УДК 519.863

И. Л. Каширина[1], д-р техн. наук, доц., kash.irina@mail.ru,
Я. Е. Львович[2], д-р техн. наук, проф., office@vivt.ru,
С. О. Сорокин[3], зам. директора департамента, sorokin-so@mon.gov.ru
[1] Воронежский государственный университет, Воронеж
[2] Воронежский институт высоких технологий, Воронеж
[3] Министерство образования и науки Российской Федерации, Москва

Модели и численные методы оптимизации формирования эффективной сетевой системы с кластерной структурой

Рассмотрены механизмы повышения эффективности сетевых систем с кластерной структурой, использующие интегральные оценки элементов системы и основанные на решении ресурсной (параметрической), структурно-ресурсной и комбинированной задач дискретной оптимизации. Для отыскания решения каждой из задач предложены соответствующие алгоритмы.

Ключевые слова: *мониторинг, сетевая система, интегральное оценивание, ресурсная оптимизация, структурная оптимизация*

Введение

Современные формы реализации систем образования, медицинского обслуживания, торговли, сервиса характеризуются принадлежностью к общему классу сетевых систем с кластерной структурой. Эффективность функционирования и развития объединенных в сеть объектов O_i ($i = \overline{1,I}$) характеризуется набором мониторируемых показателей y_{ij} ($i = \overline{1,I}$, $j = \overline{1,J}$), на основе которых формируется интегральная оценка объекта $Y_i = F(y_{ij})$ ($i = \overline{1,I}$), определенная на заданном числовом интервале $[A, O]$ [1, 2].

Интегральная оценка Y_i используется для разбиения всей совокупности объектов O_i ($i = \overline{1,I}$) на M кластеров. Каждый кластер характеризуется определенным диапазоном изменений интегральной оценки Y_i на числовом интервале $[A, O]$. Нумерация кластеров проводится по следующему принципу: в кластер с номером $m = 1$ входят объекты-лидеры, значение интегральной оценки Y_i^1 лучшего из которых максимально и близко O; кластер с номером $m = M$ составляют объекты-аутсайдеры, значение интегральной оценки Y_i^M худшего из которых минимально и близко к A.

После упорядочения объектов по значению интегральной оценки и их последующей кластерной структуризации создаются предпосылки для оптимизации эффективности системы в целом. Предлагается рассмотреть оптимизационные модели и численные методы формирования оптимальной сетевой системы по двум составляющим эффективности: структурной и ресурсной. Повышение структурной эффективности достигается трансформацией множества объектов O_i ($i = \overline{1,I}$) в другое множество O_{i_1} ($i_1 = \overline{1,I_1}$), где $I_1 < I$, отвечающее заданным условиям, а повышение ресурсной эффективности — за счет такого распределения общего для системы ресурсного обеспечения, при котором осуществляется перемещение объектов из кластеров с меньшим значением интегральной оценки в кластеры с большим ее значением.

Оптимизация структурной эффективности

Задача оптимизации структурной эффективности сетевой системы состоит в ее редукции в целях выравнивания эффективности деятельности объектов O_i ($i = \overline{1,I}$) таким образом, чтобы повысить уровень минимальной оценки Y_i^M. Для решения этой задачи используется следующий интеграционный механизм: в кластерах нижнего уровня выделяется некоторое подмножество объектов O_i ($t = \overline{1,T}$) с низкими интегральными оценками Y_t ($t = \overline{1,T}$), которые могут быть поглощены объектами-лидерами с высоким уровнем интегральной оценки Y_l ($l = \overline{1,L}$), $L = T$, $Y_l \gg Y_t$. Новый объект характеризуется интегральной оценкой $Y_{lt} = f(Y_l, Y_t) < Y_l$

($l = \overline{1, L}$, $t = \overline{1, T}$). Как правило, формула получения интегральной оценки нового объекта имеет вид: $Y_{lt} = c_1 Y_l + c_2 Y_t$, $c_1 + c_2 = 1$, $c_1, c_2 \geqslant 0$. Этот механизм трансформируется в оптимизационную постановку: необходимо обеспечить такое поглощение каждым из объектов O_l одного из объектов O_t, чтобы суммарное снижение уровня интегральной оценки объектов-лидеров было минимальным. Такой постановке соответствует оптимизационная модель с булевыми переменными [2]

$$x_{lt} = \begin{cases} 1, \text{ если объект } O_l \text{ поглощает объект } O_t, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (1)$$

целевой функцией

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T} (Y_l - Y_{lt} x_{lt}) \to \min \quad (2)$$

и ограничениями

$$\sum_{l=1}^{L} x_{lt} = 1, \; t = \overline{1, T}, \quad (3)$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{lt} = 1, \; l = \overline{1, L}, \quad (4)$$

$$x_{lt} \in \{0, 1\}, \; t = \overline{1, T}, \; l = \overline{1, L}. \quad (5)$$

Поскольку оценки Y_l в рамках данной модели являются константами, целевая функция может быть переписана в виде

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T} Y_{lt} x_{lt} \to \max. \quad (6)$$

Задача (1)—(5) относится к известному классу задач о назначении, она может быть эффективно решена, например венгерским методом [3].

Для продолжения интеграционного процесса в рамках редуцированной сети с числом объектов $I_1 = I - T$ выделяем новую группу объектов-лидеров O_{l_1} ($l_1 = \overline{1, L_1}$) и формируем новое множество объектов O_{t_1} ($t_1 = \overline{1, T_1}$), $T_1 = L_1$ и задачу (1)—(5) решаем вновь с введением булевых переменных, аналогичных (1). При продолжении процедуры редукции сети возможен вариант поглощения объектом-лидером нескольких объектов с низким уровнем эффективности.

Оптимизация ресурсной эффективности

Задача оптимизации ресурсной эффективности сетевой системы с кластерной структурой состоит в выборе двухэтапного механизма распределения ресурсного обеспечения R: на первом этапе между кластерами, а на втором этапе между объектами оптимизированной сети. Распределение ресурса R между кластерами R_m ($m = \overline{1, M}$) целесообразно осуществить по принципу обратных приоритетов [4] с учетом суммарной потребности объектов кластера и приоритета каждого кластера, установленного в системе, а внутри кластера разделить ресурс на поддерживающий R_1^m и развивающий R_2^m. Предполагается поддерживающий ресурс также распределить по принципу обратных приоритетов с учетом потребностей объекта и значения интегральной оценки эффективности. Для распределения второго вида ресурса используется оптимизационный подход, ориентированный на возможность повышения уровня эффективности объекта O_{t_m} ($t_m = \overline{1, T_m}$, $m = \overline{2, M}$) по j-му показателю, наиболее близкому к среднему значению этого показателя по кластеру $m = 1$ объектов-лидеров. Для этого введем коэффициент близости значения j-го показателя объекта O_{t_m} ($t_m = \overline{1, T_m}$, $m = \overline{2, M}$) к значениям этого показателя у объектов-лидеров: $a_{t_m j} = \dfrac{y_{t_m j}}{\bar{y}_{1j}}$, где $\bar{y}_{1j}$ — среднее значение j-го показателя для объектов 1-го кластера, и булевы переменные

$$x_{t_m j} = \begin{cases} 1, \text{ если объекту } O_{t_m} \text{ выделяется развивающий ресурс для повышения эффективности по } j\text{-му показателю,} \\ 0, \text{ в противном случае, } t_m = \overline{1, T_m}, \; j = \overline{1, J}. \end{cases}$$

Тогда оптимизационная модель для объектов m-го кластера имеет следующий вид:

$$\sum_{t_m=1}^{T_m} \sum_{j=1}^{J} a_{t_m j} x_{t_m j} \to \max; \quad (7)$$

$$\sum_{t_m=1}^{T_m} \sum_{j=1}^{J} r_{t_m j} x_{t_m j} \leqslant R_m^2; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{J} x_{t_m j} = 1, \; t_m = \overline{1, T_m}; \quad (9)$$

$$x_{t_m j} \in \{0, 1\}, \; t_m = \overline{1, T_m}, \; j = \overline{1, J}. \quad (10)$$

Целевая функция (7) определяет претендентов на развивающий ресурс R_m^2, максимально близких по показателям эффективности к объектам-лидерам, а ограничение (8) характеризует условие, при котором суммарная потребность в ресурсе объектов O_{t_m} для повышения уровня j-го показателя $r_{t_m j}$ не должна превышать выделенного для m-го кластера ресурса R_m^2. Ограничение (9) означает, что каждому объекту дополнительный ресурс первоначально выделяется для повышения только одного показателя.

Очевидно, что задача (7)—(10) разрешима только в том случае, если $\sum_{t_m=1}^{T_m} \min_{j=\overline{1,J}} r_{t_m j} \leqslant R_m^2$. Кроме того, задача имеет смысл только в том случае, если $R_m^2 < \sum_{t_m=1}^{T_m} \max_{j=\overline{1,J}} r_{t_m j}$, иначе ее решение тривиально: $x_{t_m k} = 1$, если $k = \arg\max_{1 \leqslant j \leqslant J} a_{t_m j}$; $x_{t_m j} = 0$ для $j \neq k$.

Отметим, что задача (7)—(10) близка по смыслу к общей постановке блочной задачи о рюкзаке (*Multiple-choice Knapsack Problem — MCKP*) [8, 9]. В этой задаче дано m классов $N_1, N_2, ..., N_m$ предметов, которые надо упаковать в рюкзак емкостью W. Каждый предмет j класса N_i имеет определенную ценность и массу. Задача заключается в том, чтобы выбрать ровно один предмет из каждого класса таким образом, что суммарная ценность предметов была максимальна и масса рюкзака не превышала W.

Блочная задача о рюкзаке является *NP*-сложной. Несмотря на довольно высокую практическую значимость *MCKP* (она возникает, например, при планировании инвестиций, проектировании информационных систем, оптимальном резервировании элементов сложных систем [6], планировании работ серверов и т. д.), число подходов к ее решению, описанных в литературе, остается сравнительно небольшим. Тем не менее существуют несколько точных методов для решения блочной задачи. Однако в случае большой размерности исходной постановки, точные методы решения *NP*-полных задач становятся практически неприменимыми.

В данной работе для решения задачи (7)—(10) предлагается приближенный метод, основанный на идее генетических алгоритмов.

Прежде всего отметим, что если в исходной постановке задачи (7)—(10) существуют номера l и k такие, что $a_{t_m l} \leqslant a_{t_m k}$ и $r_{t_m l} \geqslant r_{t_m k}$, то вариант $t_m l$ доминируется вариантом $t_m k$, а следовательно, переменная $x_{t_m l}$ в оптимальном решении примет значение 0 (так как объект O_{t_m} при меньшем количестве ресурсов может сильнее повысить показатель k, чем показатель l).

На рис. 1 изображены (в качестве примера) все возможные варианты повышения одного показателя эффективности для объекта O_{t_m} для всех $j = \overline{1,J}$ (по оси абсцисс откладывается потребность в ресурсе $r_{t_m j}$ для повышения уровня j-го показателя, по оси ординат — значение соответствующего повышения). Черным цветом выделены недоминируемые варианты, один из которых должен быть выбран в результате решения задачи.

Обозначим через N_{t_m} подмножество индексов показателей j, которым соответствуют недоминируемые варианты $t_m j$ повышения уровня эффективности объекта O_{t_m}. Упорядочим элементы каждого множества N_{t_m} в порядке убывания $a_{t_m j}$. Например, если $N_{t_m} = (3, 1, 5)$ — это значит что $a_{t_m 3} \geqslant a_{t_m 1} \geqslant a_{t_m 5}$. При этом элементы множеств N_{t_m} также автоматически станут упорядочены в порядке убывания $r_{t_m j}$, в силу наличия в N_{t_m} только недоминируемых вариантов, если $a_{t_m l} \geqslant a_{t_m k}$, то и $r_{t_m l} \geqslant r_{t_m k}$.

Кодирование данных для генетического алгоритма предлагается осуществлять следующим образом. Экземпляр популяции — это целочисленная строка длины T_m, в которой на месте t_m ($t_m = \overline{1, T_m}$) стоит $j \in N_{t_m}$, если $x_{t_m j} = 1$. Таким образом, решение $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (фенотип) будет записано как строка вида $S = (1, 3, 4, 3)$ (генотип). Для оценки особей популяции по критерию приспособленности можно непосредственно использовать целевую функцию (7), вычисленную для соответствующего фенотипа. Для реализации процедур селекции и скрещивания можно использовать стандартные механизмы, а в процедуре мутации случайно выбранный k-й элемент строки заменить на другой случайный элемент из множества N_k.

Однако ввиду наличия ограничения (8) решения-потомки могут оказаться недопустимыми, поэтому необходима дополнительная процедура исправления недопустимых решений. Предположим,

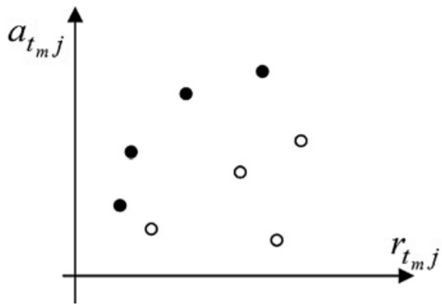

Рис. 1. Множество вариантов повышения одного из показателей эффективности для объекта O_{t_m}

матрица X, соответствующая строке S, нарушает ограничение (8).

1. Определяем для каждого элемента s_{t_m} ($t_m = \overline{1, T_m}$) строки S порядковый номер l в множестве N_{t_m} (например, если N_{t_m} = (3, 1, 5), а в строке S на месте t_m стоит 5, то $l = 3$).

2. В строке S заменяем некоторый элемент s_k, так, чтобы уменьшить требования к ресурсу, т. е. берем в множестве N_k вместо s_k следующий по порядку элемент.

Очевидно в качестве s_k нельзя выбирать элементы, которые имеют максимальный порядковый номер в множестве N_k (и, соответственно, минимальные требования к ресурсу для повышения k-го показателя). Поэтому предлагается для замены выбрать элемент s_k ($k = \overline{1, T_m}$), которому соответствует минимальное отношение

$$d_k = \frac{a_{kl} - a_{k(l+1)}}{r_{kl} - r_{k(l+1)}}, \qquad (11)$$

т. е. определяется замена, которая обеспечит минимальную потерю эффективности на единицу уменьшения требований к ресурсам.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий предлагаемую процедуру исправления недопустимых решений. Пусть в задаче (7)—(10) $T_m = J = 3$, $R_m^2 = 10$, при этом матрицы R и A имеют вид: $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Определим множества N_{t_m}, $t_m = \overline{1, 3}$. На рис. 2 элементы этих множеств изображены графически и выделены черным цветом.

Упорядочив элементы этих множеств в порядке убывания $a_{t_m j}$, получаем: $N_1 = \{3, 2\}$, $N_2 = \{2, 3\}$, $N_3 = \{1, 2, 3\}$. Пусть на очередном шаге алгоритма получена строка $S = (3, 3, 1)$, нарушающая ограничение (8): $5 + 1 + 5 > 10$. Определим подходящий элемент для замены. Очевидно это не может быть s_2, так как $r_{23} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant 3} r_{2j}$. Сравним s_1 и s_3: $d_1 = \frac{0{,}8 - 0{,}3}{5 - 3} = 0{,}25$, $d_3 = \frac{1 - 0{,}9}{4 - 3} = 0{,}1$. Таким образом, элемент s_3 заменяется на следующее после него значение из N_3, и строка S принимает вид $S = (3, 3, 2)$. Эта строка удовлетворяет ограничению (8) (в противном случае процедура корректировки решения осуществляется повторно).

Оптимизация структурно-ресурсной эффективности

В целом ряде случаев целесообразно использовать комбинированный механизм оптимизации сетевой системы. С этой целью объекты O_{t_m} m-го кластера разбивают на две группы $O_{t_m}^1$ ($t_m^1 = \overline{1, T_m^1}$) и $O_{t_m}^2$ ($t_m^2 = \overline{1, T_m^2}$), при этом $T_m^1 + T_m^2 = T_m$. В первую группу входят объекты, которые имеют достижения по отдельным показателям эффективности, близкие к объектам группы лидеров, и при выделении развивающего ресурса способны самостоятельно улучшить свою позицию в рейтинге. Во вторую группу включены объекты, которые самостоятельно не могут улучшить свое положение и подлежат поглощению объектами-лидерами. После разделения на группы для объектов первой группы используется оптимизационная модель (7)—(10), а второй группы — модель (2)—(5).

При разделении на группы надо учитывать следующие условия:

- ограниченность развивающего ресурса R_m^2, что определяет ограниченность подмножества объектов первой группы;
- объекты, включаемые в первую группу, должны иметь перспективу роста по каждому j-му показателю.

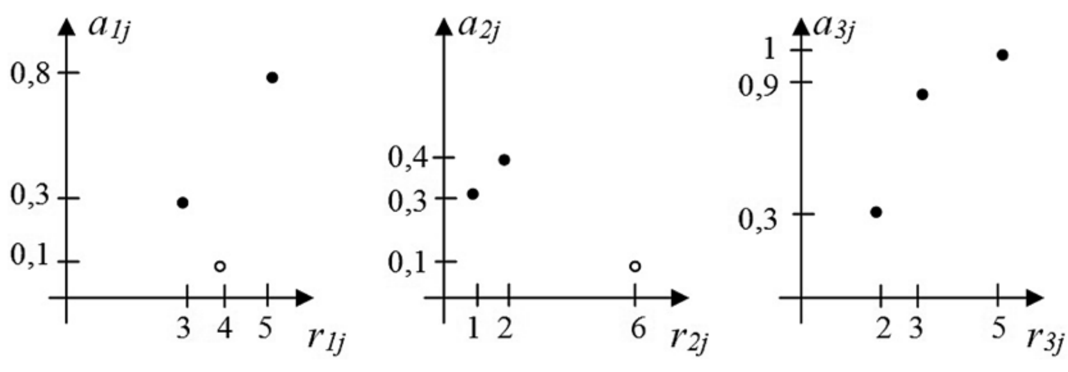

Рис. 2. Элементы множеств N_{t_m}, $t_m = \overline{1, 3}$

Если ввести бинарную оценку выполнения второго условия каждым объектом

$$c_{t_m j} = \begin{cases} 1, \text{ если объект } O_{t_m} \text{ имеет перспективу} \\ \text{приближения по } j\text{-му показателю к объ-} \\ \text{ектам-лидерам,} \\ 0, \text{ в противном случае, } t_m = \overline{1, T_m}, j = \overline{1, J} \end{cases}$$

и булевы переменные

$$x_{t_m} = \begin{cases} 1, \text{ если объект } O_{t_m} \text{ включается в первую} \\ \text{группу,} \\ 0, \text{ в противном случае, } t_m = \overline{1, T_m}, \end{cases}$$

то оптимизационная модель, обеспечивающая выполнение обоих условий, имеет следующий вид:

$$\sum_{t_m = 1}^{T_m} x_{t_m} \to \min; \tag{12}$$

$$\sum_{t_m = 1}^{T_m} c_{t_m j} x_{t_m} \geqslant 1, j = \overline{1, J}; \tag{13}$$

$$x_{t_m} \in \{0, 1\}, t_m = \overline{1, T_m}, \tag{14}$$

где целевая функция (12) определяет выполнение первого условия, а ограничение (13) — выполнение второго условия.

Задача (12)—(14) относится к классу задач о минимальном покрытии и для ее решения предлагается использовать оригинальный подход, предложенный в работе [5]. На основании этого подхода задача дискретной оптимизации (12)—(14) может быть эквивалентным образом переписана в виде задачи непрерывной минимизации полинома, заданного на единичном гиперкубе:

$$-\sum_{t_m = 1}^{T_m} q_{t_m} + T_m \sum_{j = 1}^{J} \prod_{t_m : c_{t_m j} = 1} q_{t_m} \to \min_{0 \leqslant q_{t_m} \leqslant 1}, \tag{15}$$

при этом координаты вектора x_{t_m}, оптимального в задаче (12)—(14), связаны с координатами оптимального вектора q_{t_m} соотношением: $x_{t_m} = 1 - q_{t_m}$, т. е. решением непрерывной задачи (15) будет вектор с булевыми координатами. Такой переход осуществляется путем рандомизации переменных и рассмотрения вероятностной постановки исходной задачи (12)—(14). При этом для решения задачи (15) может быть использован, например, градиентный алгоритм с проекцией на единичный гиперкуб. Надо отметить, что оптимизируемая градиентным алгоритмом функция в задаче (15) не имеет локальных экстремумов внутри единичного гиперкуба [5], но они могут присутствовать в граничных точках. Поэтому в целях отыскания глобального экстремума для каждой решаемой задачи градиентный алгоритм рекомендуется перезапускать несколько раз, каждый раз с новой случайной начальной точки.

Заключение

По результатам вычислительного эксперимента можно отметить, что при решении тестовых задач предложенными методами обеспечивается достаточно высокая точность. Так, для тестовых задач (7)—(10), в которых было известно оптимальное решение, отношение найденного генетическим алгоритмом приближенного значения целевой функции к оптимальному, в среднем, превышало 0,9. Градиентный алгоритм решения задачи (15) на сильно разреженных матрицах покрытия (содержащих более 80 % нулевых элементов) работает значительно быстрее метода ветвей и границ, т. е. традиционного алгоритма решения задач о минимальном покрытии.

Таким образом, совокупность предлагаемых оптимизационных моделей и соответствующего алгоритмического обеспечения позволяет осуществить формирование эффективной сетевой системы с кластерной структурой.

Список литературы

1. **Львович Я. Е.** Многоальтернативная оптимизация: теория и приложения. Воронеж: Кварта, 2006. 428 с.
2. **Каширина И. Л., Львович Я. Е., Сорокин С. О.** Интегральное оценивание эффективности сетевых систем с кластерной структурой // Экономика и менеджмент систем управления. 2015. Т. 15. № 1.3. С. 330—337.
3. **Батищев Д. И., Львович Я. Е., Фролов В. Н.** Оптимизация в САПР. М.: Высшая школа, 1997. 416 с.
4. **Бурков В. Н., Новиков Д. А.** Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999. 128 с.
5. **Львович Я. Е., Каширина И. Л., Чернышова Г. Д.** Оптимизация проектных решений на основе эквивалентных преобразований задачи о минимальном покрытии // Информационные технологии. 1999. № 4. С. 2—6.
6. **Львович Я. Е., Каширина И. Л., Тузиков А. А.** Генетический алгоритм решения многокритериальной задачи повышения надежности резервирования // Информационные технологии. 2012. № 6. С. 56—60.
7. **Каширина И. Л., Львович Я. Е., Сорокин С. О.** Ресурсная оптимизация эффективности сетевых систем с кластерной структурой // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2015. № 1. С. 39—43.
8. **Левин М. Ш., Сафонов А. В.** Эвристический алгоритм для многокритериальной блочной задачи о рюкзаке // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 4. С. 53—64.
9. **Dyer M. E., Kayal N., Walker J.** A Branch and Bound Algorithm for Solving the Multiple-Choice Knapsack Problem // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1984. N. 11. P. 231—249.

I. L. Kashirina, Associate Professor, Voronezh state University, e-mail: kash.irina@mail.ru,
Ja. E. Lvovich, PhD, Professor, President, Voronezh Institute of High Technologies, e-mail: office@vivt.ru,
S. O. Sorokin, Deputy Director of the Department, Ministry of Education and Science of the Russian Federation, e-mail: sorokin-so@mon.gov.ru

Models and Numerical Methods Optimization of Formation Effective Network System Cluster Structure

The article deals with mechanisms to improve the efficiency of network systems with cluster structure using integrated assessment system elements and based on the solution of the resource (parametric) and structural resources and the combination of discrete optimization problems.

The problem of structural and resource optimization consists in the reduction of the network structure in order to equalize the efficiency of the facilities so as to increase the level of the minimum of the integral evaluation. The mathematical model of the problem is close to setting a block of the knapsack problem. To solve it, a genetic algorithm is proposed.

The problem of resource optimization is to select a two-step mechanism for the allocation of resource provision: in the first stage, between clusters, and then between objects optimized network.

For the distribution of resource use optimization-based approach to the possibility of raising the level of asset performance indicators, the closest to the values of the relevant indicators of leaders. Mathematical model of the problem belongs to the class of problems of appointment. To solve it, can be used Hungarian method.

Combined optimization mechanism network system is to find the optimum separation of the cluster objects with the lowest values of integral evaluation into two groups. The first group includes objects that the allocation of developmental resources, the ability to improve their own position in the ranking. The second group included subjects who alone can not improve his position and to be absorbed by an object-leaders. The mathematical model of the problem belongs to a class of problems on the minimal covering. To solve it, the original algorithm is proposed.

Thus, the totality of the proposed optimization models and algorithms will allow to carry out the decision support for the cluster management of network system.

Keywords: *monitoring, network system, integrated estimation, resource optimization, structural optimization*

References

1. **Lvovich Ja. E.** *Mnogoalternativnaja optimizacija: teorija i prilozhenija* (Multialternative Optimization: Theory and Applications), Voronezh, Kvarta, 2006, 428 p. (in Russian).
2. **Kashirina I. L., Lvovich Ja. E., Sorokin S. O.** *Jekonomika i menedzhment sistem upravlenija*, 2015, vol. 15, no. 1.3, pp. 330—337 (in Russian).
3. **Batishhev D. I., Lvovich Ja. E., Frolov V. N.** *Optimizacija v SAPR* (Optimization in CAD), Moscow, Vysshaja shkola, 1997, 416 p. (in Russian).
4. **Burkov V. N., Novikov D. A.** *Teorija aktivnyh sistem: sostojanie i perspektivy* (Theory of active systems: state and prospects), Moscow, Sinteg, 1999, 128 p. (in Russian).
5. **Lvovich Ja. E., Kashirina I. L., Chernyshova G. D.** *Informacionnye tehnologii*, 1999, no. 4, pp. 2—6. (in Russian).
6. **Lvovich Ja. E., Kashirina I. L., Tuzikov A. A.** *Informacionnye tehnologii*, 2012, no. 6, pp. 56—60. (in Russian).
7. **Kashirina I. L., Lvovich Ja. E., Sorokin S. O.** *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii*, 2015, no. 1, pp. 39—43. (in Russian).
8. **Levin M. Sh., Safonov A. V.** *Iskusstvennyj intellekt i prinjatie reshenij*, 2009, no. 4, pp. 53—64. (in Russian).
9. **Dyer M. E., Kayal N., Walker J.** A Branch and Bound Algorithm for Solving the Multiple-Choice Knapsack Problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1984, no. 11, pp. 231—249.

УДК 656.073

Е. М. Бронштейн, д-р физ.-мат. наук, проф., e-mail: bro-efim@yandex.ru,
И. Е. Копылов, аспирант, e-mail: kopilya@gmail.com,
Уфимский государственный авиационный технический университет

Оптимизационная задача транспортной логистики с простыми маршрутами передвижения

Рассмотрена задача построения оптимального маршрута доставки однородного груза от семейства производителей семейству потребителей при расположении пунктов на линейной или кольцевой дорогах одним транспортным средством с ограниченной вместимостью. Проведен сравнительный анализ трех эвристических алгоритмов.

Ключевые слова: *транспортная логистика, оптимизация, эвристические методы, метод ветвей и границ, жадный алгоритм*