УДК 62-50:519.7/8

В. И. Левин, д-р техн. наук, проф.,
Пензенский государственный технологический университет, e-mail: vilevin@mail.ru

Анализ поведения неточно заданных функций с помощью интервально-дифференциального исчисления

Рассмотрены существующие подходы к оптимизации систем в условиях неопределенности. Сформулирована задача вычисления и анализа поведения заданной с точностью до интервала функции. Для решения задачи она сводится к соответствующим задачам для верхней и нижней граничных функций исходной функции. Используется аппарат интервальной математики и интервально-дифференциального исчисления.

Ключевые слова: *оптимизация систем, неопределенность, детерминированная функция, интервальная функция, анализ поведения функций, граничная функция*

Введение

Современная наука и практика обработки информации успешно справляется с задачами исследования различных систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Эти задачи обычно формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза тех или иных функций с детерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками изучаемых систем. Но на практике часто встречаются другие системы — системы с неточно известными, т. е. неполностью определенными (недетерминированными) параметрами. Причины появления таких систем заключаются в естественной неопределенности, свойственной многим реальным процессам, происходящим в системах; в неточном задании параметров большинства систем вследствие неизбежных погрешностей при их вычислении или измерении; в изменении во времени параметров систем; в необходимости или целесообразности совместного исследования целых семейств однотипных систем, имеющих одинаковые функции-характеристики и различающихся лишь значениями параметров этих функций.

Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Все эти задачи значительно сложнее их упомянутых выше детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел всегда сложнее алгебры детерминированных чисел.

В данной работе рассматриваются задачи расчета и анализа неточно заданных (недетерминированных) функций интервального типа. В качестве математического аппарата используются интервальная алгебра и интервально-дифференциальное исчисление.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обычную (детерминированную) функцию одной независимой переменной

$$y = f(x), \tag{1}$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y в соответствии с некоторым законом f, который и называется функцией. Хорошо известно, что задача расчета (вычисления значений) функции (1) решается с помощью адекватного этой задаче математического аппарата алгебры вещественных чисел при использовании подходящих методов вычисления, а задача анализа поведения функции (1) — с помощью адекватного ей аппарата классического дифференциального исчисления [1].

Рассмотрим теперь недетерминированную (именно интервальную) функцию одной независимой переменной [2]

$$\widetilde{y} = \widetilde{f}(x), \tag{2}$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых вещественных (как и в случае (1)) переменных x в заданное множество $\widetilde{Y} = \{\widetilde{y}\}$ зависимых переменных-интервалов $\widetilde{y} = [y_1, y_2]$ в соответствии с законом $\widetilde{f}$, который и называется интервальной функцией. Согласно определению (2) любую интервальную функцию $\widetilde{f}$ можно представить в виде пары обычных функций f_1, f_2:

$$\widetilde{f} = \{f_1, f_2\}, \tag{3}$$

которые имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x), \\ y_2 &= f_2(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) видно, что интервальная функция $\widetilde{f}$ эквивалентна паре обычных функций f_1, f_2, из которых первая однозначно отображает заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x функции $\widetilde{f}$ в множество $Y_1 = \{y_1\}$ нижних границ интервалов $\widetilde{y} = [y_1, y_2]$ — зависимых переменных этой функции, а вторая однозначно отображает то же множество $X = \{x\}$ в множество $Y_2 = \{y_2\}$ верхних границ тех же интервалов $\widetilde{y} = [y_1, y_2]$ — зависимых переменных этой функции.

Задача настоящей работы заключается в построении двух систематических процедур (алгоритмов), связанных с изучением интервальных функций вида (2), а именно:

- процедуры расчета (вычисления значений) интервальной функции;
- процедуры анализа поведения интервальной функции.

2. Решение задачи вычисления интервальной функции

Начнем с решения задачи расчета (вычисления значений) интервальной функции. Здесь возможны два случая.

Случай 1. Интервальная функция задана в разделенном виде, в котором верхняя и нижняя границы интервального значения функции выражены каждая по отдельности. Этот вид представления интервальной функции вытекает из соотношений (2)—(4). Именно из (2), (3) следует явное представление интервальной функции в виде интервала

$$[y_1, y_2] = [f_1(x), f_2(x)], \tag{5}$$

границы которого согласно (5) выражаются формулами

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x). \tag{6}$$

Таким образом, вычисление интервального значения $\widetilde{y} = [y_1, y_2]$ интервальной функции (2), соответствующего значению x независимой переменной этой функции, осуществляется по следующему алгоритму.

Шаг 1. Записываем вычисляемую интервальную функцию типа (2) в разделенном виде (5), (6) с помощью нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций функции (2).

Шаг 2. Вычисляем нижнюю граничную функцию f_1, используя для этого какой-либо подходящий известный метод вычисления обычных (детерминированных) функций [3].

Шаг 3. Вычисляем верхнюю граничную функцию f_2, используя ту же методику, что и на шаге 2.

Шаг 4. Соединяя вычисленные значения нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций, получим явное представление (5) вычисленной интервальной функции (2) в виде интервала.

Случай 2. Интервальная функция задана в неразделенном виде, т. е. в виде суперпозиции элементарных интервальных функций: интервального сложения и вычитания; умножения интервала на вещественное число; умножения и деления интервалов [4]. В этом случае перед собственно вычислением интервальную функцию приводим к разделенному виду, после чего к функции применяем четырехшаговый алгоритм случая 1. Приведение любой интервальной функции к разделенному виду можно осуществить с помощью основных формул интервальной математики, выражающих результаты элементарных преобразований интервалов [4]:

$$\begin{aligned} &[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]; \\ &[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]; \\ &k[a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases} \\ &[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)]; \\ &[a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]. \end{aligned} \tag{7}$$

Пример 1. Привести к разделенному виду интервальную функцию

$$\widetilde{y} = ([2, 3]x + [1, 2]x) \cdot ([5, 7]x + [4, 6]x)$$

в области $x \geqslant 0$.

Решение. Применяя к заданной интервальной функции последовательно третью, первую и четвертую формулы (7), получим нужный вид функции

$$\begin{gathered} \widetilde{y} = [y_1, y_2] = ([2x, 3x] + [x, 2x]) \cdot ([5x, 7x] + [4x, 6x]) = \\ = [3x, 5x] \cdot [9x, 13x] = \\ = [\min(3 \cdot 9x^2, 3 \cdot 13x^2, 5 \cdot 9x^2, 5 \cdot 13x^2), \\ \max(3 \cdot 9x^2, 3 \cdot 13x^2, 5 \cdot 9x^2, 5 \cdot 13x^2) = [27x^2, 65x^2]. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$y_1 = 27x^2,\ y_2 = 65x^2,$$

и наконец, разделенная форма заданной интервальной функции

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = [27x^2, 65x^2].$$

3. Решение задачи анализа поведения интервальной функции: сравнение интервалов

Перейдем к описанию упомянутой ранее (п. 1) задачи анализа поведения интервальной функции. Постановка этой задачи аналогична постановке задачи анализа поведения обычной детерминированной функции и включает, в первую очередь, отыскание:

— интервалов возрастания функции;
— интервалов убывания функции;
— интервалов постоянства значений функции;
— точек максимума функции;
— точек минимума функции.

Кроме того, постановка задачи анализа поведения интервальной функции может включать отыскание особых интервалов (особых точек) такой функции. Существование таких интервалов (таких точек) связано с интервальным характером этой функции. У обычных детерминированных функций такие интервалы (точки) отсутствуют.

Очевидно, что решение задач анализа поведения интервальной функции требует сравнения значений интервалов. В связи с этим ниже кратко изложены основные результаты теории сравнения интервалов [5, 6].

Рассмотрим два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$. Попытаемся сравнить значения этих интервалов, рассматривая их как интервальные числа. Прямое сравнение интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на основе отношений отдельных пар вещественных чисел (a_i, b_j), где $a_i \in \tilde{a}$, $b_j \in \tilde{b}$, не всегда возможно, так как в общем случае одни пары чисел будут находиться в отношении $(a_i > b_j)$, а другие — в противоположном отношении $(a_i < b_j)$. Поэтому остается реализовать сравнение интервалов на теоретико-множественном уровне, рассматривая каждый интервал их как единое целое, не делимое на части. При этом операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ можно ввести в виде следующих теоретико-множественных конструкций

$$\begin{aligned} \tilde{a} \vee \tilde{b} &= \{a \vee b \mid a \in \tilde{a},\ b \in \tilde{b}\}, \\ \tilde{a} \wedge \tilde{b} &= \{a \wedge b \mid a \in \tilde{a},\ b \in \tilde{b}\}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Таким образом, взятие максимума (минимума) двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяется, согласно (8), как нахождение множества максимумов (минимумов) двух точных величин a и b при условии, что эти величины пробегают все возможные значения соответственно из интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Теперь для того, чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно было сравнить по величине, установив их отношение $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$, нужно, чтобы: 1) введенные операции $\vee$, $\wedge$ над этими интервалами существовали; 2) эти операции давали в результате один из операндов — $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$; 3) эти операции были согласованы, т. е. если большим (меньшим) оказывается один из интервалов, то меньшим (большим) является другой из них. Сформулированное условие сравнимости величин интервалов является, очевидно, необходимым и достаточным.

Нетрудно доказать, что условие согласованности операций $\vee$ и $\wedge$ над интервалами всегда выполняется. Очевидно также, что эти операции существуют для любой пары интервалов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, причем результатом операции в общем случае оказывается некоторый новый интервал, отличный как от $\tilde{a}$, так и от $\tilde{b}$. Таким образом, необходимым и достаточным условием сравнимости интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ оказывается условие, по которому операции $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ должны иметь своим результатом один из интервалов — $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$. Из этой формулировки условия сравнимости интервалов выводятся различные его конструктивные формы, удобные для практического применения. Эти формы содержатся в приведенных ниже теоремах 1—4.

Теорема 1. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \geqslant b_1,\ a_2 \geqslant b_2, \qquad (9)$$

а для того чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant b_2. \qquad (10)$$

Из теоремы следует, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сравнимы по величине (по отношению $\geqslant$ или $\leqslant$) и находятся в этом отношении только тогда, когда в таком же отношении находятся их одноименные границы a_1, b_1 и a_2, b_2.

Значение теоремы 1 в том, что она сводит сравнение двух интервалов и выбор большего (меньшего) из них к очевидной операции сравнения границ указанных интервалов, являющихся вещественными числами.

Теорема 2. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были несравнимы по величине (по отношению $\geqslant$ или $\leqslant$), т. е. не находились в отношении $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 < b_1,\ a_2 > b_2) \text{ или } (b_1 < a_1,\ b_2 > a_2). \qquad (11)$$

Итак, интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям $\geqslant$ и $\leqslant$ только тогда, когда один из них полностью "накрывает" другой. Значение теоремы 2 в том, что она выявляет существование случаев несравнимости интервалов по отношениям $\geqslant$ и $\leqslant$, в отличие от вещественных чисел, которые всегда сравнимы по этим отношениям. Несравнимость некоторых интервалов — естественный результат того, что интервальные числа, в отличие от обычных вещественных чисел, задаются не точно, а с неопределенностью (число принимает некоторое значение в заданном интервале, но при этом не уточняется, какое именно это значение).

Будем рассматривать теперь систему нескольких интервалов

$$\tilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}],\ \tilde{a}_2 = [a_{21}, a_{22}],\ \tilde{a}_3 = [a_{31}, a_{32}], \ldots (12)$$

Сравнение по отношениям $\geqslant$, $\leqslant$ значений интервалов выписанной системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется в результате попарного сравнения указанных интервалов, выполняемого в соответствии с теоремами 1, 2. Основные результаты, получаемые этим путем, содержатся в нижеследующих теоремах 3 и 4.

Теорема 3. Для того чтобы в системе нескольких интервалов вида (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\geqslant$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\begin{aligned} &a_{11} \geqslant a_{21}, a_{11} \geqslant a_{31}, a_{11} \geqslant a_{41}, \ldots \\ &a_{12} \geqslant a_{22}, a_{12} \geqslant a_{32}, a_{12} \geqslant a_{42}, \ldots \end{aligned} \qquad (13)$$

Теорема 4. Для того чтобы в системе нескольких интервалов вида (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\leqslant$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\begin{aligned} &a_{11} \leqslant a_{21}, a_{11} \leqslant a_{31}, a_{11} \leqslant a_{41}, \ldots \\ &a_{12} \leqslant a_{22}, a_{12} \leqslant a_{32}, a_{12} \leqslant a_{42}, \ldots \end{aligned} \qquad (14)$$

Приведенные выше теоремы 3 и 4 показывают, что интервал является максимальным (минимальным) в системе интервалов только в том случае, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница (среди нижних границ всех интервалов) и его верхняя граница (среди верхних границ всех интервалов). Естественно, что, как и в случае сравнения двух интервалов, сравнение любого числа интервалов системы не выявит максимального (минимального) интервала, если входящие в систему интервалы попарно не сравнимы.

До сих пор мы рассматривали процедуры выделения, вообще говоря, нестрого максимального (нестрого минимального) интервала, основанные на теоретико-множественных операциях (8), для вычисления нестрогого максимума (нестрогого минимума) двух интервалов. Аналогично этому вводятся процедуры выделения строго максимального (строго минимального) интервала, т. е. единственного интервала, являющегося максимальным (минимальным).

Будем считать равными по определению совпадающие интервалы, т. е. для интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, взятых произвольно, условие их равенства вводится таким образом:

$$(\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 = b_1,\ a_2 = b_2). \qquad (15)$$

Из выражения (15) следует, что неравными являются интервалы, удовлетворяющие условию

$$(\tilde{a} \neq \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 \neq b_1 \text{ или } a_2 \neq b_2). \qquad (16)$$

Теперь определение того, что некоторый интервал $\tilde{a}$ является строго максимальным из двух интервалов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, можно записать в виде

$$(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a},\ \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b},\ \tilde{a} \neq \tilde{b}), \qquad (17)$$

аналогичным образом, определение того, что интервал $\tilde{a}$ является строго минимальным из двух интервалов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, можно записать в виде

$$(\tilde{a} < \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{b},\ \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{a},\ \tilde{a} \neq \tilde{b}). \qquad (18)$$

Здесь $\vee$ и $\wedge$ — теоретико-множественные операции (8) вычисления максимума и минимума двух интервалов.

Из формулировки условий (17), (18) сравнимости интервалов в виде строгих неравенств между ними можно вывести различные конструктивные формы этих условий, удобные для практического применения. Эти формы содержатся в нижеследующих теоремах 5—8, которые подобны теоремам 1—4, дающим удобные конструктивные формы сравнимости двух интервалов в форме нестрогих неравенств.

Теорема 5. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} > \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 > b_1,\ a_2 \geqslant b_2) \text{ или } (a_1 \geqslant b_1,\ a_2 > b_2), \qquad (19)$$

а для того чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} < \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 < b_1,\ a_2 \leqslant b_2) \text{ или } (a_1 \leqslant b_1,\ a_2 < b_2). \qquad (20)$$

Из утверждения теоремы следует, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сравнимы по величине (по отношению > или <) и находятся в указанном отношении только тогда, когда в том же отношении находятся их нижние границы a_1, b_1 (при этом верхние границы a_2, b_2 находятся в соответствующем нестрогом отношении — для > это ⩾, а для < это ⩽) или их верхние границы a_2, b_2 (при этом нижние границы a_1, b_1 находятся в соответствующем нестрогом отношении).

Теорема 6. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были не сравнимы по величине (по отношению > или <), т. е. не находились в отношении $\tilde{a} > \tilde{b}$ или $\tilde{a} < \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 < b_1,\ a_2 > b_2) \text{ или } (b_1 < a_1,\ b_2 > a_2) \text{ или } (a_1 = b_1,\ a_2 = b_2). \tag{21}$$

Итак, интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям > и < только в тех случаях, когда один из них полностью "накрывает" другой либо когда интервалы равны между собой. Значение теоремы 6 состоит в том, что она выявляет существование случаев несравнимости интервалов по отношениям > и < даже тогда, когда сравниваемые интервалы не равны между собой, а только "накрывают" один другой. Эта ситуация существенно отличается от ситуации со сравнением вещественных чисел, где неравные числа всегда сравнимы по отношениям > и <.

Рассмотрим теперь систему нескольких интервалов вида (12). Сравнение по отношениям > и < величин интервалов системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется путем попарного сравнения этих интервалов в соответствии с теоремами 5 и 6. Основные результаты, получаемые этим путем, изложены ниже в теоремах 7, 8.

Теорема 7. Для того чтобы в системе нескольких интервалов вида (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении >, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} > a_{21},\ a_{12} \geqslant a_{22}) \text{ или } (a_{11} \geqslant a_{21},\ a_{12} > a_{22}); \\ (a_{11} > a_{31},\ a_{12} \geqslant a_{32}) \text{ или } (a_{11} \geqslant a_{31},\ a_{12} > a_{32}); \\ (a_{11} > a_{41},\ a_{12} \geqslant a_{42}) \text{ или } (a_{11} \geqslant a_{41},\ a_{12} > a_{42}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{22}$$

Теорема 8. Для того чтобы в системе нескольких интервалов вида (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении <, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} < a_{21},\ a_{12} \leqslant a_{22}) \text{ или } (a_{11} \leqslant a_{21},\ a_{12} < a_{22}); \\ (a_{11} < a_{31},\ a_{12} \leqslant a_{32}) \text{ или } (a_{11} \leqslant a_{31},\ a_{12},\ < a_{32}); \\ (a_{11} < a_{41},\ a_{12} \leqslant a_{42}) \text{ или } (a_{11} \leqslant a_{41},\ a_{12} < a_{42}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{23}$$

4. Решение задачи анализа поведения интервальной функции. Основные теоремы и алгоритм

В предыдущем разделе мы изложили вспомогательный для задачи анализа поведения интервальной функции материал, связанный со сравнением интервальных величин. Теперь мы займемся собственно анализом поведения интервальных функций.

Рассмотрим произвольную интервальную функцию (2). Будем считать, что эта функция задана в разделенном виде (5), (6). Это не ограничивает общности рассмотрения, так как функция, заданная в неразделенном виде, всегда может быть приведена к разделенному виду (см. п. 2). Будем также считать, что нижняя и верхняя граничные функции нашей интервальной функции непрерывны и дифференцируемы. Сформулируем условия, при которых заданная функция возрастает, убывает, остается постоянной, достигает максимума (минимума), ведет себя иным, отличным от указанных, способом.

По аналогии с обычными (детерминированными) функциями [1] мы введем понятия возрастания, убывания, постоянства, максимума и минимума интервальной функции.

Определение 1. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) < \tilde{f}(x_2)$.

Определение 2. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется убывающей на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) > \tilde{f}(x_2)$.

Определение 3. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется постоянной на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из упомянутого интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$.

Определение 4. Точка $x = x_0$ называется точкой максимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ — максимумом указанной функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, истинно строгое неравенство $\tilde{f}(x_0) > \tilde{f}(x)$.

Определение 5. Точка $x = x_0$ называется точкой минимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ — минимумом этой функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, выполняется строгое неравенство $\tilde{f}(x_0) < \tilde{f}(x)$.

Введем теперь понятия расширения и сужения интервальной функции, которые не применимы к обычным (детерминированным) функциям.

Определение 6. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется расширяющейся на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала, для которых $x_1 < x_2$, интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью "накрывает" интервал $\tilde{f}(x_1)$.

Определение 7. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется сужающейся на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из указанного интервала, для которых $x_1 < x_2$, интервал $\tilde{f}(x_1)$ полностью "накрывает" интервал $\tilde{f}(x_2)$.

Определение 8. Точку $x = x_0$ будем называть точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $D(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ — максимальной шириной указанной функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, интервал $\tilde{f}(x_0)$ полностью "накрывает" интервал $\tilde{f}(x)$.

Определение 9. Точку $x = x_0$ будем называть точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $d(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ — минимальной шириной функции $\tilde{f}(x)$, если для всех точек x некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, интервал $\tilde{f}(x)$ полностью "накрывает" $\tilde{f}(x_0)$.

Сформулируем и докажем условия, которые определяют то или иное поведение интервальной функции.

Теорема 9. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ являлась возрастающей на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы на указанном интервале ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ была возрастающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ — неубывающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была возрастающей, а функция $f_1(x)$ — неубывающей.

Доказательство. Представим нашу функцию $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y} = [f_1(x), f_2(x)]$. Возрастание этой функции на интервале (a, b), согласно определению (1), означает, что для любых x_1, x_2 из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $[f_1(x_1), f_2(x_1)] < [f_1(x_2), f_2(x_2)]$, которое, согласно теореме 5, приводит к двум возможным вариантам:

$$f_1(x_1) < f_1(x_2), f_2(x_1) \leqslant f_2(x_2)$$
$$\text{или } f_1(x_1) < f_1(x_2), f_2(x_1) \leqslant f_2(x_2).$$

Итак, верно одно из двух: либо на всем интервале (a, b) нижняя граничная функция $f_1(x)$ интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ является возрастающей, а ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ — неубывающей, либо, наоборот, $f_2(x)$ является возрастающей, а $f_1(x)$ — неубывающей, что и требовалось доказать.

Теорема 10. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была убывающей на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ была убывающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ — невозрастающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была убывающей, а функция $f_1(x)$ — невозрастающей.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9, однако использует определение 2 вместо определения 1.

Теорема 11. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была постоянной на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале ее нижняя $f_1(x)$ и верхняя $f_2(x)$ граничные функции были постоянными.

Доказательство следует напрямую из определения интервала как множества всех вещественных чисел между заданными двумя числами — границами интервала, включая и сами эти границы.

Теорема 12. Для того чтобы точка $x = x_0$ была точкой максимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ — максимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке достигала максимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала минимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ или достигала максимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала минимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство. Представим нашу функцию $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y} = [f_1(x), f_2(x)]$. Существование максимума этой функции в точке $x = x_0$ по определению 4 означает, что для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_0) > \tilde{f}(x)$ или в интервальной форме $[f_1(x_0), f_2(x_0)] > [f_1(x), f_2(x)]$. Последнее неравенство, согласно теореме 5, эквивалентно условию

$$(f_1(x_0) > f_1(x), f_2(x_0) \geqslant f_2(x))$$
$$\text{или } (f_1(x_0) \geqslant f_1(x), f_2(x_0) > f_2(x)).$$

Условия левой скобки показывают, что в точке x_0 функция $f_1(x)$ обращается в максимум, а функция $f_2(x)$ не обращается в минимум. Условия же правой скобки показывают, что в точке x_0 функция $f_2(x)$ обращается в максимум, а функция $f_1(x)$ не обращается в минимум. Что и требовалось доказать.

Теорема 13. Для того чтобы точка $x = x_0$ была точкой минимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ — минимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке достигала минимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала максимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ или достигала минимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала максимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы 12, но использует определение 5.

Теорема 14. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была расширяющейся на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале была убывающей ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и была возрастающей ее верхняя граничная функция $f_2(x)$.

Доказательство. Для любых x_1, x_2 из интервала (a, b), таких, что $x_1 < x_2$, в силу расширения функции f на этом интервале должно выполняться следующее условие: интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью "накрывает" интервал $\tilde{f}(x_1)$. Выражая эти интервалы явно в интервальной форме $\tilde{f}(x_1) = [f_1(x_1), f_1(x_1)]$, $\tilde{f}(x_2) = [f_2(x_1), f_2(x_2)]$, имеем условие "накрытия" интервалов $f_1(x_2) < f_1(x_1)$; $f_2(x_2) > f_2(x_1)$.

Первое неравенство показывает, что функция $f_1(x)$ является убывающей, а второе — что функция $f_2(x)$ возрастающая. Что и требовалось доказать.

Теорема 15. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была сужающейся на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале была убывающей ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и была возрастающей ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

Теорема 16. Для того чтобы точка $x = x_0$ являлась точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $D(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ — максимальной шириной этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была расширяющейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была сужающейся.

Теорема 17. Для того чтобы точка $x = x_0$ являлась точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $d(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ — минимальной шириной указанной функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была сужающейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была расширяющейся.

Доказательства теорем 16, 17 вытекают прямо из определений 8, 9 точек максимального расширения и сужения интервальной функции.

Анализ поведения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, как показывает изложенный в этом разделе материал, всегда сводится к анализу поведения двух обычных детерминированных функций: нижней $f_1(x)$ и верхней $f_2(x)$ граничных функций функции $\tilde{f}(x)$. Это позволяет использовать для анализа поведения интервальных функций хорошо известные и разработанные методы анализа поведения обычных (детерминированных) функций, основанные на использовании классического дифференциального исчисления [1]. При этом алгоритм анализа поведения произвольной интервальной функции может быть описан следующим образом.

Шаг 1. Проверка формы, в которой представлена заданная интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, подлежащая анализу. Если эта форма неразделенная, т. е. не имеющая вида интервала $\tilde{y} = [y_1, y_2] = [f_1(x), f_2(x)]$, где $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ — соответственно нижняя и верхняя граничные функции заданной интервальной функции, то переход к шагу 2. Если она разделенная, т. е. имеющая указанный вид, то переход к шагу 3.

Шаг 2. Приведение функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ из неразделенного вида к разделенному с помощью основных формул интервальной математики (7) (пример 1).

Шаг 3. Анализ поведения нижней граничной функции $y_1 = f_1(x)$ интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ с помощью известных методов анализа поведения обычных (детерминированных) функций на основе классического дифференциального исчисления. В ходе этого анализа устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции f_1, а также точки ее максимумов и минимумов.

Шаг 4. Анализ поведения верхней граничной функции $y_2 = f_2(x)$ нашей интервальной функции. Он выполняется теми же методами и по той же программе, что и предыдущий шаг.

Шаг 5. Составление сводной таблицы поведения обеих граничных функций $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ (см. таблицу) путем заполнения в ней первых трех строк, в соответствии с результатом анализа поведения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (шаги 3, 4).

Шаг 6. Анализ сводной таблицы с помощью теорем 9—15, позволяющих идентифицировать последовательные интервалы $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), (x_n, ∞) в ней как интервалы возрастания, убывания, расширения или сужения анализируемой интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а промежуточные точки $x_1, x_2, ..., x_n$ между интервалами как точки максимума (минимума) функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ или точки максимума (минимума) ее расширения или сужения. Например, если на некотором интервале (x_i, x_{i+1}) функция $f_2(x)$ возрастает, а на соседнем интервале (x_{i+1}, x_{i+2}) она убывает, так что в

Сводная таблица поведения интервальной функции

y	$(-\infty, x)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)	x_3	(x_3, x_4)	...	(x_{n-1}, x_n)	x_n	(x_n, ∞)
$y_1 = f_1(x)$	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная	...	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная
$y_2 = f_2(x)$	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная	...	Монотонная	Точка возможного экстремума f_1 или f_2	Монотонная
$\tilde{y} = \tilde{f}(x)$	Возрастающая	Точка максимума	Убывающая	Точка минимума	Расширяющаяся	Точка максимального расширения	Сужающаяся	...	Сужающаяся	Точка максимального сужения	Расширяющаяся

точке x_{i+1} она максимальна, и при этом функция $f_1(x)$ на обоих интервалах постоянная, то согласно теоремам 9, 10, 12 интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}) возрастает, в точке x_{i+1} достигает максимума, затем на интервале (x_{i+1}, x_{i+2}) убывает.

После выполнения шага 6 заполняется четвертая строка сводной таблицы поведения, и на этом анализ поведения заданной интервальной функции заканчивается. Характерный возможный вид четвертой строки показан в сводной таблице поведения интервальной функции. По результатам анализа можно вычертить график интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$.

Заключение

В настоящей работе разработаны систематические методы решения задач расчета и анализа поведения недетерминированных функций интервального типа, с помощью которых функции определяются с точностью до интервала возможных значений. В качестве математического аппарата использованы интервальная алгебра и дифференциальные характеристики верхней и нижней границ изучаемых интервальных функций, которые в совокупности можно рассматривать как специальное дифференциальное исчисление для неточно задаваемых функций интервального типа.

Список литературы

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
2. **Левин В. И.** Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления // Онтология проектирования. 2013. № 4. С. 72—84.
3. **Милн В. Э.** Численный анализ. М.: Издательство иностранной литературы, 1980.
4. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.
5. **Левин В. И.** Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности. Пенза: Изд-во Пензенского технолог. ин-та, 1999. 101 с.
6. **Левин В. И.** Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации // Автоматика и вычислительная техника. 2012. № 4.

V. I. Levin, Dr. Sci (Tech), Professor, Penza State Technological University, e-mail: Vilevin@mail.ru

The Analysis of Inexactly Specified Functions by Interval-differential Calculus

The existing approaches to system optimization under uncertainty are considered. The problem of calculating and analyzing the dynamics of function which specified up to interval. To solve this problem it is reduced to the corresponding problems for the upper and lower boundary functions of the original function. We use the technique of interval mathematics and interval-differential calculus.

Keywords: *system optimization, uncertainty, deterministic function, interval function, analysis of functions, boundary function*

References

1. **Fihtengol'c G. M.** *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija.* T. 1. M.: Fizmatlit, 2001.
2. **Levin V. I.** Interval'naja proizvodnaja i nachala nedeterministskogo differencial'nogo ischislenija. *Ontologija proektirovanija.* 2013. N. 4. P. 72—84.
3. **Miln V. Je.** *Chislennyj analiz.* M.: Izdalel'stvo inostrannoj literatury, 1980.
4. **Alefel'd G., Hercberger Ju.** *Vvedenie v interval'nye vychislenija.* M.: Mir, 1987.
5. **Levin V. I.** *Interval'nye metody optimizacii sistem v uslovijah neopredelennosti.* Penza: Izd-vo Penzenskogo tehnolog. in-ta, 1999. 101 s.
6. **Levin V. I.** Optimizacija v uslovijah interval'noj neopredelennosti. Metod determinizacii. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika.* 2012. N. 4.