S. V. Dvornikov, PhD, Professor, **A. V. Pshenichnicov,** PhD, Associate Professor,
S. S. Manaenko, PhD, Associate Professor
Military Communications Academy, St. Petersburg, e-mail: manaenkoss@mail.ru

Increased Noise Immunity Signal 16-QAM Constellation with Transformed

Currently, the television standard DVB-T2 to improve noise immunity, it is recommended to use a model of the signal of a quadrature manipulation transformed constellations diagrams obtained by turning all points of the signal constellation at the same angle. As a result of applying this procedure, each point of the signal constellation receives independent coordinates, which give the opportunity for the receiving end to restore the position of the signal vector constellation charts even for one coordinate, and thereby improve the robustness of the procedures demodulation. When this recommended standard DVB-T2 transformation does not change the energy parameters of the model signal design, and increased robustness is achieved only by obtaining independent of the coordinates of each point of the signal constellation.

In the paper, the rotation vectors of the signal constellation various quadrants constellational chart to make different angles, which will improve the energy parameters of the signal model QAM-16 in terms of noise immunity. Presents the results of a study aimed at developing a model for such a signal, determines the noise immunity by which to evaluate the developed model and the model with transformed constellation in accordance with the standard DVB-T2.

Keywords: *immunity, constellation diagram, vector signal constellation, quadrature amplitude modulation*

References

1. **Smith J. G.** Odd-bit quadrature amplitude-shift keying, *IEEE Trans. Communications*, March 1975, vol. COM-23, pp. 385—389.
2. **Shi Q.** Asymptotic clipping noise distribution and its impact on M-ary QAM transmission over optical fiber, *IEEE Trans. Communications*, June 1995, vol. COM-43, pp. 2077—2084.
3. **Korzhik V. I., Fink L. M., Shhelkunov K. N.** *Raschet pomehoustojchivosti sistem peredachi diskretnyh soobshhenij: spravochnik.* Moscow, Radio i svjaz', 1981. 232 p.
4. **Klovskij D. D.** *Peredacha diskretnyh soobshhenij po radiokanalam.* Moscow, Radio i svjaz', 1982. 304 p.
5. **Savishhenko N. V.** *Mnogomernye signal'nye konstrukcii: ih chastotnaja jeffektivnost' i pomehoustojchivost' priema*, Ed. D. L. Burachenko. SPb.: Izdatel'stvo Politehnicheskogo universiteta, 2005. 420 p.
6. **Prokis Dzh.** Cifrovaja svjaz', per. s angl, ed. D. D. Klovskogo. Moscow: Radio i svjaz', 2000, 800 p.
7. **Framing** structure, channel coding and modulation for a second generation digital terrestrial television broadcasting system (DVB-T2). *DVB Document A122*, Jun. 2008.
8. **Alekseev A. A., Aladinskij V. A., Dvornikov S. V., Zheleznjak V. K., Komarovich V. F.** Primenenie metodov chastotno-vremennoj obrabotki akusticheskih signalov dlja analiza parametrov reverberacii. *Nauchnoe priborostroenie*, 2001, vol. 11, no. 1, pp. 65—76.

УДК 519.688, 669.14.242

Н. Н. Светушков, канд. техн. наук, доц. каф., e-mail: svt.n.n@mail.ru
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Параллельный метод струн для численного решения нелинейных задач теплопроводности

Представлен способ организации параллельных вычислительных потоков для решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе разработанного ранее метода струн. В методе струн использован новый алгоритм, при котором уравнения в частных производных сведены к эквивалентной системе интегральных уравнений. Приведена структурная схема вычислительных потоков и показано, что наибольшее количество процессов может быть организовано в случае, когда в каждом потоке решается одно интегральное уравнение. Интегральное описание, лежащее в основе параллельного подхода, позволяет не только более эффективно моделировать процессы теплопередачи, подавляя осцилляционный характер поведения решения в случае больших градиентов температур, но и естественным образом учитывать меняющиеся с течением времени теплофизические характеристики изделия. Проведены тестовые расчеты для модельной задачи и показано, что значительная эффективность алгоритма может быть достигнута для задач большой размерности и в случае использования многопроцессорной техники (включая графические платы). Разработанный алгоритм может быть применен для расчета температурных полей в микротвелах, при термической обработке заготовок из жаропрочных сталей, а также при формовании изделий из препрегов для авиационной и ракетной промышленности.

Ключевые слова: *численные методы, параллельные вычисления, программные средства, моделирование, уравнения теплопроводности, интегральные уравнения, точность вычислений*

Введение

Широкое применение вычислительной техники при решении практически важных задач часто сдерживается сложностью применяемых алгоритмов и значительными временными затратами. В частности, это относится к моделированию разнообразных технологических процессов, включая такие, как термическая обработка металлов и сплавов, которые используются в металлургии, а также при нанесении жаропрочных покрытий в авиационной промышленности. Значительно уменьшить вычислительные затраты при численном решении задач моделирования позволяет применение как многопроцессорных комплексов, так и разработка специализированных многопотоковых вычислительных процедур, организованных на графических ускорителях (графических платах). Несмотря на то что параллельным вычислениям посвящено большое число работ [например 1—6] и известна общая структура используемых программных средств, часто для каждой конкретной задачи необходимо применять собственный уникальный прием. Если рассматривать уравнения в частных производных, то применение простых явных схем позволяет достаточно эффективно проводить распараллеливание вычислительного процесса [2] (геометрический параллелизм), однако при больших временных промежутках здесь стоит вопрос о точности получаемых результатов, который связан со сходимостью прямых схем (в одномерном случае — аналог метода Эйлера). Если же задача является нелинейной, например, когда характеристики среды зависят от искомых величин (в данном случае температуры), то возникает необходимость организовывать различные итерационные процедуры. Применение явных схем в этом случае практически невозможно или приводит к слишком большим погрешностям. Таким образом, решение нелинейных (по теплофизическим характеристикам) задач теплопроводности приводит к необходимости использовать различные неявные схемы, которые, как известно [1—4], плохо поддаются распараллеливанию.

Эффективность распараллеливания обусловлена не только возможностью организации большого числа независимых вычислительных потоков, но и возможностью каждого из потоков наиболее равномерно загрузить вычислительные мощности — такое свойство называется сбалансированностью параллельного алгоритма. Другими словами, организовывать вычисления необходимо таким образом, чтобы каждый процесс занимал по возможности одинаковый промежуток вычислительного времени, так как очевидно, что время выполнения всей задачи не может быть меньше, чем время выполнения самой трудоемкой из подзадач. Довольно часто выполнение этого условия зависит не только от применяемых численных алгоритмов, но и особенностей конкретной вычислительной задачи [5, 6].

Кроме этого, использование слишком большого числа вычислительных потоков упирается в проблему синхронизации и буферизации данных, при которой передача информации может потребовать сопоставимых временных затрат по сравнению с решением отдельной подзадачи. Таким образом, желательно, чтобы применяемые алгоритмы обеспечивали достаточную (инженерную) численную точность при ограниченном количестве вычислительных процедур.

Все эти проблемы остро стоят и при попытке смоделировать процессы распространения теплоты в пространственно протяженных и геометрически сложных неоднородных объектах, теплофизические характеристики которых зависят от температуры (к этому классу относится, например, и классическая задача Стефана). Не случайно новые подходы для решения такого рода задач вызывают пристальный интерес. Например, в Национальном Центре применения суперкомпьютерных вычислений (США, университет Иллинойса http://www.ncsa.illinois.edu/) специально выделены вычислительные ресурсы под проект "Прямое численное моделирование процессов теплопередачи в среде жидкость — твердое тело на основе многочастичной модели" (*"Modeling fluid-solid heat transfer using particle-resolved direct numerical simulation"*, Shankar Subramaniam, Iowa State University).

Как известно [7, 8], в основном численные алгоритмы решения задач теплопроводности ограничиваются применением различных модификаций метода конечных элементов (МКЭ) и методами конечных разностей (МКР). Применение этих методов при решении нестационарной задачи теплопроводности на мелкомасштабном сеточном разбиении для пространственно протяженных трехмерных объектов приводит к большим временным затратам. К таким задачам можно отнести, например, процессы тепловыделения в ядерных реакторах и микротвелах при их эксплуатации, а также термическую обработку заготовок из жаропрочных и жаростойких сплавов [10] или процессы формования нагружаемых изделий (фюзеляжа и крыльев) из препрегов в авиационной промышленности. В данной работе рассматривается задача значительного уменьшения вычислительного времени при решении такого рода задач путем организации сбалансированной многопотоковой вычислительной процедуры на основе интегрального "метода струн" [9].

Организация параллельных вычислений в методе струн

Дифференциальные уравнения теплопроводности для неоднородных сред с изменяющимися теплофизическими характеристиками, как известно, имеют следующий вид (двумерный случай):

$$\begin{aligned} &c\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}k_x(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k_y(u)\frac{\partial u}{\partial y} + q; \\ &u(x, y, 0) = f(x, y);\ (x, y) \in \Omega; \\ &W|_{(x,\, y)\, \in\, \Gamma(\Omega)} = W_\Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = u(x, y, t)$ — распределение температурного поля; $f(x, y)$ — начальное распределение температур; $c\rho(u)$ — произведение удельной теплоемкости и плотности материала, зависящие как от температуры, так и от пространственных координат; $k_{x,\,y}(u)$ — коэффициенты теплопроводности по соответствующим осям, также зависящие от температуры; Ω — область решения задачи; $\Gamma(\Omega)$ — граничная поверхность; $W_\Gamma = W_\Gamma(t)$ — зависящие от времени плотности тепловых потоков на границе области; $q = q(x, y, t)$ — функция плотности распределения тепловых источников.

Искомыми функциями в интегральных уравнениях метода струн [9] являются с точностью до аддитивных функций производные от тепловых потоков по соответствующим направлениям (функции S_x и S_y):

$$\int_0^t \frac{1}{c\rho(u)} S_x(x, y, \tau)d\tau + \int_{x^*(y)}^{x} \frac{d\xi}{k_x(u)}\left[\overline{r}_x(\xi, y, t) \times \int_{\underline{x}(y)}^{\xi} S_x(\xi_1, y, t)d\xi_1 - \underline{r}_x(\xi, y, t)\int_{\xi}^{\overline{x}(y)} S_x(\xi_1, y, t)d\xi_1\right] =$$
$$= -\underline{w}_x(y, t)\int_{x^*(y)}^{x}\frac{\overline{r}_x(\xi, y, t)}{k_x(u)}d\xi - \overline{w}_x(y, t)\int_{x^*(y)}^{x}\frac{\underline{r}_x(\xi, y, t)}{k_x(u)}d\xi - u_0(x, y) - \int_0^t\frac{q(x, y, \tau)}{c\rho(u)}d\tau - \int_0^t\frac{S_y(x, y, \tau)}{c\rho(u)}d\tau -$$
$$- \int_0^t\left[\int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} c\rho(u)d\eta\right]^{-1} \times \left[-\int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} S_y(x, \eta, \tau)d\eta - \overline{w}_y(\tau) + \underline{w}_y(\tau)\right]d\tau; \quad (2)$$

$$\int_0^t\frac{S_y(x, y, \tau)}{c\rho(u)}d\tau + \int_{y^*(x)}^{y}\frac{d\eta}{k_y(u)}\left[\overline{r}_y(x, \eta, t)\int_{\underline{y}(x)}^{\eta} S_y(x, \eta_1, t)d\eta_1 - \underline{r}_y(x, \eta, t)\int_{\eta}^{\overline{y}(x)} S_y(x, \eta_1, t)d\eta_1\right] =$$
$$= -\underline{w}_y(x, t)\int_{y^*(x)}^{y}\frac{\overline{r}_y(x, \eta, t)}{k_y(u)}d\eta - \overline{w}_y(x, t)\int_{y^*(x)}^{y}\frac{\underline{r}_y(x, \eta, t)}{k_y(u)}d\eta - u_0(x, y) - \int_0^t\frac{q(x, y, \tau)}{c\rho(u)}d\tau - \int_0^t\frac{S_x(x, y, \tau)}{c\rho(u)}d\tau -$$
$$- \int_0^t\left[\int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} c\rho(u)d\xi\right]^{-1} \times \left[-\int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} S_x(\xi, y, \tau)d\xi - \overline{w}_x(\tau) + \underline{w}_x(\tau)\right]d\tau, \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} \underline{r}_x(x, y, t) = \int_{\underline{x}(y)}^{x} c\rho(u)d\xi \Big/ \int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} c\rho(u)d\xi; \\ \overline{r}_x(x, y, t) = \int_{x}^{\overline{x}(y)} c\rho(u)d\xi \Big/ \int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} c\rho(u)d\xi; \\ \underline{r}_y(x, y, t) = \int_{\underline{y}(x)}^{y} c\rho(u)d\xi \Big/ \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} c\rho(u)d\xi; \\ \overline{r}_y(x, y, t) = \int_{y}^{\overline{y}(x)} c\rho(u)d\xi \Big/ \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} c\rho(u)d\xi. \end{cases} \quad (4)$$

Если решение системы уравнений (2)—(3) найдено, то температура может быть вычислена путем простого интегрирования искомых функций:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) + \int_0^t\frac{q(x, y, \tau)}{c\rho(x, y, \tau)}d\tau + \int_0^t\frac{S_x(x, y, \tau)}{c\rho(x, y, \tau)}d\tau + \int_0^t\left[\int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} c\rho(\xi, y, \tau)d\xi\right]^{-1} \times \left[-\int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} S_x(\xi, y, \tau)d\xi - \overline{w}_x(\tau) + \underline{w}_x(\tau)\right]d\tau +$$
$$+ \int_0^t\frac{S_y(x, y, \tau)}{c\rho(x, y, \tau)}d\tau + \int_0^t\left[\int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} c\rho(x, \eta, t)d\eta\right]^{-1} \times \left[-\int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} S_y(x, \eta, \tau)d\eta - \overline{w}_y(\tau) + \underline{w}_y(\tau)\right]d\tau. \quad (5)$$

Как было показано ранее, приведенная система интегральных уравнений (2)—(3) полностью эквивалентна дифференциальному уравнению теплопроводности (1).

Возможности организации нескольких параллельных вычислительных потоков связаны с возможностями решения системы интегральных уравнений (2)—(3). Заметим, что структура каждого из уравнений, входящих в систему, является однотипной, и поэтому для их решения естественно использовать единый алгоритм, обеспечивающий решение отдельного уравнения системы.

Для распараллеливания вычислений был предложен следующий алгоритм: если правые части уравнений (2) и (3) считать заданными известными функциями, то, как видно из структуры представленной системы, она распадается на систему независимых уравнений. Таким образом, каждое интегральное уравнение может быть решено независимо от остальных уравнений, что и позволяет организовать соответствующее число вычислительных потоков (в каждом из которых решается одно интегральное уравнение). После того как решения каждого из уравнений найдены, вычисляются новые правые части системы и процедура повторяется. Блок-схема описанного здесь алгоритма представлена на рис. 1 (см. третью сторону обложки).

Этот алгоритм уже по первоначальному замыслу представляет собой итерационную процедуру, которая должна сходиться для того чтобы удовлетворялись согласованные условия по распространению теплоты по каждой из координатных осей. Поэтому представляется закономерным использовать эту же итерационную процедуру и для учета меняющихся с течением времени теплофизических характеристик. Таким образом, предлагаемый алгоритм представляет собой вполне естественную базу для решения нелинейных (по теплофизическим параметрам) задач теплопроводности. Отметим, что решение простых линейных задач теплопроводности хорошо выполняется известными методами, а использование многопроцессорных или многопотоковых алгоритмов оправдано именно при условии их нелинейности, когда другие вычислительные схемы не особенно эффективны. Это связано с тем, что решение отдельного интегрального уравнения, как правило, требует больших вычислительных затрат по сравнению с затратами при решении дифференциального уравнения.

Дополнительным преимуществом метода струн, кроме, как указано выше, возможности проводить параллельные вычисления, является именно их интегральная форма, позволяющая оценивать точность вычислений по текущей функции невязки. Это может быть актуальным при решении задач, в которых распределение температурных полей является критическим, другими словами, в задачах, когда меняющиеся со временем температурные режимы имеют первостепенное значение и влияют на эксплуатационные характеристики конечного изделия.

Тестирование метода

Для эффективного решения исходной задачи, кроме возможности проведения параллельных вычислений, значение имеет и выбор метода решения отдельного интегрального уравнения. В литературе [например, 5, 6] имеется описание достаточно большого числа алгоритмов решения интегральных уравнений, например метод коллокаций или метод Галеркина [8], поэтому в данной работе остановимся именно на анализе предложенного алгоритма распараллеливания для метода струн.

Время решения всей задачи, как было отмечено выше, определяется временем решения наиболее трудоемкой из подзадач, выполняемых в отдельном вычислительном потоке. На рис. 2 (см. третью сторону обложки) показано сеточное разбиение и, соответственно, элементарные отрезки — "струны", на которых заданы интегральные уравнения. Можно заметить, что если область имеет сложную конфигурацию, то число узлов в "струне" меняется в зависимости от выбранного сечения. Очевидно, что наибольшее число узлов будет содержать наиболее пространственно протяженная "струна", и, следовательно, именно для нее решение интегрального уравнения будет наиболее затратным с вычислительной точки зрения.

Для тестирования описанного выше алгоритма была выбрана представленная на рис. 2 область, которая была аппроксимирована $12 \times 10 = 120$ струнами. Очевидно, что минимальное вычислительное время при решении будут иметь задачи для струн, состоящих из трех точек, а максимальное время — для струны, состоящей из 10 точек. Для приведенного примера общее число интегральных уравнений составляет 120.

Для решения поставленной задачи написана программа на языке Visual C++, в которой на каждой итерации было организовано 120 вычислительных потоков (в одном потоке решалось одно интегральное уравнение). Теплофизические параметры были заданы в виде постоянных значений и с течением времени не менялись. Расчеты проводили на обычном ПК, при этом время решения составило менее 10 с. Это связано с тем, что при выбранном разбиении каждое интегральное уравнение приводило к системе, состоящей менее чем из 10 линейных алгебраических уравнений. Число итераций, обеспечивающих точность не менее 1 %, составляло 30—50, в зависимости от отрезка. Для сравнения скорости решения были проведены расчеты с использованием одного вычислительного потока, в котором последовательно решались те же 120 уравнений. Расчетное время в этом случае составляло 20 с.

Отсюда можно сделать вывод, что для задач небольшой размерности, когда время решения каждого отдельного интегрального уравнения не так велико, выигрыш распараллеливания получается незначительным — всего лишь в 2 раза. Это связано как с тем, что все вычисления выполняли на одном процессоре, так и с большими временами по выделению памяти и буферизации данных по сравнению с временем решения отдельной задачи. Поэтому значительного эффекта применения предложенного алгоритма можно ожидать лишь для трудоемких задач на больших сеточных разбиениях, когда число точек по каждой из осей составляет более 100, и при использовании многопроцессорных систем, например графических процессоров. Однако и здесь имеет смысл в каждом потоке решать не одно, а несколько интегральных уравнений.

Заключение

Предлагаемый алгоритм параллельного решения нелинейных задач теплопроводности, основанный на интегральном представлении процесса теплопередачи — методе "струн", может быть эффективен для трудоемких задач большой размерности. При этом может быть достигнута очень высокая степень параллелизма, и желательно, чтобы каждая из подзадач, входящих в вычислительный поток, содержала несколько "струн" для обеспечения сбалансированной загрузки процессоров.

Список литературы

1. **Миллер Р., Боксер Л.** Последовательные и параллельные алгоритмы: пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 408 с.
2. **Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.** Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002, 608 с.
3. **Эндрюс Г. Р.** Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования: пер. с англ. М.: Вильямс, 2003, 523 с.
4. **Антонов А. С.** Введение в параллельные вычисления (методическое пособие). М.: Изд-во МГУ, 2002. 69 с.
5. **Барский А. Б.** Параллельные процессы в вычислительных системах: планирование и организация. М.: Радио и связь, 1990. 255 с.
6. **Барский А. Б.** Параллельные технологии решения оптимизационных задач / Информационные технологии. Приложение. 2001. № 2. 32 с.
7. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие. / 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1967. 368 с.
8. **Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.** Приближенные методы математической физики: учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 700 с.
9. **Светушков Н. Н.** Метод струн в задачах многомерной нестационарной теплопроводности // Информационные технологии. 2014. № 12. С. 14—19.
10. **Светушков Н. Н.** Возможности компьютерного моделирования технологических процессов термической обработки // Труды МАИ. 2012. № 58 (www.mai.ru/science/trudy/).

N. N. Svetushkov, Associated Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia Associate Professor of department "Applied mathematics and physics", e-mail: svt.n.n@mail.ru

Parallel Strings Method for the Numerical Solution of Nonlinear Heat Conduction Problem

Currently, more attention is paid to the use of multiprocessor systems in order to reduce the computational cost for modeling various processes for scientific and applied research. If we consider the partial differential equation, the use of simple explicit schemes allows one to effectively carry out the parallelization of the computational process, but for large periods of time there is the question of the accuracy of the results, which is associated with the convergence of direct circuits. If the problem is non-linear, for example, when the characteristics of the environment depend on the unknown quantities, there is a need to organize iterative procedures, and use a variety of implicit schemes for partial differential equations. In this case, the algorithms used are known to be poorly amenable to parallelization. All these problems are acute and when you try to simulate the processes of distribution of heat in a spatially extended and geometrically complex heterogeneous objects, thermal characteristics depend on the temperature (this class includes, for example, the classical Stefan problem). The author proposes to solve the problem of a significant reduction in the problem of computing time for solving such problems by providing a balanced multi-threaded computational procedure based on its proposed integrated "method of string." The article describes in detail the method of parallel computing threads for solution of nonlinear transient heat conduction problems on the basis of this method. The main advantage of the proposed algorithm is that the partial differential equations are reduced to an equivalent system of integral equations. There is a diagram of computing threads and it is shown that the greatest number of processes can be organized in the case where each thread is solved one integral equation. Integral description underlying parallel approach allows not only to more effectively simulate the processes of heat transfer by suppressing the oscillatory behavior of solutions in the case of large temperature gradients, but also a natural way to take into account changes over time thermal characteristics of the product. There is a test calculations for the model problem and it is shown that a significant effectiveness of the algorithm can be achieved for large-scale problems and in the case of multi-technology (including graphics cards). The developed algorithm can be used to calculate the temperature fields in the micro-TVEL, with thermal machining of heat-resistant steels, as well as the formation of products of the prepregs for aircraft and missile industry.

Keywords: *numerical methods, parallel computing, software, simulation, the heat equation, integral equations, the accuracy of calculations*

References

1. **Miller R., Boxer L.** *Algorithms sequential & parallel: Unified approach. Cengage Learning*, 2012, 408 p.
2. **Voevodin V. V., Voevodin Vl. V.** *Parallel'ny'e vy'chisleniya.* SPb.: BXV-Peterburg, 2002, 608 p.
3. **Andrews R.** *Foundations of Multithreaded, Parallel, and Distributed Programming, University of Arizona*, Instock, 2000, 664 p.
4. **Antonov A. S.** Vvedenie v parallel'ny'e vy'chisleniya. Moscow: Izd. MGU, 2002. 69 p.
5. **Barskij A. B.** *Parallel'ny'e processy' v vy'chislitel'ny'x sistemax: planirovanie i organizaciya,* Moscow: Radio i svyaz', 1990. 255 p.
6. **Barskij A. B.** Parallel'ny'e texnologii resheniya optimizacionny'x zadach. *Informacionny'e texnologii*, Prilozhenie, 2001, no. 2, 32 p.
7. **Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z.** *Chislenny'e metody' analiza: priblizhenie funkcij, differenciarny'e i integral'ny'e uravneniya.* Uchebnoe posobie. Moscow: Nauka, 1967, 368 p.
8. **Vlasova E. A., Zarubin V. S., Kuvy'rkin G. N.** *Priblizhenny'e metody' matematicheskoj fiziki.* Ucheb. dlya vuzov / Pod red. B. C. Zarubina, A. P. Krishhenko. M.: Izd-vo MGTU im. N. E'. Baumana, 2001, 700 p.
9. **Svetushkov N. N.** Metod strun v zadachax mnogomernoj nestacionarnoj teploprovodnosti, *Informacionny'e texnologii*, 2014, no. 12, pp. 14—19.
10. **Svetushkov N. N.** Vozmozhnosti komp'yuternogo modclirovaniya texnologicheskix processov termicheskoj obrabotki, *Trudy' MAI.* 2012, no. 58 (www.mai.ru/science/trudy/).