УДК 519.715

В. И. Левин, д-р техн. наук, проф., e-mail: vilevin@mail.ru,
Пензенская государственная технологическая академия

Непрерывно-логическая модель решения комбинаторных задач

Сформулирован класс комбинаторных задач, эквивалентных задаче определения взаиморасположения n последовательностей интервалов. Показано, что адекватной математической моделью решения поставленной задачи является конечный динамический автомат без памяти, адекватным математическим аппаратом — непрерывная логика. Построены алгоритмы решения. Приведен пример.

Ключевые слова: *непрерывная логика, комбинаторная задача, автоматная модель, интервал*

Введение

Многие задачи обработки данных, планирования работ, проектирования систем управления и т. д. сводятся математически к решению комбинаторной задачи — определению взаиморасположения *n* последовательностей интервалов (временных или пространственных) и нахождению условий, при которых это взаиморасположение имеет тот или иной качественный характер. Приведем несколько примеров таких задач.

1. Пусть имеются последовательность *A* временных интервалов, в которых некоторое основное техническое устройство работоспособно, и последовательность *B* временных интервалов, в которых работоспособно резервное устройство. Система "основное и резервное устройства" работоспособна, если работоспособно хотя бы одно из двух ее устройств — основное или резервное. Таким образом, для того чтобы установить последовательность интервалов работоспособности всей системы, надо определить взаиморасположение последовательностей интервалов работоспособности основного устройства (последовательность *A*) и резервного устройства (последовательность *B*) и найти те промежутки времени, на которых действуют интервалы хотя бы одной из последовательностей — *A* или *B*; они и будут интервалами работоспособности системы. А для того чтобы, например, установить, когда система работоспособна на произвольном заданном отрезке времени *T*, надо найти условия, при которых расположение последовательностей интервалов *A* и *B* таково, что на отрезке *T* интервалы последовательности *B* накрывают промежутки между интервалами последовательности *A*.

2. Рассмотрим последовательность *A* временных интервалов, в которых некоторая организация (магазин, банк, ремонтная мастерская и т.д.) выполняет обслуживание клиентов, и последовательность *B* временных интервалов, в которых некоторый клиент может посетить обслуживающую организацию. Чтобы установить последовательность промежутков времени возможного обслуживания клиента, надо определить взаиморасположение последовательностей интервалов *A* и *B* и выявить те промежутки времени, где действуют интервалы обеих последовательностей — *A* и *B*; они и будут промежутками времени возможного обслуживания клиента. А для того чтобы установить, к примеру, когда организация может обслужить клиента при его обращении в любой доступный для него момент времени, надо найти условия, при которых расположение последовательностей интервалов *A*, *B* такое, что интервалы последовательности *A* накрывают все интервалы последовательности *B*.

3. Пусть заданы последовательность *A* временных интервалов, в которых председатель совета может провести его заседание, и последовательности $B_1, ..., B_{10}$ временных интервалов, в которых члены совета 1, ..., 10 могут участвовать в этом заседании. Заседание совета возможно только при участии в нем председателя и не менее 5 любых членов совета. Для того чтобы установить последовательность промежутков времени, в которых возможно проведение заседания совета, надо определить взаиморасположение последовательностей интервалов A, $B_1, ..., B_{10}$ и найти те промежутки времени, на которых одновременно действуют интервалы последовательности *A* и интервалы каких-то 5 или более из 10 последовательностей $B_1, ..., B_{10}$; они и будут промежутками времени возможного проведения заседания совета. А для того чтобы установить, например, когда проведение заседания совета оказывается возможным на

произвольном заданном отрезке времени T, надо найти условия, при которых взаиморасположение последовательностей интервалов A, B_1, ..., B_{10} такое, что отрезок T накрывается каким-либо интервалом последовательности A и какими-либо 5 или более интервалами из 5 или более соответствующих последовательностей B_1, ..., B_{10}.

Задача определения взаиморасположения n последовательностей интервалов, примеры которой приведены выше, является комбинаторной задачей. При решении комбинаторных задач данного типа можно применять различные переборные методы. Но большие недостатки этих методов (быстрый рост сложности вычислений при увеличении размеров задачи; неаналитический (поисковый) характер алгоритма решения; невозможность обозримого представления алгоритма решения в случае высокой размерности задачи) заставляют искать другие пути решения данной задачи. Возможный подход состоит в том, чтобы найти для задачи готовую адекватную математическую модель, которая глубоко и детально разработана на базе какого-нибудь удобного аналитического аппарата. В данной статье показано, что такой моделью может служить динамический конечный автомат [1—4], а таким аппаратом — непрерывная (бесконечнозначная) логика [1, 2, 5, 6].

1. Постановка задачи

Математическая постановка решаемой задачи может быть описана следующим образом. Задано n конечных последовательностей непересекающихся интервалов

$$\begin{aligned}
&A_1 = (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12}), ..., (a_{1m_1}, b_{1m_1});\\
&A_2 = (a_{21}, b_{21}), (a_{22}, b_{22}), ..., (a_{2m_2}, b_{2m_2});\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_n = (a_{n_1}, b_{n_1}), (a_{n_2}, b_{n_2}), ..., (a_{nm_n}, b_{nm_n}).
\end{aligned} \qquad (1)$$

Требуется: 1) определить взаиморасположение имеющейся системы последовательностей интервалов (1); 2) найти условия, при которых это взаиморасположение имеет тот или иной качественный характер. Сформулированные две задачи различаются тем, что первая из них нацелена на то, чтобы по заданному положению всех интервалов всех последовательностей (1) определить взаиморасположение любых комбинаций (по две, по три и т. д.) любых подпоследовательностей последовательностей (1), в то время как вторая имеет целью найти условия, накладываемые на положение всех интервалов всех подпоследовательностей (1), при которых указанное взаиморасположение имеет тот или иной требуемый вид. Таким образом, задача 1 является задачей анализа имеющейся системы последовательностей интервалов (1), задача 2 — задачей синтеза такой системы. Задачи анализа и синтеза системы последовательностей интервалов вида (1) мы будем решать, используя адекватную системе (1) математическую модель конечного динамического автомата без памяти и математический аппарат непрерывной логики, необходимый для адекватного описания автомата. Решение предлагается получать в аналитической форме суперпозиции непрерывно-логических операций, которая одновременно дает логический алгоритм получения численного решения.

Заметим, что аппарат непрерывной логики перекликается с аппаратом нечеткой логики, введенным в свое время для описания операций над нечеткими множествами [7], когда каждой теоретико-множественной операции устанавливается во взаимно однозначное соответствие некоторая логическая операция (объединению — дизъюнкция, пересечению — конъюнкция, дополнению — отрицание) над мерами принадлежности элемента множествам-операндам. Поскольку мера принадлежности элемента множеству всегда заключена в отрезке [0, 1], все операции нечеткой логики определяются также на этом отрезке. Для непрерывной логики такое ограничение не требуется, поэтому непрерывно-логические операции определяются на произвольном отрезке [A, B], где A и B — любые вещественные числа, удовлетворяющие условию $A < B$. Это свободное определение носителя алгебры непрерывной логики имеет решающее прикладное значение, в частности, для теории динамических автоматов, где динамические процессы рассматриваются на отрезке времени $[0, \infty)$. Именно такая форма непрерывной логики позволила построить на ее базе аналитическую теорию динамических автоматов [1—4], которая стала адекватной математической моделью для решения поставленной выше задачи.

Еще один кажущийся пригодным подход к решению поставленной задачи — это использование временных логик [8, 9]. Всякая временная логика базируется на основных отношениях между событиями во времени (пересекаться, примыкать, быть позже и т.д.), дополненных в случае метрических шкал информацией о длительности событий и их положении на шкале. Задача временной логики — анализ текстов на естественном языке для установления временных отношений между отдельными событиями, описанными в тексте. При этом часть отношений устанавливается путем непосредственного смыслового анализа текста, а другая часть — путем логического вывода из уже установленных первичных отношений с помощью эвристически формулируемых правил такого вывода. Результатом анализа являются сугубо качественные и вдобавок неточные (из-за использования эвристики) временные отношения между событиями типа "событие A произошло значительно раньше события B" либо временная идентификация событий типа "событие A произошло очень давно". Но сформулированная выше задача анализа имеющейся системы последовательностей интервалов (1) является строго количественной задачей, предполагающей точное математическое (аналитическое) решение. Поэтому применять для ее решения временные логики невозможно. Что же касается второй сформулированной выше задачи — синтеза системы последовательностей интервалов (1) с нужными временными свойствами, то эта задача, хотя бы в качественной и неточной постановке, в рамках временных логик вообще не рассматривается.

2. Динамические конечные автоматы и непрерывная логика

Динамический конечный автомат (ДА) без памяти [1, 2, 4] представляет собой математическую модель в виде $(n, 1)$-полюсника (рис. 1), реализующего на выходе y булеву логическую функцию своих входов $x_1, ..., x_n$:

$$y = f(x_1, ..., x_n),\ x_1, ..., x_n, y \in \{0, 1\}. \qquad (2)$$

На входы данного автомата подаются входные двоичные динамические процессы (рис. 1)

$$\begin{array}{l} x_1(t)=1(a_{11},b_{11})0(-,-)1(a_{12},b_{12})...1(a_{1m_1}, b_{1m_1}); \\ \text{————————————————————} \\ x_n(t)=1(a_{n1},b_{n1})0(-,-)1(a_{n2},b_{n2})...1(a_{nm_n}, b_{nm_n}), \end{array} \qquad (3)$$

в которых $1(a, b)$ означают интервалы времени единичных значений процесса (импульсы), а $0(-, -)$ — промежуточные интервалы времени нулевых значений процесса (паузы). С выхода ДА (рис. 1) снимается выходной двоичный динамический процесс

$$y(t) = 1(c_1, d_1)0(-, -)1(c_2, d_2)...1(c_m, d_m), \qquad (4)$$

соответствующий поданным входным процессам (3) ДА и его реализуемой булевой логической функции (2). Основной задачей для ДА без памяти является задача отыскания выходного динамического процесса $y(t)$ по его известным входным динамическим процессам $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ и реализуемой логической функции f. В 1971—1972 гг. автором было установлено, что эта задача может быть решена в аналитической форме для любого ДА без памяти, имеющего любые число входов, входные процессы и реализуемую функцию, с помощью математического аппарата непрерывной (бесконечнозначной) логики (НЛ) [1, 2, 4, 5]. Определяется НЛ

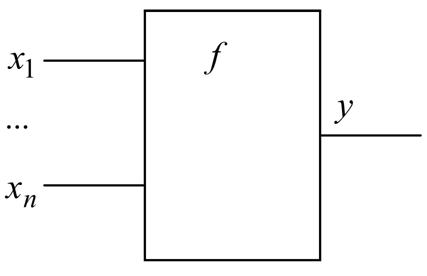

Рис. 1. Математическая модель конечного ДА

следующим образом. Пусть несущее множество $C = [A, B]$ — произвольный отрезок на оси вещественных чисел. Тогда для любых чисел $a, b, e \in C$ можно ввести следующие логические операции:

$$a \vee b = \max(a, b) \text{ — дизъюнкция}, \qquad (5)$$

$$a \wedge b = \max(a, b) \text{ — конъюнкция}, \qquad (6)$$

$$\bar{e} = A + B - e \text{ — отрицание}. \qquad (7)$$

Операции непрерывной логики (5)—(7) подобны соответствующим операциям двузначной (булевой) логики (где несущее множество $C = \{0, 1\}$) и обобщают их на случай непрерывного несущего множества. В НЛ сохраняют силу некоторые законы двузначной логики:

$$a \vee a = a,\ a \wedge a = a \text{ — тавтологии}; \qquad (8)$$

$$a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a \text{ — переместительный}; \qquad (9)$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \text{ — сочетательный}; \qquad (10)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ — распределительный}; \qquad (11)$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b},\ \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \text{ — де Моргана}; \qquad (12)$$

$$a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a \text{ — поглощения}. \qquad (13)$$

Кроме них, в НЛ действуют некоторые важные специфические законы, например, законы оценки и упрощения логического выражения:

$$a \vee b \geqslant a, b;\ a \wedge b \leqslant a, b, \qquad (14)$$

$$a_1 \vee ... \vee a_{i-1} \vee a_i \vee a_{i+1} \vee ... \vee a_m = a_1 \vee ... \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee ... \vee a_m \text{ при } a_i \leqslant a_k\ (k \neq i), \qquad (15)$$

$$a_1 \wedge ... \wedge a_{i-1} \wedge a_i \wedge a_{i+1} \wedge ... \wedge a_m = a_1 \wedge ... \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge ... \wedge a_m \text{ при } a_i \geqslant a_k\ (k \neq i). \qquad (16)$$

Идея отыскания выходного процесса ДА без памяти по его заданным входным процессам и реализуемой логической функции проста и изложена ниже. Обозначим:

1 — двоичный динамический процесс, принимающий постоянное значение 1;

0 — двоичный динамический процесс, принимающий постоянное значение 0;

$1'$ — изменение значения двоичного динамического процесса $0 \to 1$;

$0'$ — изменение значения двоичного динамического процесса $1 \to 0$;

$1'_a$ — изменение $1'$ в момент времени a;

$0'_b$ — изменение $0'$ в момент времени b;

$1'_a 0'_b$ — импульс $1(a, b)$ в интервале времени (a, b);

$0'_a 1'_b$ — пауза $0(a, b)$ в интервале времени (a, b).

Любой двоичный динамический процесс можно выписать в виде последовательности импульсов и пауз (как в (3)) либо последовательности изменений значения процесса. Например, процесс на рис. 2 можно записать в виде

$$x(t) = 1(-\infty,\ a)0(-,\ -)1(b,\ e)0(-,\ \infty)$$
$$\text{или } x(t) = 0'_a 1'_b 0'_e.$$

Число изменений значения двоичного процесса называется его глубиной, например, глубина процесса на рис. 2 равна 3. Для системы (вектора) нескольких двоичных процессов соответствующим понятием является векторная глубина. Например, векторная глубина системы из двух процессов вида $x_1(t) = 1(a,\ b)$, $x_2(t) = 1(c,\ d)$ равна (2,2).

Покажем на примерах, как с помощью НЛ определить выходной процесс ДА без памяти по его входным процессам и реализуемой логической функции. Ограничимся простейшими ДА — двухвходовыми дизъюнкторами и конъюнкторами, реализующими булевы логические функции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$:

$$y = x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0; \\ 1, \text{ в иных случаях;} \end{cases}$$
$$y = x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } x_1 = x_2 = 1; \\ 0, \text{ в иных случаях,} \end{cases} \tag{17}$$

и простейшими входными процессами с глубиной не свыше 1. Пусть надо найти выходной процесс конъюнктора на входные процессы $x_1(t) = 1'_a$, $x_2(t) = 0'_b$. Очевидно, искомый процесс равен одиночному импульсу $1(a,\ b)$ или тождественному 0 в зависимости от того, что больше: b или a. Поэтому, интерпретируя тождественный нуль как одиночный импульс с совмещенными началом и концом, можем записать искомый процесс в виде

$$y(t) = x_1(t) \wedge x_2(t) = 1'_a \wedge 0'_b =$$
$$= \begin{cases} 1(a,\ b) \text{ при } b > a; \\ 0 = 1(a,\ a) \text{ при } b \leqslant a. \end{cases} \tag{18}$$

Отсюда с помощью операции дизъюнкции НЛ $\vee$ окончательно находим

$$1'_a \wedge 0'_b = 1(a,\ a \vee b). \tag{19}$$

Выходные процессы в дизъюнкторе и конъюнкторе при всех остальных входных процессах с глубиной не свыше 1 получаются аналогично:

$$0 \wedge 0'_a = 0 \wedge 1'_b = 0;\ 1 \wedge x'_a = x'_a;\ 0'_a \wedge 0'_b = 0'_{a \wedge b};$$
$$1'_a \wedge 1'_b = 1'_{a \vee b};\ 1'_a \wedge 0'_b = 1(a,\ a \vee b);$$
$$1 \vee 0'_a = 1 \vee 1'_b = 1;\ 0 \vee x'_a = x'_a;\ 0'_a \vee 0'_b = 0'_{a \vee b};$$
$$1'_a \vee 1'_b = 1'_{a \wedge b};\ 1'_a \vee 0'_b = 0(b,\ a \vee b). \tag{20}$$

Формулы (20) наглядно демонстрируют удобство и адекватность аппарата НЛ как средства отыскания выходных процессов ДА без памяти по их входным процессам и реализуемой логической функции.

Если входные процессы дизъюнктора или конъюнктора имеют кратность свыше 1, то отыскание

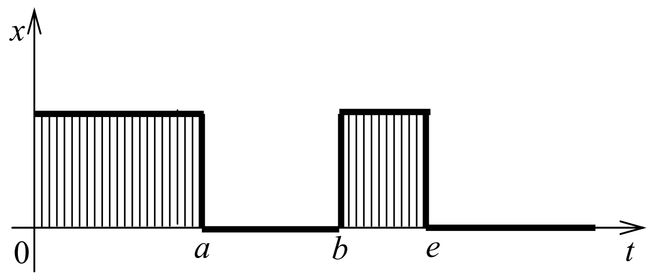

Рис. 2. Выходной процесс ДА без памяти

их выходных процессов требует применения формальных методов. Основные из них — прямой метод, метод декомпозиции и метод инверсии. *Прямой метод* основан на полном переборе всех возможных случаев взаимного расположения входных процессов элемента. Для каждого случая выходной процесс элемента записывается в явном виде отдельно. Общее выражение этого процесса получается из частных с использованием непрерывной логики. *Метод декомпозиции* заключается в том, что один из двух входных процессов элемента $x_1(t)$, $x_2(t)$, например $x_1(t)$, разбивается на два последовательных подпроцесса $x_{11}(t)$ и $x_{12}(t)$. Затем находятся составляющие выходные процессы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — реакции элемента на составляющие входные процессы $\{x_{11}(t),\ x_2(t)\}$ и $\{x_{12}(t),\ x_2(t)\}$. Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ не пересекаются во времени участками, содержащими все изменения значения процесса, то процесс $y(t)$ определяем как последовательность процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$. *Метод инверсии* основан на формулах

$$\overline{x_1(t) \vee x_2(t)} = \overline{x_1(t)} \wedge \overline{x_2(t)},$$
$$\overline{x_1(t) \wedge x_2(t)} = \overline{x_1(t)} \vee \overline{x_2(t)}, \tag{21}$$

вытекающих из закона де Моргана двузначной (булевой) логики и позволяющих по уже известной реакции дизъюнктора (конъюнктора) на входные процессы $x_1(t)$, $x_2(t)$ легко определить реакцию конъюнктора (дизъюнктора) на входные процессы $\overline{x_1(t)}$, $\overline{x_2(t)}$. Используя эти методы, легко получить формулы для выходных процессов дизъюнктора и конъюнктора при различных входных процессах с глубиной (1,2):

$$\begin{aligned} &0'_a \vee 1(b,\ c) = 0(a,\ a \vee b)1(-,\ a \vee c); \\ &1'_a \vee 1(b,\ c) = 1(a \wedge b,\ c)0(-,\ a \vee c); \\ &0'_a \vee 0(b,\ c) = 0(a \vee b,\ a \vee c); \\ &1'_a \vee 0(b,\ c) = 0(a \wedge b,\ a \wedge c); \\ &0'_a \wedge 1(b,\ c) = 1(a \wedge b,\ a \wedge c); \\ &1'_a \wedge 1(b,\ c) = 1(a \vee b,\ a \vee c); \\ &0'_a \wedge 0(b,\ c) = 0(a \wedge b,\ c)1(-,\ a \vee c); \\ &1'_a \wedge 0(b,\ c) = 1(a,\ a \vee b)0(-,\ a \vee c); \end{aligned} \tag{22}$$

входных процессах с глубиной (2,2):

$$\begin{aligned}
&1(a, b) \vee 1(c, d) = \\
&= 1[a \wedge c, (a \wedge d) \vee (b \wedge c)]0(-, -)1(a \vee c, b \vee d); \\
&1(a, b) \wedge 1(c, d) = 1[a \vee c, a \vee c \vee (b \wedge d)]; \\
&0(a, b) \vee 0(c, d) = 0[(a \wedge d) \vee (b \wedge c), b \wedge d]; \\
&0(a, b) \wedge 0(c, d) = \\
&= 0[a \wedge c, (a \wedge d) \vee (b \wedge c)]1(-, a \vee c)0(-, b \vee d); \quad (23)\\
&0(a, b) \vee 1(c, d) = \\
&= 0(a \wedge c, b \wedge c)1(-, a \vee d)0(-, b \vee d); \\
&0(a, b) \wedge 1(c, d) = \\
&= 1(a \wedge c, a \wedge d)0(-, b \vee c)1(-, b \vee d)
\end{aligned}$$

и т.д. Аналогично находятся НЛ-выражения выходных процессов многовходовых дизъюнкторов и конъюнкторов, реализующих многоместные булевы дизъюнкцию и конъюнкцию, аналогичные их двуместным прототипам (17), например:

$$\begin{aligned}
&0'_a \wedge 0'_b \wedge \ldots \wedge 0'_d = 0'_{a \wedge b \wedge \ldots \wedge d}; \\
&1'_a \wedge 1'_b \wedge \ldots \wedge 1'_d = 1'_{a \vee b \vee \ldots \vee d}; \\
&1'_a \wedge 1'_b \wedge \ldots \wedge 1'_d \wedge 0'_e \wedge 0'_g \wedge \ldots \wedge 0'_f = \\
&= 1[a \vee b \vee \ldots \vee d; \\
&a \vee b \vee \ldots \vee d \vee (e \wedge g \wedge \ldots \wedge f)]; \qquad (24)\\
&0'_a \vee 0'_b \vee \ldots \vee 0'_d = 0'_{a \vee b \vee \ldots \vee d}; \\
&1'_a \vee 1'_b \vee \ldots \vee 1'_d = 1'_{a \wedge b \wedge \ldots \wedge d}; \\
&1'_a \vee 1'_b \vee \ldots \vee 1'_d \vee 0'_e \vee 0'_g \vee \ldots \vee 0'_f = \\
&= 0[e \vee g \vee \ldots \vee f; \\
&e \vee g \vee \ldots \vee f \vee (a \wedge b \wedge \ldots \wedge d)].
\end{aligned}$$

3. Идея и метод решения

Пусть интервалы в системе последовательностей интервалов (1) интерпретируются как временные интервалы. Тогда системе (1) можно поставить во взаимно однозначное соответствие совокупность двоичных динамических процессов $x_i(t)$ вида (3). Именно i-й процесс этой совокупности соответствует i-й последовательности системы ($i = \overline{1, n}$), причем k-й импульс процесса соответствует k-му интервалу данной последовательности ($k = \overline{1, m_i}$). Иными словами, двоичная переменная x_i ($i = \overline{1, n}$) является индикатором присутствия какого-то интервала i-й последовательности интервалов (1): $x_i = 1$ означает присутствие, а $x_i = 0$ — отсутствие интервала.

Подадим определенную описанным образом совокупность двоичных динамических процессов $x_i(t)$ (3) на входы $x_1, ..., x_n$ ДА без памяти (см. рис. 1), который реализует некоторую выбранную нами булеву логическую функцию входов $y = f(x_1, ..., x_n)$ вида (2). Тогда ДА выдаст на выходе y некоторый двоичный динамический процесс $y(t)$ вида (4). Что характеризует этот процесс? Как известно из теории, любая булева логическая функция определяется заданным множеством единичных наборов значений аргументов, на которых функция принимает значение 1. Таким образом, выбранная нами определенная булева логическая функция f, предназначенная для реализации в ДА без памяти, заставляет этот ДА вырабатывать на выходе определенный двоичный динамический процесс $y(t)$ вида (4), импульсы которого соответствуют тем интервалам времени, где входные процессы $x_i(t)$ (3) ДА принимают набор значений, совпадающий с одним из единичных наборов функции f. Последнее означает, что при подаче на входы ДА без памяти совокупности двоичных процессов $x_i(t)$ (3), взаимно однозначно соответствующих системе последовательностей интервалов (1), выбор для реализации в этом ДА некоторой булевой логической функции $y = f(x_1, ..., x_n)$ означает выбор соответствующего частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1), а реализуемый на выходе автомата двоичный процесс $y(t)$ (4) — числовое значение этого показателя. Например, если в качестве функции f выбрана многоместная булева конъюнкция, это означает выбор частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1) в виде выделения всех случаев, когда интервалы всех n последовательностей (1) пересекаются (поскольку у этой функции есть только один единичный набор (1, 1, ..., 1)). При этом значение данного показателя имеет вид двоичного процесса $y(t)$ (4), импульсы которого соответствуют отрезкам времени, где интервалы всех последовательностей (1) пересекаются.

Итак, в качестве адекватной математической модели для решения задачи анализа системы последовательностей интервалов вида (1) можно выбрать ДА без памяти (см. рис. 1). Входными двоичными динамическими процессами этого динамического автомата является совокупность процессов вида (3), взаимно однозначно соответствующая системе последовательностей интервалов (1), т.е. совокупность процессов, моделирующая эту систему. ДА реализует некоторую, выбранную нами булеву логическую функцию $y = f(x_1, ..., x_n)$, являющуюся некоторым частным показателем взаиморасположения системы последовательностей интервалов. Тогда на выходе автомата вырабатывается двоичный динамический процесс $y(t)$ (4), дающий числовое значение выбранного частного показателя взаиморасположения интервалов (более точно, выделяющий отрезки времени, где интервалы системы (1) находятся в данном взаиморасположении). То есть выходной процесс (4) ДА-модели на рис. 1 моделирует числовое значение того или иного частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1), соответствующего выбранной булевой логической функции f, реализуемой ДА.

Алгоритм решения задачи анализа имеющейся системы последовательностей интервалов (1) в соответствии с изложенной идеей приведен ниже.

Шаг 1. Выбирается некоторый частный показатель П, характеризующий взаиморасположение интервалов системы (1) (если показатель П уже задан условиями задачи, шаг 1 опускается).

Шаг 2. Строится булева логическая функция $y = f(x_1, ..., x_n)$, соответствующая показателю П.

Шаг 3. Строится математическая модель задачи — схема ДА без памяти, реализующая функцию f (см. рис. 1) и получающая на всех n своих входах двоичные динамические процессы $x_i(t)$ (3). Совокупность этих процессов взаимно однозначно соответствует данной системе последовательностей интервалов (1). Выходной двоичный процесс ДА $y(t)$ (4) моделирует показатель взаиморасположения системы интервалов (1) (выделяет периоды, где интервалы находятся в данном взаиморасположении).

Шаг 4. Методами теории динамических автоматов [1—4] по входным процессам ДА-модели $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ и его реализуемой функции f находится его выходной процесс $y(t)$ (4). Параметры (моменты изменения значений) этого процесса выражаются через аналогичные параметры входных процессов ДА-модели в аналитической форме с помощью операций дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ НЛ.

Шаг 5. Развернув найденные на шаге 4 аналитические выражения параметров выходного процесса ДА-модели $y(t)$, получаем алгоритмы вычисления этих параметров в терминах операций НЛ $\vee$ и $\wedge$.

Шаг 6. Вычислив параметры выходного процесса ДА-модели $y(t)$ по алгоритмам, найденным на шаге 5, получаем числовое значение процесса, являющееся числовым значением выбранного частного показателя П (или f) взаиморасположения системы последовательностей интервалов.

Конец алгоритма.

Заметим, что в общем случае решение задачи анализа имеющейся системы последовательностей интервалов (1) может потребовать использования не одного, а нескольких частных показателей взаиморасположения интервалов системы (1). В этом случае получается общая задача анализа, распадающаяся на несколько частных задач, соответствующих указанным частным показателям. Для решения общей задачи анализа следует решить с помощью описанного алгоритма все частные задачи и объединить полученные решения.

Алгоритм решения задачи синтеза системы последовательностей интервалов (1), соответствующей заданным требованиям к взаиморасположению интервалов, строится с использованием описанного выше алгоритма решения задачи анализа системы (1). Он состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Решение частичной задачи анализа (с помощью выполнения шагов 1—4 алгоритма анализа) для подлежащей синтезу системы последовательностей интервалов (1) в предположении, что задан показатель взаиморасположения интервалов, а все параметры системы (1) (координаты начала и конца всех интервалов) заданы в буквенной форме. В результате получается двоичный процесс $y(t)$, моделирующий заданный показатель взаиморасположения интервалов (1) (точнее, содержащий импульсы-периоды, где интервалы находятся в заданном взаиморасположении).

Шаг 2. Составление системы уравнений и неравенств, выражающих в математической форме заданные требования к взаиморасположению интервалов (1). Эта система получается путем выписывания требуемых соотношений (>, =) между координатами начала и конца соответствующих импульсов процесса $y(t)$. Поскольку эти координаты выражаются через параметры интервалов (1) с помощью операций НЛ, полученная система есть система уравнений и неравенств НЛ.

Шаг 3. Решение системы уравнений и неравенств НЛ, полученной на шаге 2, с помощью специальных методов [1, 2, 5, 6], основанных на принципе последовательного расчленения отдельного уравнения (неравенства) НЛ на несколько более простых уравнений (неравенств). В результате решения указанной системы уравнений (неравенств) НЛ получаются условия на параметры отдельных интервалов (1), при выполнении которых взаиморасположение этих интервалов отвечает заданным требованиям.

Конец алгоритма.

Подчеркнем, что предложенные решения задач анализа и синтеза системы последовательностей интервалов получаются в аналитической форме, в терминах суперпозиции операций НЛ $\vee$ (дизъюнкция) и $\wedge$ (конъюнкция).

4. Примеры и оценка сложности вычислений

Пример 1. Магазин открыт в течение дня с a_{11} до b_{11} и с a_{12} до b_{12} часов, где $b_{11} < a_{12}$. Двое работающих приятелей собираются вместе посетить магазин. Первый из них свободен и может это сделать в промежутке времени с a_{21} до b_{21} часов, аналогично второй — в промежутке с a_{31} до b_{31} часов. Требуется определить периоды времени, в каждом из которых приятели могут реализовать свой план посещения магазина, и установить, при каких условиях это возможно, т.е. данные периоды существуют (не вырождены).

Приятели могут реализовать свой план посещения магазина в те и только те периоды времени, когда магазин открыт, а оба они свободны. Следовательно, для ответа на первый поставленный вопрос надо решить задачу анализа системы последовательностей интервалов

$$A_1 = (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12}); A_2 = (a_{21}, b_{21}); \\ A_3 = (a_{31}, b_{31}),$$

т.е. определить нужное взаиморасположение интервалов данной системы. Конкретно, нас интересуют те периоды времени, в которых взаимо-

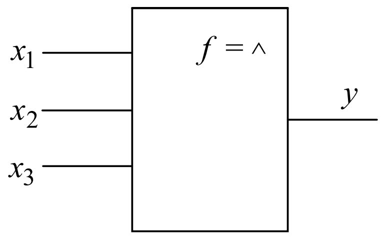

Рис. 3. ДА без памяти, реализующий 3-местную конъюнкцию

расположение таково, что присутствуют интервалы всех трех последовательностей: A_1, A_2, A_3. Для решения задачи применим алгоритм анализа п. 2.

Шаг 1. Показатель П, характеризующий нужное взаиморасположение интервалов системы A_1, A_2, A_3, содержательно уже задан условиями задачи.

Шаг 2. Булева логическая функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$, соответствующая показателю П, есть трехместная конъюнкция $y = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Шаг 3. Математическая модель задачи — ДА без памяти с тремя входами и одним выходом, реализующий на выходе указанную функцию f своих входов (рис. 3). На входы ДА-модели поступают процессы

$$x_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-, -)1(a_{12}, b_{12}),$$
$$x_2(t) = 1(a_{21}, b_{21}),$$
$$x_3(t) = 1(a_{31}, b_{31}),$$

которые взаимно однозначно соответствуют системе интервалов (A_1, A_2, A_3). С выхода ДА снимается двоичный процесс $y(t)$ вида (4), моделирующий показатель П взаиморасположения системы интервалов (A_1, A_2, A_3).

Шаг 4. По входным процессам $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ДА-модели и его реализуемой функции $f = \wedge$ вычисляем его выходной процесс $y(t)$ [1, 2, 4], используя готовую формулу $1(a, b) \wedge 1(c, d) = 1[a \vee c, a \vee c \vee (b \wedge d)]$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \wedge x_2(t) \wedge x_3(t) = x_1(t) \wedge [x_2(t) \wedge x_3(t)] = \\ &= [1(a_{11}, b_{11})0(-, -)1(a_{12}, b_{12})] \wedge [1(a_{21}, b_{21}) \wedge \\ &\wedge 1(a_{31}, b_{31})] = [1(a_{11}, b_{11})0(-, -)1(a_{12}, b_{12})] \wedge \\ &\wedge 1[a_{21} \vee a_{31}, a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \vee b_{31})] = \\ &= \{1(a_{11}, b_{11}) \wedge 1[\cdot]\}0(-, -)\{1(a_{12}, b_{12}) \wedge 1[\cdot]\} = \\ &= 1\{a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31}, a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee \\ &\vee [b_{11} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))]\} \times \\ &\times 0(-, -)1\{a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}, a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee \\ &\vee [b_{12} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))]\}. \end{aligned}$$

Шаг 5. Найденные на шаге 4 аналитические выражения параметров A, B, C, D выходного процесса $y(t) = 1(A, B)0(-, -)1(C, D)$ ДА-модели дают алгоритмы нахождения указанного процесса в терминах операций НЛ $\vee$ (max) и $\wedge$ (min), а именно, $A = \max(a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $B = \max(A, \min(b_{11}, \max(a_{21}, a_{31}, \min(b_{21}, b_{31}))))$ и т.д.

Шаг 6. По алгоритмам, найденным на шаге 5, находим параметры выходного процесса $y(t)$ ДА-модели, соответствующие конкретным значениям параметров a_{ij}, b_{ij} входных процессов $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. Так, например, при $a_{11} = 9$, $a_{12} = 14$, $b_{11} = 13$, $b_{12} = 20$, $a_{21} = 12$, $b_{21} = 16$, $a_{31} = 11$, $b_{31} = 15$ находим $A = 12$, $B = 13$, $C = 14$, $D = 15$. Таким образом, есть два периода времени, в которых оба приятеля могут совместно посетить магазин: (12, 13) и (14, 15).

Для того чтобы установить, при каких общих условиях возможно совместное посещение магазина двумя приятелями, надо определить, когда существуют (не выраждены) периоды времени, в которых приятели совместно могут посетить магазин. Так, для ответа на второй поставленный вопрос требуется решить задачу синтеза системы (A_1, A_2, A_3) последовательностей интервалов, т.е. найти условия, при которых взаиморасположение интервалов этой системы имеет нужный качественный характер, благодаря чему и обеспечивается существование указанных периодов времени. Для решения задачи применим алгоритм синтеза п. 2.

Шаг 1. Уже выполнен, так как содержится в шагах 1—4 алгоритма анализа системы (A_1, A_2, A_3), выполненных выше.

Шаг 2. Систему уравнений и неравенств НЛ, выражающих требования к взаиморасположению интервалов системы (A_1, A_2, A_3), обеспечивающие существование нужных периодов времени, получаем, потребовав, чтобы найденный в процессе анализа системы последовательностей (A_1, A_2, A_3) выходной процесс $y(t) = 1(A, B)0(-, -)1(C, D)$ ДА-модели, моделирующий заданный показатель взаиморасположения интервалов, имел невырожденные импульсы, моделирующие нужные нам периоды времени: $B > A$ или $D > C$. Если подставить в систему выражения для A, B, C, D из развернутого выражения процесса $y(t)$, приведенного выше, получим

$$\begin{gathered} a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{11} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))] > \\ > a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \text{ или} \\ a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{12} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))] > \\ > a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}. \end{gathered}$$

Шаг 3. Решение полученной на шаге 2 системы неравенств НЛ имеет вид

$$\begin{gathered} b_{11} \wedge [a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] > a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \text{ или} \\ b_{12} \wedge [a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] > a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}. \end{gathered}$$

Итак, взаиморасположение интервалов системы (A_1, A_2, A_3), отвечающее хотя бы одному из выписанных неравенств, обеспечивает существование периодов времени, в которых приятели могут совместно посетить магазин. Еще раз обратим внимание, что обе части неравенств (условий) представляют собой выражения, построенные из параметров интервалов системы (A_1, A_2, A_3) с помощью операций НЛ — дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$.

Пример 2. Усложним пример 1, приняв, что число приятелей, собравшихся вместе посетить магазин, равно $n - 1$, при этом первый из них может это осуществить в промежутке времени с a_{21} до b_{21}, второй — в промежутке времени с a_{31} до b_{31},..., $(n - 1)$-й — в промежутке с a_{n1} до b_{n1}. Следовательно, теперь для определения периодов времени, в каждом из которых приятели могут посетить магазин, необходимо решить задачу анализа системы последовательностей интервалов

$$A_1 = (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12}); A_2 = (a_{21}, b_{21});$$
$$A_3 = (a_{31}, b_{31}); ..., A_n = (a_{n1}, b_{n1}),$$

найдя соответствующие периоды времени, в которых присутствуют интервалы из всех n последовательностей $A_1, A_2, ..., A_n$. Снова применим алгоритм анализа из п. 3.

Шаг 1. Показатель П, определяющий нужное взаиморасположение интервалов $A_1, A_2, ..., A_n$, задан условиями задачи.

Шаг 2. Соответствующая П булева логическая функция f — n-местная конъюнкция $y = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$.

Шаг 3. Математическая модель задачи — ДА без памяти с n входами и одним выходом, где реализуется функция f. На входы ДА поступают процессы, соответствующие системе интервалов $A_1, ..., A_n$:

$$x_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-, -)1(a_{12}, b_{12}), x_2(t) = 1(a_{21}, b_{21}),$$
$$x_3(t) = 1(a_{31}, b_{31}), ..., x_n(t) = 1(a_{n1}, b_{n1}).$$

Выходной процесс $y(t)$ вида (4) моделирует показатель П взаиморасположения интервалов $A_1, ..., A_n$.

Шаг 4. По входным процессам $x_1(t), ..., x_n(t)$ ДА-модели и функции $f = \wedge$ находим выходной процесс $y(t)$ [1, 2, 4], используя для этого готовую формулу $\bigwedge_{i=1}^{N} 1(a_i, b_i) = 1\left[\bigvee_{i=1}^{N} a_i, \bigvee_{i=1}^{N} a_i \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{N} b_i\right)\right]$:

$$y(t) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i(t) = x_1(t) \wedge \left[\bigwedge_{i=2}^{n} x_i(t)\right] =$$
$$= [1(a_{11}, b_{11})0(-, -)1(a_{12}, b_{12})] \wedge \left[\bigwedge_{i=2}^{n} 1(a_{i1}, b_{i1})\right],$$

и после действий, аналогичных шагу 4 примера 1, находим

$$y(t) = 1\left\{a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}, a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{11} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right)\right]\right\} 0(-,-) 1\left\{a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}, a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{12} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right)\right]\right\}.$$

Шаг 5. Найденные на шаге 4 выражения параметров A, B, C, D выходного процесса $y(t) = 1(A, B)0(-, -)1(C, D)$ ДА-модели дают, как и в примере 1, алгоритмы вычисления процесса в терминах операций НЛ $\vee$ (max), $\wedge$ (min).

Шаг 6. По алгоритмам, найденным на шаге 5, вычисляем параметры выходного процесса $y(t)$ ДА-модели при конкретных значениях параметров входных процессов $x_1(t), ..., x_n(t)$, находя периоды (A, B) и (C, D), в которых все $n - 1$ приятелей могут посетить магазин.

Конец алгоритма.

Для нахождения общих условий, при которых возможно совместное посещение магазина $n - 1$ приятелями, определим, когда существуют (не вырождены) найденные выше периоды времени, в которых приятели могут вместе посетить магазин. Для этого нужно решить задачу синтеза системы последовательностей интервалов $(A_1, A_2, ..., A_n)$, найдя условия, при которых взаиморасположение интервалов этой системы имеет нужный характер, обеспечивающий существование данных периодов времени. Как и в примере 1, используем алгоритм синтеза п. 3.

Шаг 1. Этот шаг уже выполнен — см. шаги 1—4 алгоритма анализа системы $(A_1, A_2, ..., A_n)$, выполненные выше.

Шаг 2. Выполняется аналогично шагу 2 алгоритма синтеза в примере 1, а именно, требуем, чтобы найденный при анализе системы $(A_1, A_2, ..., A_n)$ выходной процесс $y(t) = 1(A, B)0(-, -)1(C, D)$ ДА-модели, моделирующий показатель взаиморасположения интервалов системы, имел невырожденные импульсы, моделирующие нужные нам периоды времени: $B > A$ или $D > C$. Подставив сюда выражения A, B, C, D из выражения $y(t)$, полученного выше при анализе системы, найдем условие

$$a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{11} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right)\right] > a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \text{ или}$$

$$a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{12} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right)\right] > a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}.$$

Шаг 3. Решение полученной на шаге 2 системы неравенств НЛ таково:

$$b_{11} \wedge \left[\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right] > a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}$$
$$\text{или } b_{12} \wedge \left[\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right] > a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}.$$

Взаиморасположение интервалов системы $(A_1, A_2, ..., A_n)$, удовлетворяющее хотя бы одному из двух выписанных неравенств, обеспечивает существование периодов времени, в которых $n - 1$

приятелей могут совместно посетить магазин — (A, B) и (C, D).

Как видно из примера 2, усложнение задачи в виде увеличения размерности рассматриваемой системы никак не повлияло на возможность ее решения в аналитической форме.

Оценим теперь вычислительную сложность нашего подхода. Базовая задача в этом подходе (анализ системы n последовательностей интервалов) эквивалентна вычислению выходного процесса ДА-модели системы, которая согласно [5, с. 93] имеет сложность

$$N \leqslant 2mn[\log_2(2m)(l^r - 1)/(l - 1) + \\ + \log_2 l(rl^{r+1} - (r + 1)l^r + 1)/(l - 1)^2]$$

элементарных операций. В этом выражении m — число интервалов в каждой из последовательностей, l — число входов в каждом логическом элементе ДА-модели, r — число ступеней в ДА-модели. Реализуя (это всегда возможно) двухступенчатую модель ($r = 2$), получим

$$N \leqslant 2mn[(\log_2 m + 1)(l + 1) + \log_2 l(2l^3 + 1)].$$

Таким образом, вычислительная сложность предложенного подхода возрастает как степенная функция от размерности задачи $m \times n \times l$, что позволяет применять этот подход к решению задач высокой размерности как в аналитической, так и численной форме.

Заключение

В настоящей работе показано, что изучение класса комбинаторных задач, эквивалентных комбинаторной задаче определения взаиморасположения n последовательностей интервалов, можно осуществлять с помощью математической модели динамического конечного автомата без памяти и математического аппарата непрерывной логики. Такой подход позволяет формально находить алгоритмы решения указанных задач, а также формально анализировать эти решения, например, находить необходимые и достаточные условия их существования. Другим преимуществом предложенного подхода является его применимость к решению задач произвольно высокой размерности.

Список литературы

1. **Левин В. И.** Введение в динамическую теорию конечных автоматов. Рига: Зинатне, 1975. 376 с.
2. **Bochmann D., Roginskij V. N., Levin V. I.** Dinamische Processe in Automaten. Berlin: Technik, 1977. 285 p.
3. **Левин В. И.** Динамика логических устройств и систем. М.: Энергия, 1980. 228 с.
4. **Левин В. И.** Теория динамических автоматов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1995. 407 с.
5. **Левин В. И.** Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982. 176 с.
6. **Левин В. И.** Структурно-логические методы исследования сложных систем. М. Наука, 1987. 304 с.
7. **Заде Л.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 150 с.
8. **Кандрашина Е. Ю., Литвинцева Л. В., Поспелов Д. А.** Пространство и время в системах искусственного интеллекта. М.: Наука, 1988. 328 с.
9. **Кандрашина Е. Ю., Литвинцева Л. В., Поспелов Д. А.** Представление знаний о пространстве и времени в системах искусственного интеллекта. М.: Наука, 1989. 328 с.

V. I. Levin, Dr of Tech Sci, Professor, e-mail: vilevin@mail.ru; Penza State Technological Academy

Continuous-Logical Model for Solution of Combinatorial Problems

The class of combinatorial problems equivalent to the problem of determination of mutual dislocation of interval sequences is formulated. It is shown, that an adequate mathematical model of solution of delivered problem is the finite dynamic automaton without memory, and adequate mathematical means — continuous logic. The algorithms of a solution are constructed. The example is indicated.

Keywords: *continuous logic, combinatorial problems, automata model, interval value*

References

1. **Levin V. I.** *Vvedenie v dinamicheskuyu teoriyu konechnykh avtomatov* (Introduction to the dynamic theory of finite automata), Riga, Zinatne, 1975, 376 p. (in Russian).
2. **Bochmann D., Roginskij V. N., Levin V. I.** *Dinamische Processe in Automaten*, Berlin, Technik, 1977, 285 p.
3. **Levin V. I.** *Dinamika logicheskikh ustroistv i system* (Dynamics of logic devices and systems), Moscow, Energiya, 1980, 228 p. (in Russian).
4. **Levin V. I.** *Teoriya dinamicheskikh avtomatov* (The theory of dynamical machines), Penza, Publishing house of Penz. gos. university, 1995, 407 p. (in Russian).
5. **Levin V. I.** *Beskonechnoznachnaya logika v zadachakh kibernetiki* (Infinite-logic problems in cybernetics), Moscow, Radio i svyaz', 1982, 176 p. (in Russian).
6. **Levin V. I.** *Strukturno-logicheskie metody issledovaniya slozhnykh system* (Structural and logical methods for complex systems research), Moscow, Nauka, 1987, 304 p. (in Russian).
7. **Zade L.** *Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh reshenii* (The concept of linguistic variable and its application to the adoption of the approximate solutions), Moscow, Mir, 1976, 150 p. (in Russian).
8. **Kandrashina E.Yu., Litvintseva L. V., Pospelov D. A.** *Prostranstvo i vremya v sistemakh iskusstvennogo intellekta* (Space and time in artificial intelligence systems), Moscow, Nauka, 1988, 328 p. (in Russian).
9. **Kandrashina E.Yu., Litvintseva L. V., Pospelov D. A.** *Predstavlenie znanii o prostranstve i vremeni v sistemakh iskusstvennogo intellekta* (Knowledge representation of space and time in artificial intelligence systems), Moscow, Nauka, 1989, 328 p. (in Russian).