

В. И. Струченков, д-р техн. наук, проф., e-mail: str1942@mail.ru,
МГТУ МИРЭА

Комбинированные методы решения вариационных задач с заданной структурой экстремали и ограничениями

Рассматривается задача поиска экстремали заданного функционала (двух- или трехмерной кривой), которая должна удовлетворять целому ряду ограничений. Специфическая особенность искомой кривой заключается в том, что она должна состоять из элементов заданного вида, на параметры которых накладываются ограничения. Число элементов не известно и предстоит определению в процессе решения задачи. Такие задачи возникают, в частности, при проектировании трасс линейных сооружений. Предлагается многоэтапный подход с использованием методов нелинейного и динамического программирования.

Ключевые слова: функционал, целевая функция, нелинейное программирование, приведенный антиградиент, динамическое программирование

Введение

Многие прикладные задачи оптимизации из различных областей практики сводятся к поиску двух- или трехмерных кривых, которые должны удовлетворять условиям гладкости и другим ограничениям. При этом некоторый интегральный показатель, однозначно определяемый для каждой допустимой кривой, должен принимать минимальное значение. Другими словами, требуется найти экстремаль заданного функционала, удовлетворяющую системе ограничений.

Примером таких задач могут служить поиск оптимальных трасс (плана и продольного профиля) проектируемых дорог и других линейных сооружений как на этапе нового строительства, так и на этапе реконструкции. Функционал отражает строительные затраты или приведенные затраты на строительство и эксплуатацию сооружения.

Принципиальная особенность таких задач, заключается в том, что искомая кривая (экстремаль) должна состоять из элементов заданного вида. В зависимости от вида сооружения в качестве элементов могут использоваться отрезки прямых, дуги окружностей, парабол, клотоид и др.

Параметры элементов должны удовлетворять ограничениям на первые производные и кривизну. Длины элементов также ограничены. Число элементов искомой кривой неизвестно.

Целесообразность оптимизации проектов таких дорогостоящих объектов, как железные и автомобильные дороги, очевидна. В частности, в условиях пересеченного рельефа и сложной геологии затраты на строительство и последующую эксплуатацию могут быть существенно снижены при оптимальном расположении трассы проектируемой дороги на местности. Это было установлено еще 40 лет тому назад при проектировании отдельных участков БАМ на таких ЭВМ, как БЭСМ 4 [1].

Отмеченные особенности задачи, затрудняющие разработку алгоритмов и программ вместо утраченных в 90-х годах, а также отсутствие заинтересованности проектировщиков и строителей в снижении строительных затрат привели к тому, что математические методы оптимизации трасс практически не применяются. Считается достаточным использование разного рода эвристических алгоритмов в процессе интерактивного проектирования.

В настоящее время даже в наиболее совершенных современных системах автоматизированного проектирования (САПР), таких как CARD/1 [2], Bentley Rail Track [3], или их российские аналоги Topomaic Robur [4] и Geonics [5], компьютер используется для решения сопутствующих рутинных задач, но не как инструмент выработки оптимальных проектных решений.

Известно, что в одних и тех же условиях, располагая одной и той же информацией, различные специалисты предлагают различные варианты проектных решений. Рассмотрение ограниченного числа интуитивно назначаемых вариантов не гарантирует близость к оптимуму конечного результата такого процесса. В то же время известно, что относительно небольшие изменения положения трассы на местности могут приводить к существенным изменениям затрат на строительство и эксплуатацию дороги [6].

Следовательно, проблема разработки адекватных математических моделей и математически корректных алгоритмов оптимизации трасс новых дорог остается актуальной. Это является главным направлением совершенствования САПР линейных сооружений.

Цель настоящей статьи — показать, как исходная вариационная задача, не решаемая классическими методами, может быть решена с помощью комбинации методов нелинейного и динамического программирования.

В этой статье дана общая постановка исходной вариационной задачи и рассмотрены наиболее типичные частные случаи. Далее представлены математические модели. Случай поиска двумерной кривой рассмотрен подробно, начиная с определения числа элементов и кончая оптимизацией их параметров. При этом реализация методов нелинейного и динамического программирования в конкретных алгоритмах будет основываться на специфических особенностях системы ограничений.

1. Постановка задачи и математические модели

Найти трехмерную кривую $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, для которой достигается

$$\min \int_0^S F(x(s), y(s), z(s)) ds. \quad (1)$$

Здесь s — текущая длина кривой, а S — неизвестная суммарная длина кривой, соединяющей две заданные точки A и B . $F(x(s), y(s), z(s))$ — заданная функция, имеющая непрерывные первые частные производные по всем трем своим аргументам. В подынтегральной функции F в качестве аргументов могут присутствовать частные производные функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, на которые накладываются ограничения. Ограничения в виде неравенств могут накладываться и на координаты отдельных точек искомой кривой.

Применительно к проектированию оптимальных трасс линейных сооружений $x(s)$, $y(s)$ задают план трассы, а $z(s)$ — ее продольный профиль. При этом $z(s)$ — однозначная функция и $\left| \frac{dz}{ds} \right| \leq v$, где v (максимальный продольный уклон) имеет значение в несколько промилле, и потому отличие длины искомой кривой от длины ее проекции на горизонтальную плоскость практически несущественно. Ограничение на уклон может быть и двусторонним.

Ограничена не только первая производная в продольном профиле, но и кривизна в плане и продольном профиле, а также координаты отдельных точек (например, при пересечении водотоков и существующих коммуникаций).

Ограничена не только первая производная в продольном профиле, но и кривизна в плане и продольном профиле, а также координаты отдельных точек (например, при пересечении водотоков и существующих коммуникаций).

Рассматриваемая задача имеет существенные отличия от задач, рассматриваемых в вариационном исчислении [7]. Прежде всего это наличие ограничений в виде неравенств. Даже в случае отсутствия дополнительных условий, в соответствии с которыми искомая кривая должна состоять из элементов заданного вида, отмеченные особенности не позволяют использовать аппарат классического вариационного исчисления, в частности уравнения Эйлера [7], для решения рассматриваемой задачи.

Если в (1) функции $x(s)$, $y(s)$ заданы, то получаем задачу поиска плоской кривой $z(s)$, при этом $z(s)$ — однозначная функция.

Другая частная задача возникает при поиске кривой на плоскости XOY , т. е. при поиске функций $x(s), y(s)$. В этом случае искомая кривая не обязательно является графиком однозначной функции.

Применительно к проектированию трасс линейных сооружений поиск $z(s)$ соответствует проектированию оптимального продольного профиля при заданном положении трассы в плане. Эта задача может иметь самостоятельное значение при проектировании трасс в обжитых районах из-за отсутствия возможности варьирования в плане. В качестве примера достаточно вспомнить историю защиты Химкинского леса.

Поиск плоской кривой $x(s)$, $y(s)$ соответствует проектированию плана трассы в условиях, когда продольный профиль однозначно определяется этим планом или слабо зависит от него. Примером может служить прокладка траншей на заданной глубине, проектирование трасс новых железных дорог на участках напряженного хода [8] или проектирование плана трассы реконструируемой железной дороги (выправка пути) [8].

Рассмотрим подробнее двумерные задачи применительно к проектированию трасс железных дорог.

В случае проектирования продольного профиля искомая проектная линия $z(s)$ — это ломаная линия, соединяющая начальную и конечную точки, число элементов которой неизвестно.

Если обозначить профиль земли $H(s)$, то в первом приближении задача состоит в следующем. По заданной $H(s)$ найти такую ломаную $z(s)$, чтобы она удовлетворяла всем ограничениям, и был

$$\min \int_0^S F(z(s), H(s), s) ds, \quad (2)$$

где S_0 — заданная длина трассы в плане, а функция F моделирует затраты на элементе длины.

Реальные модели должны учитывать конструкции поперечных профилей земляного полотна, наличие водопропускных и других искусственных сооружений, распределение земляных масс и способы производства земляных работ и др. Эти модели подробно рассмотрены в работах [8–10].

Задача вариационного исчисления (2) сводится к задаче нелинейного программирования, обладающей интересными особенностями независимо от конкретного вида функции F .

Поскольку число элементов искомой ломаной неизвестно, то приходится считать, что переломы профиля земли и проектной линии (т. е. профиля трассы) имеют одни и те же абсциссы. Профиль земли всегда представлен в виде ломаной с неравномерным шагом, и такое допущение позволяет фиксировать число элементов n (размерность задачи) и длины s_i элементов (в плане). При этом получится ломаная с большим, чем нужно, числом элементов, но из-за многочисленных ограничений ее отклонения от окончательной $z(s)$ невелики [8]. Идея в

том, чтобы найти эту ломаную путем решения задачи оптимизации, затем преобразовать ее в ломаную с элементами, длины которых не менее допустимой длины, определив тем самым реальную размерность задачи и начальное приближение, и на последнем этапе выполнить оптимизацию при всех ограничениях и необходимых уточнениях целевой функции. Такой многоэтапный процесс с уточнением математической модели и ее параметров является обычным для решения сложных проектных задач творческого характера.

Зная число и длины элементов искомого ломаной, можно аналитически выразить все ограничения на $z(s)$, если принять в качестве неизвестных z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ее ординаты в точках перелома. Эти ограничения делятся на три группы:

- на ординаты в отдельных точках $z_i \leq z_i^{\max}$ или $z_i \geq z_i^{\min}$;

- на уклоны элементов профиля:

$$a_i \leq (z_{i+1} - z_i)/s_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

где s_i — длины элементов. Эти ограничения являются дискретными аналогами ограничений на первую производную; b_i, c_i, d_i — заданные константы;

- на разности уклонов смежных элементов:

$$c_i \leq (z_{i+2} - z_{i+1})/s_{i+1} - (z_{i+1} - z_i)/s_i \leq d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Эти ограничения являются дискретными аналогами ограничений на кривизну.

В силу малости проектных уклонов длина элемента и его проекции практически совпадают.

Интеграл (2) превращается в сумму [9, 10] и получается следующая задача нелинейного программирования с линейной системой ограничений.

Найти $\min \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ при $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, где \mathbf{x} — вектор неизвестных, \mathbf{c} — вектор параметров, матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{b} задают систему линейных ограничений, $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ — целевая функция.

В случае проектирования плана трассы различных линейных сооружений, т. е. при поиске функций $x(s), y(s)$, элементами искомого линии могут быть отрезки прямых, окружностей, парабол, клотоид и др. Число элементов неизвестно. Ограничены минимальные длины элементов, максимальная кривизна и координаты отдельных точек. Искомая кривая может быть приближенно представлена в виде ломаной линии с большим, но известным числом элементов. В качестве переменных могут быть приняты координаты вершин искомого ломаной, через которые аналитически выражаются все ограничения. Снова получается задача нелинейного программирования, но с нелинейной системой ограничений.

При проектировании трасс реконструируемых железных дорог в качестве переменных удобно

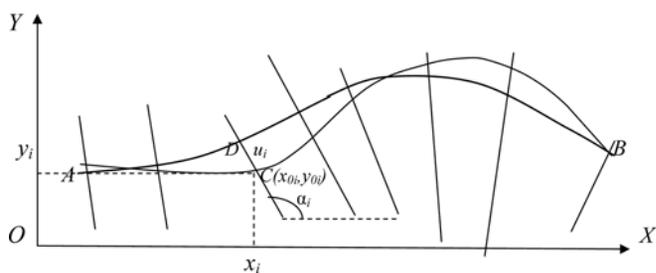


Рис. 1. Дискретное представление трассы

принять не координаты x_i, y_i вершин искомого ломаной, а сдвиги u_i по нормальям (поперечникам) в точках съемки плана трассы существующего пути (CD на рис. 1). Через эти сдвиги также можно выразить все ограничения на искомую кривую. При этом получим задачу нелинейного программирования с меньшим числом переменных.

Имеются следующие виды ограничений:

1. Кривизна окружности, проведенной через любые три смежные точки в плане, должна быть в заданных пределах $k_{\min} \leq k(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) \leq k_{\max}$, где

$$k(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = \frac{2 \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix}}{l_{i-1} l_{i-1, i+1} l_{i, i+1}}. \quad (3)$$

В числителе (3) стоит определитель третьего порядка, в который входят декартовы координаты трех смежных точек, а в знаменателе — произведение расстояний l между этими точками. Определитель — это удвоенная площадь треугольника с вершинами в рассматриваемых точках. Это известная формула для радиуса описанной окружности $R = abc/(4S)$, где a, b, c — длины сторон, S — площадь треугольника.

Через переменные u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) выражаем сначала декартовы координаты точек пересечения плана трассы с поперечниками

$$x_i = x_{0i} + u_i \cos \alpha_i; \quad y_i = y_{0i} + u_i \sin \alpha_i$$

затем через них вычисляем расстояния между точками и кривизну. Здесь x_{0i}, y_{0i} — координаты начальной точки на i -й нормали, α_i — угол нормали с осью X .

2. Ограничения на координаты отдельных точек, включая условия пересечения других коммуникаций и водотоков, теперь записываются просто:

$$c_k \leq u_k \leq d_k,$$

где k — номер нормали, соответствующей коммуникации или водотоку. Таких ограничений может быть много. Для строго фиксированных точек $c_k = d_k$.

Ограничения на план трассы существенно нелинейны.

2. Особенности возникающих задач нелинейного программирования и методы их решения

Задачи нелинейного программирования, получаемые при дискретном представлении искомой экстремали, обладают существенными особенностями, обусловленными спецификой рассматриваемых объектов. Эти особенности относятся прежде всего к системам ограничений на искомую экстремаль.

Так, ни одно из ограничений не связывает больше трех смежных переменных. Это означает, что в линейном случае (проектирование продольного профиля) матрица системы ограничений имеет блочный характер. Блоки, соответствующие отмеченным выше типам ограничений, содержат в каждой строке только один, два или три ненулевых элемента. Это позволяет построить итерационный процесс, на каждом шаге которого при любом наборе активных ограничений направление спуска определяется без решения систем линейных уравнений. В качестве такого направления принимается приведенный антиградиент [11, 12].

Если \mathbf{A}_k — матрица системы активных ограничений на k -й итерации и $\mathbf{N}(\mathbf{A}_k)$ — ее нуль-пространство [12], то отмеченные свойства системы ограничений для любого активного набора позволяют легко построить базис в $\mathbf{N}(\mathbf{A}_k)$ [13]. Если \mathbf{C} — базисная матрица и \mathbf{f} — антиградиент целевой функции, то $\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{f}$, называемый приведенным антиградиентом, является направлением спуска. Действительно, его скалярное произведение на антиградиент неотрицательно, так как $(\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{f}, \mathbf{f}) = (\mathbf{C}^T\mathbf{f}, \mathbf{C}^T\mathbf{f}) \geq 0$.

Система нелинейных ограничений, получаемая при дискретном представлении плана трассы, также в каждом из неравенств содержит не более трех смежных переменных. При ее линеаризации в текущей итерационной точке получается система линейных неравенств, обладающая отмеченными особенностями. Это позволяет построить базис в нуль-пространстве, соответствующем касательной плоскости. Но спуск из текущей итерационной точки целесообразно осуществлять не в касательной плоскости, а по кривой в граничной поверхности без нарушения активных нелинейных ограничений. Касательная к этой кривой совпадает с на-

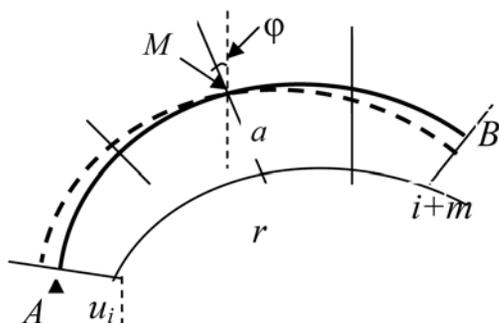


Рис. 2. Пример базисного смещения (сдвиг + поворот)

правлением спуска в касательной плоскости. В этом состоит смысл метода базисных смещений [14].

Пусть на некоторой итерации точки с i -й по $(i + m)$ -ю лежат на кривой предельного радиуса (рис. 2). Ее начальное положение AB . Необходимо найти такие изменения переменных $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m}$, при которых радиус остается предельным. Это означает, что окружность смещается как единое целое, и любое ее смещение можно представить как комбинацию двух смещений, например, сдвиг вдоль некоторой прямой и поворот в плоскости вокруг некоторого центра. В качестве прямой можно взять любую нормаль с номером $i \leq k \leq i + m$, а за центр вращения принять точку пересечения плана трассы и выбранной нормали. На рис. 2 это точка M на поперечнике с номером r . Пусть a — смещение окружности вдоль поперечника, а φ — угол поворота. Если величины a и φ известны, то приращения Δu_k ($i \leq k \leq i + m$) вычисляются через a, φ, u_i углы нормалей с осью OX и исходные значения u_k ($i \leq k \leq i + m$).

Если на окружности оказалась одна точка, у которой координата u_j имеет минимальное или максимальное значение, то ее следует принять за центр вращения, а соответствующий j -й поперечник — за линию сдвига. В этом случае $a = 0$, и все искомые смещения по поперечникам определяются углом поворота.

Если на окружности предельного радиуса оказалось две или более фиксированных точек, то искомые смещения или приращения координат Δu_k ($i \leq k \leq i + m$) равны нулю.

Набор линейно независимых базисных смещений является аналогом базиса в линейном случае. При линеаризации базисных смещений получается базис в соответствующем ему нуль-пространстве.

Важно отметить, что отмеченные особенности систем ограничений как в линейном, так и в нелинейном случае позволяют без громоздких вычислений осуществлять модификацию активного набора [13].

3. Определение числа элементов экстремали и построение начального приближения

Решение задачи нелинейного программирования дает экстремаль в виде ломаной линии. Ее число элементов определяется спецификой оптимизируемого объекта и требуемой точностью решения задачи. Однако это число существенно больше, чем требуется, если изначально были ограничения на минимальную длину элемента. Поэтому необходимо преобразовать полученную ломаную с минимальными отклонениями от нее в последовательность элементов заданного вида с соблюдением всех ограничений, включая ограничения по минимальной длине элемента. Поскольку экстремаль в виде ломаной удовлетворяет всем ограничениям (кроме ограничений по минимальной длине элемента), то ее отклонения от искомой последовательности эле-

ментов оказываются много меньше, чем ширина исходной области поиска оптимального решения [14]. Это позволяет использовать разработанные ранее алгоритмы динамического программирования для решения возникающих задач аппроксимации полученной ломаной плоской кривой, состоящей из элементов заданного вида при наличии ограничений, рассмотренных выше [15, 16].

Характерно, что ограничения в данном случае способствуют сокращению времени счета из-за сокращения числа допустимых вариантов.

При проектировании продольного профиля железных дорог ломаная линия, состоящая из коротких элементов, преобразуется в ломаную же линию, но с элементами, длина которых не менее заданной величины. Алгоритм преобразования подробно рассмотрен в работах [8, 15].

При проектировании продольного профиля автомобильных дорог преобразование может осуществляться в систему парабол второй степени (в частности, отрезков прямых) или в систему круговых кривых с или без прямых вставок. Соответствующие алгоритмы динамического программирования приведены в работах [8, 16, 17].

При проектировании плана трассы преобразование ломаной в последовательность круговых кривых с прямыми вставками особых сложностей не вызывает. Особенность только в том, что искомая экстремаль в общем случае не является графиком однозначной функции. Поэтому для использования динамического программирования сетка варьирования строится с использованием нормалей [14].

Преобразование ломаной в последовательность круговых и прямых, сопрягаемых клотоидами, потребовало разработки отдельного алгоритма, так как с помощью динамического программирования эту задачу решить не удалось.

4. Оптимизация начального приближения

Экстремаль, получаемая после преобразования ломаной линии, должна рассматриваться как начальное приближение для получения окончательного решения.

Смысл этапов расчета ломаной линии и ее преобразования состоит в определении размерности задачи (числа элементов) и построении начального приближения. Дело не только в том, что динамическое программирование не обеспечивает точности решения задачи из-за дискретности варьирования, но в таких задачах, как проектирование продольного профиля новых дорог, имеется дополнительная взаимосвязь элементов в насыпях и выемках, сооружаемых совместно. Целевая функция в этом случае не может вычисляться для каждого элемента отдельно, что не позволяет использовать динамическое программирование [14].

Если искомая экстремаль состоит только из прямолинейных элементов, как это имеет место при

проектировании продольного профиля железных дорог, то оптимизация начального приближения осуществляется с помощью того же алгоритма нелинейного программирования, что и на первом этапе при построении ломаной. В этом случае ордината любой точки искомой экстремали линейно зависит от ординат концов соответствующего элемента, поэтому добавлен только пересчет производных целевой функции по ординатам концов коротких элементов в производные по ординатам концов элементов искомой экстремали.

При использовании параболических элементов удобно взять в качестве неизвестных не ординаты, а уклоны концов элементов.

Рассмотрим случай фиксированных уклонов в начальной и конечной точках.

Уравнение каждой параболы в декартовой системе координат (l, H) , помещенной в начало элемента, имеет вид

$$H = al^2 + bl + c,$$

где c — ордината в начальной точке элемента; b — уклон в начале элемента; l — расстояние от начала элемента.

Если считать неизвестными все уклоны — параметры b_j ($j = 1, 2, \dots, n + 1$), где n — число элементов, то через эти уклоны можно найти ординату любой точки, считая заданной ординату начальной точки. Действительно, параметр a_j каждой параболы вычисляется через уклоны в ее начальной и конечной точках, так как длина элемента L_j известна:

$$a_j = (b_{j+1} - b_j)/(2L_j); \quad (4)$$

$$c_{j+1} = (b_{j+1} + b_j)L_j/2 + c_j. \quad (5)$$

Это означает, что при любой комбинации параметров b_j можно вычислить все ординаты, которые раньше считались независимыми переменными, а следовательно, и частные производные (градиент) целевой функции. Для этого нужно последовательно вычислять параметры a_j и c_{j+1} по формулам (4) и (5).

Ограничения по уклонам записываются совсем просто:

$$b_j^{\min} \leq b_j \leq b_j^{\max}.$$

Ограничения по радиусам:

$$L_j/R_j^{\min1} \leq b_{j+1} - b_j \leq L_j/R_j^{\min2}.$$

Здесь $R_j^{\min1} < 0$ и $R_j^{\min2} > 0$ — минимально допустимые радиусы выпуклой и вогнутой кривых соответственно.

Система ограничений чрезвычайно проста, поэтому при любом наборе активных ограничений по уклонам и радиусам для соответствующего участка сдвиг в пространстве уклонов невозможен при наличии хотя бы одного предельного уклона (нулевой

участок) или если активны только ограничения по радиусам, то все компоненты единственного базисного вектора равны единице (участок сдвига). Отметим, что в исходном координатном пространстве нулевой участок соответствует сдвигу по оси ординат, а участок сдвига соответствует повороту с центром в начальной точке участка.

Однако есть еще и ограничения на ординаты отдельных точек, в частности, всегда активное ограничение по выходу в заданную конечную точку. Это обстоятельство не позволяет строить направление спуска отдельно по участкам, если уклоны элементов между ними и кривизна не предельны.

Рассматривалось два способа преодоления возникающих трудностей [14]:

- использование штрафных функций за нарушение ограничений по ординатам;
- построение направления спуска с помощью решения вспомогательных систем линейных уравнений, число которых равно числу активных ограничений по ординатам.

Однако в дальнейшем удалось упростить алгоритм с помощью специального приема преобразования базиса. Для этого берется канонический базис в пространстве уклонов для всей искомого экстремали в целом. Ему соответствует единичная матрица E .

Если с k -го по $k + m$ -й уклон имеем нулевой участок, то столбцы с k -го по $k + m$ -й из матрицы вычеркиваются. При этом в матрице образуются нулевые строки.

Если с r -го по $r + p$ -й уклон имеем участок сдвига, то соответствующие столбцы заменяются их суммой.

Обозначим полученные вектор-столбцы e_1, e_2, \dots, e_q .

Активное ограничение по ординате некоторой точки требует, чтобы направление спуска p_1, p_2, \dots, p_n удовлетворяло дополнительному условию

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_k p_k = 0. \quad (6)$$

Здесь α_i ($i = 1, 2, \dots, k - 1$) — длины элементов, предшествующих элементу с номером k , на котором есть точка с ограниченной ординатой; α_k — часть длины k -го элемента от его начала до точки с ограниченной ординатой. Далее будем рассматривать вектор α , у которого первые k компонент равны α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и $\alpha_i = 0$ при $i > k$, если $k < n$.

Условие (6) уменьшает размерность нуль-пространства и требует преобразования базиса. Это можно сделать различными способами. Например, исключим из базиса первый из векторов e_j , для которого $(\alpha, e_j) \neq 0$. Остальные векторы преобразуем по формуле

$$e'_k = e_k - \frac{(\alpha, e_k)}{(\alpha, e_j)} e_j. \quad (7)$$

Линейная независимость преобразованных базисных векторов гарантирована, так как любая их линейная комбинация является линейной комбинацией исходных базисных векторов. Очевидна и ортогональность любого из них вектору α .

Формулу (7) можно использовать повторно при наличии любых других линейных ограничений.

Более того, эта формула позволяет построить базис в нуль-пространстве любой матрицы с линейно независимыми строками, начиная с канонического базиса.

При оптимизации начального приближения экстремали, не соответствующей однозначной функции, например, кривой, состоящей из отрезков прямых и круговых кривых или с дополнительным сопряжением прямых и круговых клотоидами, в качестве переменных принимались длины элементов и кривизна круговых кривых.

Задача была решена с помощью метода DFP-оптимизации [11].

Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Заключение

Рассмотренные задачи из области проектирования трасс линейных сооружений — это частный случай решения вариационной задачи, которой присущи отмеченные выше особенности. Подобные задачи возникают и в других областях, например, в планировании и при управлении технологическими процессами.

Идея комбинированного применения методов нелинейного и динамического программирования может оказаться полезной и при решении вариационных задач, в которых подынтегральная функция содержит не только искомую экстремаль, но и ее производные.

К настоящему времени комбинированные методы используются в разработанных автором САПР, предназначенных для проектирования трасс новых и реконструируемых железных дорог.

В этих интерактивных системах в диалоге проектировщик — компьютер последний выступает как интеллектуальный партнер, способный вырабатывать оптимальные решения с использованием математических моделей и математически корректных алгоритмов оптимизации. В этом принципиальное отличие новых систем от систем, в которых проектировщик подбирает элементы проектного решения, "ползая по экрану компьютера", а компьютер увязывает их, реализуя творческий замысел проектировщика. Миф о том, что подобным образом достигаются оптимальные решения весьма устойчив, но, будем надеяться, не вечен.

Список литературы

1. Использование математических методов оптимизации и ЭВМ при проектировании продольного профиля железных до-

рог // Тр. Всесоюзного НИИ транспортного строительства. Вып. 101. М.: Транспорт, 1977.

2. **CARD/1**. URL: <http://www.card-1.com/en/home/>
3. **Bentley Rail Track**. URL: <http://www.bentley.com/>
4. **Topomatic Robur**. URL: <http://www.topomatic.ru> Visited: July 14, 2012.
5. **Курилко Ю., Чешева В.** Geonics ЖЕЛДОР — САПР // CADmaster 2007. № 1(36).
6. **Shafahi Y., Shahbazi M. J.** Optimum railway alignment. URL: http://www.uic.org/cdrom/2001/wcrr2001/pdf/sp/2_1_1/210.pdf
7. **Ожегова А. В., Насибуллин Р. Г.** Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры. Казань: Казанский ун-т, 2013.
8. **Струченков В. И.** Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений. М.: Солон — Пресс, 2014.
9. **Струченков В. И.** Математические модели и методы оптимизации в системах проектирования трасс новых железных дорог // Информационные технологии. 2013. № 7 (203).
10. **Struchenkov V.** Mathematical Models and Optimization in Line Structure Routing: Survey and Advanced Results // International Journal of Communications, Network and System Sciences. Special Issue Models & Algorithms for Applications. 2012. N. 5.

11. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.

12. **Аоки М.** Введение в методы оптимизации: Пер. с англ. М.: Наука, 1977.
13. **Struchenkov V. I.** Nonlinear Programming Algorithms for CAD Systems of Line Structure Routing // World Journal of Computer Application and Technology. 2014. N. 2 (5).
14. **Струченков В. И.** Методы оптимизации в прикладных задачах. М.: Солон — Пресс, 2009.
15. **Struchenkov V. I.** Piecewise Linear Approximation of Plane Curves with Restrictions in Computer-Aided Design of Railway Routes // World Journal of Computer Application and Technology. 2014. N. 2 (1).
16. **Struchenkov V. I.** Per Element Approximation of Plane Curves with Restrictions in Computer-Aided Design of Road Routes // American Journal of Systems and Software, 2013. V. 1, N. 1.
17. **Struchenkov V. I.** Piecewise Parabolic Approximation of Plane Curves with Restrictions in Computer-Aided Design of Road Routes // Transaction on Machine Learning and Artificial Intelligence. Society Science and Education. United Kingdom. 2013. V. 1, Is. 1.

V. I. Struchenkov, Professor, e-mail: stl942@mail.ru,
Moscow State University of Radio Engineering, Electronics and Automation

Combined Algorithms for Solving Variational Problems with a Given Structure of the Extremal and Constraints

Under study is the problem of searching the extremal of given functional (two or three-dimensional curve), which must satisfy a number of given restrictions. A specific feature of the desired curve is that it should consist of a given types elements, whose parameters are limited. The number of elements is unknown and to be determined in the process of solving the problem. Such problems arise in particular when designing linear structures routes.

In the case searching of two-dimensional extremal piecewise linear and piecewise parabolic curves are considered. Such problems arise in the design of optimal longitudinal profile of railways and roads.

Multi-stage approach is proposed using the methods of nonlinear and dynamic programming.

In the first stage using nonlinear programming we define polyline consisting of elements of small length. In the second stage using dynamic programming we determine a number of the elements and the initial approach for the third stage. In the third stage using a special non-linear programming algorithm we find the optimal decision.

Keywords: functional, extremal, objective function, nonlinear programming, reduced antigradient, dynamic programming

References

1. **Ispol'zovanie** matematicheskikh metodov optimizacii i JeVM pri proektirovanii prodol'nogo profilya zheleznyh dorog. Tr. Vsesojuznogo NIИ transportnogo stroitel'stva. Vyp. 101. М.: Transport, 1977.
2. **CARD/1**. URL: <http://www.card-1.com/en/home/>
3. **Bentley Rail Track**. URL: <http://www.bentley.com/>
4. **Topomatic Robur**. URL: <http://www.topomatic.ru> Visited: July 14, 2012.
5. **Kurilko Ju., Chesheva V.** Geonics ZhELDOR — SAPR. CAD-master 2007. N 1 (36).
6. **Shafahi Y., Shahbazi M. J.** Optimum railway alignment. URL: http://www.uic.org/cdrom/2001/wcrr2001/pdf/sp/2_1_1/210.pdf
7. **Ozhegova A. V., Nasibullin R. G.** Variacionnoe ischislenie: zadachi, algoritmy, primery. Kazan': Kazanskiy universitet, 2013.
8. **Struchenkov V. I.** Metody optimizacii trass v SAPR linejnyh sooruzhenij. М.: Solon — Press, 2014.
9. **Struchenkov V. I.** Matematicheskie modeli i metody optimizacii v sistemah proektirovanija trass novyh zheleznyh dorog. Informacionnye tehnologii. 2013. N. 7 (203).
10. **Struchenkov V. I.** Mathematical Models and Optimization in Line Structure Routing: Survey and Advanced Results. International

Journal of Communications, Network and System Sciences. Special Issue Models & Algorithms for Applications. 2012. N. 5.

11. **Gill F., Mjurrej U., Rajt M.** Prakticheskaja optimizacija: Per. s angl. М.: Mir, 1985.
12. **Aoki M.** Vvedenie v metody optimizacii: Per. s angl. М.: Nauka, 1977.
13. **Struchenkov V. I.** Nonlinear Programming Algorithms for CAD Systems of Line Structure Routing. World Journal of Computer Application & Technology. 2014. V. 2, N. 5.
14. **Struchenkov V. I.** Metody optimizacii v prikladnyh zadachah. М.: Solon — Press, 2009.
15. **Struchenkov V. I.** Piecewise Linear Approximation of Plane Curves with Restrictions in Computer-Aided Design of Railway Routes. World Journal of Computer Application and Technology. 2014. V. 2, N. 1.
16. **Struchenkov V. I.** Per Element Approximation of Plane Curves with Restrictions in Computer-Aided Design of Road Routes. American Journal of Systems and Software. 2013. V. 1, N. 1.
17. **Struchenkov V.** Piecewise Parabolic Approximation of Plane Curves with Restrictions in Computer-Aided Design of Road Routes. Transaction on Machine Learning and Artificial Intelligence. Society Science and Education. United Kingdom. 2013. V. 1, N. 1.