УДК 519.7

А. С. Шелудько, инженер, e-mail: sheludkoas@susuac.ru,
В. И. Ширяев, д-р техн. наук, проф., зав. каф., e-mail: vis@susu.ac.ru,
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Алгоритм гарантированного оценивания параметра одномерного хаотического отображения

Рассматривается применение гарантированного подхода для нахождения множественной оценки параметра квадратичного отображения по единственной зашумленной реализации измерений. Представлены результаты работы алгоритма для различных моделей ошибок измерений. Исследовано, в каких случаях удается уточнить априорную оценку, а также получить точное значение параметра.

Ключевые слова: *хаотическое отображение, задача идентификации, гарантированный подход*

Введение и постановка задачи

Модели и методы хаотической динамики применяют в различных областях исследований: динамическая обработка и защита информации [1], моделирование биологических [2] и экономических [3] систем. Распространенным приложением является реконструкция математической модели по результатам измерений [4—6]. Одним из подходов к решению задачи реконструкции является разложение измерений y_k по системе базисных процессов [7—9]:

$$y_k = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_k^{(i)} + \zeta_k, \; k = 1, 2, ..., N,$$

где a_i — коэффициенты разложения (i — номер базисного процесса); ζ_k — ошибки аппроксимации. Для задания моделей процессов $x_k^{(1)}, ..., x_k^{(n)}$ могут быть использованы одномерные хаотические отображения [10, 11]:

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda). \qquad (1)$$

Применение моделей вида (1) требует разработки соответствующих алгоритмов идентификации для хаотических процессов (см., например, [5, 12]), в том числе в реальном времени. В данной работе исследуется применение гарантированного подхода [13—15] в задаче оценивания параметра λ хаотического отображения (1) по единственной зашумленной реализации измерений

$$y_k = x_k + v_k, \; k = 1, 2, ..., N. \qquad (2)$$

При этом априорная информация об ошибках v_k представляется только в виде множественных оценок V_k: $v_k \in V_k$. Алгоритм гарантированного оценивания предполагает рекуррентное нахождение множественных оценок (информационных множеств) Λ_k и X_k для параметра λ и переменной состояния x_k отображения (1): $\lambda \in \Lambda_k$, $x_k \in X_k$. В работе [16] рассмотрен алгоритм оценивания переменной состояния x_k в случае, когда параметр λ модели (1) является известным. Данная работа продолжает исследования, описанные в работах [11, 14, 16, 17].

Актуальность разрабатываемого подхода

Распространенным подходом к решению задачи апостериорного оценивания параметра λ хаотического отображения (1) по зашумленным измерениям (2) является использование метода наименьших квадратов [5, 18], что предполагает решение задачи оптимизации

$$\min_{\lambda \in \Lambda, \; x_0 \in X_0} \sum_{k=1}^{N} (y_k - f^k(x_0, \lambda))^2. \qquad (3)$$

При таком подходе основной сложностью является многоэкстремальность [17] целевой функции в задаче (3), которая возникает вследствие ряда причин.

1. Модели вида (1) описывают временные процессы, которые по своим характеристикам близки к шумам, составляющим ошибки измерений.

2. Сильная чувствительность хаотических процессов к малым изменениям параметра λ и начального условия x_0, в результате чего целевая функция является "изрезанной".

3. На практике число измерений N может быть небольшим, это может привести к тому, что локальные экстремумы целевой функции будут мало отличаться друг от друга.

В конечном счете это приводит к необходимости применения трудоемких алгоритмов поиска глобального экстремума [18, 19]. В этом случае эффективным подходом может стать предварительная обработка измерений (2) с помощью алгоритма гарантированного оценивания для уточнения множества поиска Δ параметра λ. Это позволит уменьшить число локальных экстремумов целевой функции в задаче (3), а также сократить время вычислений при использовании алгоритмов глобальной оптимизации.

Одним из приемов, который применяется для преодоления проблемы многоэкстремальности целевой функции, является итерирование в обратном времени [5], т. е. решение задачи

$$\min_{\lambda \in \Lambda,\ x_N \in X_N} \sum_{k=0}^{N-1} (y_{N-k} - f^{(-k)}(x_N, \lambda))^2.$$

В данном случае алгоритм гарантированного оценивания может быть использован как для уточнения множества Λ, так и для задания множества X_N по результатам предварительной обработки измерений (2).

Алгоритм гарантированного оценивания параметра

Рассмотрим алгоритм нахождения информационных множеств Λ_k и X_k для параметра λ и переменной состояния x_k хаотического отображения (1) по зашумленным измерениям (2). Исходными данными для алгоритма являются априорные множественные оценки Λ_0, X_0 и V_k для параметра λ, начального значения x_0 переменной состояния и ошибок v_k соответственно: $\lambda \in \Lambda_0$, $x_0 \in X_0$, $v_k \in V_k$. Информационное множество X_k на шаге k определим следующим образом (см., например, [14, 16]):

$$X_k = X_{k/k-1} \cap Y_k, \tag{4}$$

где $X_{k/k-1}$ — множество прогнозов; Y_k — множество, совместное с измерениями. Для построения множества прогнозов $X_{k/k-1}$ используют информационные множества X_{k-1} и Λ_{k-1}, найденные на предыдущем шаге:

$$X_{k/k-1} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} S(X_{k-1}, \lambda), \tag{5}$$

где $S(X_{k-1}, \lambda)$ — множество прогнозов, построенное для конкретного значения параметра λ:

$$S(X_{k-1}, \lambda) = \{x | x = f(t, \lambda),\ t \in X_{k-1}\}. \tag{6}$$

Множество, совместное с измерениями, находим исходя из априорно заданного множества V_k:

$$Y_k = \{x | x = y_k - v,\ v \in V_k\}. \tag{7}$$

Если в результате операции пересечения (4) $X_k \ne X_{k/k-1}$, то для некоторых значений параметра $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ может оказаться, что $S(X_{k-1}, \lambda) \cap X_k = \varnothing$. В этом случае за счет исключения таких значений λ уточняется множественная оценка Λ_k параметра λ:

$$\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda_{k-1} | S(X_{k-1}, \lambda) \cap X_k \ne \varnothing\}. \tag{8}$$

Результат работы алгоритма является гарантированным: если исходные данные Λ_0, X_0 и V_k заданы корректно, то на каждом шаге k истинные значения параметра λ и переменной состояния x_k принадлежат соответствующим информационным множествам Λ_k и X_k, найденным с помощью уравнений (4)—(8).

Численные эксперименты показали, что если на некотором шаге k реализующаяся ошибка измерений v_k оказывается близкой к одной из границ множества V_k, то на этом шаге возможно уточнение множественной оценки Λ_k параметра λ независимо от модели ошибок. Это условие не является достаточным: результат зависит также от реализации исходного процесса x_k. Таким образом, эффективность рассмотренного алгоритма зависит от того, на сколько множественные оценки V_k адекватны реально реализующимся ошибкам v_k. Как правило, множественные оценки V_k задаются постоянными для некоторого интервала времени: $V_k = V$. Выбор множества V можно организовать с помощью параллельных вычислений, рассматривая результаты работы алгоритма для разных значений V:

1. Если множество V задано неверно, т. е. на некотором шаге $v_k \notin V$, то на последующих шагах информационное множество X_k в результате операции пересечения (4) становится пустым: $X_k = \varnothing$. Такая ситуация также возникает, если неверно задано множество X_0.

2. Если множество V задано слишком большим, то множество прогнозов (5) регулярно оказывается внутри множества, совместного с измерениями (7): $X_{k/k-1} \subset Y_k$.

3. Если описанных выше ситуаций не возникает, то критерием выбора является точность найденных множественных оценок для переменной состояния x_k. В качестве такого критерия можно использовать средний размер информационных множеств X_k на рассматриваемом временном интервале.

Численные эксперименты

Исследуем возможности описанного алгоритма гарантированного оценивания на примере квадратичного (логистического) отображения

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda) = \lambda x_k(1 - x_k), \tag{9}$$

которое имеет хаотические решения при $x_0 \in (0; 1)$ и $\lambda \in (3{,}569945...; 4]$ (за исключением тех значений параметра λ, которым соответствуют циклы отображения f). Пусть истинное значение параметра $\lambda = 3{,}7$, начальное условие $x_0 = 0{,}15$, число измерений $N = 50$ (рис. 1). Рассмотрим результаты работы алгоритма для разных моделей ошибок измерений v_k. Во всех случаях задаются следующие исходные данные:

$$\Lambda_0 = [3{,}57; 4],\ X_0 = [0; 1].$$

1. В качестве ошибок измерений v_k возьмем реализацию белого гауссовского шума (рис. 2) с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$ (отношение сигнал/шум С/Ш = 12,1 дБ). Интервал измерений был разбит на пять одинаковых промежутков, на кото-

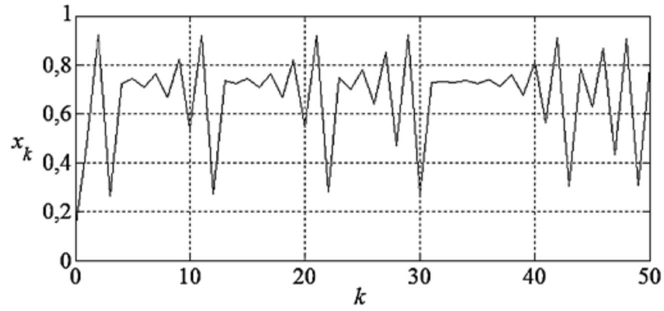

Рис. 1. Реализация квадратичного отображения

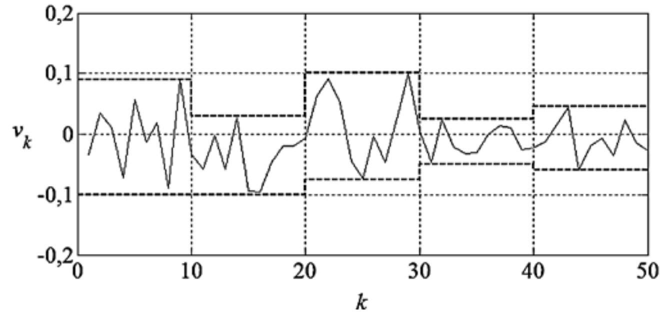

Рис. 2. Ошибки в виде реализации белого гауссовского шума

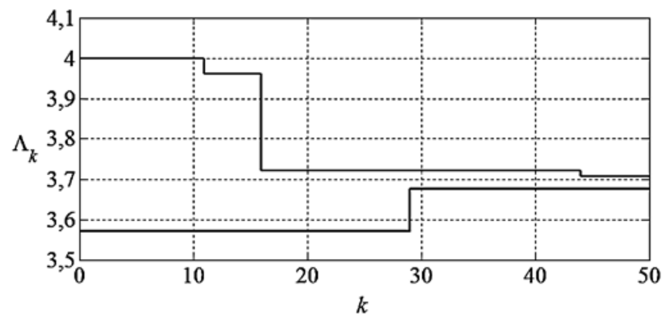

Рис. 3. Множественная оценка параметра

рых множественные оценки V_k для ошибок v_k выбирались следующим образом:

$$V_k = \begin{cases} [-0{,}100;\ 0{,}090],\ k \in [1;\ 10]; \\ [-0{,}100;\ 0{,}030],\ k \in [11;\ 20]; \\ [-0{,}075;\ 0{,}100],\ k \in [21;\ 30]; \\ [-0{,}050;\ 0{,}025],\ k \in [31;\ 40]; \\ [-0{,}060;\ 0{,}045],\ k \in [41;\ 50]. \end{cases}$$

При обработке измерений множественная оценка Λ_k параметра λ уточняется при $k \in \{11,\ 16,\ 29,\ 44\}$ (рис. 3), конечная оценка

$$\Lambda_N = [3{,}6774;\ 3{,}7068].$$

Таким образом, начальную неопределенность (размер множества Λ_0) удается уменьшить в 14 раз.

2. Пусть ошибки измерений v_k являются хаотическим процессом, например, $v_k = 0{,}2x_k$, где x_k — реализация квадратичного отображения (9) при $\lambda = 3{,}65$ и $x_0 = 0{,}5$. Реализация ошибок показана на рис. 4 (С/Ш = 12,7 дБ). Зададим постоянную на всем интервале множественную оценку

$$V_k = [0{,}0583;\ 0{,}1825].$$

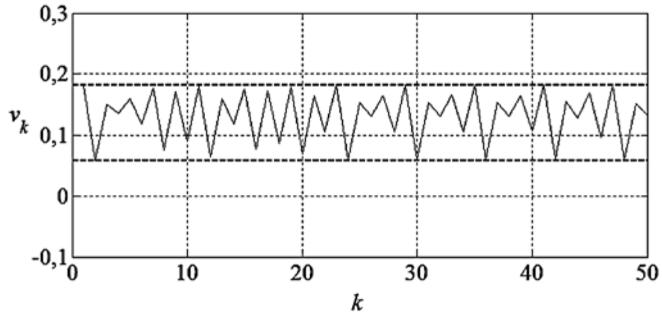

Рис. 4. Ошибки в виде реализации хаотического отображения

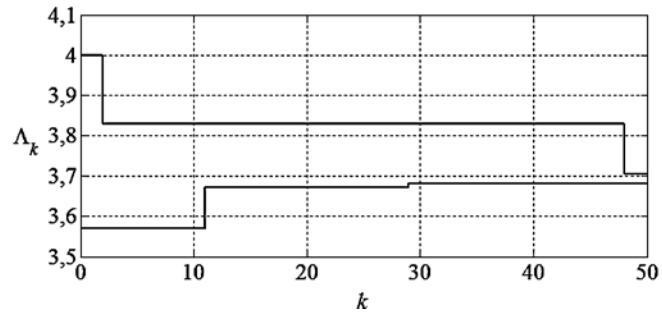

Рис. 5. Множественная оценка параметра

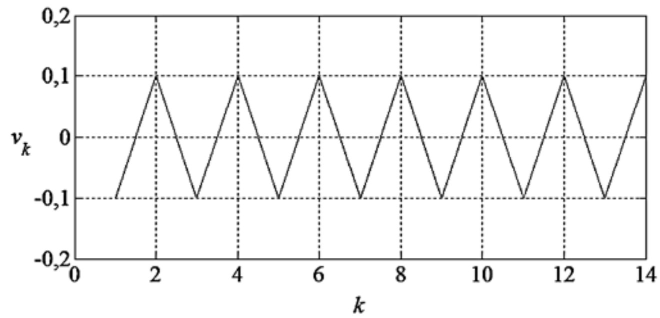

Рис. 6. Реализация ошибок измерений

В данном случае априорную оценку Λ_0 параметра λ удается уменьшить в 18 раз:

$$\Lambda_N = [3{,}6810;\ 3{,}7038].$$

При этом множественная оценка Λ_k параметра λ уточнялась при $k \in \{2,\ 11,\ 29,\ 48\}$ (рис. 5).

3. Полученные выше результаты подтверждают вывод о том, что множественную оценку Λ_k для параметра λ удается уточнить, если реализующаяся ошибка измерений v_k оказывается близкой к одной из границ множества V_k. Рассмотрим реализацию ошибок, значения которых выбираются только на границах множества $V_k = [-\alpha;\ \alpha]$, $\alpha > 0$, например, $v_k = \alpha \cdot \cos\pi k$ (рис. 6). На рис. 7 показаны множественные оценки Λ_k, полученные при $\alpha = 0{,}1$. За 13 шагов получена точная оценка параметра λ. При этом уже при $k = 2$ одна из границ множества Λ_k является истинным значением параметра λ. Расчеты показали, что для данного типа ошибок измерений параметр λ можно найти точно независимо от зна-

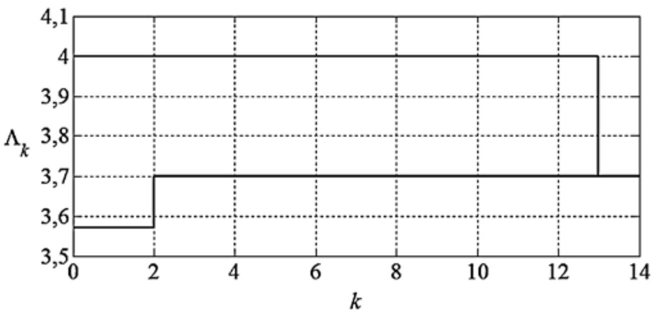

Рис. 7. Множественная оценка параметра

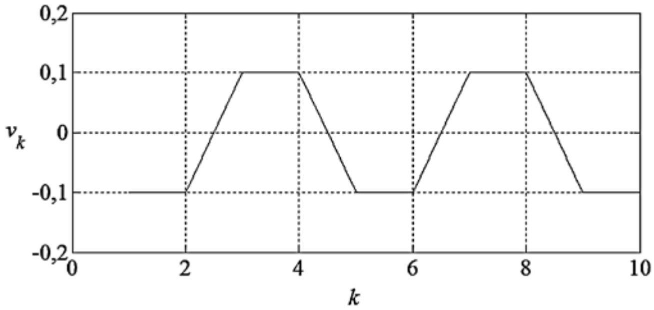

Рис. 8. Реализация ошибок измерений

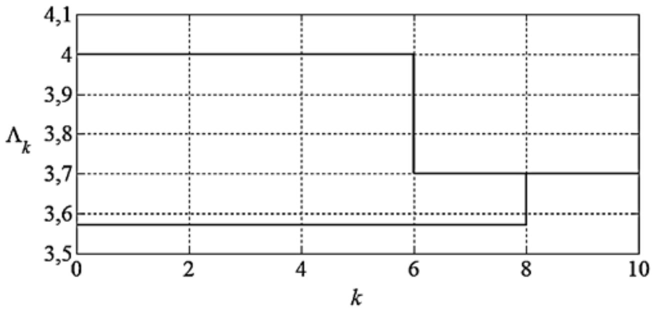

Рис. 9. Множественная оценка параметра

чения α, т. е. при значительно меньшем отношении С/Ш, чем в предыдущих случаях. Число шагов, за которое удается это сделать, зависит от конкретного правила, по которому выбирается значение ошибок на одной из границ множества V_k. Например, если $v_k = \alpha \cdot \cos\pi \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ (рис. 8), то точная оценка будет найдена за 8 шагов (рис. 9).

Заключение

Рассмотренный в работе алгоритм гарантированного оценивания параметра λ хаотического отображения (1) по единственной зашумленной реализации измерений (2) имеет следующие особенности:

- не требуется выдвигать предложений о модели ошибок v_k;
- алгоритм может быть использован при обработке измерений в реальном времени;
- результат работы алгоритма является гарантированным: при корректных исходных данных истинное значение параметра λ принадлежит информационному множеству Λ_k: $\lambda \in \Lambda_k$;
- алгоритм может быть использован для предварительной обработки измерений в целях уточнения множества возможных значений (множества поиска) параметра λ при применении метода наименьших квадратов, что позволяет уменьшить число локальных экстремумов целевой функции и сократить время вычислений при использовании алгоритмов глобальной оптимизации.

Проведенные эксперименты показали, что использование предложенного алгоритма гарантированного оценивания позволяет уменьшить априорное множество поиска параметра λ квадратичного отображения (9) в 14 раз, если ошибки измерений являются реализацией белого гауссовского шума (С/Ш = 12,1 дБ), и в 18 раз, если ошибки являются реализацией хаотического процесса (С/Ш = 12,8 дБ). Для некоторых моделей ошибок возможно за конечное число шагов получить точную оценку параметра λ при значительно меньшем отношении С/Ш.

Список литературы

1. **Колесников А. А., Веселов Г. Е., Колесникова С. И.** и др. Синерго-кибернетический подход к созданию хаосодинамических систем обработки и защиты информации // Информационные технологии. Приложение. 2013. № 10. С. 1—32.
2. **Переварюха А. Ю.** Новый метод компьютерного моделирования режима переходного хаоса // Информационные технологии. 2010. № 2. С. 18—25.
3. **Буланичев В. А., Серков Л. А.** Модельный подход к самоорганизующимся системам с детерминированным хаосом // Информационные технологии. 2006. № 7. С. 48—53.
4. **Никульчев Е. В.** Моделирование систем с нелинейной динамикой на основании экспериментальных данных // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 5. С. 6—14.
5. **Смирнов Д. А., Власкин В. С., Пономаренко В. И.** Метод оценки параметров одномерных отображений по хаотическим временным рядам // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 3. С. 18—26.
6. **Voss H. U., Timmer J., Kurths J.** Nonlinear dynamical system identification form uncertain and indirect measurements // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. V. 14, N. 6. P. 1905—1933.
7. **Садовничий В. А., Козодеров В. В., Ушакова Л. А., Ушаков С. А.** Предсказуемость глобальных и региональных явлений в природе и обществе // Вестник ОГГГГН РАН. 2000. № 1. С. 84—113.
8. **Huang N. E., Shen Z., Long S. R.** et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis // Proc. of the Royal Society of London A. 1998. V. 454. P. 903—995.
9. **Vitanov N. K., Sakai K., Dimitrova Z. I.** SSA, PCA, TDPSC, ACFA: Useful combination of methods for analysis of short and nonstationary time series // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. V. 37, N. 1. P. 187—202.
10. **Чернов В. М.** Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. М.: Физматлит, 2007. 264 с.
11. **Шелудько А. С., Ширяев В. И.** Совместное использование фильтра Калмана и минимаксного фильтра в задаче оценивания параметров модели хаотического процесса // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2012. № 35. С. 59—64.
12. **Тратас Ю. Г.** Применение методов статистической теории связи к задачам приема хаотических колебаний // Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 57—80.

13. **Куржанский А. Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3—26.
14. **Ширяев В. И.** Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника. 2001. № 8. С. 2—5.
15. **Simon D., El-Sherief H.** Hybrid Kalman/minimax filtering in phase-locked loops // Control Engineering Practice. 1996. Vol. 4, N. 5. P. 615—623.
16. **Шелудько А. С., Ширяев В. И.** Алгоритм минимаксной фильтрации для одномерного хаотического процесса // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 5. С. 8—12.
17. **Елсаков С. М., Ширяев В. И.** О многоэкстремальности в задачах оценивания систем детерминированного хаоса // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2009. № 3. С. 37—41.
18. **Banerjee A., Abu-Mahfouz I.** A comparative analysis of particle swarm optimization and differential evolution algorithms for parameter estimation in nonlinear dynamic systems // Chaos, Solitons & Fractals. 2014. V. 58. P. 65—83.
19. **Карпенко А. П.** Популяционные алгоритмы глобальной поисковой оптимизации. Обзор новых и малоизвестных алгоритмов // Информационные технологии. Приложение. 2012. № 7. С. 1—32.

A. S. Sheludko, Engineer of Applied Mathematics Chair, sheludkoas@susu.ac.ru,
V. I. Shiryaev, PhD, Professor, Head of the Chair, vis@susu.ac.ru
South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

The Algorithm of Guaranteed Parameter Estimation for One-Dimensional Chaotic Map

In this article, we consider the problem of parameter estimation from a single noisy realization of one-dimensional chaotic map. Based on the guaranteed approach the proposed algorithm finds the interval estimates of uncertain variables (parameter and state variable). The key features of the algorithm:

1. The a priori information about the measurement errors is presented only as an interval of possible values. It is not necessary to assume the model of measurement errors or its statistical properties.

2. The algorithm is recurring procedure that can be applied in real-time processing.

3. The result of computations is guaranteed: at every time step interval parameter estimate (information set) always contains the true value of the unknown parameter.

4. If the parameter estimation problem is solved by the least squares method, the algorithm can be used to specify the search set for the parameter. It decreases the number of local minimums of the multiextremal cost function.

We present numerical experiments for logistic map and different types of measurement errors.

Keywords: *chaotic map, parameter estimation, guaranteed approach*

References

1. **Kolesnikov A. A., Veselov G. E., Kolesnikova S. I.** et al. Sinergo-kibemeticheskiy podkhod к sozdaniyu khaosodinamicheskikh sistem obrabotki i zashchity informatsii. *Informatsionnye tekhnologii. Prilozhenie*. 2013. N. 10. P. 1—32.
2. **Perevaryukha A. Yu.** Novyy metod komp'yuternogo modelirovaniya rezhima perekhodnogo khaosa. *Informatsionnye tekhnologii*. 2010. N. 2. P. 18—25.
3. **Bulanichev V. A., Serkov L. A.** Model'nyy podkhod к samoorganizuyushchimsya sistemam s determinirovannym khaosom. *Informatsionnye tekhnologii*. 2006. № 7. P. 48—53.
4. **Nikul'chev E. V.** Modelirovanie sistem s nelineynoy dinamikoy na osnovanii eksperimental'nykh dannykh. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2006. N. 5. P. 6—14.
5. **Smirnov D. A., Vlaskin V. S., Ponomarenko V. I.** Metod otsenki parametrov odnomernykh otobrazheniy po khaoticheskim vremennym ryadam. *Pis'ma v ZhTF*. 2005. V. 31, N. 3. P. 18—26.
6. **Voss H. U., Timmer J., Kurths J.** Nonlinear dynamical system identification form uncertain and indirect measurements. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004. V. 14, N. 6. P. 1905—1933.
7. **Sadovnichiy V. A., Kozoderov V. V., Ushakoya L. A., Ushakov S. A.** Predskazuemost' global'nykh i regional'nykh yavleniy v prirode i obshchestve. *Vestnik OGGGGN RAN*. 2000. N. 1. P. 84—113.
8. **Huang N. E.** The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. Proc. of the Royal Society of London A. 1998. V. 454. P. 903—995.
9. **Vitanov N. K., Sakai K., Dimitroya Z. I.** SSA, PCA, TDPSC, ACFA: Useful combination of methods for analysis of short and nonstationary time series. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. V. 37. N. 1. P. 187—202.
10. **Chernov V. M.** Arifmeticheskie metody sinteza bystrykh algoritmov diskretnykh ortogonal'nykh preobrazovaniy. M.: Fizmatlit, 2007. 264 p.
11. **Sheludko A. S., Shiryaev V. I.** Sovmestaoe ispol'zovanie fil'tra Kalmana i minimaksnogo fil'tra v zadache otsenivaniya parametrov modeli khaoticheskogo protsessa. *Vestnik YuUrGU. Seriya. "Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika"*. 2012. N. 35. P. 59—64.
12. **Tratas Yu. G.** Primenenie metodov statisticheskoy teorii svyazi к zadacham priema khaoticheskikh kolebaniy. *Uspekhi sovremennoy radioelektroniki*. 1998. N. 11. P. 57—80.
13. **Kurzhanskiy A. B.** Zadacha identifikatsii — teoriya garantirovannykh otsenok. *Avtomatika i telemekhanika*. 1991. N. 4. P. 3—26.
14. **Shiryaev V. I.** Algoritmy upravleniya dinamicheskimi sistemami v usloviyakh neopredelennosti. *Mekhatronika*. 2001. N. 8. P. 2—5.
15. **Simon D., El-Sherief H.** Hybrid Kalman/minimax filtering in phase-locked loops // Control Engineering Practice. 1996. V. 4, N. 5. P. 615—623.
16. **Sheludko A. S., Shiryaev V. I.** Algoritm minimaksnoy fil'tratsii dlya odnomernogo khaoticheskogo protsessa. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2014. N. 5. P. 8—12.
17. **Elsakov S. M., Shiryaev V. I.** O mnogoekstremal'nosti v zadachakh otsenivaniya sistem determinirovannogo khaosa. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika"*. 2009. N. 3. P. 37—41.
18. **Banerjee A., Abu-Mahfouz I.** A comparative analysis of particle swarm optimization and differential evolution algorithms for parameter estimation in nonlinear dynamic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2014. V. 58. P. 65—83.
19. **Karpenko A. P.** Populyatsionnye algoritmy global'noy poiskovoy optimizatsii. Obzor novykh i maloizvestnykh algoritmov. Informatsionnye tekhnologii. *Prilozhenie*. 2012. N. 7. P. 1—32.