УДК 62-50:519.7/8

В. И. Левин, д-р техн. наук, проф., e-mail: vilevin@mail.ru,
Пензенский государственный технологический университет

Интервально-дифференциальные уравнения и моделирование систем в условиях неопределенности

Рассматривается обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений на интервальный случай. Дается общее понятие интервально-дифференциального уравнения, его порядка, а также решения интервально-дифференциальных уравнений. Описан разработанный подход к решению интервально-дифференциальных уравнений. Доказывается, что любое интервально-дифференциальное уравнение можно свести к системе из двух обычных алгебраических уравнений. Приведен алгоритм решения уравнений.

Ключевые слова: *интервально-дифференциальное уравнение, интервальная производная, система, неопределенность*

Введение

В различных областях науки и техники очень часто встречаются задачи, для решения которых нужно решить одно уравнение или систему уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями. Теория и разнообразные методы решения таких уравнений разработаны весьма подробно [1]. При этом всегда предполагается, что все фигурирующие в уравнениях функции являются полностью определенными. Однако на практике задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений, весьма часто связаны с исследованием неполностью определенных систем. Поэтому в них могут возникать дифференциальные уравнения иного типа. Фигурирующие в них искомые функции являются неполностью определенными. Соответственно этому и производные искомых функций в дифференциальных уравнениях указанного типа оказываются неполностью определенными. Работа является введением в изучение дифференциальных уравнений именно этого типа.

1. Математические основы

Будем использовать в качестве математического аппарата алгебру интервальных чисел [2], интервальный анализ [3] и интервально-дифференциальное исчисление [4].

В алгебре интервальных чисел операции совершаются над замкнутыми интервалами вещественных чисел, определяемыми в виде множеств

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] \equiv \{a | a_1 \leqslant a \leqslant a_2\} \qquad (1)$$

и рассматриваемыми как интервальные числа. Операции $\circ$ определяются как теоретико-множественные обобщения соответствующих операций над вещественными числами

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \circ b | a \in \tilde{a},\, b \in \tilde{b}\}. \qquad (2)$$

Таким образом, алгебраические операции над интервалами — сложение, вычитание, умножение, деление — вводятся в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b | a \in \tilde{a},\, b \in \tilde{b}\};\\ &\tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b | a \in \tilde{a},\, b \in \tilde{b}\};\\ &k \cdot \tilde{a} = \{ka | a \in \tilde{a}\};\ \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{ab | a \in \tilde{a},\, b \in \tilde{b}\};\\ &\tilde{a} / \tilde{b} = \{a/b | a \in \tilde{a},\, b \in \tilde{b}\}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Из определений (3) вытекают следующие формулы для вычисления результатов алгебраических операций над интервальными числами:

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2];\\ &\tilde{a} - \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1];\\ &k \cdot \tilde{a} \equiv k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0,\\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases}\\ &\tilde{a} \cdot \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j} (a_i b_j), \max_{i,j} (a_i b_j)];\\ &\tilde{a} / \tilde{b} \equiv [a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]. \end{aligned} \qquad (4)$$

Объектом изучения интервального анализа являются интервальные функции [3]. Интервальная функция вводится как однозначное отображение множества замкнутых вещественных интервалов

$\{\tilde{x}\}$ вида (1), т. е. $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, на аналогичное множество замкнутых вещественных интервалов $\{\tilde{y}\}$ того же вида, т. е. $\tilde{y} = [y_1, y_2]$. Символически интервальная функция записывается как

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}), \text{ где } \tilde{x} = [x_1, x_2],\ \tilde{y} = [y_1, y_2],$$
$$\tilde{f}(\tilde{x}) = [f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})], \qquad (5)$$

где $\tilde{x}$ называется интервальной независимой переменной (интервальным аргументом), $\tilde{y}$ — интервальной зависимой переменной, $\tilde{f}$ — интервальной функцией, $f_1(\cdot)$ — нижней граничной функцией интервальной функции $\tilde{f}$, а $f_2(\cdot)$ — верхней граничной функцией интервальной функции $\tilde{f}$.

Базовым понятием интервального анализа является понятие предела интервальной функции, которое вводится следующим путем. Независимая интервальная переменная $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ интервальной функции (5) по определению неограниченно приближается к некоторому интервалу $\tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$, если в процессе этого изменения x_1 неограниченно приближается к x_{01}, а x_2 — к x_{02}, или символически

$$(\tilde{x} \to \tilde{x}_0) \equiv (x_1 \to x_{01},\ x_2 \to x_{02}). \qquad (6)$$

Аналогично определяется неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ функции (5) к интервалу $\tilde{y}_0 = [y_{01}, y_{02}]$:

$$(\tilde{y} \to \tilde{y}_0) \equiv (y_1 \to y_{01},\ y_2 \to y_{02}). \qquad (7)$$

При этом если независимая переменная $\tilde{x}$ своим неограниченным приближением к интервалу $\tilde{x}_0$ вызывает неограниченное приближение зависимой переменной $\tilde{y}$ к интервалу $\tilde{y}_0$, мы говорим, что предел интервальной функции (5) при $\tilde{x}$, стремящемся к $\tilde{x}_0$, равен $\tilde{y}_0$, или символически

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{y} = \tilde{y}_0 \text{ или } \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}_0. \qquad (8)$$

Если интервальная функция (5) непрерывна, т. е. нижняя y_1 и верхняя y_2 границы зависимой переменной $\tilde{y}$ — непрерывные функции нижней x_1 и верхней x_2 границ независимой переменной $\tilde{x}$, то предел функции (5) равен значению функции в предельной точке $\tilde{x}_0$ аргумента $\tilde{x}$, или символически

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}_0). \qquad (9)$$

Основным математическим понятием, используемым в данной статье, является понятие интервальной производной функции [3, 4]. Оно вводится на базе понятия обычной производной функции [1] следующим образом. Рассмотрим произвольную интервальную функцию $\tilde{f}$ в виде (5). Будем считать ее непрерывной. Зафиксируем в ней значение независимой переменной $\tilde{x} = \tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$. Этому значению, в силу непрерывности функции, соответствует фиксированное значение функции $\tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Определим приращения независимой и зависимой переменных нашей функции относительно этих фиксированных значений

$$\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \Delta\tilde{y} = \tilde{y} - \tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0) \qquad (10)$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{y}_0)/(\tilde{x} - \tilde{x}_0) =$$
$$= (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x} - \tilde{x}_0). \qquad (11)$$

Предел отношения (11) при неограниченном приближении независимой переменной $\tilde{x}$ к ее фиксированному предельному значению $\tilde{x}_0$, если он существует, называется интервальной производной функцией от исходной интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ (5) в точке $\tilde{x}_0$ и обозначается $\tilde{y}'_{\tilde{x}_0}$ или $\tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$:

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}_0} = \tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}, \qquad (12)$$

где $\Delta\tilde{x}$ и $\Delta\tilde{y}$ определяются формулами (10).

Доказано [3, 4], что для существования в точке $\tilde{x}_0$ интервальной производной (12) от интервальной функции $\tilde{f}$ (5) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки, включая ее саму, значения независимой переменной $\tilde{x}$ функции $\tilde{f}$ были невырожденными интервалами (т. е. интервалами с несовпадающими верхней и нижней границами). Но вырожденность интервала $\tilde{x}$ возможных значений независимой переменной интервальной функции означает его превращение в обычную детерминированную величину. Таким образом, интервальная производная (12) от интервальной функции $\tilde{f}$ (5) существует в любой точке $\tilde{x}_0$, в которой функция $\tilde{f}$ является существенно интервальной по независимой переменной $\tilde{x}$.

Как и в случае обычной производной [1], понятие интервальной производной (12) может быть обобщено путем повторного выполнения операции взятия производной. При этом интервальная производная $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$ из формулы (12) становится производной 1-го порядка, производная от $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$ — производной 2-го порядка $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$, производная от $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$ — производной 3-го порядка $\tilde{y}'''_{\tilde{x}}$ и т. д. Вообще, производная любого n-го порядка $\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}}$ определяется следующим выражением:

$$\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}} = [\tilde{y}^{(n-1)}_{\tilde{x}}(\tilde{x})]',\ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (13)$$

где $\tilde{y}^{0}_{\tilde{x}}$ означает исходную интервальную функцию вида $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, определяемую по формуле (5).

Согласно определениям (12), (13) интервальной производной любого порядка, все эти интервальные производные, как и исходная интервальная функция (5), при любом численном значении аргумента $\tilde{x}$ в виде интервала возможных значений $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ также принимают численное значение в виде интервала возможных значений. Поэтому вычисление интервальной функции и интервальной производной от нее любого порядка заключается в вычислении нижних и верхних границ соответствующих интервалов. Вычисление интервальной функции $\tilde{f}$ выполняется по формуле (5), задающей указанную функцию в виде пары "нижняя f_1 и верхняя f_2 граничные функции". Вычисление интервальной производной любого n-го порядка $\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}} = \tilde{f}^{(n)}(\tilde{x})$ выполняется с помощью следующей формулы, выведенной в [3, 4]:

$$\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}} \equiv [y^{(n)}_{1,\tilde{x}},\, y^{(n)}_{2,\tilde{x}}] = \left[-\frac{2^{n-1}(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^n}, -\frac{2^{n-1}(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^n}\right],$$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2],\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (14)$$

или, по-другому,

$$\tilde{f}^{(n)}(\tilde{x}) \equiv [f^{(n)}_1(\tilde{x}),\, f^{(n)}_2(\tilde{x})] =$$

$$= \left[-\frac{2^{n-1}(f_2(\tilde{x}) - f_1(\tilde{x}))}{(x_2 - x_1)^n}, -\frac{2^{n-1}(f_2(\tilde{x}) - f_1(\tilde{x}))}{(x_2 - x_1)^n}\right],$$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2],\ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (15)$$

где $y^{(n)}_{1,\tilde{x}} = f^{(n)}_1(\cdot)$, $y^{(n)}_{2,\tilde{x}} = f^{(n)}_2(\cdot)$ — нижняя и верхняя граничные функции интервальной производной функции n-го порядка $\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}} = \tilde{f}^{(n)}(\cdot)$ от исходной интервальной функции $\tilde{y} = [y_1, y_2] = \tilde{f}(\tilde{x}) = [f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})]$, задаваемой формулой (5).

Как видно из формул (14), (15), интервальная производная любого n-го порядка, в отличие от обычной производной, выражается в явном виде через независимую $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ и зависимую $\tilde{y} = [y_1, y_2]$, $y_1 = f_1(\tilde{x})$, $y_2 = f_2(\tilde{x})$, переменные исходной интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) = [f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})]$. Эта важная особенность интервальных производных функций принципиально упрощает теорию и методы решения интервально-дифференциальных уравнений.

Условимся в дальнейшем в обозначении интервальной производной $\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}}$ любого порядка n оставлять обозначение точки $\tilde{x}$ только в том случае, когда нас интересует значение производной именно в этой точке, и опускать его, записывая эту производную в виде $\tilde{y}^{(n)}$, в остальных случаях, когда нас интересуют ее значения во всех точках.

2. Основные понятия об интервально-дифференциальных уравнениях

Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, предмет указанной теории — это те задачи, решение которых сводится к решению одного или нескольких уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называются дифференциальными. Более точно, дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков y', y'', ..., $y^{(n)}$. Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, как в нашем случае, дифференциальное уравнение называется обыкновенным. В случае если искомая функция является функцией двух или более независимых переменных, дифференциальное уравнение называется уравнением с частными производными. В данной работе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок старшей производной, которая входит в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения. Таким образом, дифференциальное уравнение n-го порядка имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (16)$$

где $F(\cdot)$ — некоторая функция от переменных в скобках. В частных случаях в уравнение (16) могут и не входить переменные x, y и отдельные производные от функции y порядка ниже, чем n, но это не изменит порядка этого уравнения, который равен n. Например, уравнения $2x + 3y - 4y' = 0$ и $3y - 4y' = 0$ имеют порядок, равный 1, а уравнения $2x + 3y - 4y' + y'' = 0$ и $3y + y'' = 0$ — порядок, равный 2.

Любая функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение (16) обращает его в тождество, называется решением этого уравнения. Например, функция $y = e^x$ является решением уравнения $y - 2y + y'' = 0$, так как она при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Будем теперь рассматривать задачи, решение которых сводится к решению уравнений (одного или нескольких), содержащих интервальные производные искомых интервальных функций, которые были введены в разделе 1. Такие уравнения мы будем называть интервально-дифференциальными. Более точно, интервально-дифференциальным уравнением будем называть соотношение, связывающее независимую интервальную переменную $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, интервальную искомую функцию $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ вида (5) и ее интервальные производные $\tilde{y}', \tilde{y}'', ..., \tilde{y}^{(n)}$. Если искомая интервальная функция является функцией одной независимой интервальной переменной, как в рассматриваемом случае, интервально-дифференциальное уравнение назовем обыкновенным. В случае если искомая интервальная функция является функцией двух или более независимых интервальных переменных, интервально-дифференциальное уравнение назовем уравнением с частными интервальными производными. В этой работе будем рассматривать только обыкновенные интервально-дифференциальные уравнения.

Как и в случае обычных (детерминированных) дифференциальных уравнений (16), порядок старшей производной, которая входит в любое интервально-дифференциальное уравнение, назовем порядком этого уравнения. Таким образом, интервально-дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в следующем общем виде:

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}'', ..., \tilde{y}^{(n)}) = \tilde{a}, \qquad (17)$$

где $\tilde{F}(\cdot)$ — интервальная функция от переменных в скобках; $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ — независимая интервальная переменная; $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ — зависимая интервальная переменная, находящаяся в функциональной зависимости $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ от независимой переменной $\tilde{x}$; $\tilde{y}', \tilde{y}'', ..., \tilde{y}^{(n)}$ — интервальные производные порядка 1, 2, ..., n от интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$; $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ — числовой интервал.

Аналогично случаю детерминированных дифференциальных уравнений (16), в частных случаях в интервально-дифференциальное уравнение (17) могут и не входить интервальные переменные $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и отдельные интервальные производные от функции $\tilde{y}$ порядка ниже, чем n, но это не изменит порядка данного уравнения. Любая интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, которая при подстановке в уравнение (17) обращает его в тождество, называется решением этого уравнения.

Наша задача заключается в нахождении систематического метода и алгоритма решения интервально-дифференциального уравнения (17).

3. Элементы теории интервально-дифференциальных уравнений

Будем называть интервальную функцию алгебраическкской, если она получена путем суперпозиции интервальных алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления (3) над независимыми интервальными переменными указанной функции. Далее будем всегда предполагать, что интервальная функция $\tilde{F}$, связывающая переменные в интервально-дифференциальном уравнении (17), является алгебраической. В этих условиях оказывается справедливой следующая основная теорема.

Теорема. Любое интервально-дифференциальное уравнение вида (17) эквивалентно некоторой системе из двух детерминированных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_1; \\ F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_2, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ — интервальная независимая переменная искомой интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$; $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ — интервальная зависимая переменная указанной интервальной функции; F_1 и F_2 — некоторые детерминированные функции, представляющие собой нижнюю и верхнюю границы интервальной связывающей функции $\tilde{F}$ уравнения (17) (т. е. $\tilde{F} = [F_1, F_2]$).

Доказательство. Согласно предположению, интервальная функция $\tilde{F}$ от переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, ..., $\tilde{y}^{(n)}$ в уравнении (17) является алгебраической. Поэтому она имеет вид суперпозиции элементарных операций над указанными интервальными переменными. В свою очередь, часть указанных интервальных переменных, а именно, производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, ..., $\tilde{y}^{(n)}$ по формуле (15) представляют собой суперпозиции элементарных алгебраических операций над интервальными переменными $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$, где $y_1 = f_1(\tilde{x})$, $y_2 = f_2(\tilde{x})$. Таким образом, интервальная функция $\tilde{F}$ в уравнении (17) в целом может быть представлена в виде суперпозиции элементарных алгебраических операций только над интервальными переменными $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ и $\tilde{y} = [y_1, y_2]$.

Учитывая, что этими элементарными операциями являются сложение, вычитание, умножение и деление, определяемые выражениями (3), и используя формулы (4) для выполнения этих операций, мы получим выражение левой части уравнения (17) в виде интервала, нижняя и верхняя границы которого представляют собой некоторые суперпозиции границ интервальных переменных $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$. Уравнение (17), таким образом, перепишется в явной интервальной форме

$$[F_1(x_1, x_2, y_1, y_2), F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)] = [a_1, a_2], \quad (19)$$

где F_1 и F_2 — некоторые детерминированные функции. Но два интервала равны, только если равны их одноименные границы [2]. Поэтому из (19) получаем эквивалентное ему условие (18). Но условие (19), как следует из приведенного доказательства, эквивалентно уравнению (17). Следовательно, условие (18) тоже эквивалентно уравнению (17), что и требовалось доказать.

Как видно из теоремы, для решения произвольного интервально-дифференциального уравнения (17) следует действовать согласно следующему алгоритму.

Шаг 1. Заменить в уравнении (17) все вхождения интервальных производных $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, ..., $\tilde{y}^{(n)}$ их выражениями (15) через искомую интервальную функцию $\tilde{y} = [y_1 = f_1(\tilde{x}), y_2 = f_2(\tilde{x})]$. В результате интервально-дифференциальное уравнение (17) перейдет в интервально-алгебраическое уравнение с неизвестной переменной $\tilde{y}$.

Шаг 2. Использовать выражения (4) для выполнения элементарных алгебраических операций над интервалами, выразить левую часть получившегося уравнения (17) в виде интервала, нижняя и верхняя границы которого имеют вид суперпозиций (функций) нижних и верхних границ интервальных переменных $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ и $\tilde{x} = [x_1, x_2]$.

Шаг 3. Используя результаты шага 2, представить уравнение (17) в явной интервальной форме (19).

Шаг 4. Приравняв в (19) одноименные границы левой и правой частей, перейти к эквивалентной заданному интервально-дифференциальному уравнению (17) системе двух детерминированных алгебраических уравнений (18).

Шаг 5. Решить систему уравнений (18). Найденное решение этой системы в виде $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ ($y_1 = f_1(\tilde{x})$, $y_2 = f_2(\tilde{x})$), будет также искомым решением интервально-дифференциального уравнения (17).

Заключение

В настоящей статье показана возможность формирования дифференциальных уравнений на базе понятия интервальной производной, т. е. производной от недетерминированной функции, в которой переменные задаются с точностью до интервалов возможных значений. Новые уравнения позволяют моделировать динамику систем с интервальной неопределенностью их функций-характеристик. Главные отличия введенной интервальной производной и основанного на ней интервально-дифференциального исчисления заключаются в том, что производная любого порядка от интервальной функции снова является интервальной функцией, причем она выражается в явном виде через независимую и зависимую переменные первообразной функции. Благодаря этому свойству любое интервально-дифференциальное уравнение (17) легко сводится к эквивалентной системе двух алгебраических уравнений (18), решение которых дает решение исходного уравнения (17).

Список литературы

1. **Фихтентольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1—3. М.: Наука, 2005.
2. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
3. **Левин В. И.** Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления // Онтология проектирования. 2013. № 4 (10). С. 72—85.
4. **Левин В. И.** Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения // Информационные технологии. 2014. № 7. С. 3—10.

V. I. Levin, D. Sc., Professor, e-mail: vilevin@mail.ru, Penza State Technological University

The Interval-Differential Equations and Modelling of Systems in Condition of Uncertainty

The generalization of ordinary differential equations on the interval case is considered. The general concept of interval-differential equation, its order, as well as the solution of interval differential equcations are given. An approach to the solution of interval differential equations is developed. It is proved that any interval-differential equation can be reduced to a system of two ordinary algebraic equations. An algorithm for solving equations is given.

Keywords: *interval-differential equation, interval derivative, system, uncertainty*

References

1. **Fikhtengol'ts G. M.** *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ixhisleniya* (Course of differential and integral calculus). Moscow: Nauka, 2005, vol. 1—3 (in Russian).
2. **Alefel'd G., Khertsberger Yu.** *Vvedenie v interval'nye vychisleniya* (Introduction interval calculations). Moscow: Mir, 1987, 360 p. (in Russian).
3. **Levin V. I.** *Interval'naya proizvodnaya i nachala nedeterministskogo differentsial'nogo ischisleniya* (The interval derivative and the basis of nondeterministic differential calculus), *Ontologiya Proektirovaniya*, 2013, no. 4 (10), pp. 72—85 (in Russian).
4. **Levin V. I.** *Interval'no-differentsial'noe ischislenie i nekotorye ego primeneniya* (Wiping Differential Calculus and its Application), *Informatsionnye Tekhnologii*, 2014, no. 7, pp. 3—10 (in Russian).

УДК 65.011.56 + 658.7

К. В. Дергачев, ассистент каф., e-mail: dergachev.public@mail.ru,
Д. В. Капулин[1], канд. техн. наук, доц., зав. каф., e-mail: dkapulin@sfu-kras.ru,
М. А. Казанцев[2], нач. отд. АСУП, e-mail: mkaz@mail.ru,
[1] Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
[2] Акционерное общество "Научно-производственное предприятие "Радиосвязь", г. Красноярск

Автоматизированная система управления складом уровня цеха для проектного производства

Рассмотрены особенности проектирования и разработки локальной информационно-управляющей системы инструментального склада производственного подразделения на примере предприятия АО "НПП "Радиосвязь". Выполнен анализ складских процессов предприятия, сформированы требования к информационной системе, определено ее место в информационном пространстве предприятия. Реализация системы выполнена с использованием технологий ASP.NET, языков C#, T-SQL.

Ключевые слова: *автоматизация работы склада, управление складом, управление складированием, управление складом подразделения, складская логистика, складские микротранзакции, WMS, ITS*

Введение

Системы управления складом (*WMS — Warehouse Management System*) представляют собой класс широко востребованных промышленностью автоматизированных информационно-управляющих систем, решающих задачи управления и учета товарно-материальных ценностей (ТМЦ). В общем случае системы WMS предназначены для поддержки решения двух категорий задач: задач управления, к которым относятся погрузка, позиционирование, автоматическая комплектация, сортировка, и задач учета ТМЦ, включающих отслеживание перемещения, инвентаризацию и т. п. [1].

Решение задач учета ТМЦ, согласно положениям стандарта *MRP*-II (*Manufacturing Resource Planning*), осуществляется в подсистеме фиксации операций с запасами (*ITS — Inventory Transaction Subsystem*), которая также получила название подсистемы управления складом. Такого рода информационно-управляющие системы предназначены для решения задач автоматизации классического складского учета и тесно связаны с системами и средствами автоматизации учетно-бухгалтерского и финансового классов [2].

Анализ проблемы

Складские модули автоматизированных систем управления ресурсами предприятия (*ERP*-системы) ориентированы на учет запасов в жестко фиксированных местах хранения и складских транзакций (приход-расход). Это является следствием нормативного планирования, выполнения покупных, производственных и распределительных операций, что является основным назначением *ERP*-систем. При этом складские модули, входящие в состав *ERP*-систем, следует отличать от систем *WMS*, отличительным признаком которых является работа с микротранзакциями и физическим перемещением ТМЦ [3, 4].

Программная архитектура *WMS* строится по трехуровневой схеме — человеко-машинный интерфейс (*HMI — Human Machine Interface*), сервер базы данных и обработчик бизнес-логики. Наиболее распространенным вариантом использования систем управления складом является организация складского учета уровня предприятия, однако для задач оперативного планирования особый интерес представляют специализированные разновидности *WMS*, работающие на уровне цехового производства. Такие системы по определению стандарта *MRP*-II должны содержать функции инструментального обеспечения и оперативного управления исполнением производственных заказов [4, 5].

Существующие методы проектирования систем управления складскими запасами и опирающиеся на них проектные решения имеют ряд проблем при попытке внедрения *WMS* или *ITS* на уровне производственного цеха. Как правило, функционал систем управления складом уровня предприятия разрабатывают с учетом централизованного характера хранения ТМЦ. Это подразумевает, что основные операции — хранение, перемещение, учет, сортировка — происходят в пределах склада, а передача ТМЦ (далее под ТМЦ подразумевается инструмент) в производство часто рассматривается как конечная точка в жизненном цикле ТМЦ. Такая точка зрения не соответствует действительности в случае организации учета на уровне производственного цеха при проектном производстве, ориентированном на выпуск мелкосерийной или единичной продукции. В этих условиях *ITS* цехового уровня работает с крупной, изменяющейся от за-