система двух выталкивателей

В качестве иллюстративного примера рассмотрим систему из двух выталкивателей, предназначенную для транспортировки деталей (рис. 2). Данная система использовалась в ряде работ в качестве эталонного примера [11]. Как видно из рис. 2, траектория движения детали проходит через ряд характерных точек 1, 2 и 3. Исполнительный механизм системы позволяет выдвигать поршень выталкивателя и втягивать его. Для этого используется два управляющих сигнала — "Вперед" и "Назад". Каждый из выталкивателей снабжен двумя датчиками, сигнализирующими о нахождении поршня выталкивателя в одном из двух крайних положений — "Втянут" и "Выдвинут". В представленной системе двух выталкивателей имеется одна аварийная ситуация, когда оба выталкивателя находятся в выдвинутом состоянии (рис. 3).

СП-модель N_1 , описывающая систему двух выталкивателей, представлена на рис. 4. СП-модель учитывает, что выталкиватель может быть только в двух (крайних) состояниях "Втянут" и "Выдвинут". Ниже в табл. 1 и 2 дана интерпретация позиций и переходов, представленной на рис. 4 СП-модели.

Проведем анализ представленной СП-модели с точки зрения корректности работы (отсутствие тупиков, позиций с неограниченной разметкой, а также отсутствие состояний, при котором возникает аварийная ситуация). С этой целью разложим СП-модель N_1 на множество *автоматно-синхронизационных* сетей (множество линейных и линейно-

Выталкиватель 1

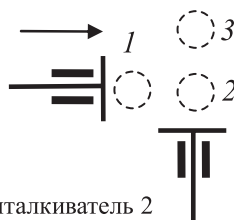


Рис. 2. Исходная ситуация (оба поршня втянуты)



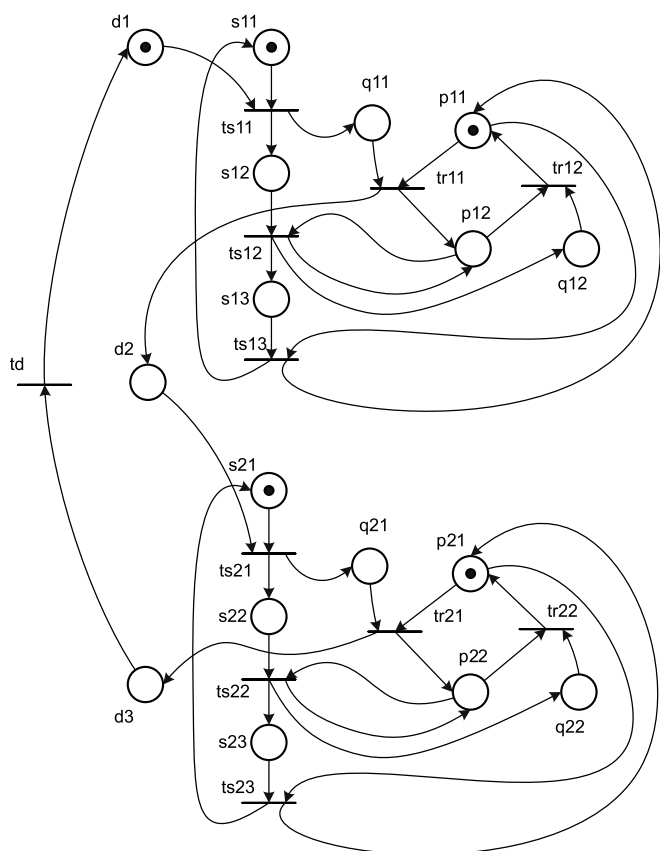
Рис. 3. Аварийная ситуация (оба поршня выдвинуты)

Таблица 1

Имя позиции	Интерпретация позиции
$s<i>1$	i -й контроллер находится в начальном состоянии (состоянии ожидания прихода детали)
$s<i>2$	i -й контроллер находится в состоянии ожидания выдвижения i -го поршня ($i \in \{1,2\}$)
$s<i>3$	i -й контроллер находится в состоянии ожидания втягивания i -го поршня ($i \in \{1,2\}$)
$p<i>1$	i -й поршень втянут (исходное состояние) ($i \in \{1,2\}$)
$p<i>2$	i -й поршень выдвинут ($i \in \{1,2\}$)
$q<i>1$	i -м контроллером была выдана команда на выдвижение i -го поршня ($i \in \{1,2\}$)
$q<i>2$	i -м контроллером была выдана команда на втягивание i -го поршня ($i \in \{1,2\}$)
d1	Деталь находится в положении 1
d2	Деталь находится в положении 2
d3	Деталь находится в положении 3

Таблица 2

Имя перехода	Интерпретация перехода
$ts<i>1$	i -й контроллер выдал команду на выдвижение i -го поршня ($i \in \{1,2\}$)
$ts<i>2$	i -й контроллер выдал команду на втягивание i -го поршня ($i \in \{1,2\}$)
$ts<i>3$	i -й контроллер перешел в начальное состояние ($i \in \{1,2\}$)
$tr<i>1$	i -й поршень выдвинулся ($i \in \{1,2\}$)
$tr<i>2$	i -й поршень втянулся ($i \in \{1,2\}$)
td	После ухода транспортированной детали в системе появилась новая деталь

Рис. 4. СП-модель $M1$ системы двух выталкивателей

циклических фрагментов (ЛФ)), используя операции разделения вершин СП, описанных выше.

Предположим, что в результате деления вершин СП получена система ЛФ, представленная на рис. 5–8. На основе выражения (5) можно опреде-

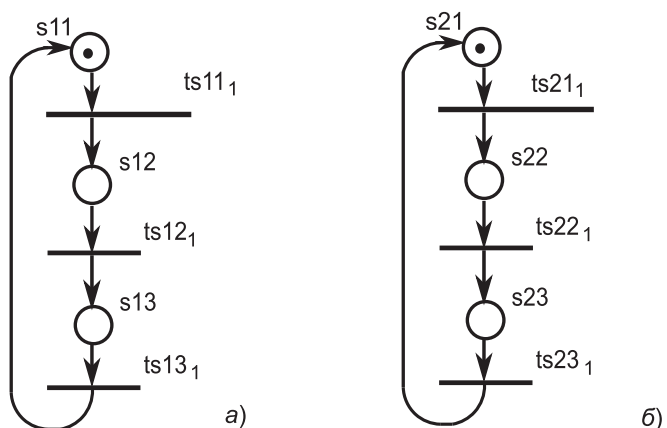


Рис. 5. Сетевые модели работы контроллеров

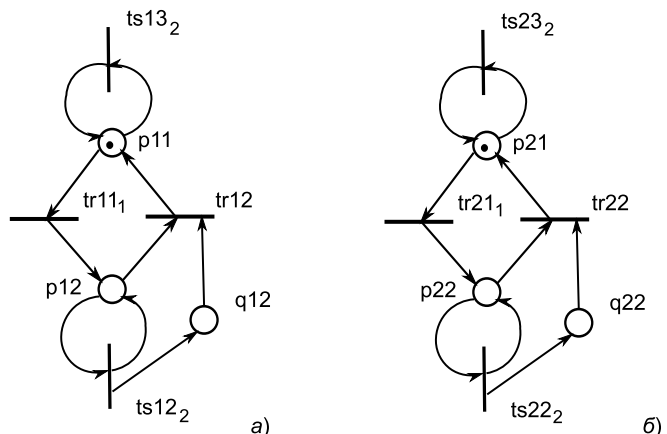


Рис. 6. Сетевые модели управления движением выталкивателей

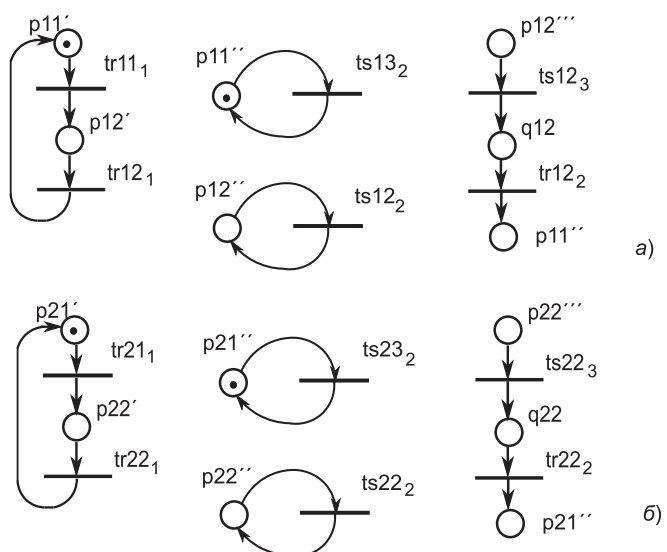


Рис. 7. Линейные и линейно-циклические фрагменты, образующие СП-модель управления движением выталкивателей

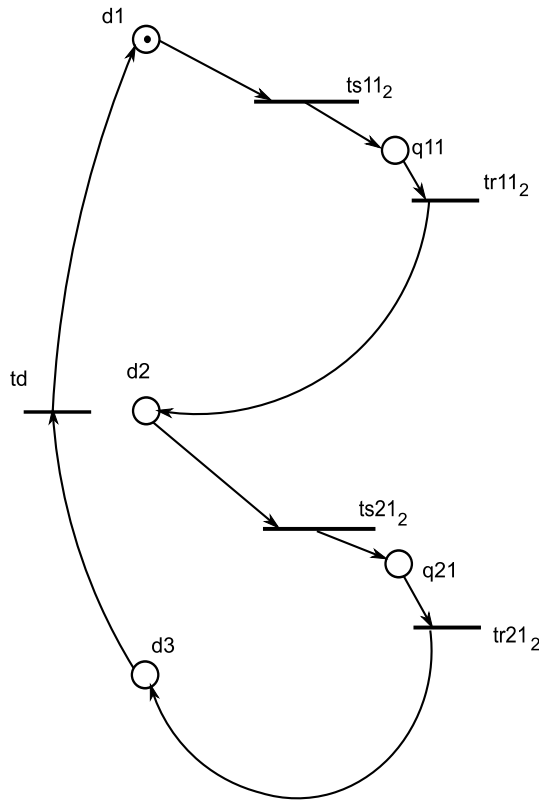


Рис. 8. Сетевая модель работы системы управления выдвижением поршней

лечь, что для построения СП N_1 , представленной на рис. 4, необходимо 23 элементарные сети, что подтверждается видом ЛФ (рис. 5, 7, 8).

Программа синтеза СП-структуры N_1 на основе полученной системы ЛФ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 ts11 &= ts11_1 + ts11_2 & tr12 &= tr12_1 + tr12_2 \\
 ts12 &= ts12_1 + ts12_2 + ts12_3 & tr21 &= tr21_1 + tr21_2 \\
 ts13 &= ts13_1 + ts13_2 & tr22 &= tr22_1 + tr22_2 \\
 ts21 &= ts21_1 + ts21_2 & p11 &= p11' + p11'' + p11''' \\
 ts22 &= ts22_1 + ts22_2 + ts22_3 & p12 &= p12' + p12'' + p12''' \\
 ts23 &= ts23_1 + ts23_2 & p21 &= p21' + p21'' + p21''' \\
 tr11 &= tr11_1 + tr11_2 & p22 &= p22' + p22'' + p22'''
 \end{aligned}$$

Анализ СП-модели N_1 с использованием пакетов моделирующих программ *ViVe* [12] и *PIPE* [13] позволяет отметить, что данная СП-модель является живой и ограниченной (свойства *хорошо сформированной* сети). Однако СП-модель имеет недостаток, который заключается в том, что при срабатывании последовательности переходов $\sigma = ts11, tr11, ts21, tr21$ возникает разметка, соответствующая недопустимому состоянию системы двух выталкивателей (два поршня выдвинулись одновременно). Необходимо модифицировать исходную СП-модель N_1 таким образом, чтобы исключить описанное запрещенное состояние, но сохранить при этом свойства *хорошо сформированной* сети. С этой целью в СП-

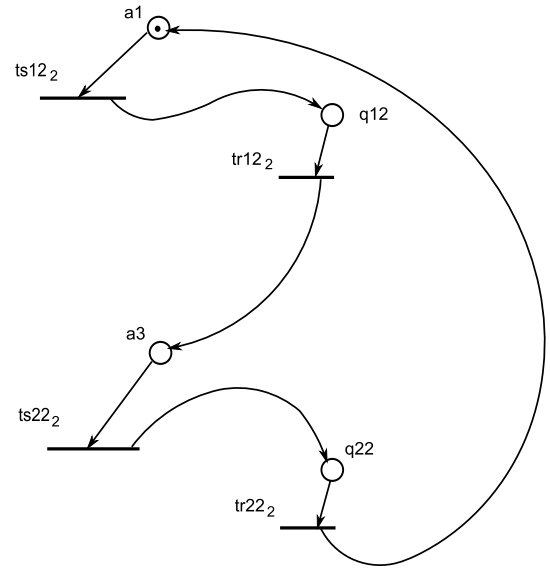


Рис. 9. Сетевая модель арбитра

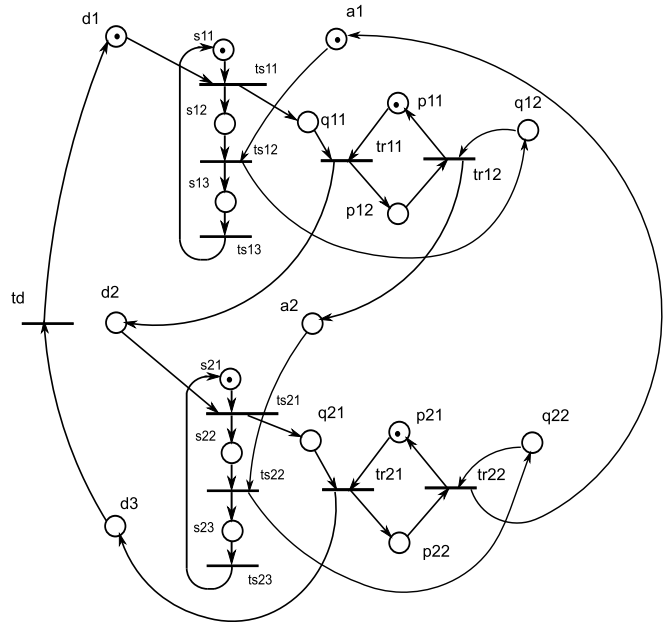


Рис. 10. СП-модель N_2 системы двух выталкивателей с арбитром

модель N_1 предлагается включить арбитр (рис. 9) который позволяет выдвинуться первому толкателю только в том случае, если второй толкатель вдвинут, и наоборот. Анализ полученной СП N_2 (рис. 10) показывает, что сеть также хорошо сформирована и не содержит разметки, соответствующей запрещенному состоянию системы двух выталкивателей. Однако размерность примитивной системы (ранг структуры), необходимой для синтеза N_2 , превышает размерность системы для синтеза СП N_1 . Действительно, если для синтеза СП N_1 требуется 23 элементарные сети, то для синтеза СП N_2 необходимо 27 элементарных сетей ($r_{N_2} > r_{N_1}$).

Можно ли построить СП, моделирующую систему двух выталкивателей, используя меньшее число элементарных сетей? Разложим СП N_2 на систему ЛФ, которые представлены на рис. 5, 8, 9, 11.

Рассмотрим, возможно ли применить преобразования множества G над вершинами ЛФ СП N_2 ? Следует заметить, что преобразование $G2$ допустимо. Удалим из системы ЛФ СП N_2 циклические фрагменты $p11'' - ts13_2$, $p12'' - ts12_2$, $p21'' - ts23_2$ и $p22'' - ts22_2$. Построим новую СП N_3 путем выполнения представленной ниже программы синтеза на основе измененной системы ЛФ.

Программа синтеза СП N_3 :

$$\begin{array}{ll} ts11 = ts11_1 + ts11_2 & tr12 = tr12_1 + tr12_2 \\ ts12 = ts12_1 + ts12_2 & tr21 = tr21_1 + tr21_2 \\ ts13 = ts13_1 & tr22 = tr22_1 + tr22_2 \\ ts21 = ts21_1 + ts21_2 & p11 = p11' \\ ts22 = ts22_1 + ts22_2 & p12 = p12' \\ ts23 = ts23_1 & p21 = p21' \\ tr11 = tr11_1 + tr11_2 & p22 = p22' \end{array}$$

Полученная СП N_3 представлена на рис. 12. Анализ данной СП показывает, что она является хорошо сформированной и включает модель арбитра, запрещающего одновременное выдвижение двух выталкивателей. Кроме этого, для синтеза данной СП-модели необходимо всего лишь 19 элементарных сетей.

В целях последующего сравнительного анализа СП N_1 , N_2 и N_3 перейдем к единому рангу и возьмем за основу максимальный ранг, который характеризует СП N_2 ($r_2 = 27$).

Для количественной оценки полученных СП воспользуемся шкалами $v[L]$ и $v_1[L]$, описанными выше. На рис. 13, а приведена система координат в выбранных шкалах, в которой представлено положение СП N_1 , N_2 и N_3 . Видно, что отсутствие головных и хвостовых позиций исключило влияние шкалы $v[L]$ (характеризующие показатели СП по этой шкале равны 0). В целях более эффективной оценки свойств СП N_1 , N_2 , N_3 введем новые шкалы $v_2[L]$, $v_3[L]$ и $v_4[L]$, которые оценивают СП по числу операций объединения в целом ($v_4[L]$), а также по числу объединения позиций ($v_2[L]$) и переходов ($v_3[L]$) элементарных сетей при построении отдельных СП. Можно показать, что для оценок $v_2[L]$, $v_3[L]$ и $v_4[L]$ свойства (1)–(4) выполняются.

Для определения характеристических значений для N_1 , N_2 и N_3 в соответствии со шкалами $v_2[L]$, $v_3[L]$ и $v_4[L]$ воспользуемся соответствующими системами ЛФ.

Как было уже отмечено, для СП-модели N_1 ЛФ представлены на рис. 5, 7, 8. Очевидно, что для построения фрагментов, представленных на рис. 5, необходимо выполнить по три операции объединения позиций элементарных сетей $ts11_1$, $ts12_1$, $ts13_1$ и $ts21_1$, $ts22_1$ и $ts23_1$. Аналогично для построения фрагментов, представленных на рис. 7, а, б,

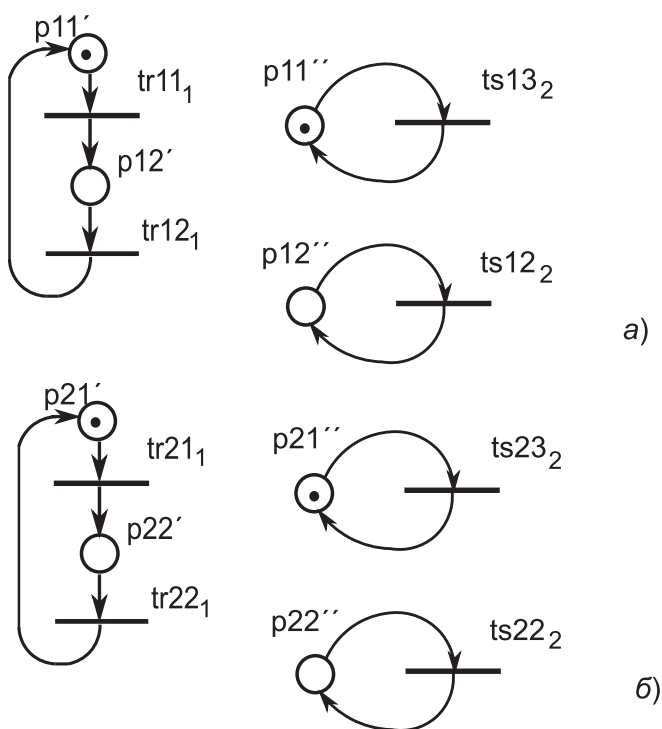


Рис. 11. Линейно-циклические фрагменты, образующие СП-модель управления движением поршней, для СП-модели N_2

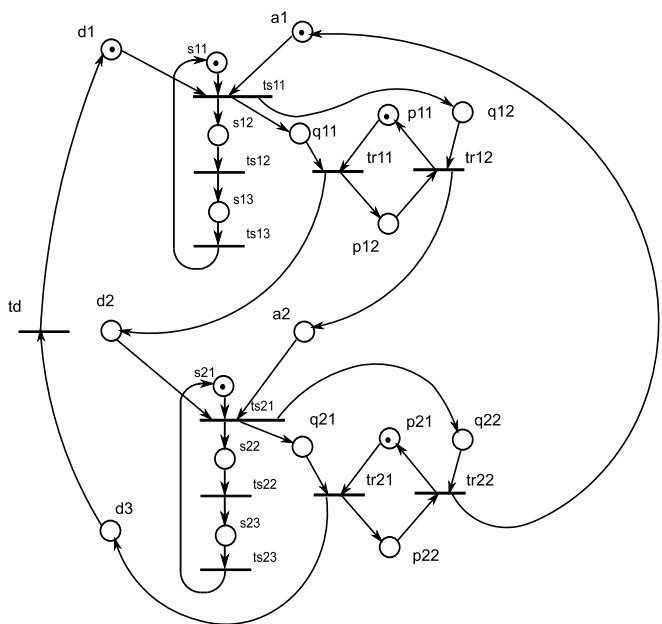


Рис. 12. Сетевая модель N_3 системы двух выталкивателей

необходимо выполнить в общей сложности 10 операций объединения позиций (5 для фрагмента (а) и 5 для фрагмента (б)), а для фрагмента, представленного на рис. 8, необходимо выполнить 5 операций объединения позиций. СП N_1 синтезируется в результате выполнения представленной выше программы, при выполнении которой необходимо выполнить 12 операций объединения переходов и 8 дополнительных операций по объединению пози-

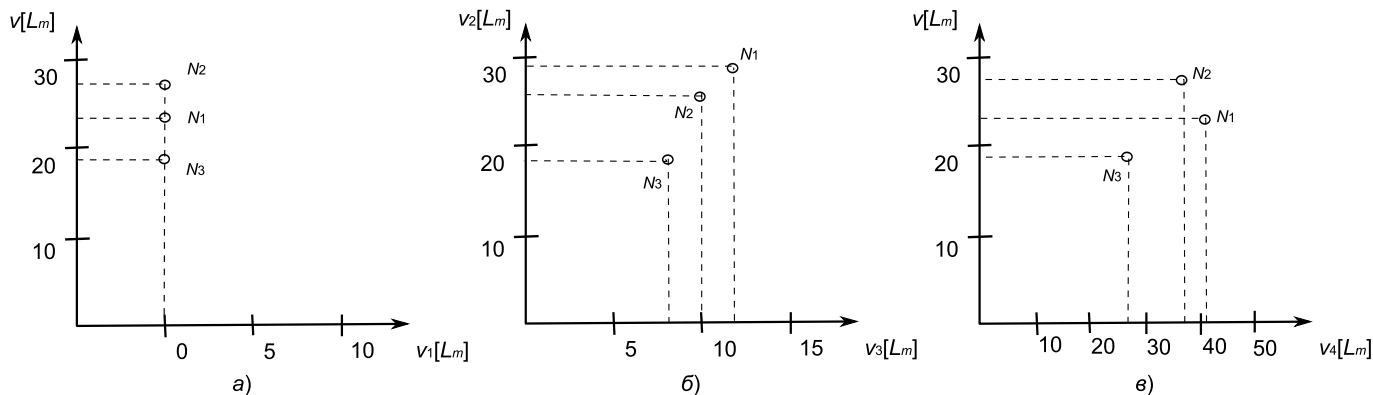


Рис.13. Примеры сравнительных оценок СП N_1 , N_2 , N_3 , представленных в различных системах координат

ций. В итоге для N_1 имеем: $v_2[N_1] = 29$, $v_3[N_1] = 12$, $v_4[N_1] = 41$.

Для СП-модели N_2 ЛФ представлены на рис. 5, 8, 9, 11. Рассуждая аналогично, что и при оценке СП N_1 , можно отметить, что число операций объединения позиций для синтеза фрагментов, представленных на рис. 5 и 8, остается 6 и 5 соответственно. Для построения фрагментов, представленных на рис. 9 и рис. 11, необходимо выполнить 4 и 8 операций объединения позиций соответственно. СП N_2 строится в результате выполнения следующей программы объединения позиций и переходов ЛФ.

Программа синтеза СП N_2 на основе системы ЛФ:

$$\begin{aligned}
 ts11 &= ts11_1 + ts11_2 & tr12 &= tr12_1 + tr12_2 \\
 ts12 &= ts12_1 + ts12_2 & tr21 &= tr21_1 + tr21_2 \\
 ts13 &= ts13_1 + ts13_2 & tr22 &= tr22_1 + tr22_2 \\
 ts21 &= ts21_1 + ts21_2 & p11 &= p11' + p11'' \\
 ts22 &= ts22_1 + ts22_2 & p12 &= p12' + p12'' \\
 ts23 &= ts23_1 + ts23_2 & p21 &= p21' + p21'' \\
 tr11 &= tr11_1 + tr11_2 & p22 &= p22' + p22''
 \end{aligned}$$

В результате выполнения данной программы необходимо выполнить 10 операций объединения переходов и 4 дополнительные операции по объединению позиций. В итоге для N_2 имеем:

$$v_2[N_2] = 27, v_3[N_2] = 10, v_4[N_2] = 37.$$

Проведем анализ СП-модели N_3 . ЛФ, используемые для построения N_3 , представлены на рис. 5, 8, 9, 11. Число операций объединения позиций для синтеза фрагментов, представленных на рис. 5, 8 и 9, остается 6, 5 и 4 соответственно. Для построения фрагментов, представленных на рис. 11, необходи-

мо выполнить 4 операции объединения позиций (при синтезе N_3 мы не учитываем циклические фрагменты $r11'' - ts13_2$, $p12'' - ts12_2$, $p21'' - ts23_2$ и $p22'' - ts22_2$).

В результате синтеза СП N_3 на основе элементарных сетей необходимо выполнить 8 операций объединения переходов и 19 операций по объединению позиций. В итоге для N_3 имеем:

$$v_2[N_3] = 19, v_3[N_3] = 8, v_4[N_3] = 27.$$

Полученные численные значения СП N_1 , N_2 , N_3 сведены в табл. 3.

Использование шкал при оценке структурных особенностей СП имеет существенный практический смысл. Например, анализируя положение СП в системе координат $v_2[L]$, $v_3[L]$ (рис. 13, б), можно дать оценку уровню распараллеливания процессов, протекающих в данной модели, а положение СП в системе координат, представленной на рис. 13, в, характеризует трудоемкость синтеза модели, которая, с одной стороны, зависит от числа используемых элементов (элементарных сетей) $v[L]$, а с другой — от числа выполненных операций объединения при синтезе СП-модели $v_4[L]$.

Заключение

В данной работе предложен новый формализм для исследования СП-моделей сложных систем — структуры СП. Описаны некоторые свойства СП-структур, введено квазиметрическое пространство структур СП. На пространстве СП-структур задано множество функций оценки, на основе которого введена система шкал, позволяющая проводить количественную оценку синтезируемых СП. Отличительной особенностью данного формализма является эффективное сочетание свойств аппарата СП с возможностями теории структур, которые показаны на примере.

Практическая значимость предложенного формализма заключается в том, что в виде системы шкал предоставляется инструмент количественной оценки и сравнительного анализа синтезируемых СП-моделей при исследовании сложных систем.

Таблица 3

СП-структура	$v[L]$	$v_1[L]$	$v_2[L]$	$v_3[L]$	$v_4[L] = v_2[L] + v_3[L]$
N_1	23	0	29	12	41
N_2	27	0	27	10	37
N_3	19	0	19	8	27

Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда "Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований с привлечением молодых исследователей" (проект № 15-11-10010).

Список литературы

1. Котов В. Е. Сети Петри. М.: Наука, 1984.
2. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984.
3. Кулагин В. П. Проблемы анализа и синтеза структур параллельных вычислительных систем // Информационные технологии. 1997. № 1. С. 2—8.
4. 32nd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, 2011. URL: <http://www.jaist.ac.jp/acsd-petrinets2011/>
5. 33rd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2012), Hamburg, Germany,

June 25—29, 2012. URL: <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/meetings/pn2012/>

6. 34th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2013), Milano, Italy, June 24—28, 2013. URL: <http://www.mc3.disco.unimib.it/petrinets2013/>
7. Анкундинов Г. И. Синтез структуры сложных объектов. Логико-комбинаторный подход. Л.: ЛГУ, 1986.
8. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Иностранная литература, 1952.
9. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1982.
10. Cabasino M. P., Giua A., Seatzu N. Structural analysis of Petri nets // Control of Discrete-Event Systems. Lecture Notes in Computer Science. London: Springer-Verlag, 2013. № 433. P. 213—233.
11. Дубинин В. Н. Об одной методике проектирования supervizornogo upravleniya dlia diskretno-sobytiinykh sistem // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2009. № 3. С. 12—24.
12. ViVe — VisualVerifier Tool Framework. URL: <http://www.fb61499.com/license.html>
13. PIPE: Platform Independent Petri net Editor 2. URL: <http://pipe2.sourceforge.net/>

V. P. Kulagin, Head of the Research Laboratory, Professor, e-mail: vkulagin@hse.ru,
National Research University Higher School of Economics,
V. N. Dubinin, Associate Professor, Penza state University

Structural Analysis of Petri Nets

In this article we propose a new formalism — the structure of Petri nets (PN-structure) designed to study the models of complex systems. Structures or lattices are called partially ordered set in which any two elements there is a precise accurate lower and upper faces. In this paper we use the term "structure". Typed operations transformation Petri nets (PN) designed for the analysis and synthesis of new JV structures. It is shown that the introduced operations, allows us to decompose any SP into many linear or linear-cyclic fragments (LF), which simultaneously will be treated as a class of automata Petri nets and class synchronization Petri nets. Presents operations only allow you to analyze structural properties of the JV, while there are a number of studies in which the analysis of behavioral properties of the PN.

Describes the properties of PN-structures, introduced quasimatrices space structures PN. In the space of the PN-structures entities set multiple functions of evaluation, which introduced a system of scales, allowing a quantification of the properties of PN-structures. A distinctive feature of this formalism is an effective combination of properties of the device in PN with the possibilities of the theory of structures.

The practical application of the proposed methods of analysis and synthesis of PN is demonstrated by the classic example of two ejectors designed to transport parts. Showing the procedure of the synthesis of alternative options PN-models of the system of ejectors, showing their advantages and disadvantages, as well as a quantitative assessment of model structures with the display in the selected coordinate systems.

Keywords: parallel and distributed computing and systems, modeling, complex systems, Petri nets, theory of structures, system of coordinates

References

1. Kotov V. E. *Seti Petri*. Moscow: Nauka, 1984.
2. Peterson Dzh. *Teoriia setei' Petri i modelirovanie sistem*. Moscow: Mir, 1984.
3. Kulagin V. P. Problemy' analiza i sinteza struktur parallel'ny'kh vy'chislitel'ny'kh sistem, *Informatcionny'e tekhnologii*, 1997, no. 1, pp. 2—8.
4. 32nd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, 2011. URL: <http://www.jaist.ac.jp/acsd-petrinets2011/>
5. 33rd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2012), Hamburg, Germany, June 25—29, 2012. URL: <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/meetings/pn2012/>
6. 34th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2013), Milano, Italy, June 24—28, 2013. URL: <http://www.mc3.disco.unimib.it/petrinets2013/>

7. Ankundinov G. I. *Sintez struktury' slozhny'kh ob'ektov. Logiko-kombinatorny'i' podhod*. Leningrad: LGU, 1986.

8. Birkhof G. *Teoriia struktur*. Moscow: Inostrannaia literatura, 1952.

9. Skorniakov L. A. *E'lementy' teorii struktun*. Moscow: Nauka, 1982.

10. Cabasino M. P., Giua A., Seatzu N. Structural analysis of Petri nets, *Control of Discrete-Event Systems. Lecture Notes in Computer Science*. London: Springer-Verlag, 2013, no. 433, pp. 213—233.

11. Dubinin V. N. Ob odnoi' metodike proektirovaniia supervizornogo upravleniia dlia diskretno-soby'tii'ny'kh sistem, *Izvestiia vy'sshikh uchebny'kh zavedenii'*. Povolzhskii' region. Tekhnicheskie nauki, 2009, no. 3, pp. 12—24.

12. ViVe — VisualVerifier Tool Framework. URL: <http://www.fb61499.com/license.html>

13. PIPE: Platform Independent Petri net Editor 2. URL: <http://pipe2.sourceforge.net/>