

УДК 519.857

В. И. Струченков, д-р техн. наук, проф., e-mail: str1942@mail.ru,
Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА)

Новый алгоритм поэлементного расчета трасс в САПР линейных сооружений

Рассматривается задача вычисления декартовых координат точек трасс линейных сооружений. Предлагается алгоритм последовательного поэлементного расчета вместо традиционного использования вершин углов поворота трассы. Для клотоид, сопрягающих две круговые кривые близких радиусов, даются новые расчетные формулы на основе разложения в степенной ряд Маклорена в текущей системе координат.

Ключевые слова: трасса, план, продольный профиль, клотоида, ряд Маклорена, оценка точности

Введение

Традиционно трехмерная кривая — трасса линейного сооружения, к числу которых относятся железные и автомобильные дороги, трубопроводы различного назначения, каналы и др., представляется в виде двух плоских кривых: план и продольный профиль. План трассы — это ее проекция на горизонтальную плоскость XOY , а продольный профиль — зависимость $Z(s)$, где Z — аппликата, а s — длина кривой в плане начиная от заданной точки. Другими словами, продольный профиль — это кривая, получаемая при развертке на плоскость вертикальной поверхности, у которой направляющая — это план трассы, а образующая параллельна оси Z .

И план, и продольный профиль трассы состоят из элементов, в качестве которых в зависимости от вида сооружения используются отрезки прямых и дуги окружностей при возможном сопряжении дуг окружностей с прямыми и между собой кривыми переходной кривизны. Возможно также использование и других элементов, в частности парабол. На дорогах переходные кривые устраиваются для обеспечения безопасности и плавности движения посредством соблюдения непрерывности не только касательной (первой производной), но кривизны проектируемой трассы в плане. В качестве переходных кривых наиболее часто используются клотоиды. При проектировании автомобильных дорог клотоиды могут использоваться как отдельные элементы. В пределах клотоиды кривизна изменяется линейно с изменением длины.

При проектировании железных дорог в пределах круговых кривых рассчитывается возвышение h наружного рельса, которое прямо пропорционально квадрату расчетной скорости движения и обратно пропорционально радиусу кривой. В пределах пере-

ходной кривой возвышение наружного рельса меняется линейно от h до нуля. Уклон отвода возвышения наружного рельса, т. е. скорость его изменения, ограничен заданными пределами. Поэтому ограничена скорость изменения кривизны в пределах клотоиды, т. е. параметр линейной зависимости кривизны клотоиды от длины.

Аналогичная ситуация имеет место при проектировании автодорог при устройстве виража в пределах круговых кривых и при его отгоне в пределах переходных кривых.

Вычисление координат любой точки на таких элементах, как отрезки прямых, окружностей, парабол и клотоид, сопрягающих прямые и окружности, никаких трудностей не вызывает. В частности, при сопряжении прямых и окружностей используются зависимости $x(l)$, $y(l)$ декартовых координат точек клотоиды от ее длины начиная от точки с нулевой кривизной (точка O на рис. 1).

При малых значениях l , когда $l \approx x$, клотоида может быть заменена кубической параболой. В других случаях зависимости $x(l)$ и $y(l)$ представляются степенными рядами Маклорена в точке с нулевой кривизной [1].

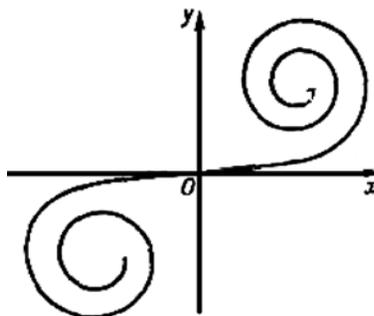


Рис. 1. Клотоида (спираль Корню)

Если клотоида используется для сопряжения двух окружностей, то координаты ее точек по-прежнему могут вычисляться на основе того же разложения в степенной ряд в точке с нулевой кривизной, которая в этом случае находится за пределами отрезка клотоиды, сопрягающего две окружности.

Характерно, что при проектировании вручную, а также при интерактивном проектировании, когда проектное решение тем или иным способом задает проектант, некоторые формально допустимые варианты сопряжения элементов отбраковываются. Однако при разработке проектирующих алгоритмов и программ возникают ситуации, в которых традиционные методы расчета оказываются непригодными [2].

Целью настоящей статьи является исследование подобных ситуаций и разработка нового универсального расчетного алгоритма.

Традиционный расчет элементов дорожных трасс

Традиционно расчет сопряжений основывается на использовании углов поворота трассы (рис. 2). Исходными данными для расчета являются: угол поворота и декартовы координаты его вершины, радиус круговой кривой R и длины клотоид L_1 и L_2 . Расчет начинается с определения расстояния T от точки начала клотоиды (точка A на рис. 2) до вершины угла. Затем используется местная система координат с центром в точке A , ось X которой направлена по стороне угла к вершине.

С использованием разложения в ряд для текущего значения длины клотоиды можно вычислить координаты X и Y в местной системе координат. Затем аналогично можно рассчитать координаты точек для правой клотоиды относительно другой стороны угла.

Натуральное уравнение клотоиды записывается в виде $\sigma = kL$, где σ — текущая кривизна, а L — длина клотоиды от точки с нулевой кривизной до текущей точки. Параметр k определяет скорость изменения кривизны.

Для расчета используются ряды

$$\begin{aligned} X &= L \left(1 - \frac{L^4 k^2}{40} + \frac{L^8 k^4}{3456} - \dots \right); \\ Y &= \frac{L^3 k}{6} \left(1 - \frac{L^4 k^2}{56} + \frac{L^8 k^4}{7040} - \dots \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь R — радиус круговой кривой, $k = 1/(L_1 R)$ при расчете клотоиды слева и $k = 1/(L_2 R)$ при расчете клотоиды справа.

Ряды (1) сходятся быстро, и обычно трех и даже двух членов ряда достаточно для вычисления координат с требуемой на практике точностью.

При сопряжении клотоидой двух окружностей с радиусами R_1 и R_2 соответственно в начальной точке A и конечной точке B (рис. 3) координаты промежуточных точек клотоиды можно вычислить с использованием тех же рядов (1).

Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Вычислить параметр клотоиды

$$k = (1/R_2 - 1/R_1)/L_c, \quad (2)$$

где L_c — длина отрезка сопрягающей клотоиды.

2. Вычислить $L_0 = 1/R_1/k$ — длину клотоиды от точки с нулевой кривизной до начала сопрягающей клотоиды (точка A на рис. 3).

3. Вместо текущей длины L в ряды для X и Y надо подставить L_0 и вычислить декартовы координаты x_0, y_0 точки A в системе, начало которой находится в точке нулевой кривизны, а ось X направлена по касательной к клотоиде в этой начальной точке (система XOY на рис. 3).

4. С использованием тех же рядов, подставляя в них $L_0 + L$, вычислить координаты x_1, y_1 текущей точки сопрягающей клотоиды в этой же системе. В частности, для точки B нужно подставлять $L_0 + L_c$.

5. Вычислить угол $\varphi = kL_0^2/2$. Это угол между касательной к клотоиде в точке A и осью X системы, в которой вычислены координаты точек (система XOY).

6. Зная угол ψ касательной к клотоиде в точке A с осью X той системы, в которой мы хотим знать координаты промежуточных точек (система $X_1 O_1 Y_1$ на рис. 3), нужно осуществить пересчет координат. При этом угол поворота одной системы относительно другой равен $\beta = \psi - \varphi$. На рис. 3 $\varphi < 0$, а $\psi > 0$. Если обозначить ξ, η координаты начала

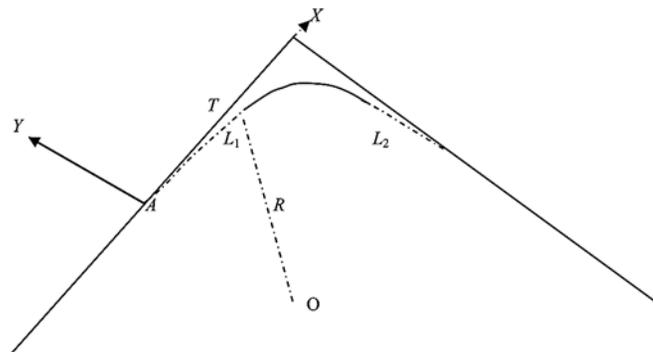


Рис. 2. К расчету сторон угла поворота

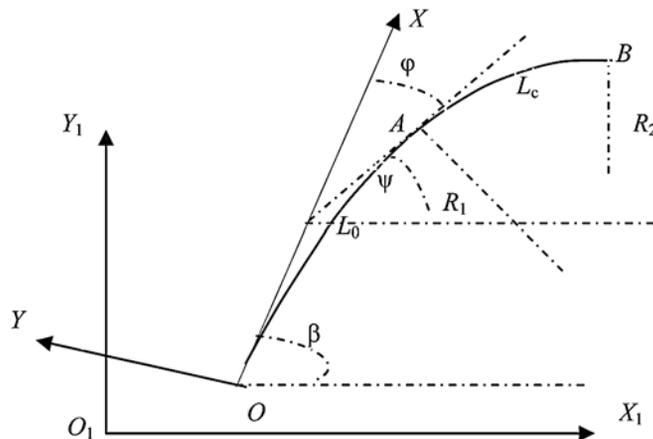


Рис. 3. К расчету сопряжения двух окружностей клотоидой

отрезка сопрягающей клотоиды (точка A на рис. 3) в "рабочей" системе $X_1 O_1 Y_1$, то координаты ξ_1, η_1 точки сопрягающей клотоиды при длине L вместо x_1, y_1 в этой системе будут равны

$$\xi_1 = \xi + (x_1 - x_0)\cos\beta - (y_1 - y_0)\sin\beta;$$

$$\eta_1 = \eta + (x_1 - x_0)\sin\beta - (y_1 - y_0)\cos\beta.$$

Если две сопрягаемые окружности имеют близкие значения радиусов и расстояние между их центрами значительно, то длина дуги L_0 от начала клотоиды (т. е. от точки с нулевой кривизной) до точки на окружности (точка A на рис. 3) может во много раз превосходить длину отрезка клотоиды, сопрягающего окружности, а угол поворота может превышать 30 рад, т. е. число витков клотоиды может быть 5 и более, и реальная ситуация будет отличная от рис. 3. В таких случаях возникает вопрос о целесообразности использования изложенного способа вычислений и вообще о возможности обеспечения требуемой точности расчета координат, например до 0,01 м. Дело в том, что, несмотря на то что теоретически ряды (1) для расчета координат сходятся при любых значениях длины клотоиды и угла поворота, практически при большом числе членов ряда проблематично обеспечить требуемую точность вычислений из-за ошибок, обусловленных тем, что разрядная сетка компьютера конечна и увеличение числа вычисляемых членов ряда может и не дать увеличения точности расчета.

В таблице для различных значений радиусов R_1 и R_2 , длины сопрягающей их клотоиды L_c приведены значения L_0 и угла φ . Линейные величины представлены в метрах, а угол — округленно в радианах. Кроме того, в этой таблице представлены ошибки Δx и Δy вычисления координат точек клотоиды при заданных координатах ее начала (точка A на рис. 3).

Способ вычисления этих ошибок станет ясен из дальнейшего изложения. Расчеты прекращались, когда очередной член ряда становился меньше 10^{-6} . Уменьшение этой константы, как и увеличение ее до 10^{-5} , практически не меняло результат.

Наибольшее влияние на точность вычисления координат оказывает разность радиусов сопрягаемых кривых.

Расчет параметров сопряжения кривых близких радиусов

R_1	R_2	L_c	L_0	φ	Δx	Δy
200	201	50	10 050	25	0,0002	0,0004
200	201	60	12 060	30	0,04	0,05
200	201	70	14 070	35	6,12	2,50
400	401	60	24 060	30	0,07	0,08
400	401	70	28 070	35	15,45	12,69
800	801	60	48 060	30	0,13	0,12
800	801,4	80	45 794	29	0,042	0,036
800	801,5	80	42 746	26	0,004	0,006
2000	2001,2	70	116 736	29	0,20	0,23
2000	2001,2	80	133 414	33	13,43	12,07
2000	2001,4	80	114 365	28	0,083	0,077

При проектировании вручную, а также при использовании различного рода алгоритмов интерактивного проектирования в САПР такие ситуации круговых кривых близких радиусов с переходными кривыми, как правило, не рассматриваются. Две окружности близких радиусов заменяются одной окружностью или сопрягаются встык с общей касательной. Наличие двух кривых близких радиусов с существенным расстоянием между их центрами и возможность их сопряжения клотоидой при этом просто игнорируются. При проектировании железных дорог в рассматриваемой ситуации упоминавшееся выше ограничение на параметр клотоиды не действует, так как возвышение наружного рельса проектируется в расчете на меньший из сопрягаемых радиусов и остается постоянным в пределах всей кривой, включая клотоиду. Отвод возвышения наружного рельса осуществляется на концевых клотоидах, т. е. при переходе на прямые.

При использовании итерационных алгоритмов оптимизации приходится считаться с тем, что в итерационном процессе изменяющиеся радиусы двух смежных окружностей, сопрягаемых клотоидой, принимают близкие значения, а расстояние между их центрами не позволяет заменить их одной окружностью или сопрягать встык, как это рекомендуется в случае, если разность кривизны окружностей меньше заданной. В связи с этим был разработан новый алгоритм расчета координат при сопряжении клотоидой двух окружностей, обеспечивающий требуемую точность вычислений при близких значениях радиусов сопрягаемых круговых кривых.

Новый алгоритм расчета координат точек сопрягающей клотоиды

Обозначим декартовы координаты начальной точки A клотоиды, сопрягающей круговые кривые радиусов R_1 и R_2 , в некоторой системе координат через x_0, y_0 , угол касательной в этой точке с осью X через φ_0 и кривизну через $\sigma_0 = 1/R_1$. Если L — текущая длина клотоиды начиная от точки A , в которой $L = 0$, и до текущей точки C , координаты которой мы будем вычислять, то в соответствии с определением клотоиды кривизна в точке C

$$\sigma(L) = \sigma_0 + kL.$$

Здесь k — параметр клотоиды, вычисляемый по формуле (2). Поскольку $d\varphi(L) = \sigma(L)dL$, то

$$\varphi(L) = \varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2.$$

Далее, $dx(L) = \cos\varphi(L)dL$ и $dy(L) = \sin\varphi(L)dL$. В итоге получаем

$$x = x_0 + \int_0^L \cos(\varphi_0 + \sigma_0 t + \kappa t^2/2) dt;$$

$$y = y_0 + \int_0^L \sin(\varphi_0 + \sigma_0 t + \kappa t^2/2) dt.$$

Эти интегралы отличаются наличием φ_0 и σ_0 от используемых в оптике известных интегралов Френеля [3, 4], на основе которых и были получены упомянутые выше разложения в ряды декартовых координат точек клотоиды. Если $\sigma_0 = 0$, то наличие φ_0 несущественно, так как можно вычислить координаты по известным разложениям в ряды, полагая $\varphi_0 = 0$, а затем пересчитать их с учетом поворота на φ_0 . Наличие σ_0 в подынтегральных функциях существенно для дальнейшего.

Обозначим эти интегралы через $I_x(L)$ и $I_y(L)$ соответственно. Они не выражаются через элементарные функции, поэтому заменим их разложением в степенные ряды Маклорена в точке $L = 0$:

$$I_x(L) = I_x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} I_x^{(i)}(0) \frac{L^i}{i!};$$

$$I_y(L) = I_y(0) + \sum_{i=1}^{\infty} I_y^{(i)}(0) \frac{L^i}{i!}.$$

Рассмотрим разложение в ряд $I_x(L)$:

$$I_x(0) = 0;$$

$$I_x^{(1)}(L) = \frac{dI_x}{dL} = \cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2);$$

$$I_x^{(2)}(L) = \frac{d^2 I_x}{dL^2} = -(\sigma_0 + kL) \sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2);$$

$$I_x^{(3)}(L) = \frac{d^3 I_x}{dL^3} = -k \sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2) - \quad (3)$$

$$- (\sigma_0 + kL)^2 \cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2);$$

$$I_x^{(4)}(L) = (-2(\sigma_0 + kL) - k(\sigma_0 + kL)) \cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2) + (\sigma_0 + kL)^3 \sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2).$$

Отметим следующие закономерности в вычислении производных, рассматривая каждую из них как многочлен по $\sigma_0 + kL$.

1. Производные нечетных порядков содержат слагаемые только с четными степенями $\sigma_0 + kL$ начиная с нулевой и кончая $n - 1$, где n — порядок производной, а производные четных порядков (начиная со второй) содержат слагаемые только с нечетными степенями $\sigma_0 + kL$, начиная с первой и кончая $n - 1$.

2. В каждом слагаемом, кроме степени $\sigma_0 + kL$, содержится в множителе $\sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$ или $\cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$. Поэтому общий вид слагаемого можно представить в виде $A(k) (\sigma_0 + kL)^p \times \sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$ или $B(k) (\sigma_0 + kL)^p \cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$, причем при переходе к очередному ненулевому слагаемому многочлена происходит замена: \sin на \cos или \cos на \sin . Множители $A(k)$ и $B(k)$ в каждом слагаемом и в каждой производной различны.

В справедливости наличия отмеченной структуры формул для вычисления производных легко убе-

диться с помощью математической индукции, так как при дифференцировании очередной производной, имеющей такую структуру, и рассматривая последовательно, как вычисляются слагаемые нового многочлена из слагаемых имеющегося, замечаем следующее:

- при $p > 0$, дифференцируя $(\sigma_0 + kL)^p$, получаем те же множители, но вместо $(\sigma_0 + kL)^p$ имеем $pk(\sigma_0 + kL)^{p-1}$. Это соответствует шагу влево по слагаемым многочлена. Дифференцируя $\sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$, получаем $A(k)(\sigma_0 + kL)^{p+1} \times \cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$, а дифференцируя $\cos(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$, получаем $-B(k)(\sigma_0 + kL)^{p+1} \times \sin(\varphi_0 + \sigma_0 L + kL^2/2)$. Это соответствует шагу вправо по строке слагаемых многочлена;
- при $p = 0$ возможен только шаг вправо с тем же результатом.

При подстановке $L = 0$ в многочлен для производной вместо соответствующего слагаемого получаем $A(k)\sigma_0^p \sin \varphi_0$ или $B(k)\sigma_0^p \cos \varphi_0$.

Таким образом, каждое слагаемое нового многочлена $(\sigma_0 + kL)^r$ (кроме первого при $r = 0$ и последнего) получается из двух слагаемых имеющегося многочлена соответственно со степенями $r - 1$ (при шаге вправо) и $r + 1$ (при шаге влево). При $r = 0$ имеем результат только шага влево. А последний член получается только при шаге вправо. Это наглядно показано при записи формулы (3) для $I_x^{(4)}(L)$, в которой $-k(\sigma_0 + kL)$ получено при шаге вправо, а $-2(\sigma_0 + kL)$ получено при шаге влево.

Рассмотренные особенности формирования слагаемых очередной производной позволили создать алгоритм вычисления $I_x^{(p+1)}(0)$ путем преобразования слагаемых $I_x^{(p)}(0)$:

$$I_x^{(1)}(0) = \cos \varphi_0.$$

Введем следующие обозначения:

i — номер последней вычисленной производной. Будем вычислять очередную производную и соответствующий член ряда для $I_x(L)$, преобразуя слагаемые последней из вычисленных производных во внешнем цикле от $i = 1$ до большого числа, например до 100, прерывая цикл при получении очередного члена ряда, не равного нулю и меньшего заданного числа ε , например $\varepsilon = 10^{-6}$.

Будем запоминать в массиве *prev* слагаемые в многочлене для очередной производной до их умножения на синус или косинус. Нумерация элементов массива начинается с 1. До начала внешнего цикла все элементы массива *prev* равны нулю, кроме *prev*(1) = 1.

Производную в нуле обозначаем через s , а соответствующую степень L , деленную на нужный факториал, через st . Соответственно, очередной член ряда равен $s \cdot st$.

До начала внешнего цикла $s = \cos\varphi_0$; $st = L$, $x = x_0 + L\cos\varphi_0$.

Введем два признака наличия синуса или косинуса при вычислении очередного слагаемого производной: prn — в начале преобразуемой строки и prr — для текущего слагаемого. Каждый признак равен 1, если есть множитель синус, и минус 1, если есть множитель косинус. До входа во внешний цикл $prn = -1$, так как преобразуемая строка $\cos\varphi_0$.

Во внешнем цикле выполняем следующие действия:

prr приравниваем к prn ; обнуляем s ; st умножаем на $L/(i+1)$ — это заготовка для умножения на вычисляемую во внутреннем цикле производную.

Далее, j — показатель степени $\sigma_0 + kL$ в первом слагаемом вычисляемой строки. Фактически $j = 1$ при четном i и $j = 0$ при нечетном i . На первом шаге $j = 0$.

Внутренний цикл выполняем с шагом 2 от j до $i-1$. Параметр цикла обозначим через $j1$ — это показатель степени σ_0 в очередном слагаемом вычисляемой производной. Если $j1 > 0$, выполняем шаг влево, т. е. добавляем к текущему значению $prev(j1)$ произведение $s1 = prev(j1+1) \cdot j1 \cdot k/\sigma_0$. Вычисляем $sc = \sin\varphi_0$ при $prr = 1$ или $sc = \cos\varphi_0$ в противном случае. Текущее значение производной s увеличиваем на $s1 \cdot sc$.

Далее делаем шаг вправо, что всегда возможно. Он соответствует дифференцированию синуса или косинуса, поэтому $sc = \cos\varphi_0$ при $prr = 1$ или $sc = \sin\varphi_0$ в противном случае. Значение $prev(j1+2)$ получаем из $prev(j1+1)$. Для этого увеличиваем $prev(j1+2)$ на $prev(j1+1) \cdot prr \cdot \sigma_0$. Умножением на prr учитывается изменение знака при дифференцировании косинуса, а умножением на σ_0 учитывается увеличение показателя степени $\sigma_0 + kL$ при шаге вправо. Текущее значение производной s увеличивается на $prev(j1+1) \cdot prr \cdot \sigma_0 \cdot sc$. Меняем знак prr при переходе к следующему слагаемому. На этом шаг вправо закончен.

Обнуляем $prev(j1+1)$ и повторяем внутренний цикл.

После исчерпания внутреннего цикла вычислены значение s очередной производной и все коэффициенты при синусах и косинусах в ее слагаемых, которые хранятся в массиве $prev$ и будут использоваться для вычисления следующей производной.

Новый член ряда равен $s \cdot st$, значение x увеличиваем на $s \cdot st$, и при $|s \cdot st| < \varepsilon$ расчет закончен, если при этом вычислено более двух производных. Иначе при $\varphi_0 = 0$ вторая производная равна нулю и счет заканчивается с неверным результатом.

Если счет продолжается, то при $j = 0$ меняем знак prn и переходим к повторению внешнего цикла. Если число его повторений, т. е. порядок вычисленной производной, превышает заданное число (например, 100), то это свидетельствует об ошибке и счет целесообразно прекратить.

Алгоритм для разложения в ряд $I_y(L)$ аналогичен изложенному. Первая производная в нуле равна $\sin\varphi_0$, соответственно, $prn = 1$ и первый член ряда равен $L \sin\varphi_0$. Других изменений нет.

Некоторые усовершенствования достигаются при переходе к системе координат, в которой ось OX направлена по касательной к клотоиду в начальной точке $A(x_0, y_0)$. В этой системе $\varphi_0 = 0$, $\sin\varphi_0 = 0$ и $\cos\varphi_0 = 1$. Поэтому нет необходимости вычислять sc , а при вычислении s нужно добавлять только множители при $\cos\varphi_0$, т. е. при $prr = -1$. Однако множители при $\sin\varphi_0$ все равно придется вычислять и хранить для вычисления следующей производной. По завершении вычисления координат необходимо пересчитать их в исходную систему.

С помощью изложенного алгоритма были вычислены координаты точек клотоид, сопрягающих две окружности близких радиусов, и вычислена ошибка в координатах при их расчете от точки с нулевой кривизной.

Для этого вычислялся параметр k клотоиды по формуле (2), длина $L_0 = 1/R_1/k$ от точки с нулевой кривизной до начала сопрягающей клотоиды, длина которой L_c . Для длин, кратных 20 м, с использованием рядов (1) вычислялись и запоминались координаты соответствующих точек, вплоть до длины $L_0 + L_c$. Новый алгоритм применялся для последовательного пересчета координат.

1. Вычислялись координаты, угол касательной с осью X и кривизна при длине клотоиды 20 м начиная от точки с нулевой кривизной. Эти данные использовались как начальные для вычисления координат, угла и кривизны при $L = 20$ м. И так в цикле с пересчетом начальных данных до исчерпания длины $L_0 + L_c$. Получался новый массив координат.

2. Соответствующие координаты из двух массивов сравнивались и вычислялась максимальная по абсолютной величине ошибка по x и по y . Именно эти величины занесены в таблицу.

Во избежание накопления ошибок при последовательном пересчете расчеты по новому алгоритму выполнялись с $\varepsilon = 10^{-6}$. Малые значения длин $L = 20$ м при втором расчете позволяют получать результат с высокой точностью.

Последовательный поэлементный расчет координат

Если заданы начальная точка, начальное направление (угол φ_0 с осью X), последовательность элементов и их длины, а также радиусы круговых кривых, то алгоритм расчета следующий.

1. Для прямой на расстоянии s от начальной точки прямой с координатами x_0, y_0 справедливо $x(s) = x_0 + s\cos\varphi_0$; $y(s) = y_0 + s\sin\varphi_0$.

При $s = L$, где L — длина прямой, получаем координаты ее конечной точки.

2. Для окружности при повороте против часовой стрелки радиус считаем положительным, а при повороте по часовой стрелке — отрицательным.

Вычисляем угол поворота $\Delta\varphi = s/R$. В системе координат с осью X , направленной по касательной к окружности в начальной точке, и с центром в начальной точке

$$x' = R\sin\Delta\varphi \text{ и } y' = R(1 - \cos\Delta\varphi).$$

В исходной системе координат

$$x(s) = x_0 + x'\cos\varphi_0 - y'\sin\varphi_0$$

$$\text{и } y(s) = y_0 + y'\cos\varphi_0 + x'\sin\varphi_0; \varphi(s) = \varphi_0 + \Delta\varphi.$$

При $s = L$, где L — длина окружности, получаем данные для расчета следующего элемента, т. е. новые x_0 , y_0 и φ_0 .

При расчете клотоиды, сопрягающей прямую и окружность или окружность и прямую или две окружности, сначала вычисляем параметр клотоиды. Этот параметр может быть и отрицательным, что не мешает использовать изложенный универсальный алгоритм расчета. При нулевой кривизне в начальной точке можно использовать ряды (1), но для сопряжения двух окружностей целесообразно использовать новый алгоритм, изложенный выше.

Последовательно вычисляя координаты промежуточных и конечных точек очередного элемента и углы касательной с осью X в исходной системе координат, мы получим полный расчет кривой.

Если требуются углы поворота и координаты их вершин, то они могут быть вычислены через координаты начальной точки клотоиды при сходе с прямой и конечной точки клотоиды при выходе на прямую и соответствующие углы этих прямых с осью X . Если внутри такого угла поворота содержатся несколько круговых кривых, сопрягаемых клотоидами или встык, то в средней точке очередной клотоиды или в точке сопряжения окружностей можно вычислить угол касательной с осью X и использовать эту касательную как одну из сторон угла поворота и т. д.

Заключение

В итоге выполненной работы можно констатировать следующее.

При расчете сопряжений клотоидой прямой и круговой кривой никаких проблем с точностью вычисления координат точек клотоиды не возникает даже при угле поворота клотоиды 2π и длине клотоиды до 1000 м. Однако при сопряжении двух круговых кривых близких радиусов при длине отрезка сопрягающей клотоиды в несколько десятков метров и радиусах кривых от 200 до 4000 м возможны существенные ошибки, если использовать классические ряды для координат точек клотоиды. В этих случаях целесообразно использовать изложенный новый алгоритм разложения координат в степенные ряды.

При компьютерном проектировании этот алгоритм обеспечивает необходимую точность вычислений практически при любых радиусах сопрягаемых круговых кривых и их расположении, что позволяет избежать прерывания итерационного процесса и замены двух окружностей одной или еще каких-либо действий. Этот алгоритм использован при разработке нового алгоритма проектирования трасс реконструируемых железных дорог на основе динамического программирования, который предполагается изложить в отдельной статье.

Список литературы

1. **Кантор И. И.** Изыскание и проектирование железных дорог. М.: Академкнига, 2003.
2. **Струченков В. И.** О различных подходах к автоматизации проектирования трасс линейных сооружений // Информационные технологии. 2013. № 12.
3. **Oldham K. B., Myland J. C., Spanier J.** An atlas of function. Springer, 2008.
4. **Бейтман Г., Эрдеи А.** Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974.

V. I. Struchenkov, Professor, e-mail: strl942@mail.ru

Moscow State University of Radio Engineering, Electronics and Automation, Moscow, Russia

New Algorithm for Perelement Calculation of Line Structures Routes

Under study is the problem of calculation of the Cartesian coordinates of points of the line structures routes: railways and roads, pipelines, etc. Plan and longitudinal profile of the route can contain straight-line segments, circles, parabolas, and spiral. A consistent per element calculation from a given starting point and the initial direction to the end point is proposed. Found that when calculating the coordinates of clothoid points, connecting two circular curves of nearby radii using the power series expansion at the point with zero curvature it is possible essential errors due to inaccurate representation of numbers in a computer. A new algorithm for the calculation with the power series expansion at the interface point between the circle and the clothoid is proposed. The algorithm provides the required accuracy of calculation when connecting circular curves have nearby radii.

Keywords: route, plan, longitudinal profile, clothoid, connection of circles, power series, calculation errors, Maclaurin

References

1. **Kantor I. I.** *Izyskanie i proektirovanie zheleznyh dorog.* M.: Akadem-kniga, 2003.
2. **Struchenkov V. I.** O razlichnyh podhodah k avtomatizacii proektirovanija trass linejnyh sooruzhenij. *Informacionnye tehnologii.* 2013. N. 12.

3. **Oldham K. B., Myland J. C., Spairter J.** *An atlas of function.* Springer, 2008.
4. **Bejtman G., Jerdeji A.** *Vysshie transcendentnye funkicii.* M.: Nauka, 1974.