УДК 517.97

И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф. МГТУ им. Н. Э. Баумана,
М. С. Хрисат, аспирант, e-mail: mohd.khirisat@fet.edu.yo, **М. Я. Шихаб Еддин,** аспирант,
Российский университет дружбы народов

Нечеткие уравнения в частных производных в задачах управления

Рассматриваются нечеткие уравнения в частных производных первого и второго порядков и алгоритм получения для них соответствующих нечетких решений S (Seikkala) и BF (Buckley-Feuring) типов. Синтезированы нечеткие оптимальные регуляторы S и BF типов.

Ключевые слова: *нечеткие уравнения в частных производных, S (Seikkala) решение, BF (Buckley-Feuring) решение*

Введение

В инженерно-исследовательских работах часто возникает задача решения уравнений в частных производных первого и второго порядков. Применительно к теории управления уравнения первого порядка появляются при решении задач оптимального управления и аналитического конструирования оптимальных регуляторов с использованием метода динамического программирования (метод Беллмана) [1, 2], а также при математическом конструировании (синтезе) оптимальных по критерию обобщенной работы линейных регуляторов, предложенному А. А. Красовским [3]. Уравнения второго порядка различных типов появляются, как правило, при решении разнообразных задач математической физики [4]. Среди множества этих задач выделим так называемые элементарные уравнения второго порядка [5], решения которых не выражаются в виде рядов различных типов: Фурье, Бесселя, Лежандра и т. д. К другим типам уравнений отнесем те из них, решения которых представляются в форме различных функциональных рядов [6]. Такое разделение уравнений обусловлено нерешенностью в настоящее время представления рядов в нечеткой форме. Например, неясно, каким образом определяется функция принадлежности символа "∞" при исследовании расходимости рядов.

Четкие уравнения имеют различные коэффициенты, определяемые экспериментальным путем, и краевые условия (начальные и граничные условия), которые обычно измеряются датчиками. Очевидно, что экспериментальные данные и измерительная информация характеризуются различного рода возмущениями, которые вносят неопределенность в математические модели процессов, что может привести к значительным ошибкам в принятии решений по этим моделям.

В настоящее время теория нечетких множеств находит широкое применение в различных областях науки и техники [7—9], что часто приводит к значительному экономическому эффекту. В связи с этим одним из путей учета неопределенностей в уравнениях в частных производных является представление экспериментальной и измерительной информации в нечетких терминах. Такая трактовка возмущений приводит к нечетким уравнениям в частных производных, решению которых посвящена настоящая статья.

Базовые определения и обозначения

К ним относятся понятия: функция принадлежностей; нечеткое треугольное число; нечеткая функция; нечеткие производные; нечеткая начальная задача.

Функция принадлежностей. В теории нечетких множеств одним из базовых понятий является принадлежность элемента x некоторому множеству $X (x \in X \subset R_1)$. В зависимости от типа множества (четкое или нечеткое) обозначение $x \in X$ формализуется с помощью:

- характеристической функции $r^*(x)$, $x \in X \subset R_1$, $r \in \{0; 1\}$ для четкого элемента x;
- функции принадлежностей $r(x)$, $x = x_{\text{н}} \in X$, $r \in [0; 1]$ для нечеткого элемента $x_{\text{н}}$.

Они определяются следующим образом:

$$r^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in X; \\ 0, & x \notin X; \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} \underline{r}(x) \in [0; 1]; \\ \overline{r}(x) \in [0; 1], \end{cases}$$

где $r(x)$ — многозначная функция с $\underline{r}(x)$, $\overline{r}(x)$ — "левой" и "правой" однозначными функциями (ветвями) соответственно относительно $r(x = x_н) = 1$. В уровневой форме с применением обратного отображения $r^{-1}(x)$ используется представление

$$x_н = r^{-1}(x) = x(r) = (\underline{x}(r),\ \overline{x}(r)/r \in [0;\ 1]).$$

В символической форме имеем:

$$x \in X \subset R_1 \begin{cases} r^*(x) = \{0;\ 1\} \text{ при } x \text{ — четкий элемент } X; \\ r(x) = [0;\ 1] \text{ при } x \text{ — нечеткий элемент } X. \end{cases}$$

Совокупность нечетких элементов $\{x_н\}$ задают нечеткое множество $X_н$. Для обозначения приняты представления

$$x_н \Leftrightarrow r(x),\ r \in [0;\ 1] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\underline{r}(x),\ \overline{r}(x),\ r \in [0;\ 1]) \Leftrightarrow (\underline{x}(r),\ \overline{x}(r)/r \in [0;\ 1]),$$

где $\underline{x}(\cdot)$, $\overline{x}(\cdot)$ — обратные отображения соответственно для $\underline{r}(x)$, $\overline{r}(x)$.

Нечеткое треугольное число. Оно определяется посредством трех чисел $a_1 < a_2 < a_3$, $a_i \in R_1$, $i = \overline{1, 3}$. График $r(x)$ для $x_н$ в координатной плоскости (x, r) имеет форму треугольника с основанием (support) $\operatorname{supp} x_н = [a_1,\ a_3]$, а высота его исходит из точки с координатами $(x = a_2,\ r = 0)$. Полагают что если $a_1 \geqslant 0$, то $x_н \geqslant 0$; если $a_3 \leqslant 0$, то $x_н \leqslant 0$. Арифметические операции $+, -, \times, :$ (будем обозначать $*$) для $x_{1н} = (a_{11}|a_{12}|a_{13})$ и $x_{2н} = (a_{21}|a_{22}|a_{23})$ задаются в виде

$$x_н = x_{1н} * x_{2н} = (a_{11} * a_{21}|a_{12} * a_{22}|a_{13} * a_{23}).$$

Нечеткая функция (отображение). Это отображение нечеткой области (множество) X в нечеткую область (множество) значений Y с функцией принадлежностей $r_y(x)$, т. е. $X \in x \xrightarrow{r_y(x)} y \in Y$, где в общем случае x, y — векторы.

Нечеткие производные. Пусть для простоты имеем нечеткую функцию одного переменного $y_н(x) \equiv y(x, r)$, $x, y \in R_1$, $r \in [0, 1]$, т. е. $y_н(x) = (\underline{y}(x, r),\ \overline{y}(x, r)/r \in [0, 1])$, которая при любом $x \in I \subset R_1$ определяет нечеткое треугольное число.

Согласно общему подходу при определении производной от некоторой функции в заданном пространстве необходимо в нем задать операции "−" (вычитание или существование обратного элемента), "×" (умножение) на константу и "lim" (предельный переход относительно заданной метрики). Применение этого общего подхода к различным метрическим пространствам приводит к разнообразным нечетким производным [5]. В частности, в теории нечетких дифференциальных уравнений обычно рассматриваются следующие типы нечетких производных:

(i) производная Готшела—Воксмана (Goestshel—Voxman) — $\dot{y}_н^{GV}(x)$;

(ii) производная Сейккалы (Seikkala) — $\dot{y}_н^{S}(x)$;

(iii) производная Дубоиса—Праде (Dubois—Prade) — $\dot{y}_н^{DP}(x)$;

(iv) производная Пури—Ралеску (Puri—Ralescu) — $\dot{y}_н^{PR}(x)$;

(v) производная Кэндела—Фридмана—Минга (Kandel—Friedman—Ming) — $\dot{y}_н^{KFM}(x)$.

В работе [5] доказывается, что все перечисленные производные равны между собой.

Нечеткая начальная задача. Она рассматривается для производных $\dot{y}_н^{PR}(x)$, $\dot{y}_н^{S}(x)$, $\dot{y}_н^{KFM}(x)$, а для производных $\dot{y}_н^{GV}(x)$, $\dot{y}_н^{DP}(x)$, как правило, не рассматривается. Это обусловлено тем, что в последних двух случаях возможна ситуация, когда эти производные для какого-то $x = x^*$ не выражаются нечеткими треугольными числами, т. е. один из углов их функций принадлежностей относительно основания больше 90°, и тогда эти производные не существуют. В трех предыдущих случаях эти производные всегда существуют, так как в случае, отмеченном ранее, используются нечеткие "слабые" числа [10].

Пусть имеем четкую начальную задачу

$$\dot{y}_x = f(x, y, k),\ y(x = 0) = c, \tag{1}$$

где $k = (k_1, ..., k_n)$ — вектор констант; $x \in I \subset R_1$. Полагается, что $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения четкой задачи (1), которую обозначим как $y = g(x, k, c)$, $c = \text{const}$: $c \in R_1$.

Константы k_i, c, $i = \overline{1, n}$, всегда являются неточно заданными (неопределенными) и моделируются нечеткими треугольными числами. Тогда проводим замену $k_i \to k_{iн}$, $c \to c_н$, где индекс "н" — символ нечеткости. В результате получим нечеткую начальную задачу:

$$\dot{y}_н(x) = f(x, y_н, k_н),\ y_н(x = 0) = c_н, \tag{2}$$

где $\dot{y}_н(x)$ — некоторое определение производной для нечеткой функции $y_н(x)$. Здесь необходимо получить решение (2) $y_н = g(x, k_н, c_н)$, которое для любого x является нечетким числом.

Типы решений

В соответствии с [5] имеют место два типа решений для нечеткой начальной задачи (2):

$$\text{BFS (Buckley—Feuring solution) — } y_н^{\text{BFS}}(x);$$

$$\text{SS (Seikkala solution) — } y_н^{\text{SS}}(x).$$

Между ними имеется следующая взаимосвязь:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\text{BFS} \Rightarrow \exists\text{SS} \\ \exists\text{SS} \not\Rightarrow \exists\text{BFS} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\text{BFS} \not\Leftrightarrow \exists\text{SS},$$

поэтому первоначально ищется BFS и, если оно не существует, то ищется SS. Достаточным условием существованием BFS является цепочка соотношений:

$$\dot{f}_y > 0,\ \dot{g}_c > 0;\ (\dot{f}_{k_i})(\dot{g}_{k_i}) > 0,\ i = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

которые формализуют условия одновременного возрастания (убывания) $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ относительно параметров k_i, c нечеткой начальной задачи (2).

Алгоритм решения нечеткого дифференциального уравнения

Первоначально решается четкое дифференциальное уравнение (1) и находится $g(x, k, c)$. Для $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ проверяются условия (3). Если они выполняются, то после фаззификации путем замены четких параметров (1) на нечеткие формулируется задача (2) и для нее находится BFS. Если хотя бы одно из условий (3) не выполняется, то BFS не существует и ищется SS, которое существует всегда, если существует решение (1).

Нечеткие уравнения в частных производных

Для уравнений первого порядка алгоритм решения, изложенный в [10], основан на решении четких уравнений [6], т. е. исходное четкое уравнение в частных производных модифицируется в четкие обыкновенные дифференциальные уравнения.

Уравнения первого порядка. Пусть имеем

$$\varphi(D_x)U(x) = B(x, k) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,U_{x_i}(x) = B(x, k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1(x)\frac{\partial U}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial U}{\partial x_n} = B(x, k), \qquad (4)$$

где $\varphi(\cdot) = \sum_i a_i(\cdot)\,D_{x_i}$ — дифференциальный оператор полиномиального типа; $D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — вектор четких констант; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; U — некоторая функция.

Решаем уравнение (4) методом Лагранжа [11]. Для этого составляется вспомогательная система четких обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}(\cdot)dx_i = b^{-1}(x)dU,$$

из которой находятся n независимых интегралов

$$\Psi_i(x, k_1, \ldots, k_n) = c_i,\ i = \overline{1, n},$$

где c_i — четкие константы интегрирования. Общее решение (4) в неявном виде равно:

$$F(\Psi_1, \ldots, \Psi_n, k, c),$$

где $F(\cdot)$ — некоторая дифференцируемая функция. В частности, если U входит только в один из первых интегралов, то общее решение может быть записано в виде

$$\Psi_n(x_1, \ldots, x_n, U) = f(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}, k, c),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция. Разрешив последнее уравнение относительно U, получим общее решение исходного уравнения в явном виде $U(x, k, c)$, где c находится из заданных условий,

$$U(x_1, \ldots, x_n, k, c).$$

Условие (3) определяют существование BFS или SS. BFS находится из обыкновенных дифференциальных уравнений, а SS — из соответствующей системы дифференциальных уравнений с фаззификацией решений.

Уравнения второго порядка элементарного типа. Для простоты пусть имеем вектор переменных $x = (x_1, x_2)$ и

(i) уравнение $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})U(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, k)$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — вектор констант $k_i \in I_i \subset R_1$, $i = \overline{1, n}$;

(ii) граничные условия могут быть в различных формах:

- $U(x_1 = 0, x_2) = c_1$;
- $U(x_1, x_2 = 0) = c_2$;
- $U(x_1 = M, x_2) = c_3$;
- $U(x_1 = 0, x_2) = g(x_1, c_4)$;
- $U(x_1, x_2 = 0) = f_1(x_1, c_5)$;
- ..., $U_{x_1}(x_1, x_2 = 0) = f_2(x_1, c_6)$;
- $U_{x_2}(x_1 = 0, x_2) = g_2(x_2, c_7, c_8)$, ...

Тогда при наличии (i), (ii) имеем четкое решение

$$U(x_1, x_2) = G(x_1, x_2, k, c),$$

где k, c — четкие векторы констант. Так же, как и в уравнениях первого порядка, проверяются условия (3) и далее для соответствующего нечеткого уравнения находятся BFS или SS.

Примеры

1. ***Уравнение первого порядка.*** Исследовать тип нечеткого решения для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} = k_1x_1 + k_2$$

при условиях $x_2 = \lambda_1 x_1$; $U = \lambda_2 x_1^2$, где k_i, λ_i — const, $i = 1, 2$.

В канонической форме имеем уравнение

$$a_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial U}{\partial x_2} = b,\ a_1 = a_2 = 1;\ b = k_1x_1 + k_2,$$

поэтому в соответствии с методом Лагранжа для исходного линейного уравнения имеем вспомогательную систему

$$\left.\frac{dx_1}{a_1}\right|_{a_1=1} = \left.\frac{dx_2}{a_2}\right|_{a_2=1} = \left.\frac{dU}{b}\right|_{b=k_1x_1+k_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dU}{k_1x_1+k_2}.$$

Из первых двух уравнений системы имеем первый интеграл

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{1} \Rightarrow x_1 = x_2 + c_1,$$

c_1 — константа интегрирования.

Из первого и последнего уравнений системы имеем второй интеграл

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dU}{k_1x_1+k_2} \Rightarrow (k_1x_1 + k_2)dx_1 = dU \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}5k_1x^2 + k_2x_1 = U + c_2 \Rightarrow 0{,}5k_1x_1^2 + k_2x_1 - c_2,$$

где c_2 — константа интегрирования. Общее решение равно

$$\begin{cases}\Psi_1(x_1, x_2) = c_1\\ \Psi_2(x_1, x_2, U) = c_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 - x_2 = c_1;\\ 0{,}5k_1x^2 + k_2x_1 - U = c_2\end{cases}$$

или в явной форме

$$U = 0{,}5k_1x^2 + k_2x_1 - \left.c_2\right|_{x_1 = x_2 + c_1} =$$

$$= 0{,}5k_1(x_2 + c_1)^2 + k_2(x_2 + c_1) - c_2.$$

Находим c_1, c_2 из заданных условий, которые в параметрической форме имеют вид

$$x_1 = t,\ x_2 = \lambda_1 t,\ U = \lambda_2 t^2.$$

Подставляем их в первый и второй интегралы

$$\left.x_1 - x_2\right|_{\substack{x_1 = t\\ x_2 = \lambda_1 t}} = c_1 \Rightarrow t - \lambda_1 t = c_1 \Rightarrow t = c_i(1 - \lambda_1)^{-1};$$

$$\left.0{,}5k_1(x_2 + c_1)^2 + k_2(x_2 + c_1) - U\right|_{\substack{x_1 = t\\ x_2 = \lambda_1 t\\ U = \lambda_2 t^2}} = c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}5k_1(\lambda_1 t + c_1)^2 + k_2(\lambda_1 t + c_1) - \lambda_2 t^2 = c_2.$$

Исключаем t из последних двух соотношений, тогда в неявной форме получим:

$$F(x_1, x_2, U, k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5k_1[\lambda_1(1 - \lambda_1)^{-1}(x_1 - x_2) + 0{,}5k_1x_1^2 +$$

$$+ k_2x_1 + U]^2 + k_2[\lambda_1(1 - \lambda_1)^{-1}(x_1 - x_2) +$$

$$+ (0{,}5k_1x_1^2 + k_2x_1 + U)] - \lambda_2(1 - \lambda_1)^{-2}(x_1 - x_2)^2 -$$

$$- 0{,}5k_1x_1^2 - k_2x_1 + U = 0,\ \lambda_1 \neq 1,\ \lambda_2 \neq 1.$$

Для дальнейшего анализа упростим полученное выражение, положив $k_1 = 0$, λ_1, $\lambda_2 = 0{,}5$, тогда получим:

$$U(x_1, x_2) = 0{,}5(1 - k_2)^{-1}(x_1 - x_2)^2 -$$

$$- k_2(1 - k_2)^{-1}(x_1 - x_2) + k_2x_1,\ k_2 \neq 1. \quad (5)$$

Применительно к нечетким уравнениям в частных производных условие (3) существования BFS имеет вид:

$$\dot F_{k_i}\, \dot G_{k_i} > 0.$$

Расчеты дают:

- $\Psi(Dx_i)U(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, k_2) = k_2 > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dot F_{k_2} = 1 > 0;$
- $\dot G_{k_2} = \dfrac{\partial}{\partial k_2}[a(1 - k_2)^{-1} + bk_2(1 - k_2)^{-1} + \mathrm{c}k_2] =$
  $= a(1 - k_2)^{-2} - b(1 - k_2)^{-2} + c,$

$a = 0{,}5(x_1 - x_2)^2$; $b = (x_1 - x_2)$; $c = x_1$, поэтому, если $b = x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2$;

$$\left.c\right|_{c = x_1} \Leftrightarrow x_1 > 0,\ \text{то}\ \dot G_{k_2} > 0.$$

Таким образом, $\dot F_{k_i}\, \dot G_{k_i} > 0$, значит, BFS существует, в противном случае SS существует. Находим BFS. Для этого в исходном уравнении проводится фаззификация путем замены $k_2 \to k_{2\text{н}}$, $U \to U_\text{н}$, где полагается, что $k_{2\text{н}} = (\underline{k}_2(r),\ \overline{k}_2(r)\ /r \in [0;\ 1])$. BFS следует из формулы (5):

$$U_\text{н}^\text{BFS}(x_1, x_2) =$$

$$= (\min_{k_{2\text{н}}} U(x_1, x_2, k_{2\text{н}}),\ \max_{k_{2\text{н}}} U(x_1, x_2, k_{2\text{н}})),\ \min_{k_{2\text{н}}} U(\cdot) =$$

$$= 0{,}5(1 - \overline{k}_2(r))^{-1}(x_1 - x_2)^2 -$$

$$- \overline{k}_2(r)(1 - \overline{k}_2(r))^{-1}(x_1 - x_2) + \underline{k}_2(r)x_1;$$

$$\max_{k_{2\text{н}}} U(\cdot) = 0{,}5(1 - \underline{k}_2(r))^{-1}(x_1 - x_2)^2 -$$

$$- \underline{k}_2(r)(1 - \underline{k}_2(r))^{-1}(x_1 - x_2) + \overline{k}_2(r)x_1;$$

SS следует из уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \underline{U}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial x_2} = \underline{k}_2(r);\\ x_1 = \underline{\lambda}_1(r)x_2;\ \underline{U} = \underline{\lambda}_2(r)x_1^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \overline{U}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial x_2} = \overline{k}_2(r);\\ x_1 = \overline{\lambda}_1(r)x_2;\ \underline{U} = \overline{\lambda}_2(r)x_1^2,\end{cases}$$

откуда оно при $\underline{\lambda}_i(\cdot) = \overline{\lambda}_i(\cdot) = 0{,}5$, $i = 1, 2$, получается из (5) путем замены k_2 соответственно на $\underline{k}_2(r)$, $\overline{k}_2(r)$:

$$U(x_1, x_2, k_2) = (\underline{U}(x_1, x_2, \underline{k}_2(r), \overline{k}_2(r)),$$
$$\overline{U}(x_1, x_2, \underline{k}_2(r), \overline{k}_2(r))/r \in [0; 1]).$$

2. ***Элементарное уравнение второго порядка*** [10]. Исследовать тип нечеткого решения для уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = k_1,\ k_1 \in j_1 = [0; M_3],\ M_3 > 0; \\ I_1 = [0; M_1],\ M_1 > 0;\ I_2 = [0; j_1],\ (x, y) \in I_1 \times I_2; \\ U(x_1 = 0, x_2) = c_1 \sin x_2,\ c_1 \in L_1 = [0; M_4],\ M_4 > 0; \\ U(x_1, x_2 = 1) = c_2 x_1^2,\ c_2 \in L_2 = [0; M_5],\ M_5 > 0. \end{cases}$$

Находим четкое решение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = k_1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1 x_2 + a \Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|_{x_2 = 1} = c_2 x_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 \cdot 1 + a = c_2 x_1^2 \Rightarrow a = c_2 x_1^2 - k_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1 x_2 + \underbrace{c_2 x_1^2 - k_1}_{a} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1(x_2 - 1) + c_2 x_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x_1, x_2) = k_1 x_1 (x_2 - 1) + 3^{-1} c_2 x_1^3 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U|_{x_1 = 0} = b \Rightarrow b = c_1 \sin x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x_1, x_2) = k_1 x_1 (x_2 - 1) + 3^{-1} c_2 x_1^3 + c_1 \sin x_2.$$

После фаззификации ($k_1 \to k_{1\text{н}}$; $c_1 \to c_{1\text{н}}$; $c_2 \to c_{2\text{н}}$; $U(\cdot) \to U_\text{н}(\cdot)$) получим нечеткое решение

$$U_\text{н}(x_1, x_2) = k_{1\text{н}} x_1 (x_2 - 1) + 3^{-1} c_{2\text{н}} x_1^3 + c_{1\text{н}} \sin x_2, \quad (6)$$

где $k_{1\text{н}}$, $c_{1\text{н}}$, $c_{2\text{н}}$ — нечеткие положительные треугольные константы:

$$k_{1\text{н}} = (\underline{k}_1(r), \overline{k}_1(r)/r \in [0; 1]);\ c_{1\text{н}} = (\underline{c}_1(r), \overline{c}_1(r)/r \in$$
$$\in [0; 1]);\ c_{2\text{н}} = (\underline{c}_2(r), \overline{c}_2(r)/r \in [0; 1]).$$

Исследуем типы решений. Пусть $0 \leqslant x_2 < 1$, тогда

$$\frac{\partial U}{\partial k_1} = 1 \cdot x_1 (x_2 - 1) < 0, \text{ но } \frac{\partial F}{\partial k_1} = 1 > 0,$$

поэтому (6) не является BFS, но является SS. Если теперь

$$1 < x_2 \leqslant \pi, \text{ тогда } \frac{\partial U}{\partial k_1} = 1 \cdot x_1 (x_2 - 1) > 0,\ \frac{\partial F}{\partial k_1} > 0,$$

поэтому (6) является BFS.

При $0 \leqslant x_2 < 1$ SS находится из уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \underline{k}_1(r); \\ U(0, x_2) = \underline{c}_1(r) \sin x_2; \\ U(x_1, x_2 = 1) = \underline{c}_2(r) x_1^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \overline{k}_1(r); \\ U(0, x_2) = \overline{c}_1(r) \sin x_2; \\ U(x_1, x_2 = 1) = \overline{c}_2(r) x_1^2. \end{cases}$$

В результате из (6) получим SS:

$$U_\text{н}(x_1, x_2) =$$
$$= (\underline{U}(x_1, x_2, k_{1\text{н}}, c_{1\text{н}}, c_{2\text{н}}),\ \overline{U}(x_1, x_2, k_{1\text{н}}, c_{1\text{н}}, c_{2\text{н}})),$$

где $k_{1\text{н}}$, $c_{i\text{н}}$, $i = 1, 2$, — нечеткие константы, которые были определены ранее.

Синтез нечеткого оптимального регулятора

При решении проблемы оптимального управления применительно к задаче синтеза нечетких оптимальных линейных регуляторов появляются нечеткие нелинейные или линейные уравнения в частных производных первого порядка. Как известно [12], оптимальный регулятор в задаче

$$\dot{x} = Ax + By,\ x(0) = x_0,$$

$$I = 0{,}5 \int_{t_0}^{t_1} [x^\text{T} S x + y^\text{T} Q y] dt + 0{,}5 x^\text{T}(t_1) \Lambda x(t_1) \to \min$$

определяется из уравнения Беллмана

$$\max_y \{\dot{u}_t + (\dot{u}_x^\text{T}[Ax + By] - 0{,}5[x^\text{T} S x + y^\text{T} Q y])\} = 0;$$

$$u(t_1, x) = 0{,}5 x^\text{T} \Lambda x,$$

откуда

$$y(t, x) = \arg\max_y (\dot{u}_x^\text{T} By - 0{,}5 y^\text{T} Q y),$$

где A, B — матрицы с $\dim A = (n \times n)$, $\dim B = (n \times q)$; S, Λ — неотрицательно определенные симметричные матрицы с $\dim S = \dim \Lambda = (n \times n)$; Q — положительно определенная симметричная матрица с $\dim Q = (q \times q)$.

Это приводит к следующей структуре оптимального управления:

$$y_\text{опт} = Q^{-1} B^\text{T} \dot{\varphi}_x,$$

где $\varphi(t, x) = 0{,}5 x^\text{T} K x$, K — неизвестная симметричная матрица с $\dim K = (n \times n)$, которая находится из матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}_t = -A^\text{T} K - KA - KBQ^{-1} B^\text{T} K,\ K(t = t_1) = -\Lambda. \quad (7)$$

Нечеткая задача синтеза оптимального регулятора появляется, когда A, B, S, Q, Λ являются нечеткими параметрами, возникающими при неопределенности в их задании и приводящие к нечеткому дифференциальному уравнению в частных производных. Определим тип нечеткого оптимального регулятора (типа S или BF) в простейшем случае.

Пусть имеем нечеткую модель электропривода

$$T_{\text{н}}\dot{x} = -x + y,\ x(t = 0) = x_0$$

и функционал $I = 0{,}5 \int\limits_{t_0 = 0}^{t_{1=1}} y^2(t)dt + 0{,}5x^2(t_1 = 1)$. Здесь $T_{\text{н}}$ — нечеткая электромеханическая постоянная времени с функцией принадлежностей треугольной формы. Необходимо найти оптимальное управление $y_{\text{опт}}$, обеспечивающее $\min\limits_{y} I$.

Из нечеткого уравнения Риккати, которое появляется в результате решения нечеткого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных при

$$A = -T_{\text{н}}^{-1};\ B = T_{\text{н}}^{-1};\ Q = 1;\ S = 0;\ \Lambda = \lambda_{\text{н}},$$

имеем из формулы (7)

$$\dot{K} = f(t, k, T_{\text{н}}, \lambda_{\text{н}}) = 2T_{\text{н}}^{-1}K - K^2,\ K(t_1 = 1) = -\lambda_{\text{н}}. \quad (8)$$

Определим тип решения полученной нечеткой начальной задачи. Для этого находим решение соответствующей четкой начальной задачи

$$\dot{K} = 2T^{-1}K - K^2,\ K(1) = -\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int (K^2 - 2T^{-1}K)^{-1}dt \int dt \Rightarrow K = 2T^{-1}(1 - c\mathbf{e}^{2T^{-1}t})^{-1},$$

где c — константа интегрирования, определяемая из начальных условий:

$$-\lambda = 2T^{-1}(1 - c\mathbf{e}^{2T^{-1}})^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \mathbf{e}^{2T^{-1}} + 2T^{-1}\lambda^{-1}\mathbf{e}^{2T^{-1}}.$$

В результате получим:

$$K = g(t, T, \lambda) = $$

$$= 2T^{-1}\left[1 - \frac{\left(\mathbf{e}^{2T^{-1}} + 2T^{-1}\lambda^{-1}\mathbf{e}^{2T^{-1}}\right)}{c(\lambda)}\mathbf{e}^{2T^{-1}t}\right]^{-1}.$$

Для исследования типов решений (8) необходимо определение знаков следующих функций [11]: $\dot{f}_k(t, K, T, \lambda)$; $\dot{g}_\lambda(t, T, \lambda)$. Вычисления дают:

$$\dot{f}_k = \frac{\partial}{\partial K}(2T^{-1}K - K^2) = \begin{cases} T^{-1} - K > 0,\ K(t) < T^{-1}; \\ T^{-1} - K \leqslant 0,\ K(t) \geqslant T^{-1}; \end{cases}$$

$$\dot{g}_\lambda = ab > 0,$$

где $a = -2T^{-1}(1 - c(\lambda)\mathbf{e}^{2T^{-1}t})^{-2}$, $b = -2T^{-1}\mathbf{e}^{-2T^{-1}}\lambda^{-2}$.

В результате имеем следующие варианты существования нечетких решений (8):

- вариант 1, когда $K(t) \geqslant T^{-1}$, тогда $\dot{f}_k > 0$, $\dot{g}_\lambda > 0$ и существует BF решение (8);
- вариант 2, когда $K(t) < T^{-1}$, тогда $\dot{f}_k \leqslant 0$, $\dot{g}_\lambda > 0$ и не существует BF решение (8), но существует его SS.

Пусть $K(t) < T^{-1}$, тогда имеем:

$$K_{\text{н}}^{\text{BFS}}(t) = (\min_r K(t, r),\ \max_r K(t, r) |\ r \in [0; 1]).$$

Нечеткое BF оптимальное управление будет равно:

$$u_{\text{н}}^{\text{BFS}}(t, x) = Q^{-1} \cdot B^{\text{т}} \cdot K_{\text{н}}^{\text{BFS}}(t)x \Big|_{\substack{Q = 1 \\ B = T^{-1}}} =$$

$$= (\min_r u(t, r),\ \max_r u(t, r) | r \in [0; 1]).$$

При $K(t) \geqslant T^{-1}$ имеем:

$$\begin{matrix} \dot{K}_{\text{н}}^{\text{S}} = 2T_{\text{н}}^{-1}K_{\text{н}} - K_{\text{н}}^2 \\ K_{\text{н}}(1) = \lambda_{\text{н}} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\underline{K}} \\ \dot{\overline{K}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\underline{T}^{-1} & 0 \\ 0 & 2\overline{T}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{K} \\ \overline{K} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{K}^2 \\ \overline{K}^2 \end{pmatrix}; \\ \underline{K}(t = 1) = \underline{\lambda},\ \overline{K}(t = 1) = \overline{\lambda}, \end{cases}$$

где $T_{\text{н}} = (\underline{T}(r) | T | \overline{T}(r))$; $\lambda_{\text{н}} = (\underline{\lambda}(r) | \lambda | \overline{\lambda}(r))$, $r \in [0; 1]$ — нечеткие треугольные числа. Из решения системы получим $\underline{K}$, $\overline{K}$, поэтому $K_{\text{н}}^{\text{SS}}(t)$ будет равно

$$K_{\text{н}}^{\text{SS}}(t) = (\underline{K}(t, r),\ \overline{K} | r \in [0; 1])$$

и нечеткое S оптимальное управление будет равно

$$u_{\text{н}}^{\text{SS}}(t, x) = Q^{-1} \cdot B^{\text{т}} \cdot K_{\text{н}}^{\text{SS}}(t)x \Big|_{\substack{Q = 1 \\ B = T^{-1}}} =$$

$$= (\underline{u}(t, r),\ \overline{u}(t, r) | r \in [0; 1]).$$

Заключение

Нечеткие уравнения второго порядка эллиптического, гиперболического, параболического типов решаются численными методами [13, 14]. В этом случае удается избежать представления нечетких решений в виде различных типов рядов, что в численной форме эквивалентно представлению их конечными нечеткими суммами.

Даются базовые определения теории нечетких множеств: функция принадлежностей; нечеткое треугольное число; нечеткое отображение; нечеткие производные; нечеткая начальная задача.

Рассматриваются нечеткие уравнения в частных производных первого и второго порядков. В первом случае используется метод Лагранжа, который, как известно, эквивалентен решению нечетких обыкновенных уравнений, что приводит к получению BFS (Buckley-Feuring solution) и SS(Seikkala solution) для уравнений в частных производных первого порядка. Для второго случая рассматриваются элементарные уравнения, для которых получают BFS и SS.

Приводятся простейшие примеры получения BFS и SS для нечетких уравнений в частных производных первого и второго порядков.

Рассмотрена задача синтеза нечеткого оптимального регулятора в виде BF и S типов.

Список литературы

1. **Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н.** Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999.
2. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
3. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1981.
4. **Мартинсон Л. К., Малов Ю. И.** Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
5. **Buckley J. J., Feuring T.** Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. 2000. N 110. P. 43—54.
6. **Шарма Дж. Н., Сингх К.** Уравнения в частных производных для инженеров. М.: Техносфера, 2002.
7. **Асмолова Ю. Е., Мочалов И. А.** Элементы нечеткого вариационного исчисления// Вестник Российского университета дружбы народов. 2010. № 4. Р. 37—43.
8. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Нечеткая интерполяция // Электронное научно-техническое издание "Наука и образование". 2012. № 2.
9. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Нечеткие сплайны // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2012. № 2 (87). Р. 48—58.
10. **Buckley J. J., Feuring T.** Introduction to fuzzy partial differential equations // Fuzzy sets and systems. 1999. N 105. P. 241—248.
11. **Филиппов А. Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973.
12. **Пантелеев А. С., Бортаковский А. С.** Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая щкола, 2003.
13. **Kermani M. A., Saburi F.** Numerical method for fuzzy partial differential equations // Applied mathematical sciences. 2007. Vol. 1, N 27. P. 1299—1309.
14. **Allahviranloo T., Kermani M. A.** Numerical methods for fuzzy linear partial differential equations under new definition for derivative // Iranian journal of fuzzy systems, 2010. V. 7, N 3. P. 33—50.

I. A. Mochalov, Professor Bauman Moscow State Technical University,
M. S. Khrisat, Graduate Student, e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.yo,
M. Ya. Shihab Eddin, Graduate Student, Russian Peoples' Friendship University, Moscow

Fussy Partial Differential Equation in the Task of Control

Provides an overview on the use of partial differential equations in optimal control problems, it is noted that they are used in the methods of Bellman and Krasovsky Second-order equations are presented in the form of two classes: Elementary and equations whose solutions are represented as different functional series. These equations have different coefficients, which are represented as fuzzy variables. In this connection, is formed and solved one-point boundary value problem on the synthesis of fuzzy optimal control method Bellman.

Next article provides basic definitions and notation of the theory of fuzzy sets, which are used for solving the fuzzy-point problem. These include the notions of membership functions; types of fuzzy numbers; fuzzy function; types of fuzzy derivatives; types of fuzzy initial value problems and algorithms for their solution.

Solved fuzzy partial differential equations of the first order and second-order elementary, then we solve the problem of synthesis of fuzzy optimal linear regulator. In accordance with the types of solutions of the initial problem of fuzzy controllers are synthesized BF (Buckley-Feuring) and S (Seikkala) types.

It is noted that the fuzzy equation of elliptic, hyperbolic and parabolic types are solved by numerical methods. This avoids making the fuzzy representation in the form of various types of rows.

The article ends with conclusions. A reference contains 15 sources. 4 of them are foreign-source.

Keywords: *fuzzy systems, fuzzy partial differential equations, fuzzy regulators BF (Buckley-Feuring), fuzzy regulator S (Seikkala)*

Reference

1. **Van'ko V. I., Ermoshina O. V., Kuvyrkin G. N.** *Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie*. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 1999.
2. **Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija*. M.: Vysshaja shkola, 2003.
3. **Spravochnik** *po teorii avtomaticheskogo upravlenija*. Pod red. A. A. Krasovskogo. M.: Nauka, 1981.
4. **Martinson L. K., Malov Ju. I.** *Differencial'nye uravnenija matematicheskoj fiziki*. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2006.
5. **Buckley J. J., Feuring T.** Fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*. 2000, no. 110, pp. 43—54.
6. **Sharma Dzh. N., Singh K.** *Uravnenija v chastnyh proizvodnyh dlja inzhenerov*. M.: Tehnosfera, 2002.
7. **Asmolova Ju. E., Mochalov I. A.** Jelementy nechetkogo variacionnogo ischislenija. *Vestnik rossijskogo universiteta druzhby narodov*. 2010, no. 4, pp. 37—43.
8. **Demenkov N. P., Mochalov I. A.** Nechetkaja interpoljacija. *Jelektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie "Nauka i obrazovanie"*. Fevral' 2012, no. 2.
9. **Demenkov N. P., Mochalov I. A.** Nechetkie splajny. *Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana, Priborostroenie*. 2012, no. 2 (87), pp. 48—58.
10. **Buckley J. J., Feuring T.** Introduction to fuzzy partial differential equations. *Fuzzy sets and systems*. 1999, no. 105, pp. 241—248.
11. **Filippov A. F.** *Sbornik zadach po differencial'nym uravnenijam*. M.: Nauka, 1973.
12. **Panteleev A. S., Bortakovskij A. S.** *Teorija upravlenija v primerah i zadachah*. M.: Vysshaja shhkola. 2003.
13. **Kermani M. A., Saburi F.** Numerical method for fuzzy partial differential equations. *Applied mathematical sciences*. 2007, vol. 11, no. 27, pp. 1299—1309.
14. **Allahviranloo T., Kermani M. A.** Numerical methods for fuzzy linear partial differential equations under new definition for derivative. *Iranian journal of fuzzysystems*. 2010, vol. 7, no. 3, pp. 33—50.