УДК 004.3

И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф., МГТУ им. Н. Э. Баумана,
М. С. Хрисат, аспирант, e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.yo, **М. Я. Шихаб Еддин,** аспирант,
Российский университет дружбы народов

Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть I

Представлены основные положения нечетких вычислений и нечеткой теории обыкновенных дифференциальных уравнений, различные типы решений и их отношений. Описана основная схема представления нечетких производных, даны примеры.

Ключевые слова: *нечеткие вычисления, нечеткое банахово пространство, нечеткие производные*

Введение

Одним из основных разделов современной прикладной науки является та ее часть, которая посвящена решению четких (традиционных) обыкновенных и в частных производных уравнений, используемых для описания различных компонент систем управления. С одной стороны, методы решения этих уравнений достаточно хорошо развиты, получено много практических результатов, а отдельные их разделы давно вошли в состав соответствующих курсов университетов [1—3]. С другой стороны, в настоящее время широко используется теория нечетких множеств при решении разнообразных нечетких прикладных задач. Созданы различные нечеткие модели объектов управления [4, 5], разработаны и внедрены алгоритмы и технические средства логического нечеткого управления [6, 7], созданы основы нечеткой теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики [8, 9]. В частности, разработаны алгоритмы нечеткого оценивания, проверки нечетких тестов, решения нечетких регрессионных задач [10, 11].

В статье приняты следующие обозначения: $x_{\text{н}}$ — нечеткий элемент; $\varphi_{\text{н}}(t)$ — нечеткая функция (отображение) для одного переменного и $\varphi_{\text{н}}(t, x, ..., z)$ для многих переменных; $\dot{\varphi}_{\text{н}}(t)$ — нечеткая производная, а соответствующий ей тип обозначается верхним индексом, например, $\dot{\varphi}_{\text{н}}^{S}$ — нечеткая производная Seikkala (Сейккала) и др.

1. Базовые определения

1.1. Функция принадлежностей. В теории нечетких множеств одним из базовых понятий является определение принадлежности элемента x некоторому множеству $X(x \in X \subset R_1)$. В зависимости от типа множества (четкое или нечеткое) обозначение $x \in X$ формализуется с помощью характеристической функции $r^*(x)$, $x \in X \subset R_1$, $r \in \{0; 1\}$ для четкого элемента x и функции принадлежностей $r(x)$, $x = x_{\text{н}} \in X$, $r \in [0; 1]$ для нечеткого элемента $x_{\text{н}}$. Они определяются следующим образом:

$$r^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in X; \\ 0, & x \notin X; \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} \underline{r}(x) \in [0; 1]; \\ \overline{r}(x) \in [0; 1], \end{cases}$$

где $r(x)$ —многозначная функция с $\underline{r}(x)$, $\overline{r}(x)$-"левой" и "правой" однозначными функциями (ветвями) соответственно относительно $r(x_{\text{н}}) = 1$, обладающая заданными свойствами, которые будут представлены далее. Иногда для $r(x)$ используют обозначение

$$r(x) = \begin{cases} r_L(x) \in [0; 1]; \\ r_R(x) \in [0; 1], \end{cases}$$

где $r_L(\cdot)$-"левая" (Left — англ.) ветвь, $r_R(\cdot)$-"правая" (Right — англ.) ветвь.

Часто для $r(x)$ используется его уровневое представление с применением обратного отображения $r^{-1}(x)$:

$$r^{-1}(x) = x(r) = (\underline{x}(r), \overline{x}(r) | r \in [0; 1]).$$

Таким образом, в символической форме имеем:

$$x \in X \subset R_1 \begin{array}{l} r^*(x) = \{0; 1\}, \\ \nearrow x \text{ — четкий элемент } X; \\ \searrow r(x) \in [0; 1], \\ x = x_{\text{н}} \text{ — нечеткий элемент } X. \end{array}$$

Совокупность нечетких элементов $\{x_{\text{н}}\}$ задает нечеткое множество $X_{\text{н}}$. Для обозначения $x_{\text{н}}$ иногда используется цепочка эквивалентных представлений:

$$x_{\text{н}} \Leftrightarrow r(x),\ r \in [0; 1] \Leftrightarrow (\underline{r}(x), \overline{r}(x) | \underline{r}, \overline{r} \in [0; 1]) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (r_L(x), r_R(x) | r_L, r_R \in [0; 1]) \Leftrightarrow (\underline{x}(r), \overline{x}(r) | r \in [0; 1]),$$

где $\underline{x}(\cdot)$, $\overline{x}(\cdot)$ — обратные отображения соответственно для $\underline{r}(x)$, $\overline{r}(x)$.

1.2. Нечеткие числа. В зависимости от формы $r(x)$ различают следующие типы нечетких чисел:

(i) нечеткое "треугольное" число $x_{\text{н}}$;
(ii) нечеткое "обобщенное" число $y_{\text{н}}$;
(iii) нечеткое "сильное" (strong — англ.) число $u_{\text{н}}$;

(iv) нечеткое "слабое" (weak — англ.) число $\delta_н$;

(v) нечеткое "одиночное" (singlton — англ.) число.

(i) Нечеткое "треугольное" число $x_н$ определяется посредством трех чисел $a_1 < a_2 < a_3$, $a_i \in R_1$, $i = \overline{1, 3}$. График $r(x)$ для $x_н$ в координатной плоскости (x, r) имеет форму треугольника с основанием $\operatorname{supp} x_н = [a_1, a_3]$, а высота его исходит из точки с координатами $(x = a_2, r = 0)$. Для $x_н$ в этом случае приняты следующие эквивалентные обозначения:

$$x_н = (a_1|a_2|a_3) \Leftrightarrow (\underline{r}(x) = (x - a_1)(a_2 - a_1)^{-1},\ \overline{r}(x) = (-x + a_3)(a_3 - a_2)^{-1} | r \in [0; 1]) \Leftrightarrow (\underline{x}(r) = (a_2 - a_1)r + a_1,\ \overline{x}(r) = (a_2 - a_3)r + a_3 | r \in [0; 1]),$$

т. е. зависимости $\underline{r}(\cdot)$, $\overline{r}(\cdot)$, $\underline{x}(\cdot)$, $\overline{x}(\cdot)$ являются линейными. Полагают, что если $a_1 \geqslant 0$, то $x_н \geqslant 0$; если $a_3 \leqslant 0$, то $x_н \leqslant 0$.

(ii) Нечеткое "обобщенное" число $y_н$ определяется аналогично числу $x_н$ (п. (i)), но отличается от него кусочно-нелинейным типом зависимости $r(y)$. Относительно $r(y)$ полагается выполнение следующих свойств:

- $r(y)$ полунепрерывна сверху;
- $\underline{r}(y)$ монотонно возрастает;
- $\overline{r}(y)$ монотонно убывает;
- для обратных отображений $\underline{y}(r) \leqslant \overline{y}(r)$.

Для нечеткого "треугольного" числа все эти свойства выполняются, так как $r(x)$ является кусочно-линейной зависимостью, поэтому очевидно, что $r(y)$ является обобщением $x_н$.

Если хотя бы одно из перечисленных выше свойств относительно $r(y)$ не выполняется, то $y_н$ не является нечетким числом. В частности, если $r(y)$ имеет в основании один из углов больше 90°, то такое $y_н$ не является нечетким числом.

(iii) Нечеткое "сильное" число $u_н$ имеет функцию принадлежностей $r(u)$ всегда с острыми углами при ее основании. В этом случае оно совпадает с $x_н$ или с $y_н$.

(iv) Нечеткое "слабое" число $\delta_н$ появляется в случае, когда один из углов в основании функции принадлежностей $r(\delta)$ больше 90°. В этом случае $\delta_н$ формально не является нечетким числом, так как относительно $r(\delta)$ не выполняется свойство $\underline{\delta}(r) \leqslant \overline{\delta}(r)$. Тогда используется следующая модификация нечеткого числа:

$$\delta_н = (\min\{\underline{\delta}(r),\ \overline{\delta}(r),\ \delta(r = 1)\},\ \max\{\underline{\delta}(r),\ \overline{\delta}(r),\ \delta\ (r = 1)\} | r \in [0; 1]),$$

которую принято называть "слабое" нечеткое число. Возникновение этих чисел связано с различными нелинейными преобразованиями над "сильными" числами. Эта ситуация возникает при решении нечетких линейных систем алгебраических уравнений [12], нечетких нелинейных дифференциальных уравнений [13] и т. д.

(v) Нечеткое "одиночное" число $z_н$ возникает в случае необходимости представления четкого числа в нечетких терминах. Функция принадлежностей $r(z)$ имеет вид

$$r(z) = \operatorname{singl}(t - z) = \begin{cases} 1, & t = z; \\ 0, & t \neq z; \end{cases} \quad t, z \in R_1$$

или возможно эквивалентное представление

$$z_н = (\underline{z}(r) = \overline{z}(r) | r \in [0; 1]).$$

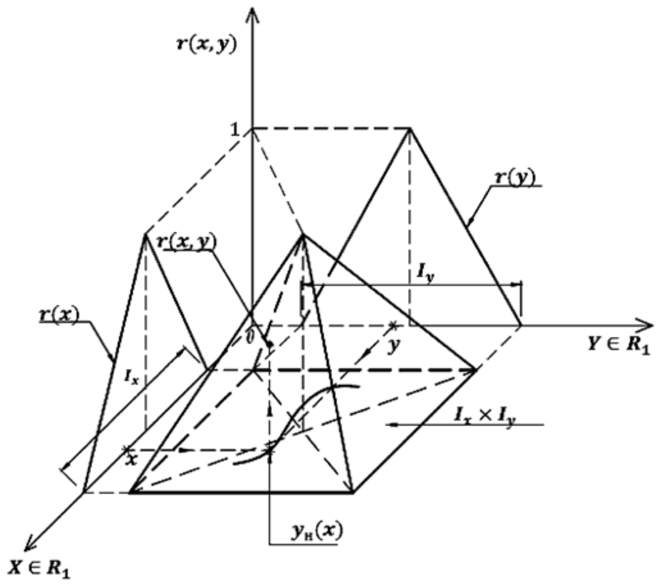

Рис. 1.1. Нечеткая функция $y_н(x)$

1.3. Нечеткая функция (отображение) $y_н(x)$. Это отображение нечеткой области (множества) X в нечеткую область (множество) значений Y с функцией принадлежностей $r_y(x)$

$$X \ni x \xrightarrow{r_y(x)} y \in Y,$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$.

Отображение $y_н(x)$ определяет нечеткую вектор-функцию векторного аргумента. При $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = y_1$ отображение определяет нечеткую функцию многих переменных, а при $x = x_1$, $y = y_1$ отображение $y_н(x)$ определяет нечеткую функцию одного переменного. На рис. 1.1 изображена нечеткая функция $y_н(x)$ с функцией принадлежностей $r_y(x \equiv r(x, y))$.

2. Нечеткие вычисления

2.1. Арифметические операции *= ("+"; "-"; "x:"; ":"). Эти операции трактуются как специальный тип отображения f нечетких множеств $A_1, ..., A_n$ с многомерной функцией принадлежностей $r_A(x_1, ..., x_n)$ — принцип расширения в нечеткое множество B:

$$f: A = A_1 \times ... \times A_n \xrightarrow{r_A(x_1, ..., x_n)} B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_B(y) = f(r_A(x_1, ..., x_n)) = \sup_{\substack{y = f(x_1, ..., x_n) \\ A = A_1 \times ... \times A_n}} r_A(x_1, ..., x_n) = \sup_{y = f(x_1, ..., x_n)} \min(r_{A_1}(x_1), ..., r_{A_n}(x_n)). \qquad (2.1)$$

В частности, для двух треугольных нечетких чисел $x_{1н}$, $x_{2н}$ имеем

$$y_н = x_{1н} * x_{2н} \Leftrightarrow r_B(y) =$$
$$= \max_{y_н = x_{1н} * x_{2н}} \min(r_{A_1}(x_1),\ r_{A_2}(x_2)) \Leftrightarrow r_B(y) =$$
$$= \begin{cases} \sum_i r_{A_1}(x_{1i}) | r_B(y_i) = r_{A_1}(x_{1i}) * r_{A_2}(x_{2i}),\ A_1,\ A_2 \text{ — } \\ \text{дискретные нечеткие множества;} \\ \int r_{A_1}(x_1) | r_B(y) = r_{A_1}(x_1) * r_{A_2}(x_2),\ A_1,\ A_2 \text{ — } \\ \text{непрерывные нечеткие множества,} \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\sum$, $\int$ — символы представления нечеткого числа $r_B(y)$ в виде объединения пар $\{r_{A_1}(x_1) | r_B(y)\}$.

При задании нечетких треугольных чисел в форме $x_{1н} = (a_{11}|a_{12}|a_{13})$, $x_{2н} = (a_{21}|a_{22}|a_{23})$ арифметические операции "*" для них определяются в следующем виде:

$$x_н = x_{1н} * x_{2н} =$$
$$= (a_1 = a_{11} * a_{21} | a_2 = a_{12} * a_{22} | a_3 = a_{13} * a_{23}). \quad (2.3)$$

Пример 2.1. Имеем:

$$x_{1н} = r_{A_1 = 5}(x) = \max(1 - 0{,}5|x - 5|;\ 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_{1н} = (a_{11} = 3 | a_{12} = 5 | a_{13} = 7);$$
$$x_{2н} = r_{A_2 = 2}(x) = \max(1 - |x - 2|;\ 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_{2н} = (a_{21} = 1 | a_{22} = 2 | a_{23} = 3),$$

тогда в соответствии с формулой (2.3), например, для операции "+" получим:

$$x_н = (a_1|a_2|a_3) = (a_1 = a_{11} + a_{21} = 3 + 1 = 4 | a_2 =$$
$$= a_{12} + a_{22} = 5 + 2 = 7 | a_3 = a_{13} + a_{23} = 7 + 3 = 10).$$

Аналогичный результат следует из формулы (2.2)

$$r_B(y) = \int r_{A_1 = 5} | r_B(y) = r_{A_1 = 5}(x) + r_{A_2 = 2}(x) =$$
$$= \max\left(1 - \frac{1}{3}|y - 7|;\ 0\right).$$

Найдем результат операции "+" из (2.1). Он получается из геометрических построений с использованием пошаговых процедур для треугольных функций принадлежностей.

Шаг 1. В плоскости с (x_1, x_2) строится множество $A = A_1 \times A_2$, где "×" — символ декартового произведения; $A_1 = x_{1н} = r_{A_1 = 5}(x_1)$, $A_2 = x_{2н} = r_{A_2 = 2}(x_2)$), и затем в координатах $(x_1,\ x_2,\ r_A(x_1,\ x_2))$ строится соответствующая пирамида П как результат взаимного пересечения двух треугольных цилиндров с основаниями соответственно $r_{A_1 = 5}(x)$ и $r_{A_2 = 2}(x)$.

Шаг 2. Строится $\min_{y_н = x_1 * x_2}(r_{A_1 = 5}(x_1) + r_{A_2 = 2}(x_2))$. Для этого проводится плоскость

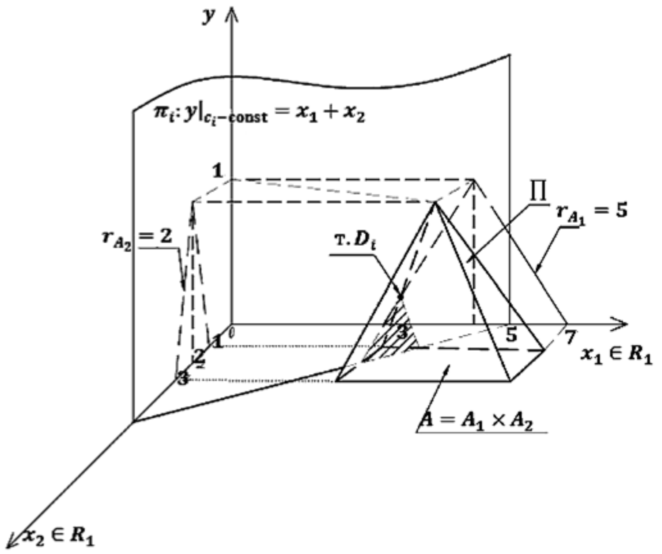

Рис. 2.1. Построение $\min_{x_1 + x_2 = c_i}(r_{A_1 = 5}(x_1),\ r_{A_2 = 2}(x_2))$ — т. D_i

$\pi_i{:}y|_{c_i = \text{const}} = x_1 + x_2$. В результате ее пересечения с пирамидой П получим треугольник (заштрихованная фигура на рис. 2.1), тогда точка $D_i \in \pi_i$ и также $D_i \in П$, поэтому она определяет $\min_{x_1 + x_2 = c_i}(r_{A_1 = 5}(x_1) + r_{A_2 = 2}(x_2))$. Так как заштрихованная фигура является треугольником, то проекция D_i на плоскости $y0x_1$, $y0x_2$ и затем проекция на ось "y" совпадают. В общем случае они не совпадают.

Шаг 3. Через точку D_i проводятся горизонтальные плоскости, тогда на плоскости x_10x_2 при различных c_i =const получаются изокривые:

$$\min_{x_1 + x_2 = c_i}(r_{A_1 = 5}(x_1) + r_{A_2 = 2}(x_2)),$$
$$i = \overline{1, k} \text{ (рис. 2.2).}$$

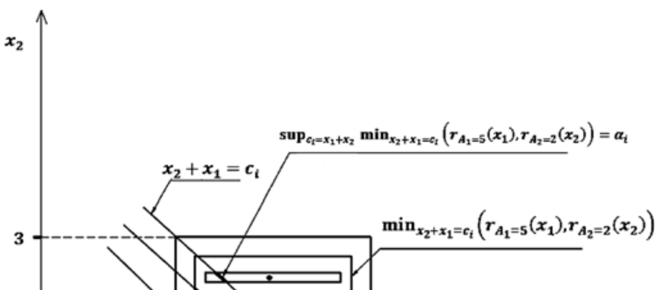

Рис. 2.2. Построение совокупности $\{r_B = \alpha_i;\ x_1 + x_2 = c_i\}$ при сложении нечетких множеств $B = A_1 + A_2 \Leftrightarrow r_B(y) = \Leftrightarrow r_{A_1 = (x)} + r_{A_2 = (x)}$

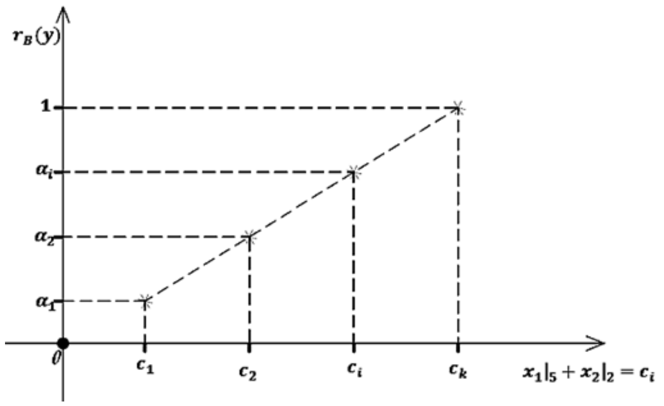

Рис. 2.3. Функция принадлежностей суммы $r_B(y)$ двух нечетких чисел $r_{A_1 = 5}(x)$, $r_{A_2 = 2}(x)$

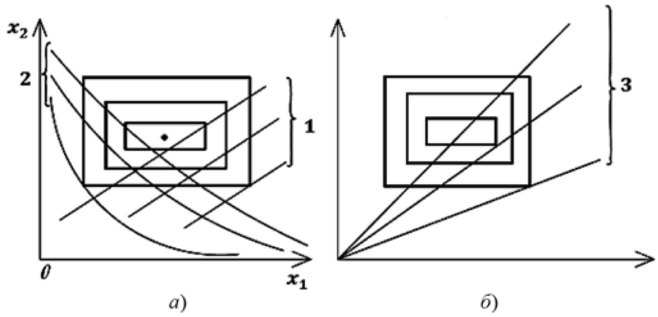

Рис. 2.4. Изокривые при вычитании $B = A_1 - A_2$ (1) и умножении $B = A_1 \cdot A_2$ (2) (*а*); при делении $B = A_1 : A_2$ (3) (*б*)

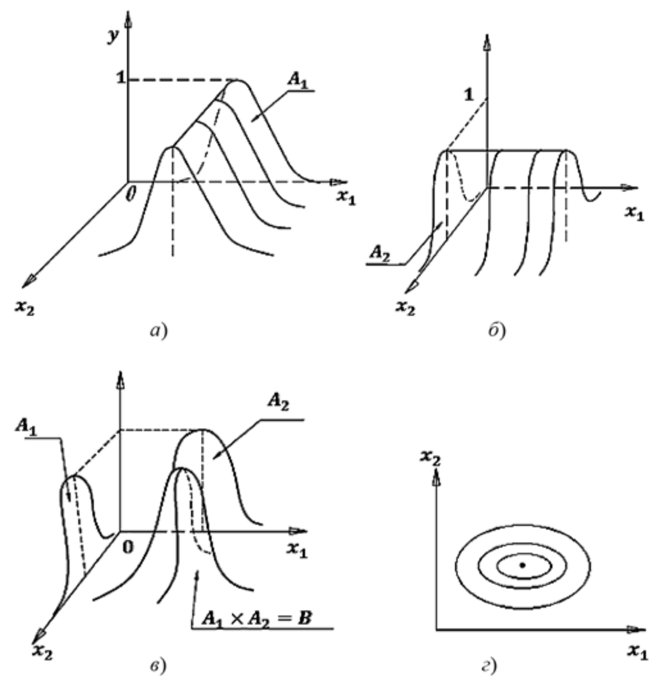

Рис. 2.5. Последовательность построения из кривых: цилиндр A_1 (*а*), цилиндр A_2 (*б*); декартово произведение $B = A_1 \times A_2$ (*в*); изокривые (*г*)

Шаг 4. В плоскости $x_1 0 x_2$ строятся зависимости

$$y|_{c_1} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = c_1 - x_1, \ldots, y|_{c_k} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_2 = c_k - x_1,$$

которые определяют семейство параллельных прямых с отрицательным углом наклона. Их пересечение с изокривыми определяют $\sup_{y|_{c_1 = x_1 + x_2}} \min(r_{A_1 = 5}(x_1), r_{A_2 = 2}(x_2))$. В результате будем иметь совокупность точек с координатами $\{r_B = \alpha_i;\ y|_{c_1} = x_1 + x_2\}$, $\alpha \in [0; 1]$, которая в дискретной (поточечной) форме определит $B = A_1 + A_2 \Leftrightarrow r_B(y) = r_{A_1 = x_1}(x) + r_{A_2 = x_2}(x)$ (рис. 2.3). Нетрудно проверить, что при $A_1 = 5$, $A_2 = 2$ получим результаты, аналогичные выражениям (2.2), (2.3).

Выше принцип расширения (2.1) был реализован для операции "+". Аналогичные рассуждения и построения справедливы для операций "−", "×", ":". Отличие от предыдущих построений состоит в типах зависимостей на шаге 4 (рис. 2.4, *а*, *б*):

$y|_{c_i} = x_1 - x_2 \Leftrightarrow x_2 = c_i + x_1$, $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, k}$, — семейство параллельных прямых с положительным углом наклона;

$y|_{c_i} = x_1 \times x_2 \Leftrightarrow x_2 = c_i / x_1$ — семейство гипербол;

$y|_{c_i} = x_1 : x_2 \Leftrightarrow x_2 = c_i x_1$ — семейство прямых, выходящих из начала координат.

Геометрическими построениями можно показать, что результирующая функция принадлежностей для операций "×", ":" с треугольными функциями принадлежностей будет иметь итоговую функцию принадлежностей, отличную от треугольной формы.

Замечание. При наличии треугольной функции принадлежностей и элементарных операций "+", "−", "×", ":" получение результирующей функции принадлежностей является относительно тривиальной операцией.

При наличии более сложных исходных функций принадлежностей не всегда удается получить аналитические решения для результирующей функции принадлежностей. Это обусловлено вычислением декартового произведения пространств. На рис. 2.5, *а—г* приведена последовательность построения изокривых для

$$r_{A_1}(x_1) = \exp[-k(x_1 - a)^2],$$

$$r_{A_2}(x_2) = \exp[-k(x_2 - b)^2].$$

2.2. Отношения порядка (операции сравнения "⩾", "⩽"). Это отношение следует из определения [12]:

имеем нечеткие числа $x_{1н}$, $x_{2н}$, такие что $x_{iн} = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r) | r \in [0; 1])$, $i = 1, 2$, тогда $x_{1н} \lesseqgtr x_{2н}$, если

$$T(x_{1н}) = \int_0^1 r[\underline{x}_1(r) + \overline{x}_1(r)]dr \lesseqgtr \int_0^1 r[\underline{x}_2(r) + \overline{x}_2(r)]dr = T(x_{2н}).$$

2.3. Банахово пространство нечетких чисел [15]. Помимо принципа расширения, который был применен для определения операций в п. 2.1, в теории нечетких множеств широко используется подход, принятый в функциональном анализе при введении банахового пространства [16]. Для этого в совокупности $\{x_{iн}\} = X$ нечетких чисел задаются операции:

- сложения (+) элементов $x_{iн} \in X$ и $x_{jн} \in X$ в виде $x_{iн} + x_{jн} = (\underline{x}_i(r) + \underline{x}_j(r), \overline{x}_i(r) + \overline{x}_j(r) | r \in [0; 1]$;
- умножения (×) элемента $x_{iн} \in X$ на скаляр $k \in R_1$ по правилу

$$k \times x_{iн} = \begin{cases} (k \times \underline{x}_i(r), k \times \overline{x}_i(r) | r \in [0; 1]), k \geqslant 0; \\ (k \times \overline{x}_i(r), k \times \overline{x}_i(r) | r \in [0; 1]), k < 0; \end{cases}$$

- существования у $x_{iн}$ обратного элемента $x_{kн}$, такого что $x_{iн} + x_{kн} \equiv 0 \Leftrightarrow r_k(x) = r_i(-x)$. Здесь "0" — четкий нуль, имеющий одиночную функцию принадлежностей (п. 1.2(v)).

Очевидно, что относительно "+" и "×" выполняются следующие аксиомы (свойства):

- коммутативность "+", т. е. $x_{iн} + x_{jн} = x_{jн} + x_{iн}$;
- ассоциативность "+", т. е. $(x_{iн} + x_{jн}) + x_{kн} = x_{iн} + (x_{jн} + x_{kн})$;
- дистрибутивность "×", т. е. $(k_1 + k_2) \times x_{iн} = k_1 \times x_{iн} + k_2 \times x_{iн}$, $k \times (x_{iн} + x_{jн}) = k \times x_{iн} + k \times x_{jн}$.

Совокупность $\{x_{iн}\} \in X$ нечетких чисел с операциями "+" и "×" для нечетких чисел и существование обратного элемента в X образует векторное (линейное) пространство X. В векторном пространстве X определим метрику ρ_1

$$\rho_1(x_{iн}, x_{jн}) = \sup_r \{\max[|\underline{x}_i(r) - \overline{x}_j(r)|, |\overline{x}_i(r) - \underline{x}_j(r)|]\} \quad (2.4)$$

между элементами $x_{iн}$, $x_{jн} \in X$, которая является некоторой скалярной функцией, удовлетворяющей очевидным свойствам:

- $\rho_1(x_{iн}, x_{jн}) = 0 \Leftrightarrow x_{iн} = x_{jн}$;
- $\rho_1(x_{iн}, x_{jн}) = \rho_1(x_{jн}, x_{iн})$;
- $\rho_1(x_{iн}, x_{jн}) \leqslant \rho_1(x_{iн}, x_{kн}) + \rho_1(x_{kн}, x_{jн})$.

Введенная метрика $\rho_1(\cdot)$ превращает векторное пространство X в метрическое векторное пространство. Определим норму в виде

$$\|x_{iн} - x_{jн}\| = \rho_1(x_{iн}, x_{jн}).$$

Введем понятие сходимости нечеткой последовательности $x_{nн}$ (предельный переход) из нечетких чисел со свойствами для последовательности нечеткой фундаментальности и нечеткой полноты:

- $\rho_1(x_{nн}, x_{mн})_{n, m \to \infty} \to 0 \Rightarrow x_{nн}$ — нечеткая фундаментальная последовательность (нечеткая последовательность Коши);
- $x_{nн} \xrightarrow{n \to \infty} x$: $x \in X$ — нечеткое полное метрическое пространство.

Таким образом, в результате имеем нечеткое пространство $\{x_{iн}\} \in X$ с операциями "+, ×, −" в нем, метрикой $\rho_1(\cdot)$ и существованием нечетких фундаментальной и полной последовательностей $x_{nн} \in X$. Это приводит к банаховому пространству нечетких переменных (X, ρ_1).

В теории нечетких множеств при введении нечетких пространств используются различные типы метрик Хаусдорффа (Hausdorff) [5]:

- верхняя полуметрика Хаусдорффа

$$\overline{\rho}_н^2(x_{iн}, x_{jн}) = \sup_{x_{jн}} \inf_{x_{iн}} \|x_i(r) - x_j(r)\|_{E_2}^2 = \sup_{x_{jн}} \left\{\int_0^1 [\overline{x}_j(r) - \overline{x}_i(r)]^2 dr\right\} = \int_0^1 [\overline{x}_j(r) - \overline{x}_i(r)]^2 dr;$$

- нижняя полуметрикаХаусдорффа

$$\underline{\rho}_н^2(x_{iн}, x_{jн}) = \sup_{x_{iн}} \inf_{x_{jн}} \|x_i(r) - x_j(r)\|_{E_2}^2 = \sup_{x_{iн}} \left\{\int_0^1 [\underline{x}_j(r) - \underline{x}_i(r)]^2 dr\right\} = \int_0^1 [\underline{x}_j(r) - \underline{x}_i(r)]^2 dr;$$

- метрика Хаусдорффа

$$\rho_н^2(x_{iн}, x_{jн}) = \max\{\overline{\rho}_н^2(\cdot), \underline{\rho}_н^2(\cdot)\} = \{\overline{\rho}_н^2(\cdot) + \underline{\rho}_н^2(\cdot)\} = \left\{\int_0^1 [\underline{x}_j(r) - \underline{x}_i(r)]^2 + \int_0^1 [\overline{x}_j(r) - \overline{x}_i(r)]^2\right\} dr.$$

Последняя формула обычно преобразуется путем возведения в квадрат и группировки членов к виду

$$\rho_н(x_{iн}, x_{jн}) = \langle x_i(r), x_i(r)\rangle - 2 \langle x_i(r), x_i(r)\rangle + \langle x_j(r), x_j(r)\rangle, \quad (2.5)$$

где

$$\langle x_i(\cdot), x_i(\cdot)\rangle = \int_0^1 [\underline{x}_i^2(\cdot) + \overline{x}_i(\cdot)]dr;$$

$$\langle x_i(\cdot), x_j(\cdot)\rangle = \int_0^1 [\underline{x}_i(\cdot) \cdot \underline{x}_j(\cdot) + \overline{x}_i(\cdot) \cdot \overline{x}_j(\cdot)]dr;$$

$$\langle x_j(r), x_j(r)\rangle = \int_0^1 [\underline{x}_j^2(\cdot) + \overline{x}_j(\cdot)]dr.$$

После аналогичных рассуждений, которые были проведены выше для (2.4), появляется банахово пространство нечетких переменных $(X, \rho_{\text{н}})$ с метрикой Хаусдорффа $\rho_{\text{н}}$ (2.5).

Другой способ задания метрики, обозначаемой $\rho_P(y_{i\text{н}}, y_{j\text{н}})$, состоит в представлении ее соотношением

$$\rho_P(y_{i\text{н}}, y_{j\text{н}}) = \max\left\{\left[\int_0^1 |\underline{y}_i(x, r) - \underline{y}_j(x, r)|^P dr\right]^{1/P}, \right.$$

$$\left.\left[\int_0^1 |\overline{y}_i(x, r) - \overline{y}_j(x, r)|^P dr\right]^{1/P}\right\}, \qquad (2.6)$$

где $\underline{y}_i, \overline{y}_i, \underline{y}_j, \overline{y}_j \in L_P[0; 1]$, для $\forall x \in I \subset R_1$.

Пара (X, ρ_P) также задает банахово пространство.

Заметим, что, задавая различным способом метрики в векторном пространстве X нечетких переменных, можно получить нечеткие метрические пространства различной структуры. Например, можно задать $\rho_x(\cdot) = \rho(\cdot)\cdot[1 + \rho(\cdot)]^{-1}$, где $\rho(\cdot)$ определяются по формулам (2.4), (2.5) или (2.6). Покажем на примере задания $\rho(\cdot)$ по (2.4) выполнение для $\rho_x(\cdot)$ соответствующих аксиом. Выполнение первых двух аксиом для $\rho_x(\cdot)$ очевидно. Для аксиомы неравенства треугольников имеем:

$$\rho_x(\cdot) = \rho(\cdot)\cdot[1 + \rho(\cdot)]^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant [\rho(\cdot) + \rho(\cdot)][1 + \rho(\cdot)]^{-1} =$$
$$= \rho(\cdot)\cdot[1 + \rho(\cdot)]^{-1} + \rho(\cdot)[1 + \rho(\cdot)]^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho_x(x_{i\text{н}}, x_{k\text{н}}) \leqslant \rho_x(x_{i\text{н}}, x_{j\text{н}}) + \rho_x(x_{j\text{н}}, x_{k\text{н}}).$$

3. Типы нечетких производных [13]

Пусть для простоты имеем нечеткую функцию одного переменного

$$y_{\text{н}}(x) \equiv y(x, r),\ x, y \in R_1,\ r \in [0; 1],$$

$$\text{т. е. } y_{\text{н}}(x) = (\underline{y}(x, r),\ \overline{y}(x, r) | r \in [0; 1]),$$

которая при любом $x \in I \subset R_1$ определяет нечеткое треугольное число. Согласно общему подходу при определении производной от некоторой функции в заданном пространстве необходимо в нем задать операции "−" (вычитание), "×" (умножение) на константу и "lim" (предельный переход относительно заданной метрики). Применение этого общего подхода к различным метрическим пространствам приводит к разнообразным нечетким производным.

3.1. Производная Гостшела — Воксмана (GV, Goestshel — Voxman derivative) $\dot{y}_{\text{н}}^{GV}(x)$. Для нее метрика задается по формуле (2.4), и соответствующая производная в точке $x = x_0$ определяется выражением

$$\dot{y}_{\text{н}}^{GV}(x = x_0) = \lim_{\rho_1 \to 0} \rho_1(y_{i\text{н}}, y_{j\text{н}}) \Big|_{\substack{y_{i\text{н}} = h^{-1} y_{\text{н}}(x_0 + h) \\ y_{j\text{н}} = h^{-1} y_{\text{н}}(x_0)}} =$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{y_{i\text{н}}(x_0 + h) - y_{i\text{н}}(x_0)}{h}\right]$$

при условии, что соответствующий предел (lim) существует в заданной метрике.

Операция вычитания для элементов $y_{i\text{н}}(x_0 + h) = (\underline{y}_i(x_0 + h, r), \overline{y}_i(x_0 + h, r) | r \in [0; 1])$, $y_{i\text{н}}(x_0) = (\underline{y}_i(x_0, r), \overline{y}_i(x_0, r) | r \in [0; 1])$, которые находятся под знаком "lim", задается в виде

$$y_{i\text{н}}(x_0 + h) - y_{i\text{н}}(x_0) = (\underline{y}_i(x_0 + h, r) -$$
$$- \overline{y}_i(x_0, r),\ \overline{y}_i(x_0 + h, r) - \underline{y}_i(x_0, r) | r \in [0; 1]).$$

Это обусловлено тем, что первая разность задает "min", а вторая разность задает "max" в скобке справа от знака равенства. Заметим здесь, что стандартная операция вычитания, согласно принципу расширения (п. 2.1.), задается в виде

$$y_{i\text{н}}(x_0 + h) - y_{i\text{н}}(x_0) = (\underline{y}_i(x_0 + h, r) -$$
$$- \underline{y}_i(x_0, r),\ \overline{y}_i(x_0 + h, r) - \overline{y}_i(x_0, r) | r \in [0; 1],$$

которая отличается от этой операции при определении GV-производной.

Если $\dot{y}_{\text{н}}^{GV}(x)$ существует при $x \in I \subset R_1$, то $\dot{y}_{\text{н}}^{GV}(x) = (\dot{\underline{y}}_x(x, r), \dot{\overline{y}}_x(x, r) | r \in [0; 1])$, однако $\dot{y}_{\text{н}}^{GV}(x = x_*)$ не существует, если при $x = x_*$ соответствующее число не является нечетким, т. е. не выполняется хотя бы одно из свойств, перечисленных в п. 1.2, или не определена операция вычитания под знаком "lim".

3.2. Производная Сейккалы (S, Seikkala derivative) $\dot{y}_{\text{н}}^{S}(x)$. Определяется следующим образом. Если $(\dot{\underline{y}}_x(x, r), \dot{\overline{y}}_x(x, r) | r \in [0; 1])$ задает нечеткое число для любого x, то $\dot{y}_{\text{н}}(x)$ существует и равна $\dot{y}_{\text{н}}^{S}(x) = (\dot{\underline{y}}_x(x, r), \dot{\overline{y}}_x(x, r) | r \in [0; 1])$.

3.3. Производная Дубоиса — Праде (DP, Dubois — Prade derivative) $\dot{y}_{\text{н}}^{DP}(x)$. Эта производная всегда существует для любого x, так как если при $x = x_*$ соответствующее число не является нечетким, т. е. производная не существует, то путем соответствующей модификации его функции принадлежности оно превращается в "слабое" нечеткое число (п. 1.2. (iv)), и тогда в этой точке уже существует $\dot{y}_{н}^{DP}(x = x_*)$. Функция принадлежностей задается в виде

$$r_{\dot{y}_{н}^{DP}}(x) = \sup\{r/x = \underline{\dot{y}}_x(x, r),\ x = \dot{\bar{y}}(x, r)\}.$$

3.4. Производная Пури — Ралеску (PR, Puri — Ralescu derivative) $\dot{y}_{н}^{PR}(x)$. Метрика в этом случае задается по Хаусдорффу (2.5), и соответствующая производная в точке $x = x_0$ определяется выражением

$$\dot{y}_{н}^{PR}(x = x_0) = \lim_{\rho_{н} \to 0} \rho_{н}(y_{iн}, y_{jн}),$$

$\rho_{н}(\cdot)$ — метрика Хаусдорффа. Операция вычитания под знаком "lim" задается посредством процедуры "$\underline{*}$" Хукухары (Hukuhara) для нечетких множеств A, B: $B \underline{*} A = C$, где C — нечеткое множество: $C + A = B$.

Дифференцируемость в точке $x = x_0 \in I \subset R_1$ нечеткой функции $y_{н}(x)$ по Пури — Ралеску определяется в виде

$$\dot{y}_{н}^{PR}(x = x_0) = \lim_{h \to 0^+} h^{-1} \cdot [y_{н}(x_0 + h) \underline{*}\ y_{н}(x_0)] =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} h^{-1} \cdot [y_{н}(x_0) \underline{*}\ y_{н}(x_0 + h)].$$

Оба предела взяты по метрике Хаусдорффа $\rho_{н}(\cdot)$ (2.5).

3.5. Производная Кэндела — Фридмана — Минга (KFM, Kandel — Friedman — Ming derivative) $\dot{y}_{н}^{KFM}(x)$. Метрика $\rho_P(\cdot)$ задается формулой (2.6). Производная в точке $x = x_0 \in I \subset R_1$ нечеткой функции определяется формулой

$$\lim_{h \to 0} \rho_P(h^{-1}(y_{н}(x_0 + h) - y_{н}(x_0)),\ \dot{y}_{н}^{KFM}(x_0)) = 0,$$

где операция вычитания задается в виде аналогичной операции для производной по п. 3.1. Если производная Кэндела — Фридмана — Минга существует, то $\dot{y}_{н}^{KFM}(x) = (\underline{\dot{y}}_x(x, r),\ \dot{\bar{y}}(x, r) | r \in [0; 1])$.

3.6. Взаимосвязь нечетких производных определяется следующей теоремой (без доказательства).

3.6.1. Если $\dot{y}_{н}^{GV}(x)$ существует (п. 3.1) и является нечетким числом для каждого $x \in I \subset R_1$, то $\dot{y}_{н}^{S}(x)$ существует и справедливо равенство $\dot{y}_{н}^{GV}(x) = \dot{y}_{н}^{S}(x)$.

3.6.2. Если $\dot{y}_{н}^{PR}(x)$ существует (п. 3.3), то $\dot{y}_{н}^{S}(x)$ существует (п. 3.2) и для них справедливо равенство: $\dot{y}_{н}^{PR}(x) = \dot{y}_{н}^{S}(x)$.

3.6.3. Если $\dot{y}_{н}^{KFM}(x)$ существует (п. 3.5), то $\dot{y}_{н}^{S}(x)$ существует и справедливо: $\dot{y}_{н}^{KFM}(x) = \dot{y}_{н}^{S}(x)$.

3.6.4. Если $\dot{y}_{н}^{S}(x)$ существует (п. 3.2) и если $\underline{\dot{y}}_x(x, r)$, $\dot{\bar{y}}_x(x, r)$ непрерывны по "r" для $\forall x \in I \subset R_1$, то $\dot{y}_{н}^{S}(x) = \dot{y}_{н}^{DP}(x)$.

Условие непрерывности. Если $\underline{\dot{y}}_{iн}$, $\dot{\bar{y}}_{iн}$ непрерывны на $I \times [0; 1]$, то это означает, что $\dot{y}_{iн}(x)$ непрерывна.

Теорема о взаимосвязи производных (без доказательства). Если выполнено условие непрерывности и $\dot{y}_{н}^{S}(x)$ существует, то имеет место цепочка равенства производных;

$$\dot{y}_{н}^{S}(x) = \dot{y}_{н}^{DP}(x) = \dot{y}_{н}^{GV}(x) =$$
$$= \dot{y}_{н}^{PR}(x) = \dot{y}_{н}^{KFM}(x) = \dot{y}_{н}(x), \qquad (3.1)$$

т. е. все введенные ранее производные (п.п. 3.1—3.5) равны между собой.

Пример. Имеем $y_{н}(x) = (-x \cdot \sqrt{1 - r},\ x \cdot \sqrt{1 - r} | r \in [0; 1]) \Rightarrow \dot{y}_{н}(x, r) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{y}(x, r),\ \frac{\partial}{\partial x}\bar{y}(x, r) | r \in [0; 1]\right) = (-1 \cdot \sqrt{1 - r},\ 1 \cdot \sqrt{1 - r} | r \in [0; 1])$.

Заключение

- Даны основные определения теории нечетких множеств: функция принадлежностей; нечеткие числа разных типов; нечеткая функция.
- Определены арифметические операции и отношение порядка для нечетких чисел и дана их геометрическая интерпретация, принятая в теории нечетких множеств. Показано, что совокупность нечетких чисел с заданными различными способами метриками в этой совокупности образуют банахово пространство.
- Рассмотрен общий подход в определении нечеткой производной, определяемый способами задания операции вычитания и предельного перехода в различных нормах. Согласно этому подходу рассмотрены пять нечетких производных, которые наиболее часто используются в теории нечетких множеств при задании нечетких дифференциальных уравнений. Сформулировано утверждение об эквивалентности представленных нечетких производных.

Список литературы

1. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
2. **Брайсон А., Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
3. **Сю Д., Мейер А.** Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972.
4. **Мочалов И. А., Петрунин Н. Г.** Практикум по нечетким методам в задачах управления. М.: Изд. Российского университета дружбы народов, 2006.
5. **Мочалов И. А., Петрунин Н. Г., Редькин А. С., Цегельский С. В.** Нечеткие вероятностно-статистические методы // Приложение к журналу "Информационные технологии". 2003. № 4. С. 1—24.
6. **Иванов В. А., Медведев В. С.** Математические основы теории оптимального и логического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011.
7. **Деменков Н. П.** Языки программирования промышленных контроллеров. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
8. **Kandel A., Byatt W. J.** Fuzzy process // Fuzzy sets and systems. 1980. N. 4. P. 117—157.
9. **Puri M. L., Ralescu D. A.** Fuzzy random variables // Journal of mathematical application. 1986. N. 4. P. 409—422.
10. **Jahery S. M., Behboodian J. A.** Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing // Fuzzy sets and systems, 2001. N. 123. P. 39—48.
11. **Kim B., Bishu R. R.** Evaluation of fuzzy linear regression models by comparing membership functions // Fuzzy sets and systems, 1998. N. 100. P. 343—352.
12. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems, 1998. N. 96. P. 201—209.
13. **Buckley J. J., Feuring J.** Fuzzy differential equations// Fuzzy sets and systems, 2000. N. 110. P. 43—54.

I. A. Mochalov, Professor, Bauman Moscow State Technical University,
M. S. Khrisat, Graduate Student of Russian Peoples' Friendship University, e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.jo,
M. Ya. Shihab Eddin, Graduate Student, Russian Peoples' Friendship University

Fuzzy Diferential Equations in Control. Part I

Presents the basic definitions and the theory of fuzzy sets they are further used to describe the theory of fuzzy ordinary differential equations and methods of solving them. For this, we define the membership function as an analogue of the characteristic function of the set theory. Listed species of fuzzy numbers: triangular, generalized, strong, weak, single and identifies the fuzzy vector function; function of several variables; dimensional function. Provides definitions of fuzzy arithmetic operations, as a special type of fuzzy function with its geometric interpretation. Determination of order relations which allow to compare the fuzzy numbers. We introduce the Banach space of fuzzy variables with different metrics. This allows you to define different types of fuzzy derivatives by type of convergence in these metrics. Establish the equivalence of the considered fuzzy derivatives by the wording of the corresponding theorems without proof. And provide examples of calculating the fuzzy derivative for a given fuzzy function.

Shows drawings dimensional geometric representation of fuzzy function; the step of constructing the final membership functions for arithmetic operations with fuzzy numbers with given them the membership function. At the end of the article is a list of articles from 13 sources, 5 of which are in English, and the other Russian.

Keywords: *fuzzy computation; fuzzy Banach space; fuzzy derivatives*

References

1. **Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija*. M.: Vysshaja shkola, 2003.
2. **Brajson A., Ho Ju-Shi.** *Prikladnaja teorija optimal'nogo upravlenija*. M.: Mir, 1972.
3. **Sju D., Mejer A.** *Sovremennaja teorija avtomaticheskogo upravlenija i ee primenenie*. M.: Mashinostroenie, 1972.
4. **Mochalov I. A., Petrunin N. G.** *Praktikum po nechetkim metodam v zadachah upravlenija*. M.: Izd. Rossijskogo universitet a druzhby narodov, 2006.
5. **Mochalov I. A., Petrunin N. G., Red'kin A. S., Cegel'skij S. V.** Nechetkie verojatnostno-statisticheskie metody. *Prilozhenie к zhurnalu "Informacionnye tehnologii"*. 2003. N. 4. P. 1—24.
6. **Ivanov V. A., Medvedev V. S.** *Matematicheskie osnovy teorii optmiarnogonogicheskogo upravlenija*. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2011.
7. **Demenkov N. P.** *Jazyki programmirovanja promyshlennyh kontrollerov*. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2004.
8. **Kandel A., Byatt W. J.** Fuzzy process. *Fuzzy sets and systems*. 1980. N. 4. P. 117—157.
9. **Puri M. L., Ralescu D. A.** Fuzzy random variables. *Journal of mathematical application*. 1986. N. 4. P. 409—422.
10. **Jahery S. M., Behboodian J. A.** Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing. *Fuzzy sets and systems*. 2001. N.123. P. 39—48.
11. **Kim B., Bishu R. R.** Evaluation of fuzzy linear regression models by comparing membership functions. *Fuzzy sets and systems*. 1998. N. 100. P. 343—352.
12. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems. *Fuzzy sets and systems*. 1998. N. 96. P. 201—209.
13. **Buckley J. J., Feuring J.** Fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*. 2000. N. 110. P. 43—54.