

А. Э. Саак, д-р техн. наук, доц., e-mail: saak@tgn.sfedu.ru,
Южный федеральный университет, г. Таганрог

Диспетчеризация массивов заявок суммарной ресурсной меры, равной квадрату целого числа

В дальнейшем развитии среды ресурсных прямоугольников определяются массивы заявок с суммарной ресурсной мерой, равной квадрату целого числа, называемые имеющими точную ресурсную меру. Для указанных массивов заявок пользователей проводится диспетчеризация и вычисляются эвристические меры ресурсных оболочек начально-кольцевого, уровневого, углового уровневого и алгоритма последовательных приближений. Для этих полиномиальных алгоритмов показывается сохранение свойства адаптированности на массивах заявок, имеющих точную ресурсную меру.

Ключевые слова: линейные полиэдры точной ресурсной меры, линейные полиэдры кругового типа, Grid-система, диспетчеризация, неэвклидова эвристическая мера, полиномиальная трудоемкость алгоритма, начально-кольцевой алгоритм, уровневый алгоритм, угловой уровневый алгоритм, алгоритм последовательных приближений

Введение

Для массивов заявок пользователей Grid-систем в предыдущих работах автора [1–5] определена среда ресурсных прямоугольников, предложена и разработана классификация множества заявок на круговой, гиперболический и параболический квадратичные типы. Там же предложены и исследованы полиномиально трудоемкие алгоритмы распределения ресурсов, адаптированные под круговой тип массива заявок. Оптимальная укладка натуральной последовательности квадратов по критерию минимума площади объемлющего квадрата содержит пустоты [6, 7]. В статье выделяется класс массивов заявок с суммарной ресурсной мерой, равной квадрату целого числа, и имеющих безпустотную ресурсную оболочку при оптимальной укладке. Исследуется адаптированность начально-кольцевого, уровневого, углового уровневого и алгоритма последовательных приближений для выделенного класса.

Массив заявок, имеющий точную ресурсную меру

При представлении заявки пользователя для обслуживания диспетчером Grid-системы ресурсным прямоугольником горизонтальное и вертикальное измерения, соответственно, принимаются равными числу единиц ресурса времени и процессоров, требуемому для обработки. Символом $a(j) \times b(j)$ обозначается j -я заявка, требующая $a(j)$ единиц времени и $b(j)$ единиц процессоров. Множество заявок пользователей представляется последовательностью ресурсных прямоугольников — линейной полиэдралью (рис. 1) [8].

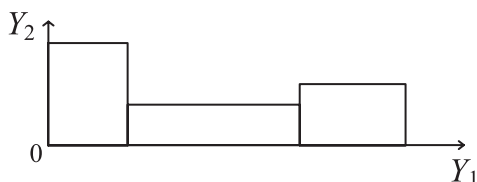


Рис. 1. Линейная полиэдраль заявок пользователей

Линейная полиэдраль ресурсных прямоугольников, сумма площадей которых является квадратом целого числа, называется полиэдралью, имеющей точную ресурсную меру. Примером могут служить линейные полиэдры элементов парtridge (от англ. *partridge*), содержащие один квадрат 1×1 со стороной 1, два квадрата 2×2 со стороной 2, ..., k квадратов $k \times k$ со стороной k , согласно равенству [9]

$$\sum_{i=1}^k i \cdot i^2 = \left(\sum_{i=1}^k i \right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

В случае когда такая линейная полиэдраль укладывается в соответствующий квадрат со стороной $k(k+1)/2$, это называется парtridgeной облицовкой (от англ. *partridge tiling*) [10], а соответствующее k — числом парtridge квадрата (от англ. *partridge number of the square*) [11]. Как было показано в работах [12–14], парtridgeными облицовками являются линейные полиэдры элементов парtridge при $k = 11, 12, 13, 14$. Отметим, что все четыре линейные полиэдры, индуцированные парtridgeными облицовками, относятся к круговому типу.

Диспетчеризация массива заявок, имеющего точную ресурсную меру

Для Grid-систем с централизованной структурой системы диспетчеризации и коаллокацией ресурсов (мультисайтное диспетчеризование) в качестве графической интерпретации была предложена мо-

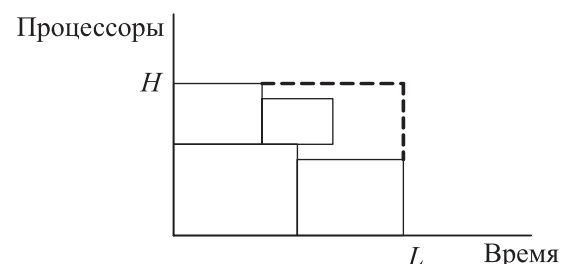


Рис. 2. Ресурсная оболочка заявок пользователей

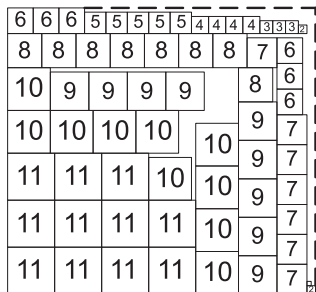


Рис. 3. Укладка линейной полиэдры I начально-кольцевым алгоритмом

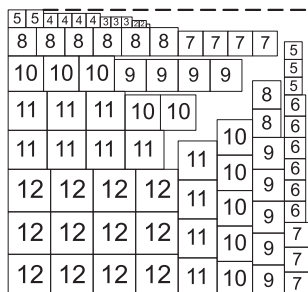


Рис. 4. Укладка линейной полиэдры II начально-кольцевым алгоритмом

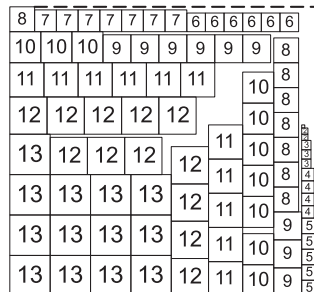


Рис. 5. Укладка линейной полиэдры III начально-кольцевым алгоритмом

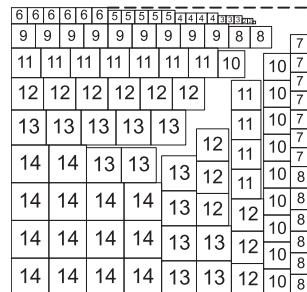


Рис. 6. Укладка линейной полиэдры IV начально-кольцевым алгоритмом

Таблица 1

Эвристические меры ресурсных оболочек начально-кольцевого алгоритма

Номер линейной полиэдры	Эвристическая мера	Δ , %
I	0,56	12
II	0,57	14
III	0,56	12
IV	0,54	8

дель ресурсного квадранта [5, 8]. Качество диспетчирования эвристических алгоритмов оценивается неевклидовой эвристической мерой, учитывающей наряду с площадью и форму занятую ресурсной области

$$\frac{1}{2} \left(\frac{LH + (L - H)^2}{k - 1} + \sum_{j=0}^k a(j)b(j) \right),$$

где L — протяженность и H — уровень по вертикали ресурсной оболочки (рис. 2) [5].

Эвристическая мера достигает минимума, равного $1/2$, при безпустотной укладке в квадрат. Указанные четыре линейные полиэдры элементов партриджа являются такими укладками. Вычислим эвристические меры ресурсных оболочек, получаемых при диспетчировании этих линейных полиэдров полиномиальными алгоритмами [5]: началь-

но-кольцевым, уровневым, угловым уровневым и алгоритмом последовательных приближений.

Линейные полиэдры элементов партриджа обозначим следующим образом: для $k = 11$ — линейная полиэдраль I, для $k = 12$ — линейная полиэдраль II, для $k = 13$ — линейная полиэдраль III, для $k = 14$ — линейная полиэдраль IV.

Построения начально-кольцевым алгоритмом для линейных полиэдров I—IV приведены на рис. 3—6.

Эвристические меры ресурсных оболочек начально-кольцевого алгоритма и погрешность Δ в % относительно оптимального значения, равного $1/2$, приведены в табл. 1.

Заметим, что эвристические меры ресурсных оболочек начально-кольцевого алгоритма не превосходят значения $1/2 + 0,07$.

Построения уровневым алгоритмом для линейных полиэдров I—IV приведены на рис. 7—10.

Таблица 2

Эвристические меры ресурсных оболочек уровневого алгоритма

Номер линейной полиэдры	Эвристическая мера	Δ , %
I	0,55	10
II	0,56	12
III	0,55	10
IV	0,57	14

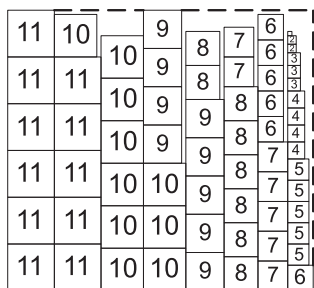


Рис. 7. Укладка линейной полиэдры I уровневым алгоритмом

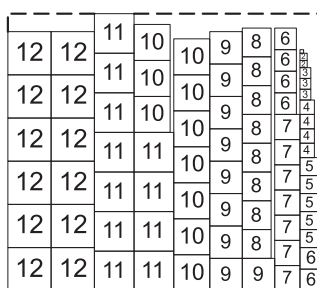


Рис. 8. Укладка линейной полиэдры II уровневым алгоритмом

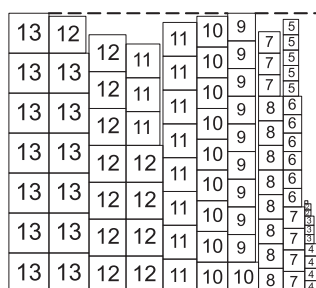


Рис. 9. Укладка линейной полиэдры III уровневым алгоритмом

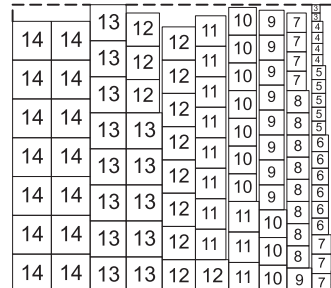


Рис. 10. Укладка линейной полиэдры IV уровневым алгоритмом

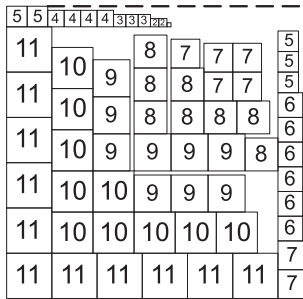


Рис. 11. Укладка линейной полиэдрала I угловым уровнем алгоритмом

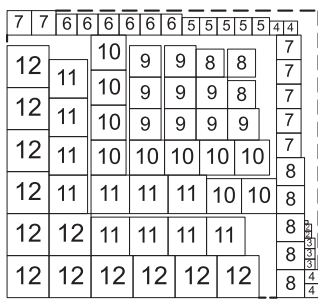


Рис. 12. Укладка линейной полиэдрала II угловым уровнем алгоритмом

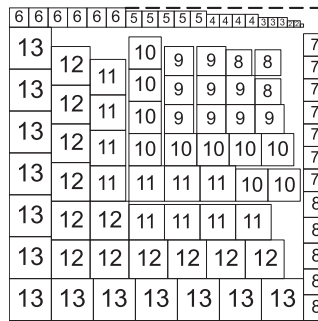


Рис. 13. Укладка линейной полиэдрала III угловым уровнем алгоритмом

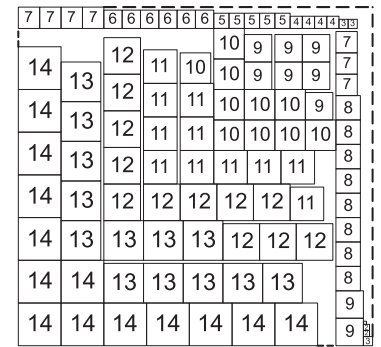


Рис. 14. Укладка линейной полиэдрала IV угловым уровнем алгоритмом

Таблица 3

Эвристические меры ресурсных оболочек углового уровня алгоритма

Номер линейной полиэдрала	Эвристическая мера	Δ , %
I	0,60	20
II	0,60	20
III	0,58	16
IV	0,59	18

Эвристические меры ресурсных оболочек углового алгоритма и погрешность Δ в % относительно оптимального значения, равного $1/2$, приведены в табл. 2.

Заметим, что эвристические меры ресурсных оболочек углового алгоритма не превосходят значения $1/2 + 0,07$.

Построения угловым уровнем алгоритмом для линейных полиэдралей I—IV приведены на рис. 11—14.

Эвристические меры ресурсных оболочек углового уровня алгоритма и погрешность Δ в % относительно оптимального значения, равного $1/2$, приведены в табл. 3.

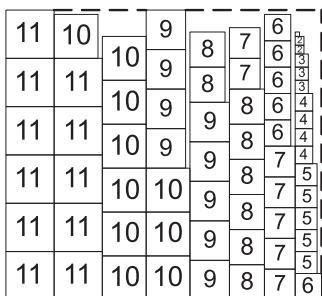


Рис. 15. Укладка линейной полиэдрала I алгоритмом последовательных приближений

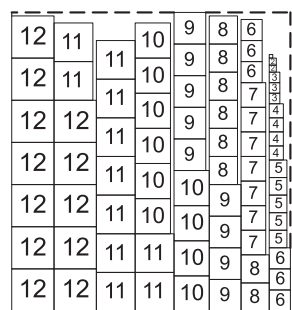


Рис. 16. Укладка линейной полиэдрала II алгоритмом последовательных приближений

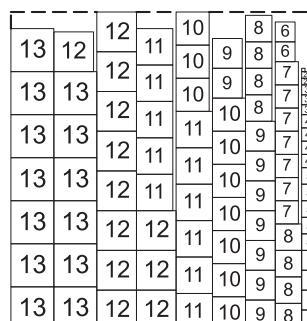


Рис. 17. Укладка линейной полиэдрала III алгоритмом последовательных приближений

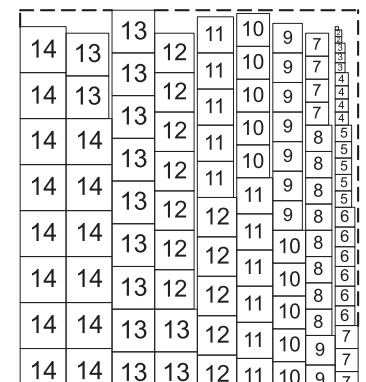


Рис. 18. Укладка линейной полиэдрала IV алгоритмом последовательных приближений

Таблица 4

Эвристические меры ресурсных оболочек алгоритма последовательных приближений

Номер линейной полиэдрала	Эвристическая мера	Δ , %
I	0,55	10
II	0,55	10
III	0,55	10
IV	0,56	12

Заметим, что эвристические меры ресурсных оболочек углового уровня алгоритма не превосходят значения $1/2 + 0,1$.

Построения алгоритмом последовательных приближений для линейных полиэдралей I—IV приведены на рис. 15—18.

Эвристические меры ресурсных оболочек алгоритма последовательных приближений и погрешность Δ в % относительно оптимального значения, равного $1/2$, приведены в табл. 4.

Заметим, что эвристические меры ресурсных оболочек алгоритма последовательных приближений не превосходят значения $1/2 + 0,06$.

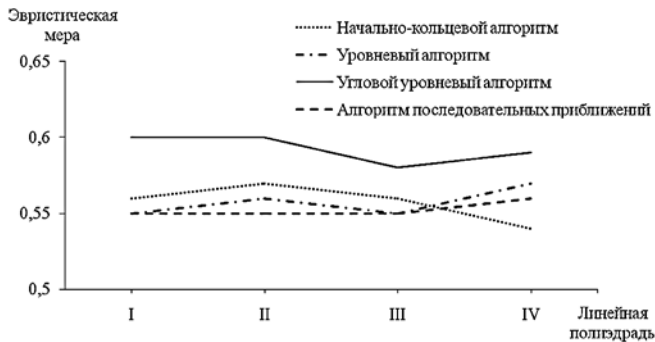


Рис. 19. Эвристические меры ресурсов оболочек начально-кольцевого, уровневый, углового уровневый и алгоритма последовательных приближений

Графики эвристической меры ресурсов оболочек начально-кольцевого, уровневый, углового уровневый и алгоритма последовательных приближений диспетчеризации линейными полиэдрами, имеющими точную ресурсную меру, кругового типа I—IV показаны на рис. 19.

Видим, что начально-кольцевой и алгоритм последовательных приближений имеют меньшую эвристическую меру ресурсов оболочек. Целесообразность использования предложенных алгоритмов при диспетчеризации линейными полиэдрами, имеющими точную ресурсную меру, кругового типа подтверждается значением отклонения, не превышающим 20 % от оптимального значения.

Заключение

В развитии среды ресурсов прямоугольников дается определение массивов заявок, имеющих точную ресурсную меру. Приводятся примеры такие, как массивы, содержащие один квадрат со стороной 1, два квадрата со стороной 2, ..., k квадратов со стороной k . Для указанных массивов вычисляются эвристические меры ресурсов оболочек начально-кольцевого, уровневый, углового уровневый и алгоритма последовательных приближений. Показывается адаптированность исследуемых полиномиальных алгоритмов для массивов заявок кругового типа, имеющих точную ресурсную меру. Так, для укладки массива 105 квадратов, соответствующего $k = 14$, время работы оптимального алгоритма на одноядерном компьютере 3.3 GHz Intel

Xeon превышает 13 дней и 8 ч, тогда как начально-кольцевой алгоритм практически мгновенно дает решение с погрешностью 8 %.

Список литературы

1. Саак А. Э. Локально-оптимальные ресурсные распределения // Информационные технологии. 2011. № 2. С. 28—34.
2. Саак А. Э. Алгоритмы диспетчеризации в Grid-системах на основе квадратичной типизации массивов заявок // Информационные технологии. 2011. № 11. С. 9—13.
3. Саак А. Э. Диспетчеризация в Grid-системах на основе однородной квадратичной типизации массивов заявок пользователей // Информационные технологии. 2012. № 4. С. 32—36.
4. Саак А. Э. Сравнительный анализ полиномиальных алгоритмов диспетчеризации в Grid-системах // Информационные технологии. 2012. № 9. С. 28—32.
5. Саак А. Э. Полиномиальные алгоритмы распределения ресурсов в Grid-системах на основе квадратичной типизации массивов заявок // Информационные технологии. 2013. № 7. Приложение. 32 с.
6. Korf R. Optimal rectangle packing: New results // Proceedings of the fourteenth international conference on automated planning and scheduling (ICAPS 2004). Whistler, British Columbia, Canada, June 3—7, 2004. P. 142—149.
7. Korf R., Moffitt M., Pollack M. Optimal rectangle packing // Annals of Operations Research. 2010. Vol. 179, N. 1. P. 261—295.
8. Саак А. Э. Управление ресурсами и заявками пользователей в Grid-системах с централизованной архитектурой // Тр. XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ—2014. Москва, 16—19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 7489—7498.
9. Ahearn S., Jepsen C. On tiling an $m \times m$ square with m squares // Crux Mathematicorum. 1993. Vol. 19, N. 7. P. 189—191.
10. Friedman E. Reptiles, Partridges, and Golden Bees: Tiling Shapes with Similar Copies. 2003. URL: www2.stetson.edu/~efriedman/papers/reptiles.ppt.
11. Hamlyn P., Friedman E. Partridge numbers // Geombinatorics Quarterly. 2003. Vol. XIII, Is. 1. P. 10—18.
12. Simonis H., O'Sullivan B. Search strategies for rectangle packing. 2008. URL: <http://4c.ucc.ie/~hsimonis/cp2008slides.pdf>.
13. Ågren M., Beldiceanu N., Carlsson M., Sbihi M., Truchet C., Zampelli S. Six ways of integrating symmetries within non-overlapping constraints. In W.-J. van Hoes and J. N. Hooker, ed., CPAIOR. // LNCS. 2009. Vol. 5547. P. 11—25.
14. Hougardy S. A Scale Invariant Exact Algorithm for Dense Rectangle Packing Problems. Research Institute for Discrete Mathematics, University of Bonn, Report No: 101020, 2012.

Scheduling of Sets of Multiprocessor Tasks of the Aggregate Resource Measure Equaling the Square of an Integer

In the paper it is given further investigation of the resource rectangles environment, which represents formal instrumentation of time and computer resources scheduling. For a model of the set of multiprocessor tasks in the form of extensive linear polyhedral of resource rectangles and for a model of the Grid system with centralized architecture which supports multisite task performance in the form of resource quadrant, author solves the problem of allocation with minimization of a resource enclosure heuristic measure. The Non-Euclidean heuristic measure which takes into consideration both area and the form of an occupied resource region, reaches its minimum value at in-square packing without emptiness. In the paper we denote the linear polyhedrals which have precise resource measure and have a sum of resource rectangles area which is one of integral square. The class of linear polyhedrals which are induced by the elements of partridge, so named partridge tiling, is considered. The analysis of the linear polyhedrals which are induced by partridge tiling showed that they belong to circular type. Scheduling was performed and the heuristic measure indicators for the resource enclosures created by an initial ring algorithm, level algorithm, angular-level algorithm and successive approximation algorithm were calculated. We prove that the polynomial algorithms mentioned retain their adaptedness characteristic when used for circular-type linear polyhedrals of precise resource measure. The comparative analysis of the algorithms shows that the initial ring algorithm and successive approximation algorithm indicate smaller heuristic measure of the resource enclosures than the others. Taking into consideration quality of the resource enclosure filling in comparison with time of optimal scheduling, we can see advantages of the algorithms, considered in the paper. For example the time of optimal square packing of 105 squares of a linear polyhedral which is induced by partridge tiling with partridge number of the square equaled 14 on PC 3.3 GHz Intel Xeon with one CPU core exceed 13 days and 8 hours while the initial ring algorithm performs square packing almost instantly with 8 % deviation of the heuristic measure indicator from optimal one.

Keywords: linear polyhedrals of precise resource measure, circular-typed linear polyhedrals, partridge tiling, Grid system, resource management, scheduling, Non-Euclidean heuristic measure, polynomial complexity of an algorithm, initial ring algorithm, level algorithm, angular-level algorithm, successive approximation algorithm

References

1. Saak A. Eh. Lokalno-optimalnye resursnye raspredeleniya. *Informatsionnye tekhnologii*. 2011, no. 2, pp. 28–34.
2. Saak A. Eh. Algoritmy dispetcherizatsii v Grid-sistemakh na osnove kvadrachnoy tipizatsii massivov zayavok. *Informatsionnye tekhnologii*, 2011, no. 11, pp. 9–13.
3. Saak A. Eh. Dispetcherizatsiya v GRID-sistemakh na osnove odnorodnoy kvadrachnoy tipizatsii massivov zayavok polzovateley, *Informatsionnye tekhnologii*. 2012, no. 4, pp. 32–36.
4. Saak A. Eh. Sravnitelniy analiz polinomialnykh algoritmov dispetcherizatsii v GRID-sistemakh. *Informatsionnye tekhnologii*, 2012, no. 9, pp. 28–32.
5. Saak A. Eh. Polinomialnye algoritmy raspredeleniya resursov v Grid-sistemakh na osnove kvadrachnoy tipizatsii massivov zayavok, *Informatsionnye tekhnologii*, 2013, no. 7. Prilozhenie. 32 p.
6. Korf R. Optimal rectangle packing: New results. *Proceedings of the fourteenth international conference on automated planning and scheduling (ICAPS 2004)*. Whistler, British Columbia, Canada, June 3–7, 2004, pp. 142–149.
7. Korf R., Moffitt M., Pollack M. Optimal rectangle packing. *Annals of Operations Research*, 2010, vol. 179, no. 1, pp. 261–295.
8. Saak A. Eh. Upravleniye resursami i zayavkami polzovateley v Grid-sistemakh s centralizovannoy arkhitektyroy, *Trudy XII Vserossiyskogo soveshanya po problem upravleniya VSPU–2014*. Moskva, 16 ijunya — 19 ijunya 2014 g. Moscow: Institut problem upravleniya im. V. A. Trapeznikova RAN. 2014, pp. 7489–7498.
9. Ahearn S., Jepsen C. On tiling an $m \times m$ square with m squares. *Crux Mathematicorum*. 1993, vol. 19, no. 7, pp. 189–191.
10. Friedman E. *Reptiles, Partridges, and Golden Bees: Tiling Shapes with Similar Copies*. URL: www2.stetson.edu/~efriedma/papers/reptiles.ppt.
11. Hamlyn P., Friedman E. Partridge numbers. *Geombinatorics Quarterly*. 2003, vol. XIII, Is. 1, pp. 10–18.
12. Simonis H., O’Sullivan B. Search strategies for rectangle packing. 2008. URL: <http://4c.ucc.ie/~hsimonis/cp2008slides.pdf>.
13. Ågren M., Beldiceanu N., Carlsson M., Sbihi M., Truchet C., Zampelli S. Six ways of integrating symmetries within non-overlapping constraints. In W.-J. van Hoeve and J. N. Hooker, ed., CPAIOR. *LNCS*, 2009, vol. 5547, pp. 11–25.
14. Hougardy S. *A Scale Invariant Exact Algorithm for Dense Rectangle Packing Problems*. Research Institute for Discrete Mathematics, University of Bonn, Report No: 101020, 2012.